



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
LICENCIATURA EM FÍSICA

ESTUDO DE SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES
COM SOFTWARES MATEMÁTICOS

Abaetetuba - Pará

2017



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
LICENCIATURA EM FÍSICA

Estudo de Sistemas Dinâmicos Não-lineares com Softwares Matemáticos

Débora Cristina de Matos Cardoso

Orientador: Prof. Dr. Manuel Eleutério Rodrigues

Abaetetuba - Pará

2017

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

C268e Cardoso, Débora Cristina de Matos.
Estudo de Sistemas Dinâmicos Não-lineares com Softwares
Matemáticos / Débora Cristina de Matos Cardoso. — 2017.
73 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Manuel Eleutério Rodrigues
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade
Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Curso de
Física, Abaetetuba, 2017.

1. Sistemas Dinâmicos não-lineares. 2. Softwares
matemáticos. 3. Simulações numéricas. I. Título.

CDD 530

Estudo de Sistemas Dinâmicos Não-lineares com Softwares Matemáticos

Débora Cristina de Matos Cardoso

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado e aprovado, para a obtenção do título de Licenciado em nome do curso pelo corpo docente da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba.

Orientador: Prof. Dr. Manuel Eleutério Rodrigues

Banca Examinadora

Prof. Dr. Manuel Eleutério Rodrigues (Orientador)

Prof. Dr. Messias de Souza Costa

Prof. Dr. Gabriel Adolfo Cabrera Pasca

Abaetetuba - Pará

2017

*“À todos que contribuíram
com minha formação
acadêmica”*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer...

- A Deus por todas as oportunidades na vida.
- A minha família pelo carinho e apoio que depositaram em mim.
- Ao meu namorado, Luciano, por estar comigo.
- Ao Professor Dr. Manuel Eleutério Rodrigues pela orientação para a realização deste trabalho.
- A todos os professores que colaboraram na minha formação.
- A turma de física 2013 onde fiz amigos.
- Agradeço ao PIBIC e ao CNPq pelo suporte financeiro concedido.

*“A frase mais excitante que se
ouve na ciência, aquela que
anuncia novas descobertas,
não é Heureka!(Achei!), mas:
Isto é engraçado...”*

Sir Isaac Newton

Resumo

Estudo de Sistemas Dinâmicos Não-lineares com Softwares Matemáticos

Débora Cristina de Matos Cardoso

Orientador: Prof. Dr. Manuel Eleutério Rodrigues

Resumo da Monografia apresentada como parte dos requisitos necessários para a graduação em Licenciatura em Física da Universidade Federal do Pará.

Neste trabalho é feita uma abordagem de sistemas dinâmicos não-lineares com aplicações em sistemas não-lineares que se comportam de forma caótica ou não. O objetivo deste trabalho é observar a dinâmica dos sistemas escolhidos por meio de simulações matemáticas para que possam ser feitos estudos mais completos. Os conceitos utilizados abordam definições sobre espaço de fase, sistema dissipativo, atratores, solução em equilíbrio, estabilidade linear em duas dimensões, ciclos limite, bifurcações e cálculo do expoente de Lyapunov. A aquisição de dados foram obtidos através de pesquisas acadêmicas como livros, artigos e dissertações de interesse e, também, os softwares Maple, Maxima e Mathematica que foram muito úteis para o desenvolvimento dos cálculos e plotagem dos gráficos utilizados no presente trabalho, principalmente nas aplicações. Espera-se que outros trabalhos possam ser desenvolvidos a partir deste para complementar os estudos existentes nesta área, servindo de suporte para mais pesquisas.

Palavras-chaves: Sistemas Dinâmicos não-lineares. Softwares matemáticos. Simulações numéricas.

Abaetetuba Pará

2017

*Abstract*Study of Non-linear Dynamical Systems
with Mathematical Softwares

Débora Cristina de Matos Cardoso

Orientador: Prof. Dr. Manuel Eleutério Rodrigues

Abstract da Monografia apresentada como parte dos requisitos necessários para a graduação em Licenciatura em Física da Universidade Federal do Pará.

In this work we do an approach on non-linear dynamical systems in non-linear systems that behave or not in a chaotic way. The objective of this work is observe the dynamic of the chosen systems by the use of mathematical simulations, for more complete studies. The utilized concepts treats definitions about phase space, dissipative systems, attractors, equilibrium solutions, linear stability in two dimensions, limit cycles, bifurcations and the calculation of the Lyapunov exponents. The data acquisition was made through academic research in books, articles and dissertations of interest and, as well, the Maple, Maxima and Mathematica softwares which were very useful to the development of the calculations and the graphic plots utilized in this present work, principally in the applications. We expect that other works could be developed from this to complement the existing studies in this area, acting as support for more researches.

Keywords: Non-linear dynamical systems. Mathematical softwares. Numeric simulations.

Abaetetuba - Pará

2017

Lista de Figuras

1.1	Representação de um Pêndulo Simples	19
1.2	Oscilador harmônico preso a um carrinho móvel	28
2.1	Gráfico de classificação dos pontos fixos	37
2.2	Retratos de fase originados da equação (2.28)	38
2.3	Retrato de fase	41
2.4	Retrato de fase do sistema (2.40)	43
2.5	Retrato de fase do sistema (2.40)	44
2.6	Retrato de fase do sistema (2.42)	44
2.7	Retrato de fase do sistema (2.43)	45
3.1	Atrator de Lorenz com $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $r = 28$	51
3.2	Expoente de Lyapunov para o atrator de Lorenz.	52
3.3	Representação de um Pêndulo Simples	53
3.4	Representação do Pêndulo Simples	55
3.5	Representação do oscilador hamônico amortecido	57
3.6	Oscilador de Van der Pol com $\alpha = 0.1$	61
3.7	Oscilador de Van der Pol com $\alpha = 10$	62

Sumário

Lista de Figuras	vi
Introdução	9
1 Mecânica Clássica	11
1.1 Mecânica Vetorial	11
1.1.1 Definições	13
1.1.2 A Primeira Lei de Newton	15
1.1.3 A Segunda Lei de Newton	16
1.1.4 A Terceira Lei de Newton	17
1.2 Formalismo Lagrangeano	18
1.2.1 Vínculos e Graus de Liberdade	18
1.2.2 Coordenadas Generalizadas	20
1.2.3 Princípio de D'Alembert: o caso estático	20
1.2.4 O princípio de D'Alembert e as equação de Lagrange	22
1.2.5 Coordenadas Cíclicas	24
1.3 Formalismo Hamiltoniano	25
1.3.1 A Transformada de Legendre	25
1.3.2 As Equações de Hamilton	26
1.3.3 Hamiltoniana versus Energia	27
1.3.4 Espaço de Fase	30
2 Sistemas Dinâmicos	31
2.1 Histórico e definições preliminares	31
2.2 Atratores	32
2.3 Soluções em Equilíbrio	34
2.4 Estabilidade linear em duas dimensões	36
2.5 Ciclos Limite	40

2.6	Bifurcações	41
2.7	Mapa de Poincaré	46
2.8	Expoente de Lyapunov	47
3	Aplicação de sistemas dinâmicos não-lineares	48
3.1	Aplicação do atrator de Lorenz	49
3.2	Expoente de Lyapunov para o Atrator de Lorenz	51
3.3	O Pêndulo Simples	52
3.3.1	Expoente de Lyapunov para o Pêndulo Simples	55
3.4	Osciladores amortecidos	56
3.5	Osciladores de Van der Pol	58
	Considerações Finais	63
	Referências Bibliográficas	64
A	Comandos do Maple e Mathematica	65
A.1	Comandos - Maple	65
A.2	Comandos - wxMaxima	68
A.3	Comandos - Mathematica	69

Introdução

O uso de softwares matemáticos para analisar sistemas dinâmicos é muito comum, isto porque, eles funcionam como ferramentas estratégicas voltadas para a análise e o estudo de diversas áreas como na física, química, economia e engenharia. A utilização desses softwares permite analisar o comportamento dos sistemas, além de auxiliar nos cálculos que devem ser feitos nos trabalhos, pois nem todos são possíveis de se desenvolver analiticamente.

Analisar a dinâmica de sistemas físicos requer o conhecimento de vários parâmetros e suas implicações no sistema. Utilizando a programação de softwares podemos deixar a visualização do fenômeno mais didática. É importante ressaltar que essa ferramenta computacional serve para complementar o estudo de fenômenos físicos e, de forma alguma substitui qualquer conceito ou análise existente na literatura.

De modo geral, na física a utilização do computador de forma inteligente pode ser muito relevante no sentido de promover o pensamento matemático da melhor forma possível. Dessa maneira, o estudo de sistemas dinâmicos lineares e não lineares se torna mais completo. Em sistemas dinâmicos deste tipo podemos observar fenômenos que apresentam um comportamento determinístico, como os estudados em mecânica clássica e, outros que mesmo partindo de um sistema determinístico não se comportam de forma previsível, mas de maneira caótica, como o atrator de Lorenz. Neste caso, deve ser feita uma análise baseada na probabilidade, pois são muito sensíveis às condições iniciais.

A dinâmica de sistemas lineares ou não-lineares pode ser complicada quando queremos levar em conta todos os fatores do sistema. Neste trabalho, o objetivo deste estudo é compreender e realizar análises dos sistemas estudados com auxílio dos softwares Maple e Mathematica. O objetivo de usar mais de um programa foi aproveitar a disponibilidade de pacotes específicos de cada um, assim podemos escolher qual se ajustava melhor a cada caso em que foram necessários.

O objetivo deste estudo visa, então, contribuir de forma significativa nos temas de física relacionados a este assunto e áreas afins, através da utilização de sistemas dinâmicos não-lineares para representação em diagramas, através dos softwares matemáticos já mencionados. Além disso, vamos introduzir conceitos importantes, como atratores, fluxo de fase, pontos fixos, expoente de Lyapunov,

entre outros.

O presente trabalho estrutura-se em três capítulos, apresentando-se no primeiro uma breve abordagem histórica da mecânica e revisão dos formalismo de Newton, de Hamilton e Lagrange. No segundo capítulo foram introduzidas as definições de sistemas dinâmicos para os casos não-lineares, no qual abordamos o fluxo de fase, sistemas dissipativos, o qual nos leva ao conceito de atratores, como ciclos limite, e suas implicações. A formação dos ciclos limites pode ocorrer devido a variação dos parâmetros de controle, fenômeno ao qual denominamos de bifurcações no sistema, além do expoente de Lyapunov, utilizado para estudar a caoticidade do sistema. O terceiro capítulo trata da classificação dos sistemas não-lineares em caóticos ou não caóticos, através dos conceitos definidos no capítulo dois, e da programação de softwares para verificar a dinâmica do sistema.

Mecânica Clássica

1.1 Mecânica Vetorial

No contexto histórico da ciência, a Física se baseava na área de conhecimento chamada de mecânica que é composta pela estática, cinemática e dinâmica. Esta área da Física se utiliza de métodos científicos e da lógica como também da linguagem matemática para compreender os fenômenos da natureza. No entanto, nem sempre foi dessa maneira, por exemplo, na Grécia antiga, na época de Platão e Aristóteles havia um conhecimento sistemático da natureza onde essas ideias se fundamentavam através de observações, ressaltando que essas observações eram definidas de acordo com o conhecimento da época. Nesse período também foram desenvolvidos alguns conhecimentos matemáticos, mas não serviram de modelo científico e nem se tornaram muitos conhecidos [1]. Por exemplo Eudoxus (400-347 a.C.) foi, também, um dos matemáticos mais destacados na época de Platão. No entanto, nenhuma análise do movimento e nem sobre a formulação do conceito de força foi desenvolvido nessa época. De acordo com a opinião de Aristóteles, prevalecente na antiguidade, o céu e a terra estavam muito distante um do outro. O céu era visto como uma entidade superior perfeita e imutável, enquanto que a terra estava sempre sujeita a modificações. Este pensamento foi considerado verdadeiro devido a trajetória das órbitas circulares dos corpos celestes e os movimentos terrenos idealmente retos. É importante ressaltar que as obras de Aristóteles foram de vital importância para o desenvolvimento da mecânica. Quanto às estrelas, elas eram interpretadas sendo essencialmente diferentes da terra, o que dificultou a aceitação da teoria de Nicolau Copérnico (1473-1543) que era sobre o sistema heliocêntrico, o qual afirmava que o Sol estava no centro do universo e não a Terra. A ideia de Copérnico contrariava o Geocentrismo que era aceito desde a antiguidade pela Igreja e pelos teóricos que estudavam a estrutura do Universo. Mas aceitar essa nova ideia significava que os estudos desenvolvidos sobre o universo deveriam ser reformulados. A igreja julgou incorreta a teoria do Heliocentrismo e condenou Copérnico como herege e sua sentença foi a Santa Inquisição. Pode-se perceber que a ciência atrelada a religião ficava limitada à

novas opiniões e, também é muito difícil concordar com uma ideia nova quando existe outra bem solidificada. A física surgiu por um lado do pensamento filosófico sobre a natureza e por outro, de problemas técnicos (como, recursos militares, tráfego, engenharia, mineração). Em particular, a primeira área desenvolvida foi a mecânica, que no começo era meramente estática, estudo dos corpos em repouso. No século XIV, um grupo de uma Universidade em Paris desenvolveram métodos de decomposição e combinação de forças e, estes foram utilizados para resolver problemas de estática. Além disso, o conceito de "trabalho de uma força" foi introduzido, e o trabalho em "deslocamentos virtuais" foi usado corretamente em casos simples. No século XV Leonardo da Vinci (1452-1519) foi um dos principais pesquisadores em mecânica do seu tempo; realizou a decomposição de forças para a investigação de momentos, e também, traçou a lei do paralelogramo de forças de volta para a lei de alavanca. Somente mais tarde, no século XVI, o astrônomo alemão Johannes Kepler presumivelmente realizou a conexão dos movimentos no céu com a física, validando o sistema heliocêntrico, o qual assume que o Sol está no centro do universo e, sendo o responsável pela origem das forças que causam o movimento planetário, ele também, compreendeu o problema estabelecido pelo movimento planetário, no entanto, ele ainda não tinha as ferramentas conceituais e matemáticas para descrever o movimento curvo. A dinâmica dos pontos de massa foi criada no século XVII. Uma vez que é um período muito importante na história da mecânica, foi nesse período que a física começou a ser vista como uma ciência exata, principalmente devido a utilização da linguagem matemática. Além disso, Huygens percebeu que o momento era uma quantidade vetorial, e assim ele conseguiu interpretar de forma correta a lei de conservação de momento, que pode ser vista em seus trabalhos sobre "lei do impacto". Depois disso, Newton publicou a sua obra chamada de "Filosofia Natural dos Princípios Matemáticos" (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*) (1686/87), e sistematicamente mostrou a conexão entre massa, velocidade, momento e força. Nos seus trabalhos ele demonstrou através do exemplo da lei da gravitação como uma força (medida pela mudança do momento) é determinada pelas localizações dos elementos envolvidos e, por fim, aplicou as leis da mecânica ao tratamento do movimento planetário, ele também mostrou como a lei de gravitação segue por indução das leis de Kepler, e como estas leis seguiram dedutivamente a lei da gravitação. Esta descoberta de Isaac Newton representou um progresso muito significativo no ramo da mecânica. Ainda no século XVII, os processos de movimento nos céus e na terra foram descritos de forma consistente. As descobertas feitas no ramo da física chamaram atenção de alguns físicos da época, como foi o caso de Bacon (1561-1626), Jungiu (1587-1657) e Descartes (1596-1650).

Deve ser mencionado que a conclusão formal e o tratamento matemático de mecânica aconteceu

no século XVIII e culminou na mecânica de Lagrange (1736-1813). Dessa forma, a dinâmica avançava de forma significativa, entre esses avanços podem ser citados a interpretação dos processos no céu como fenômenos físicos por Johannes Kepler, a compreensão conceitual de movimentos simples de Galileu Galilei e os esclarecimentos sobre os novos conceitos por Huygens e Isaac Newton [1].

1.1.1 Definições

Nesta subseção, serão abordados os conceitos elementares relevantes da mecânica usados nas teorias de Isaac Newton (1643-1727). Essas definições são importantes para o estudo das três Leis de Newton que serão estudadas na subseção 1.1.2 a 1.1.4.

- **Sistema Inercial de Referência**

Para fazer a descrição do movimento de um corpo é preciso que se adote um referencial inercial. A escolha correta de um referencial é muito importante na descrição do movimento, pois evita que as leis de movimento apresentem formas complexas, mesmo para os sistemas simples. Isso indica que para cada referencial adotado existe uma forma de representá-lo, de acordo com as leis da mecânica.

Para um sistema no qual a não uniformidade do tempo podem existir diferentes posições ou direções dependendo do referencial escolhido, ou até mesmo os instantes do tempo não serem equivalentes do ponto de vista das leis da mecânica, o mesmo é válido para um corpo que não esteja interagindo com outro. Se cada elemento mencionado do espaço for levado em consideração a análise do movimento de um corpo fica complicada. Por isso, dentre várias possibilidades, opta-se, sempre que possível por aquele sistema de referência que leva as leis da mecânica às formas mais simples. Entretanto, de acordo com o conceito de espaço e do tempo de Newton, que serão tratados nos tópicos seguintes destas definições, sempre é possível encontrar um sistema de referência onde o espaço é homogêneo e isotrópico e o tempo é uniforme, ou seja, todas as posições as direções e os instantes são equivalentes. Esse sistema de referência é denominado de *referencial inercial* ou *galileano*. Se considerarmos *um outro referencial animado de um movimento retilíneo e uniforme em relação ao primeiro*, experiências mostram a que as leis do movimento são totalmente equivalentes nos dois referenciais, isto é, não é possível distinguir um referencial do outro por meio de qualquer experimentação ou observação do movimento. Nesses referenciais as equações matemáticas, que regem as leis do movimento, tem as mesmas formas. Assim, existe uma infinidade de referenciais

inerciais de movimento retilíneo uniforme um em relação ao outro. *Em qualquer referencial inercial, as propriedades do espaço e do tempo são as mesmas, assim como todas as leis da mecânica.* Esta afirmação constitui o que se chama *Princípio da Relatividade de Galileu* que é um dos mais importantes da Mecânica Clássica [2]. Em condições ideais pode-se definir o conceito de referencial inercial sendo aquele em relação a um corpo que esteja afastado de qualquer outro, permanece em repouso ou em movimento retilíneo com velocidade constante.

- **Força**

Força é uma ação impressa a um objeto que visa mudar seu estado de movimento, mas é importante ressaltar que a ação gerada por uma força não gera necessariamente uma deformação ou mudança de movimento. O conceito pode ser pensado como intuitivo e um dos problemas da Física é descobrir quais as forças que atuam em determinado corpo e como elas se comportam em função dos diversos parâmetros do problema. A força eletrostática entre dois objetos carregados, por exemplo, depende diretamente da quantidade de carga em cada um deles e do inverso do quadrado da distância que os separa. No caso de uma mola ideal, a força aumenta linearmente com a distensão provocada. Assim, forças genéricas podem ser medidas por comparação com uma mola padrão através da medida da distância que esta deve ser distendida para compensar a força a ser medida. É importante ressaltar que a aplicação de uma força, em muitos casos, resulta na aceleração do corpo [2].

- **Massa**

A quantidade de matéria é uma medida da mesma, resultante da densidade e do volume do corpo. É a propriedade que relaciona uma força que age sobre o corpo à aceleração resultante. É importante ressaltar que essa medida mede a inércia de um corpo [3].

- **Tempo**

No desenvolvimento de teorias da ciência foram adotados conceitos primitivos de tempo, apesar de não existir uma definição precisa. Devido a necessidade de medi-lo, foram realizadas observações de fenômenos periódicos. O relógio foi construído para medir o tempo, teve seu princípio de funcionamento baseado em fenômenos repetitivos, por exemplo, o nascer e o se pôr do Sol são eventos consecutivos que definem a duração de um dia. Na mecânica Newtoniana o tempo é tratado como absoluto e uniforme, e sua medida é feita através de um relógio padrão o qual adota uma unidade padrão do tempo, sendo o segundo (s) que é equivalente a 9.192.631.770 períodos da radiação correspondente à transição característica do Césio 133 [2].

- **Espaço**

Segundo a mecânica clássica o espaço é absoluto, homogêneo e isotrópico. Estes adjetivos para o espaço significam que a medida de distância independem do estado do observador, da posição absoluta desses dois pontos no espaço e nem de sua orientação. As medidas de distância podem ser feitas por comparação com um bastão de um metro, no entanto, não é possível aplicar este procedimento. Em vista disso, pode ser usado o método da triangulação baseado na geometria de Euclides. A padronização do *metro* surgiu após a Revolução Francesa onde foi definido como sendo a fração $1/10.000.000$ da distância do Equador ao Pólo Norte, ao longo do meridiano de Paris. A princípio foi utilizado para ser usado na área da navegação e da cartografia da época. Em 1889, a definição de metro foi alterada com a intenção de deixar mais precisa na medida da distância. Em 1960, o metro foi redefinido como $1.650.763,73$ comprimentos de onda no vácuo da radiação característica do Criptônio 86 (Kr^{86}). Esta definição é mais precisa e satisfatória, na prática, as reproduções do metro com alta precisão continuam sendo baseadas neste método. Finalmente, em 1983, o padrão de comprimento foi substituído por um padrão de velocidade onde foi escolhido a constante universal que é a *velocidade da luz no vácuo* com valor de $c = 299.792.458 m/s$, mantendo a unidade de tempo baseado no relógio atômico. Desta forma, a definição do metro é feita de acordo com a definição do segundo como sendo a distância percorrida pela luz em $1/c$ segundos [2].

1.1.2 A Primeira Lei de Newton

Antes da formulação da mecânica de Isaac Newton, acreditava-se que para um corpo manter o seu movimento com velocidade constante, era necessário a influência de uma força, e que um corpo era encontrado em seu estado natural apenas em situação de repouso. Para afirmar que um corpo se desloca com velocidade constante, deveria ser necessário a atuação direta de alguma força, caso contrário, o corpo pararia, ou seja, tenderia para o seu estado natural. A validação dessa ideia, pode ser representada por um disco de metal que desliza em uma superfície horizontal de madeira, após um impulso, constata-se que, o disco diminui de velocidade até parar e, para que continue o movimento ele deve receber a aplicação de uma força contínua. No entanto, se o mesmo disco for lançado em um ringue de patinação, ele percorrerá uma distância maior antes de parar. Outra situação, seria colocar o disco de metal em uma superfície, na qual o disco não iria diminuir de velocidade, uma superfície sem atrito. Neste tipo de superfície o corpo manterá o seu estado de movimento com velocidade constante se nenhuma força atuar sobre ele. Assim, podemos concluir que, em condições

ideais, o corpo tende a manter o seu estado de movimento sem a atuação de forças externas. Dessa maneira, define-se a primeira lei:” todo corpo persevera em seu estado de repouso, ou de movimento retilíneo uniforme, a menos que seja compelido a mudar seu estado por forças externas aplicadas” [3]. A lei da inércia tem como objetivo definir uma classe de sistemas de referenciais inerciais, onde a segunda lei poderá ser aplicada. É importante salientar que, a primeira lei, não é válida para todos os referenciais. Os referenciais válidos para esta lei são os chamados referenciais inerciais. O planeta Terra não é um referencial inercial, no entanto, o movimento de rotação que a Terra realiza, em torno de seu eixo influencia muito pouco nos movimentos do cotidiano.

1.1.3 A Segunda Lei de Newton

A primeira lei de Newton diz o que acontece quando as forças que atuam sobre o corpo se anulam. Na segunda lei, o conceito de força se torna mais significativo. A força resultante, da segunda lei, é a dada pela (1.1), mas esta equação não define todo o conceito físico de força. As forças que atuam sobre uma partícula emergem de sua interação com outras partículas e são dadas por leis de forças que definem a força da lei de Newton, de acordo com a situação da partícula. A segunda lei descreve e prevê a evolução do movimento de uma partícula isolada sujeita a uma força resultante, em relação a um referencial inercial. É importante enfatizar que a segunda lei não abarca a primeira lei. Esta última, define um referencial inercial, onde a segunda lei é válida [2]. A força que age sobre uma partícula de massa m , gera uma aceleração nesse corpo que pode ser expressa pela equação

$$\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}} = m\ddot{\mathbf{r}}. \quad (1.1)$$

A massa inercial m , é uma característica implícita da 2ª lei; uma vez que uma força conhecida atua sobre uma partícula, o mesmo valor de massa será empregado para descrever o movimento da partícula sob qualquer outra força. Essa grandeza escalar não depende da posição ou velocidade da partícula, desde que, a massa da partícula não varie com o tempo. Nessa equação, \mathbf{F} denota o vetor soma de todas as forças que agem sobre a partícula e o vetor \mathbf{a} é a aceleração da partícula

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}}, \quad (1.2)$$

$$\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}. \quad (1.3)$$

Neste caso, \mathbf{v} indica a velocidade da partícula, e insere a notação de derivada em relação a t , como em $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ e $\dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$. A segunda lei pode ser explicada em termos do momento da partícula, dessa

forma, sabendo da definição de momento, onde

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (1.4)$$

A expressão (1.1) pode ser escrita na forma:

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}, \quad (1.5)$$

onde esta equação define a segunda lei de Newton, a qual representa a soma vetorial de forças distintas que atuam em uma partícula, sendo denominada de força resultante

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (1.6)$$

onde \mathbf{F} é resultante de todas as forças que atuam na partícula e \mathbf{p} é o movimento da partícula. Com esta expressão, a segunda lei pode ser aplicada, também, nos casos que a massa não é constante. Onde a força resultante é a taxa de variação temporal do momento.

1.1.4 A Terceira Lei de Newton

Nas duas primeiras leis, foi considerada uma partícula isolada sob a ação de uma força resultante \mathbf{F} . A terceira lei de Newton, também conhecida como o princípio da ação e reação, é aplicada em condições ideais quando duas partículas distintas interagentes estão isoladas. Essa ação e reação são sempre aplicadas em partículas diferentes. A terceira lei de Newton afirma que “A cada ação existe uma reação de mesma direção, mesma magnitude e de sentido contrário” [4]. Em notação vetorial

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}, \quad (1.7)$$

onde o sinal negativo implica que as forças apresentam sentidos opostos. A interação de duas partículas isoladas resultou em uma consequência importante, à terceira lei de Newton, e também a lei de conservação da quantidade de movimento total. A quantidade de movimento é também conhecida como momento linear e sua lei de conservação do momento pode ser estendida para sistemas que assumam a forma da equação $\mathbf{F}_{12} = d\mathbf{p}_1/dt = \mathbf{0}$. Onde \mathbf{F}_{12} é a força exercida sobre a partícula 1 pela partícula 2 e \mathbf{p} é o movimento da partícula 1.

Apesar das leis de Newton serem muito útil no estudo da mecânica, não foi possível aplicar essa teoria em todos os tipos de sistemas, por exemplo, os corpos que se movem muito próximo da velocidade da luz ou, também, quando envolve forças eletromagnéticas, pois neste caso deve-se considerar a relatividade da interação entre partículas, onde a terceira lei é um caso de interação

instântanea e não vale para essas interações com propagação infinita. Apesar da terceira lei falhar em muitos casos, a lei da conservação do momento total sempre é válida, desde que convenientemente generalizada.

1.2 Formalismo Lagrangeano

Em 1788 o matemático italiano Joseph Louis Lagrange desenvolveu um novo método o chamado formalismo Lagrangeano. Com esta técnica é possível calcular o futuro estado da partícula sem a necessidade de identificar as forças de vínculo do sistema. As forças de vínculo limitam o número de coordenadas necessárias para descrever o movimento do sistema dinâmico como será mostrado na subseção 1.6. Por exemplo, um sistema genérico com N partículas interagentes de coordenadas cartesianas $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$. Essas partículas estarão sujeitas a duas categorias de vínculos: Vínculos Holonômicos e os Vínculos Não-Holonômicos exposto na seção 1.6, dependendo da origem do vínculo não é possível encontrar a trajetória do sistema aplicando a segunda lei de Newton. O formalismo Lagrangeano pode ser pensado como uma remodelação da segunda lei de Newton, onde os vínculos são tratados de forma mais simples. Assim, para deduzir as equações de Lagrange pode ser usada a segunda lei de Newton e o *deslocamento virtual* formulado pelo físico francês Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783), para eliminar as forças de vínculo das equações de movimento. Outra alternativa para deduzir essas equações seria a utilização do Princípio Variacional de Hamilton. Esta última não será abordada neste trabalho, mas pode ser consultada na referência [5] para mais esclarecimentos.

1.2.1 Vínculos e Graus de Liberdade

Na formulação de Lagrange não podemos deixar de falar dos tipos de vínculos, que são restrições impostas para que o movimento ocorra. Os vínculos mais comuns são aqueles dados por superfícies que restringem o movimento de partículas. Como já foi mencionado anteriormente estes vínculos podem apresentar origens distintas que são classificados em duas categorias:

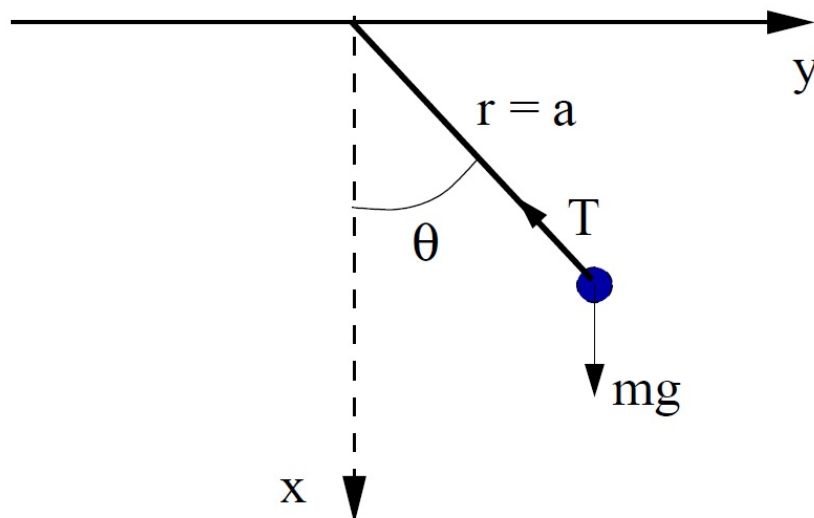


Figura 1.1 – Representação de um Pêndulo Simples

O pêndulo simples. A força de vínculo é a tensão no fio, que mantém a partícula a uma distância fixa $r = a$ da origem.

Fonte: Tópicos de Mecânica Clássica [3]

os vínculos Holonômicos, que é o nosso caso, são aqueles que podem ser expressos em termos de funções do tipo $f(r_1, r_2, r_n, \dots, t) = 0$, onde f é uma função com derivadas contínuas, r representa a posição das partículas e t o tempo, ou seja, sistemas cujos vínculos dependem apenas da posição e do tempo. Os vínculos Não-Holonômicos são aqueles que não podem ser expressos dessa forma, por exemplo, as paredes de um recipiente esférico de raio a onde encontram-se confinadas as moléculas de um gás. Nesse caso os vínculos são $r_i < a$. A existência de vínculos no sistema introduz a dependência das coordenadas de posição r_i , e a não identificação das forças de vínculo a princípio. Para um sistema com K vínculos holonômicos, pode-se usar as K equações dependentes da posição e do tempo para eliminar as k variáveis. As variáveis independentes $n = 3N - k$ são o número de *graus de liberdade*. Desse modo, há duas opções para resolver este problema o primeiro seria usar n das $3N$ coordenadas cartesianas ou introduzir n novas variáveis q_1, q_2, \dots, q_n que são o número de variáveis escalares necessárias para definir o estado do sistema. Esses tipos de variáveis são chamadas de *coordenadas generalizadas*, para mais esclarecimentos este tópico será o foco do próximo item.

1.2.2 Coordenadas Generalizadas

De modo geral, nos sistemas físicos são encontradas condições de vínculos que delimitam algumas posições e velocidades das partículas no sistema mecânico, dessa forma, o número de coordenadas que descrevem o sistema mecânico são reduzidas. Um sistema holonômico com N partículas as quais descrevem um movimento do tipo $f(r_1, r_2, \dots, r_n, t)$, e utilizando essas equações podemos eliminar as variáveis dependentes do sistema. O número de variáveis independentes $n = 3N - k$ é o número e *graus de liberdade*. Os vínculos Holonômicos são importantes, pois através deles o número de graus de liberdade pode ser reduzido. Em sistemas mecânicos que estejam sujeitos a esse tipo de vínculo podem ser inseridas n variáveis independentes q_1, q_2, \dots, q_n . Como já foi dito anteriormente estas são as coordenadas generalizadas. Estas coordenadas serão funções de coordenadas cartesianas e, possivelmente, também do tempo no caso de um sistema de coordenadas cartesianas em movimento. Para escrever as coordenadas originais do sistema do sistema e termos das coordenadas generalizadas:

$$r_1 = r_1(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (1.8)$$

$$r_n = r_n(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (1.9)$$

No exemplo do pêndulo plano, figura (1.1), as coordenadas cartesianas da partícula são x e y . Em termos de coordenadas polares a equação de vínculo é $r = a$ e basta θ para especificar sua posição. A transformação nesse caso é

$$x = a \cos(\theta) \quad (1.10)$$

$$y = a \sin(\theta) \quad (1.11)$$

Como temos apenas uma coordenada para definir a posição, este sistema tem 1 grau de liberdade com coordenada generalizada $q = \theta$.

1.2.3 Princípio de D'Alembert: o caso estático

O princípio de D'Alembert, ou também conhecido como princípio do trabalho virtual, utiliza a ideia de coordenadas generalizadas e o conceito de deslocamento virtuais com a finalidade de eliminar as forças de vínculo da descrição do problema. A priori isso será mostrado para o caso estático, onde o objetivo é verificar as configurações do sistema, e depois essa ideia será aplicada na dinâmica. Nesse formalismo, é muito importante diferenciar o que são as forças de vínculo das outras forças presentes no sistema, estas últimas serão denominadas de *forças aplicadas*. Seja então

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{f}_i \quad (1.12)$$

onde \mathbf{F}_i é a força total na i -ésima partícula do sistema, $\mathbf{F}_i^{(a)}$ são as forças aplicadas, que podem ser externas ou devido às outras partículas do sistema e \mathbf{f}_i são as forças de vínculos. O *deslocamento virtual* no sistema é definido como uma pequena variação $\delta\mathbf{r}_i$ que passa em um diminuto intervalo de tempo na posição das partículas de modo que não os vínculos, de modo matemático podemos dizer que o trabalho realizado pelas forças de vínculo \mathbf{f}_i seja nulo:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0. \quad (1.13)$$

Existem dois tipos de deslocamentos: os reais $d\mathbf{r}_i$, são aqueles que podem acontecer no sistema, e os virtuais $\delta\mathbf{r}_i$ que não ocorrem no sistema, pois para estes deslocamentos o intervalo de tempo está estagnado. Usando as transformações (1.10) para coordenadas generalizadas temos

$$d\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} dt \quad (1.14)$$

enquanto que

$$\delta\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (1.15)$$

Aqui serão tratados apenas situações de equilíbrio, no qual $\mathbf{F}_i = 0$. Então, utilizando (1.15) temos

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \quad \text{sendo} \quad \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{f}_i$$

fazendo a distribuição com o deslocamento virtual temos

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta\mathbf{r}_i + \mathbf{f}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i) = 0$$

lembrando que o trabalho realizado pelas forças de vínculos no sistema é nulo, obtemos como resultado

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \quad (1.16)$$

É possível observar que as forças de vínculo foram eliminadas da equação de equilíbrio. Mas devido aos vínculos, os deslocamentos virtuais são dependentes e essa equação não implica em $\mathbf{F}_i^{(a)} = 0$. De fato, a condição de equilíbrio é $\mathbf{F}_i^{(a)} = -\mathbf{f}_i$. Usando a equação (1.15) obtemos

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0$$

ou ainda

$$\sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j = 0 \quad (1.17)$$

onde

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (1.18)$$

onde Q_j são as forças generalizadas. Essas coordenadas são independentes, desse modo a condição de equilíbrio pode ser escrita na forma $Q_j = 0$, assim, essas forças podem ser resolvidas sem o conhecimento das forças de vínculo.

1.2.4 O princípio de D'Alembert e as equação de Lagrange

Para descrever a dinâmica do sistema sem presença explícita das forças de vínculo será usado o princípio de D'Alembert, onde o ponto de partida para descrever essa dinâmica é a segunda lei de Newton, escrita na forma

$$\mathbf{F}_i = m_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i, \quad (1.19)$$

Usando (1.14) temos

$$\mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{f}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = 0, \quad (1.20)$$

sendo o trabalho virtual das forças de vínculo nulo, podemos multiplicar tudo por deslocamentos virtuais, somando sobre i , resultando

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i^{(a)} - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (1.21)$$

O primeiro termo dessa equação já foi calculado na subseção anterior onde o resultado foi a equação (1.17). Para o segundo termo ser escrito em termos de coordenadas generalizadas, serão necessários quatro resultados preliminares:

- Derivando $r_1 = r_1(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ em relação ao tempo, obtendo

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (1.22)$$

Dessa maneira, pode-se observar que $\dot{\mathbf{r}}_i$ é função das coordenadas generalizadas $q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$.

Além disso, a seguinte condição é verdadeira

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad (1.23)$$

- A seguinte relação é válida

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}. \quad (1.24)$$

Para demonstrá-la, calcula-se cada lado da equação

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_j}, \quad (1.25)$$

e

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) = \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t}, \quad (1.26)$$

onde as variáveis q_k e \dot{q}_k São tratadas como independentes.

- Usando a regra elementar $2f(x)\partial f(x)/\partial x = (\partial/\partial x)f^2(x)$ pode-se escrever

$$\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}, \quad (1.27)$$

onde T é a energia cinética do sistema

- Usando a mesma regra elementar.

$$\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) = \frac{\partial T}{\partial q_j}, \quad (1.28)$$

O segundo termo da equação de D'Alembert pode ser escrito da forma

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (1.29)$$

$$\sum_{i,j} \left\{ \frac{d}{dt} \left[m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right] - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right\} \delta q_j, \quad (1.30)$$

Usando a primeira e a segunda condição. resulta em

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i,j} \left\{ \frac{d}{dt} \left[m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right] - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \right\} \delta q_j, \quad (1.31)$$

Usando ainda a terceira e quarta condição, resulta

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\}. \quad (1.32)$$

Após as transformações das $3N$ coordenadas equivalentes à segunda lei de Newton, usando o resultado de [3], obtém-se

$$\sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0. \quad (1.33)$$

Como os δ_{q_j} são independentes as seguintes n equações devem ser satisfeitas

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (1.34)$$

Para $j = 1, 2, \dots, n$. Assim, foi obtida a primeira forma das equações de Lagrange, que envolve a energia cinética e as forças generalizadas. Para o caso em que as forças aplicadas são conservativas, tem-se

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(a)} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \nabla_i V \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad (1.35)$$

que pode ser escrita, assim

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) = 0. \quad (1.36)$$

Caso o potencial e as forças forem independentes das velocidades generalizadas, de modo que, a derivada do potencial em relação a velocidade generalizada seja nula, assim, as equações [3] podem ser escritas ainda como

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) = 0, \quad (1.37)$$

ou

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (1.38)$$

onde $L = T - V$ é a função Lagrangeana, que deve ser escrita em termos das coordenadas e velocidades generalizadas.

1.2.5 Coordenadas Cíclicas

Para a Lagrangeana do tipo

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - V(r_1, \dots, r_n) \quad (1.39)$$

A derivada em relação à velocidade que aparece nas equações de Lagrange tem um significado simples

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = m \dot{x}_k, \quad (1.40)$$

é o momento da k-ésima partícula na direção x . Então pode-se definir o momento generalizado da partícula

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \quad (1.41)$$

conjugado à coordenada generalizada q_k . Por exemplo, uma Lagrangeana de uma partícula sujeita a campos eletromagnéticos externos. Para

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - e\phi + e\dot{\mathbf{r}} * \mathbf{A}, \quad (1.42)$$

obtendo $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} + e\mathbf{A}$, que apresenta uma parte mecânica e uma parte correspondente ao campo. Supondo que a Lagrangeana de um sistema com n graus de liberdade seja tal que a coordenada q_k não apareça explicitamente em L , dessa forma,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \equiv \frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0. \quad (1.43)$$

Como a variável q_k está implícita ela é denominada cíclica e o seu momento conjugado é uma constante de movimento [6].

1.3 Formalismo Hamiltoniano

Como vimos na seção anterior, as equações de Lagrange para um sistema com n graus de liberdade constituem um conjunto de $2n$ equações diferenciais ordinárias de segunda ordem no tempo para as coordenadas generalizadas. O movimento do sistema é univocamente determinado desde que $2n$ condições iniciais sejam especificadas, a saber, os valores de todos os q_i e \dot{q}_i num determinado instante. Desta forma este movimento pode ser representado geometricamente por uma curva traçada no espaço de fase, cujas coordenadas são q_1, \dots, q_n . [6].

Em 1833 o matemático irlandês Willian Rowan Hamilton desenvolveu um novo método denominado de formalismo Hamiltoniano. Este modelo de Hamilton é uma reformulação da mecânica clássica de Newton, e teve origem na mecânica Lagrangeana, vista na subseção 1.5 deste trabalho. Este formalismo transforma equações diferenciais de segunda ordem no tempo em $2n$ equações diferenciais ordinárias de primeira ordem no tempo para duas variáveis independentes q e p . Como veremos nas seções seguintes essas equações de primeira ordem, equações de Hamilton, podem ser obtidas a partir das equações de Lagrange utilizando uma *transformação de Legendre*. As equações de Hamilton se baseiam na Hamiltoniana assim como as equações de Lagrange se baseiam na Lagrangeana. Essa função pode ser interpretada como a energia do sistema, como nós veremos a seguir.

1.3.1 A Transformada de Legendre

Adrien-Marie Legendre (1752-1833) foi um matemático francês transformada de Legendre pode ser demonstrada por um exemplo bidimensional. Seja $f(x, y)$ transformada para a função $g(x, u) =$

$g(x, \partial f/\partial y)$:

$$f(x, y) \Rightarrow g(x, u) \quad \text{com} \quad u = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Então $g(x, u)$ é definida por

$$g(x, u) = uy - f(x, y)$$

Calculando a diferencial de $f(x, u)$ para substituir em $g(x, u)$, resulta em

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx - \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

e

$$\begin{aligned} dg &= ydu + udy - df \\ &= ydu + udy - \frac{\partial f}{\partial x} dx - \frac{\partial f}{\partial y} dy \\ &= ydu - \frac{\partial f}{\partial x} dx \end{aligned}$$

onde $y = \partial g/\partial u$ e $\partial g/\partial x = -\partial f/\partial x$.

1.3.2 As Equações de Hamilton

Para definir a função Hamiltoniana foi mostrada a transformação de Legendre, que consiste, basicamente, na substituição das velocidades generalizadas pelos momentos canônicos como variáveis, dessa maneira, a função hamiltoniana $H(q, p, t)$ assume a seguinte forma

$$H(q, p, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t). \quad (1.44)$$

Observando essas equações de movimento a qual são equivalentes para as equações de Lagrange, pode-se escrever a diferencial total na forma.

$$dH = \sum_i p_i d\dot{q}_i + \sum \dot{q}_i dp_i - dL. \quad (1.45)$$

A diferencial total da Lagrangeana é

$$dL = \sum \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (1.46)$$

Utilizando a definição de momento generalizado, $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$, e a equação de Lagrange na forma $dp/dt - \partial L/\partial q_i = 0$ e inserindo ambos na equação (1.42)

$$dL = \sum \dot{p}_i dq_i + \sum p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (1.47)$$

Fazendo a substituição de dL em dH

$$dH = \sum p_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i - \sum \dot{p}_i dq_i - \sum p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (1.48)$$

Onde o primeiro e quarto termo serão cancelados, resultando

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (1.49)$$

Por essa razão, H depende unicamente de p, q e t ; desta forma, $H = H(q, p, t)$, então

$$dH = \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (1.50)$$

Igualando os termos que multiplicam a mesma diferencial, obtém-se as equações de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (1.51)$$

Essas são as equações fundamentais do movimento desta formulação da mecânica. O Hamiltoniano desempenha um papel central, semelhante a Lagrangeano na formulação de Lagrange da mecânica. Este Hamiltoniano H é construído de acordo com a (1.40); mas com a prescrição que todas as velocidades \dot{q}_i são expressas pelo momento generalizado p_i e as coordenadas generalizadas q_i através de (1.34).

1.3.3 Hamiltoniana versus Energia

Na equação $\partial H/\partial t$ é possível analisar que se a função de Lagrange não depende do tempo explicitamente, a função hamiltoniana não dependerá do tempo explicitamente e funcionará como constante. Em alguns casos o hamiltoniano representa a energia do sistema e pode ser conservado, mas essas são propriedades independentes. Para explicar melhor essas propriedades será usado um exemplo [8] onde é aplicada uma força num carrinho de forma que ele mantém sua velocidade constante v_0 . Em cima do carrinho é colocada uma massa m que oscila e está presa em uma mola de constante elástica k , figura 1.2. De acordo com o sistema de referência fixo no chão, a massa m ocupa a posição x , e a distensão da mola é $y = v_0 t - x$. A Lagrangeana é dada por

$$L(\dot{x}, x, t) = T - V = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} (v_0 t - x)^2. \quad (1.52)$$

A equação de movimento será $m\ddot{x} = -k(x - v_0 t)$ e a solução é

$$\dot{x}(t) = A \cos(\omega t + \phi) + v_0 t, \quad (1.53)$$

onde $\omega = \sqrt{k/m}$. A solução da equação de movimento corresponde àquela no referencial de repouso do carrinho somada ao seu deslocamento. Como a Lagrangeana é uma função puramente quadrática, então a função hamiltoniana pode ser escrita da seguinte forma

$$H(x, p_x, t) = T + V = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{k}{2m}(v_0 t - x)^2 \quad (1.54)$$

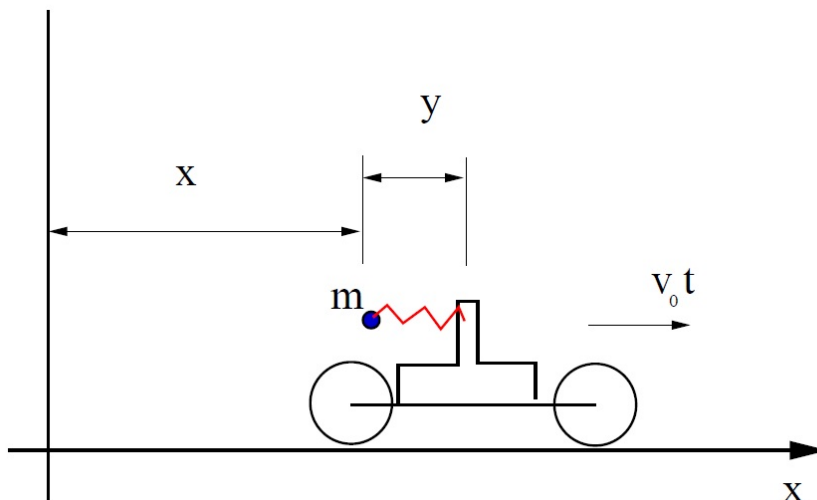


Figura 1.2 – Oscilador harmônico preso a um carrinho móvel
Representação de um oscilador preso em um carrinho móvel.

Fonte: Tópicos de Mecânica Clássica [3].

A Hamiltoniana é a energia da partícula, que não é conservada devido à força externa que mantém o carrinho movendo-se com velocidade constante. De modo,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = k(v_0 t - x)v_0. \quad (1.55)$$

A taxa de variação de energia é a potência da força externa. A força externa que age no carrinho é igual a $-ky$, pois contrabalança a força exercida pela mola. A potência externa é então $P = -kyv_0 = -k(v_0 t - x)v_0$. Escolhendo y como coordenada generalizada, então a derivada de y é $\dot{y} = v_0 - \dot{x}$, substituindo \dot{y} , a função $L'(y, \dot{y})$ fica

$$L'(y, \dot{y}) = T - V = \frac{m}{2}(v_0 - \dot{y})^2 - \frac{k}{2}y^2, \quad (1.56)$$

onde não há dependência do tempo. Essa função pode ser escrita em função de uma outra função, que dependa apenas das coordenadas e do tempo

$$L' = \frac{m}{2}y^2 - \frac{k}{2}y^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2}v_0^2 t - mv_0 y \right) = L'' + dF(y, t)/dt. \quad (1.57)$$

Como as duas equações lagrangeanas são equivalentes, pode-se obter a força conservativa $m\ddot{y} = -ky$ e $y(t) = A' \cos(\omega t + \phi')$. O momento conjugado em relação a y é

$$p_y = \frac{\partial L'}{\partial \dot{y}} = -m(v_0 - \dot{y}) \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = v_0 + p_y/m. \quad (1.58)$$

A nova Hamiltoniana fica

$$H'(y, \dot{p}_y) = p_y \dot{y} - L' = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{k}{2} y^2 + v_0 p_y. \quad (1.59)$$

Neste caso, pode-se observar que a energia é conservada, no entanto não representa a energia da partícula. Generalizando,

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q} + \dot{q}^T a - V(q, t) \equiv T - V. \quad (1.60)$$

Então a hamiltoniana do sistema é dada por,

$$H = \frac{1}{2} (p - a)^T A^{(-1)} (p - a) + V. \quad (1.61)$$

Essas energias podem ser escritas em termos dos momentos. O resultado será

$$T + V = \frac{1}{2} (p - a)^T A^{(-1)} (p - a) + V + a A^{(-1)} (p - a) \quad (1.62)$$

Assim, é possível observar que $T + V$ será a energia do sistema apenas se $a = 0$. Isso acontece, por exemplo, quando a transformação das coordenadas cartesianas para as coordenadas generalizadas não depende do tempo, mas se dependesse o hamiltoniano não representaria a energia do sistema; para estas condições não há dependência do potencial com a velocidade. No entanto, a mesma Lagrangeana pode ser representada de outra forma. Supondo que a transformação de coordenadas cartesianas para coordenadas generalizadas seja independente do tempo e o potencial dependa linearmente da velocidade. Então, $U = V - \dot{q}^T a$ e $L = T - U$, onde a energia cinética corresponde a parte puramente quadrática nas velocidades. No caso particular da força de Lorentz, $A = m_1$, $V = e\phi$, $a = eA'$, então

$$H = \frac{1}{2m} (p + eA')^2 + e\phi \quad (1.63)$$

Que é a energia da partícula, enquanto que $T + U$ não é. Isso ocorre porque a expressão $v \times B$ na força de Lorentz não realiza trabalho e não contribui para a energia. De modo geral e resumido, pode-se dizer que:

- Para potenciais independentes da velocidade e transformação independente do tempo, H é a energia.

- Para potenciais independentes da velocidade e transformação independente do tempo, H é a energia.
- Para a força de Lorentz, H é a energia, enquanto que $T + U$ não.

1.3.4 Espaço de Fase

No sistema hamiltoniano o espaço de fase é formado pelo conjunto de posições e momentos, podendo ser escritos em notação simplética. Com essa notação podemos reescrever as $2n$ equações de Hamilton de um sistema de n graus de liberdade. Para isso será utilizado um vetor $2n$ contendo todas as posições e momentos generalizados η e o correspondente operador gradiente $\nabla\eta$:

$$\eta = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}, \quad \nabla\eta = \begin{bmatrix} \partial/\partial q_1 \\ \vdots \\ \partial/\partial q_n \\ \partial/\partial p_1 \\ \vdots \\ \partial/\partial p_n \end{bmatrix}. \quad (1.64)$$

o vetor \dot{q}_n está associado a uma derivada em relação ao momento e o vetor momento está associado ao vetor velocidade e tem sinal negativo. Para solucionar esses problemas foi formulada a matriz simplética fundamental

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.65)$$

Assim as equações de movimento podem ser escritas usando notação simplética

$$\dot{n} = J\nabla_n H \quad (1.66)$$

onde J é a representação da matriz simplética fundamental que tem as seguintes propriedades importantes:

$$J^T = -J \quad J^2 = -1 \quad JJ^T = 1 \quad (1.67)$$

Para cada conjunto de $2n$ equações diferenciais de primeira ordem há a necessidade de $2n$ condições iniciais. Se cada ponto no espaço de fase fosse uma condição inicial, a dinâmica do sistema gerada por H , poderia ser considerada como um fluxo contínuo de um fluido, assim, as condições iniciais iriam ser contidas ao longo de suas trajetórias únicas [3].

Sistemas Dinâmicos

Neste capítulo vamos tratar sobre os sistemas dinâmicos, mas antes de começar serão introduzidos alguns conceitos importantes para este tema que será visto na seção 2.1 com Históricos e definições preliminares, em seguida serão tratados outros tópicos como sistema dissipativo, atratores, soluções em equilíbrio, estabilidade linear em duas dimensões, ciclos limite, bifurcações, mapa de Poincaré e expoente de Lyapunov. Esses temas serão utilizados para fazer as análises das aplicações no capítulo 3. Para o desenvolvimento deste capítulo foi utilizada a referência [1].

2.1 Histórico e definições preliminares

Uma descrição unificada da teoria pode ser dada por alguns sistemas de interesse. Um sistema é descrito por uma série de variáveis dinâmicas que poderão se combinar em um vetor coluna $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^N$. O estado do sistema dado em função do tempo e pela sua unicidade é descrito por um ponto x no espaço de fase. Os x_i são as coordenadas que podem representar a quantidade de variáveis. O vetor x fornece a velocidade ou o momento. Assumindo que o comportamento do sistema é *determinístico*. Assim, a evolução de um $x(t)$ pode ser determinada se for dado um valor inicial $x(t_0)$. O comportamento do sistema pode ser descrito por uma equação diferencial de primeira ordem em função do tempo:

$$\dot{x}(t) = F(x, t; \beta), \quad (2.1)$$

onde \mathbf{F} é uma função geral não linear que depende das coordenadas \mathbf{x} , t e β . A coordenada \mathbf{x} que é o vetor estado, mostra como o campo vetorial depende dessa coordenada. Esta dependência pode ser linear ou não-linear. Essa função \mathbf{F} representa o campo vetorial e pode ou não depender do tempo, por exemplo, se o campo vetorial depender do tempo o sistema é classificado como não autônomo, caso contrário o sistema é não autônomo. Além da dependência temporal temos o parâmetro de controle, representado por β . Dependendo do valor deste parâmetro o sistema apresenta um tipo de comportamento, podendo variar lentamente ou de forma drástica. Este fator representa alguma perturbação no sistema como um acoplamento de energia em uma interação, ou uma amplitude ou

uma frequência de uma possível perturbação interna dentro do sistema. Um sistema dinâmico não-autônomo é complicado analisá-lo, por este motivo, pode-se adicionar um grau de liberdade ao vetor de estado,

$$x = (x_1, \dots, x_N, x_{N+1})^T \in \mathbb{R}^{N+1},$$

este novo vetor deve obedecer a seguinte relação

$$\dot{x}_{N+1} = 1$$

Com uma condição inicial $x_{N+1}(0) = 0$ temos que $x_{N+1}(t) = t$. Assim, tiramos a dependência temporal explícita do sistema, mas agora temos uma dimensão extra. Como este sistema não depende explicitamente do tempo ele é chamado de autônomo.

Geralmente, temos uma outra função associada ao espaço de fase que é o fluxo de fase ou fluxo do campo vetorial $\Phi_t : (x_0) = x(t)$, onde este faz uma conexão entre o estado inicial e um outro estado qualquer em um tempo t . O fluxo de fase pode conservar o volume no espaço de fase, caracterizando o sistema como conservativo ou ele pode contrair o volume caracterizando o sistema dissipativo. A contração do volume no espaço de fase implica em um subconjunto do espaço de fase chamado de atrator que será apresentado na próxima seção.

2.2 Atratores

Em sistemas dinâmicos não-lineares é conveniente saber a diferença entre o comportamento transiente e o assintótico. O comportamento transiente trata do comportamento inicial de um sistema após um ponto x_0 no espaço de fase. Em geral, é complicado fazer afirmações sobre esse tipo de comportamento devido a diferença inicial particular. O comportamento sistemático ou comportamento assintótico do sistema é menos complicado. Nesse caso temos a passagem de fenômenos transientes. Por exemplo, em sistemas dissipativos as trajetórias se aproximam assintoticamente de um subespaço no espaço de fase de dimensão menor, denominados de atratores. Esses atratores podem assumir formas distintas, podendo ser um ponto fixo, ciclo limite, etc. Eles podem apresentar configurações diferenciadas, mas devem obedecer as mesmas definições, por exemplo, seja um campo vetorial no espaço \mathbb{R}^N com a associação de um fluxo de fase.

Nesse espaço de fase temos um subespaço A que poderá ser chamado de atrator se ele for,

1. A é compacto;

2. A é invariante pelo fluxo de fase ;

$$\Phi_t(A) = A \quad \text{para todo } t \quad (2.2)$$

3. Existe um conjunto aberto U que contém o subconjunto A que se contrai para A seguindo o fluxo

4. A não se divide em subconjuntos invariantes

De acordo com as afirmativas o atrator deve ser um conjunto fechado e restrito, assim qualquer valor limite de uma sequência infinita pertence ao próprio conjunto, assim este conjunto não pode se estender até o infinito. Por isso, que soluções que divergem para o infinito não podem ser chamados de atratores. Outro fator importante é a invariância do atrator sobre o fluxo de fase para todo $t \geq 0$. Assim qualquer ponto que esteja no atrator irá permanecer no atrator. Neste caso o \mathbb{R}^N que é o espaço real, e o conjunto U se reduz a um atrator, a união de todos os conjuntos constituem o conjunto geral que é o \mathbb{R}^N . Além disso, o conjunto U deve ser maior que o conjunto A . O fluxo do conjunto U deve ser $\Phi_t(U) \subseteq U$ para todo $t \geq 0$, sendo positivamente invariante. Isso significa que se um ponto está dentro de U , então ele não pode deixar este conjunto. Este ponto será atraído na direção do atrator A , o que pode ser formulado da seguinte forma: Para qualquer subconjunto V aberto de A que está completamente contido em U , após um tempo t_v o conjunto U pode estar dentro do subconjunto V através do fluxo, ou seja, o volume do conjunto U diminui, e depois de um tempo t_v este conjunto está inteiramente contido em um conjunto dele mesmo que é o V . Se o volume continuar contraindo uma hora ou outra o conjunto U irá tender para o atrator. Então para um t maior do que t_v o fluxo vai estar contido em V . Se fosse $t < t_v$ o fluxo estaria contido em U mas não em V .

Desde que V pode ser escolhido arbitrariamente em relação a A , isso significa que para um tempo grande o valor de U está encolhendo em direção ao atrator A . Frequentemente a definição de atrator é estendida para um requerimento que ele consista apenas de uma parte do espaço.

Os atratores não podem se dividir em vários subconjuntos invariantes que não tenham interseção. O atrator apresenta uma característica importante que é o domínio de atração, é por causa desta propriedade que os pontos do conjunto ao qual o atrator está envolvido tendem para o atrator em uma região chamada de base de atração B . Esta região B é a união de todos os superconjuntos A que satisfazem a que satisfazem a condição de U .

Esses atratores podem ser extremamente sensíveis em relação às condições iniciais, sendo os chamados atratores caóticos onde as trajetórias vizinhas afastam-se exponencialmente com o tempo.

Por fim, temos o atrator estranho, ele recebe essa denominação por apresentar um formato geométrico fortemente enrugado que é descrito por um fractal. Existem exemplos de atratores que são estranhos, mas não são caóticos e os outros são caóticos, mas não são estranhos. E outros que são os dois como é o caso do atrator de Lorenz tratado no capítulo 3.

2.3 Soluções em Equilíbrio

Um sistema estacionário pode ser descrito pela função $F(x_0) = 0$ de modo que $x(t) = x_0$. Este ponto x_0 é chamado de ponto crítico ou ponto fixo. Esse ponto pode funcionar como um referencial, no sistema dinâmico, para analisar o comportamento do sistema. Para realizar essa análise podemos verificar as trajetórias do campo vetorial do sistema. Se as trajetórias estiverem se movendo em direção ao ponto fixo, temos um ponto estável, caso contrário ele é instável.

Para analisar a estabilidade das soluções de equilíbrio podemos utilizar uma trajetória $x(t)$ de referencial que esteja localizada na vizinhança de um ponto crítico x_0 . Considerando que a distância entre a trajetória e o ponto fixo seja,

$$\xi(t) = x(t) - x_0. \quad (2.3)$$

Para simplificarmos vamos utilizar a expansão da série de Taylor de $F(x_0)$ e depois escolhermos o menor termo dessa expansão. Desse modo, a equação do movimento linearizada,

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \mathbf{M}\xi(t), \quad (2.4)$$

onde os termos da ordem quadrática de ξ são negligenciados. A letra M , denota a matriz de Jacobi da função $F(x)$ com valor tomado no ponto x_0 . Esta matriz tem os elementos:

$$M_{ik} = \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right|_{x_0} \quad (2.5)$$

A equação (2.17) representa um problema linearizado e, ao contrário da equação (2.14), tem uma solução bem simples e que pode ser dado de forma analítica. Por exemplo, seja um sistema de uma dimensão ($N = 1$). A matriz Jacobiana tem apenas um único elemento, representado por μ e, na equação (2.16) é resolvido por

$$\xi(t) = e^{\mu t} \xi(0). \quad (2.6)$$

De acordo com o valor de μ a solução apresenta um comportamento diferente. Então, para $\mu < 0$, x_0 é um ponto de equilíbrio estável, perturbações pequenas decaiam exponencialmente. Para $\mu > 0$,

o equilíbrio é instável, menores deslocamentos no ponto de equilíbrio aumentam exponencialmente. Para $\mu = 0$, surge o caso limite de equilíbrios iguais ou neutros. O comportamento de sistemas sob perturbações é, então determinado pelas derivadas de maior ordem da função $F(x)$ no ponto x_0 . Os autovetores da matriz Jacobiana constituem um conjunto completo de bases para o espaço de N dimensões. Para obter os autovetores vamos recorrer à equação do autovalor. Usando a equação (2.17), resulta em um problema de autovalor

$$\mathbf{M}\mathbf{v}_i = \mu_i\mathbf{v}_i \quad (2.7)$$

onde μ_i é o autovalor associado ao autovetor \mathbf{v}_i se o determinante é

$$\det(M_{ij} - \mu_i\delta_{ij}) = 0. \quad (2.8)$$

Essa equação é chamada de equação característica ou secular e tem um polinômio de N -ésima ordem de onde obtemos os autovalores μ_i . Nesta base, então, o vetor $\boldsymbol{\xi}(t)$ é

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \sum_{i=1}^N \mu_i(t)\mathbf{v}_i, \quad (2.9)$$

onde os termos $\mu_i(t)$ obedecem

$$\dot{\mu}_i(t) = \mu_i\mu_i(t). \quad (2.10)$$

Então, a solução geral é

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \sum_{i=1}^N \mu_i(0)e^{\mu_i t}\mathbf{v}_i, \quad (2.11)$$

O autovalor μ_i pode ser real ou complexo. Os autovalores complexos surgem, assim, em pares: Se μ resolve (2.21), então o complexo conjugado $\bar{\mu}$ obviamente resolve a equação, desde que a matriz jacobiana $M_{i,j}$ seja real. A parte real dos autovalores da equação característica são muito importantes para caracterizar o ponto de equilíbrio. Assim, a condição de estabilidade pode ser definida por meio de um ponto de equilíbrio estável em uma função $F(x_0) = 0$ é chamado assintoticamente estável se existir um conjunto U que contenha x_0 , dentro do qual todas as trajetórias estão se direcionando ao ponto x_0 para tempos longos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(t) = x(0) \quad \text{para } x(0) \in U. \quad (2.12)$$

Se a função \mathbf{F} é diferenciável de ordem infinita, de modo que ela possa ser descrita por aproximações lineares, podemos estabelecer uma condição para a *estabilidade assintótica*: o ponto x_0 é estável assintoticamente se os autovalores da matriz de Jacobi tiverem uma parte real negativa. Se pelo

menos um dos autovalores tiverem uma parte real positiva, $Re(\mu_i) > 0$, o ponto crítico x_0 é um ponto fixo instável, contanto que os deslocamentos ao longo de u_n cresçam exponencialmente. Por intermédio dos autovetores u_n , o espaço de fase total pode ser expandido em espaços parciais. O espaço instável é expandido pelo vetor u_n que satisfaz a condição para os valores reais negativos de μ_i . Em adição, o espaço parcial pode ocorrer com o valor especial $Re(\mu_i) = 0$. Se isso acontecer, esse ponto é chamado de ponto fixo degenerado. O espaço espacial associado é chamado também de centro. Se for considerada uma perturbação geral da trajetória, ela será a componente de todos os espaços parciais. Assim, é possível observar que a estabilidade linear é útil para a vizinhança do ponto crítico x_0 . Para esclarecer melhor esta análise da estabilidade é dado um exemplo de estabilidade linear em duas dimensões, como pode ser visto a seguir.

2.4 Estabilidade linear em duas dimensões

A análise da estabilidade se torna particularmente transparente para o caso de $N = 2$ que corresponde ao sistema dinâmico com um grau de liberdade com $x_1 = q$ e o momento associado $x_2 = p$. Na vizinhança de um ponto fixo (\mathbf{x}_0), o movimento é determinado por uma aproximação linear pelos quatro elementos da matriz Jacobiana $M_{i,j}$. A equação característica (2.21)

$$\begin{vmatrix} M_{11} - \mu & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} - \mu \end{vmatrix} = 0 \quad (2.13)$$

é um polinômio quadrático

$$\mu^2 - (M_{11} + M_{22})\mu + M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = 0, \quad (2.14)$$

ou

$$\mu^2 - 2s\mu + d = 0, \quad (2.15)$$

com

$$s = \frac{1}{2}(M_{11} + M_{22}) = \frac{1}{2}TrM, \quad d = M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}. \quad (2.16)$$

As duas soluções podem ser dadas por,

$$\mu_1 = s + \sqrt{s^2 - d}, \quad \mu_2 = s - \sqrt{s^2 - d} \quad (2.17)$$

Dependendo da magnitude e do sinal das duas constantes s e d , existem algumas possibilidades distintas para os autovalores μ_1, μ_2 :

- a. Para μ_1, μ_2 reais e negativos (se $s < 0$ e $0 < d < s^2$) nós temos um *nó estável* ;
- b. Para μ_1, μ_2 reais e positivos (se $s > 0$ e $0 < d < s^2$) temos um *nó instável*;
- c. Para μ_1, μ_2 reais e com sinais diferentes (se $d < 0$) o ponto formado é um *ponto de sela*;
- d. Para $\mu_1 = \mu_2^*$ conjugado nós temos uma parte real negativa (se $s < 0$ e $d > s^2$) onde o ponto formado é uma *espiral estável*;
- e. Para $\mu_1 = \mu_2^*$ conjugados, cuja parte real positiva (se $s > 0$ e $d > s^2$) e o ponto fixo é uma *espiral instável*;
- f. Para $\mu_1 = \mu_2^*$ conjugados, temos um imaginário puro (se $s = 0$ e $d > 0$) e o ponto fixo é *centro ou rotor*.

Cada caso está representado na figura 2.1 no plano s, d . Para estas alternativas, existem diferentes tipos de trajetórias correspondentes $\xi(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0$ de acordo com a equação (2.22).

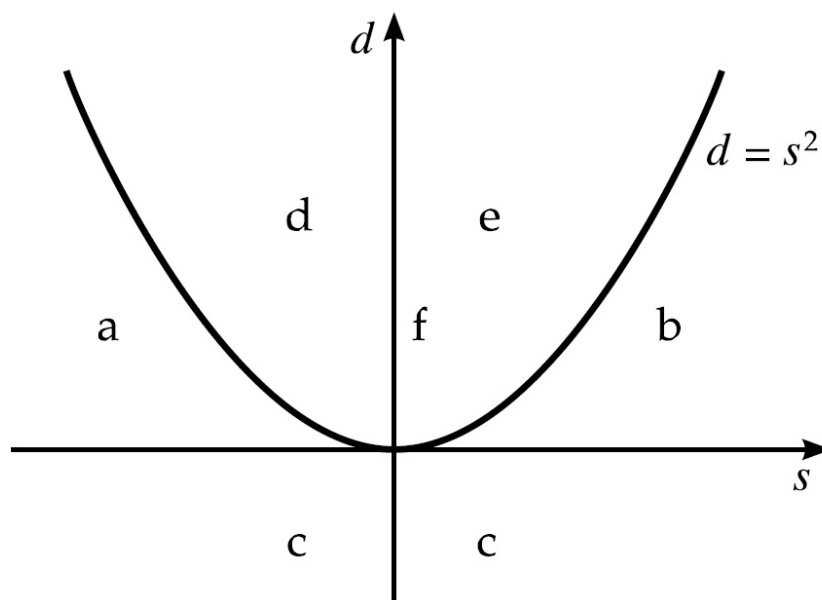


Figura 2.1 – Gráfico de classificação dos pontos fixos
 Classificação dos pontos fixos de acordo com as condições dos autovalores μ_1 e μ_2 .
 Fonte: Walter Greiner [1].

Os conjuntos estão representados na figura 2.2 no plano $s - d$.

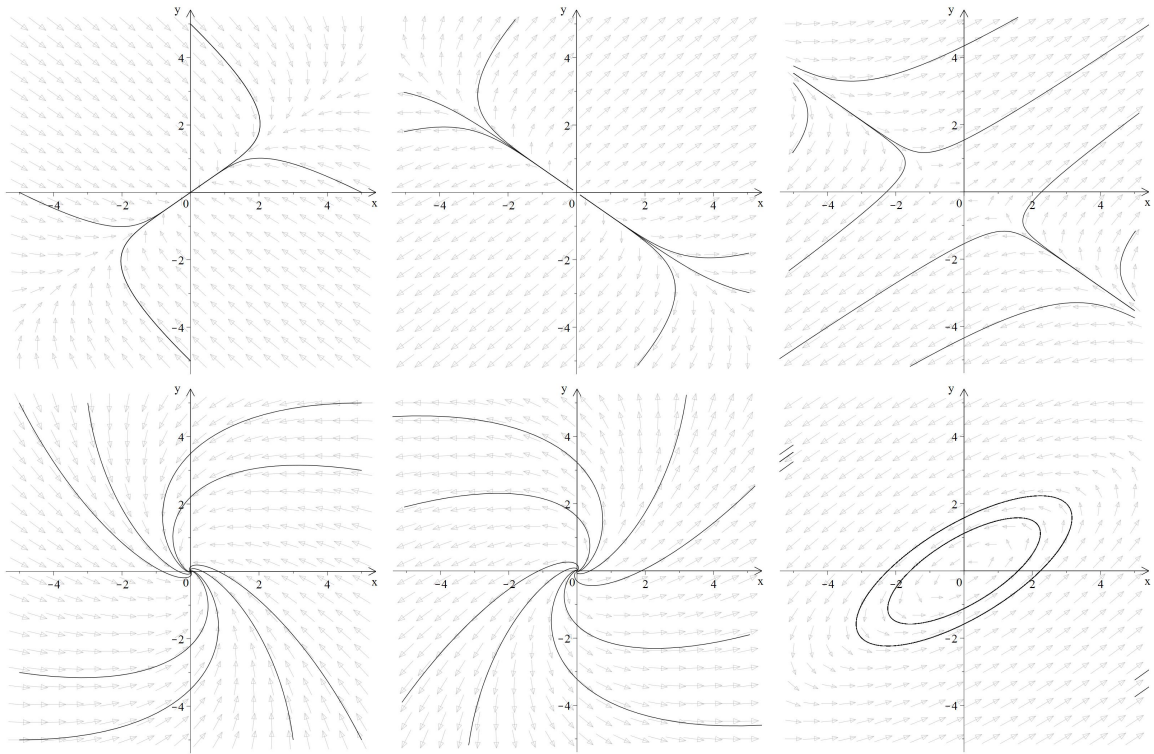


Figura 2.2 – Retratos de fase originados da equação (2.28)
 Representação dos retratos de fase dos tipos de pontos fixos da equação (2.28).
 Fonte: Autoria Própria, 2017.

A figura (2.2) ilustra como as trajetórias na vizinhança do ponto fixo tendem para ele, caracterizando como um nó estável onde essa trajetória pode ser mostrada pela solução linearizada:

$$\xi(t) = c_1 e^{-|\mu_1|t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{-|\mu_2|t} \mathbf{v}_2 \tag{2.18}$$

onde \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 são os autovetores. A curvatura da trajetória surge se $\mu_1 \neq \mu_2$. Essas curvas são como parábolas com uma tangente comum na origem indo na direção dos autovalores v_1 ou v_2 , dependendo do valor de μ_1 ou μ_2 . A trajetória para o nó instável, mostrado no segundo retrato de fase na fig. 2.2, é semelhante com a espiral e, o que distingue uma da outra, é a direção do vetor. A orientação do vetorial da espiral estável é em direção ao ponto fixo. Para o caso do ponto de sela as trajetórias estão indo na direção v_1 (seja $\mu_1 < \mu_2$ sem restrição de generalidade), na direção do ponto fixo, mas são afastadas na direção de v_2 , que resulta nas trajetórias em forma de hipérbole, como mostrado no terceiro retrato de fase da figura 2.2. Se os autovalores forem complexos,

$$\mu_1 = \mu_r + i\mu_i, \quad \mu_2 = \mu_r - i\mu_i, \tag{2.19}$$

isto será válido, por causa de (2.22), para os autovetores também:

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \boldsymbol{\xi}_r + i\boldsymbol{\xi}_i, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \boldsymbol{\xi}_r - i\boldsymbol{\xi}_i. \quad (2.20)$$

Na expressão geral para (2.36) temos

$$\boldsymbol{\xi}(t) = c_1 e^{\mu_1 t} \boldsymbol{\xi}_1 + c_2 e^{\mu_2 t} \boldsymbol{\xi}_2, \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}(t) &= c_1 e^{\mu_1 t} \boldsymbol{\xi}_1 + c_1^* e^{\mu_2^* t} \boldsymbol{\xi}_1^* \\ &2e^{\mu_r t} R(c_1 e^{i\mu_i t} \boldsymbol{\xi}_1) \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde $c_2 = c_1^*$ conjugado para obter o valor real de $\boldsymbol{\xi}$. Se a constante c_1 , cujo valor é fixado pela condição inicial $\boldsymbol{\xi}(0)$, é dividida em magnitude e fase, e o mesmo é feito para as componentes cartesianas do autovetor complexo \mathbf{v}_1 , os valores do autovalor e autovetor são respectivamente,

$$c_1 = \rho e^{i\phi}, \quad \mathbf{v}_1 = a e^{i\alpha} e_x + b e^{i\beta} e_y \quad \text{com} \quad a^2 + b^2 = 1. \quad (2.23)$$

A (2.34) pode ser reescrita como

$$\boldsymbol{\xi}(t) = 2\rho e^{\mu_r t} [a \cos(\mu_i t + \phi + \alpha) e_x + b \cos(\mu_i t + \phi + \beta) e_y]. \quad (2.24)$$

O fator nos colchetes descreve as vibrações harmônicas com uma fase relativa uma a outra. Dessa forma, pode ser visto então a representação paramétrica de uma elipse. De acordo com o fator anterior, o tamanho da elipse varia exponencialmente com o tempo. Assim, as trajetórias são espirais logarítmicas se movendo em direção ao ponto fixo ou para longe dele, dependendo do sinal da parte real de μ ; esse comportamento pode ser visualizado no quarto e quinto retrato da figura 2.2. O formato dessas trajetórias parecem espirais, por isso, o nome espiral. O caso da sexta figura é um rotor com $\mu = 0$, esse tipo de ponto se caracteriza pelo tipo de trajetória realizada na vizinhança do ponto fixo x_0 onde as funções que descrevem essas trajetórias são periódicas resultando em elipses concêntricas. Isso significa que o ponto de equilíbrio é estável onde pequenos deslocamentos não são amplificados, mas não assintoticamente estável, pois a trajetória não vai em direção ao ponto fixo, então o ponto não é um atrator. Reforçando a ideia de atrator vista até o momento. Além dos Atratores existe um tipo de solução periódica que se comporta como um atrator, este tipo de solução é chamada de Ciclo Limite que veremos na seção seguinte.

2.5 Ciclos Limite

Além dos pontos de equilíbrio estacionários simples, tratados em atratores, um sistema dinâmico pode exibir, também, outros tipos de soluções estáveis. Esses são então os chamados ciclos limite que são caracterizados por trajetórias fechadas oscilando periodicamente. Similar aos pontos fixos, os ciclos limite podem atuar como atratores de movimento. Então existem mais ou menos conjuntos estendidos no espaço de fase (a base de atração do atrator) trajetórias começando de algum lugar vão em direção ao ciclo limite o qual é aproximado de $t \rightarrow \infty$. Para ciclos limite, pode-se executar uma análise da estabilidade matemática, como feito para pontos fixos, os quais pela sua própria natureza são difíceis. Por exemplo, seja um oscilador harmônico com um termo de atrito não linear. A equação diferencial tem a forma geral:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + \omega^2x = 0. \quad (2.25)$$

Se o termo do meio estivesse ausente, seria obtido um oscilador harmônico com frequência angular. No caso com coeficiente constante, $f(x) = \alpha = \text{constante}$, levaria a uma equação diferencial linear. O caráter dessa solução é determinado por um fator exponencial $(-at/2)$. Se o valor de α for positivo, a solução decresce exponencialmente em direção ao ponto $x = \dot{x} = 0$. Um valor negativo de α significa que a força está atuando ao longo da mesma direção da velocidade instantânea, o que leva a uma ampliação ilimitada da solução (amortecimento negativo). Fisicamente a força atuante não é a de atrito, mas uma fonte externa que permite a auto excitação do sistema. Se são permitidas funções mais gerais, pode acontecer que o coeficiente de amortecimento tenham valores parcialmente positivos e negativos, dependendo do deslocamento. Um caso importante que não foi citado até o momento foi o ponto fixo não-hiperbólico. Este ponto surge quando o determinante da matriz jacobiana é igual a zero. No retrato de fase deste ponto temos um reta que passa pela origem onde estarão localizados os pontos fixos. Este esquema é mostrado na figura 2.2,

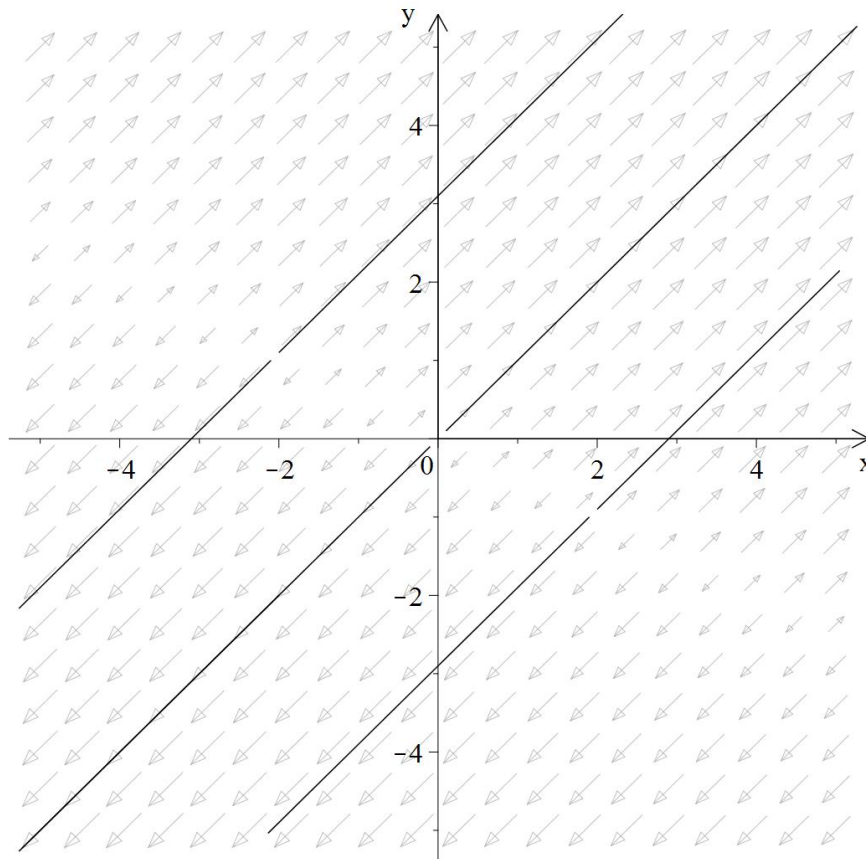


Figura 2.3 – Retrato de fase

Representação do retrato de fase do ponto fixo não-hiperbólico.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

Este ponto aparece no estudo de sistemas que o parâmetro de controle passa de um valor crítico. Esses processos serão vistos a seguir na seção de Bifurcações.

2.6 Bifurcações

Em geral, o comportamento de sistemas dinâmicos muda de acordo com o valor dos parâmetros de controle β . Essas mudanças podem influenciar em forças de uma interação, intensidade do atrito ou outros fatores que façam parte do sistema. Dessa maneira pode-se perceber que o comportamento das trajetórias mudam quando o valor do parâmetro passa do valor crítico β_c que é o valor limite do parâmetro de controle. Por causa deste valor o sistema pode ter duas posições de equilíbrio estáveis, ao invés de uma, ou também, um sistema que estava inicialmente em repouso pode começar a oscilar.

Para este fenômeno se chama bifurcação ou ramificação e β_c é o valor de bifurcação ou ramificação. As modificações no sistema poderão ser melhor observadas nas definições e nos retratos de fase de cada tipo de bifurcações que serão mostrados a seguir.

1. Bifurcação sela-nó

Neste tipo de bifurcação, o sistema não apresenta nenhum ponto fixo no retrato de fase para o valor negativo do parâmetro de controle, mas quando o valor do parâmetro é zero aparece um ponto fixo não-hiperbólico e quando ele se torna positivo são formados dois pontos, um de sela e um nó. Para esclarecer melhor esta definição veja o seguinte sistema dinâmico

$$\begin{cases} \dot{x} = \beta - x^2, \\ \dot{y} = -y, \end{cases} \quad (2.26)$$

que depende de um parâmetro real β . Para encontrar os valores dos pontos fixos foi utilizado o software Maple. Os comandos usados na programação estão disponíveis no Apêndice deste trabalho.

De acordo com o valor do parâmetro β podem existir no máximo dois pontos fixos. A resolução da equação desse sistema resulta em $y = 0$ e $\pm\sqrt{\beta}$ onde será analisado cada ponto fixo. Primeiramente serão estudados os pontos fixos para o caso de β positivo onde existirão dois pontos fixos com coordenadas $(-\sqrt{\beta}, 0)$ e $(\sqrt{\beta}, 0)$. Como este sistema não é linearizado devemos usar a matriz Jacobiana que pode ser encontrada analiticamente ou pelos comandos do software Maple

O retrato de fase desse sistema é mostrado na figura 2.4. Partindo das definições de pontos fixos visto na seção (2.5) observa-se que o primeiro ponto $(-\sqrt{\beta}, 0)$ é um ponto de sela onde a matriz Jacobiana nesse ponto é

$$A = \begin{bmatrix} 2\sqrt{\beta} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

O segundo ponto é um nó estável e a matriz Jacobiana fica,

$$A = \begin{bmatrix} -2\sqrt{\beta} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Para o parâmetro de controle β nulo, existe apenas um ponto fixo localizado na origem. A matriz Jacobiana do ponto fixo neste caso é

$$A = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A plotagem do retrato de fase é vista na figura 2.4 e o ponto fixo é chamado de não-hiperbólico. Finalmente, o caso para o parâmetro β negativo. Neste caso os pontos fixos estão em um plano imaginário, por conta disso, o campo vetorial tende para o infinito. A figura 2.3 mostra, também, o retrato de fase do parâmetro negativo. Assim, pode-se observar a mudanças que ocorreram no sistema devido os valores dos parâmetros de controle,

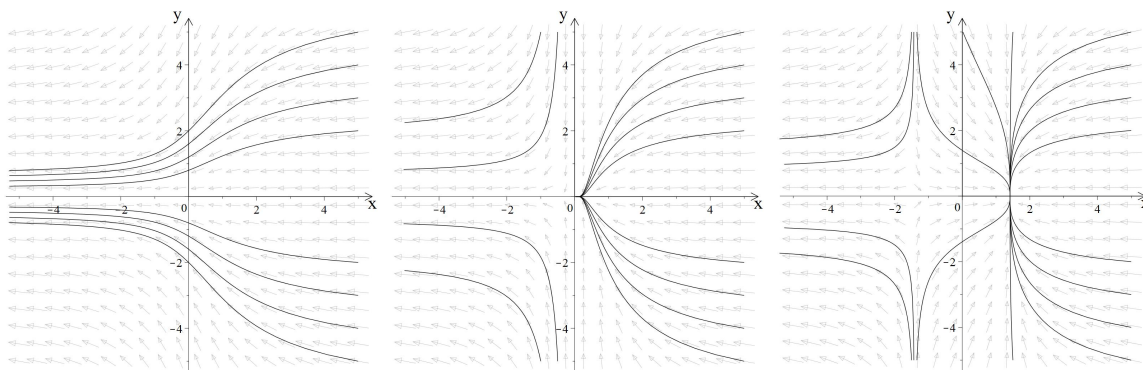


Figura 2.4 – Retrato de fase do sistema (2.40)

Representação do retrato de fase do sistema (2.40) com parâmetros -2, 0, 2, respectivamente.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

2. Bifurcação transcítica

Em um sistema que acontece este tipo de bifurcação, é observado que ocorre uma aproximação de dois pontos fixos, onde eles irão se combinar formando um único ponto fixo, que depois se separam resultando nos mesmos pontos. Ressaltando que esse processo acontece porque um parâmetro do sistema foi modificado.

Para simplificar temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \beta x(t) - x^2(t), \\ \dot{y}(t) = -y(t) \end{cases} \quad (2.27)$$

Caso o parâmetro deste sistema seja não nulo existirão dois pontos fixos, um na origem $(0, 0)$ e $(\beta, 0)$, no entantanto, se o valor for nulo existirá um único ponto fixo localizado na origem. Com o pacote "dynamics" no Maple podemos estudar as bifurcações do sistema para diferentes valores dos parâmetros de controle

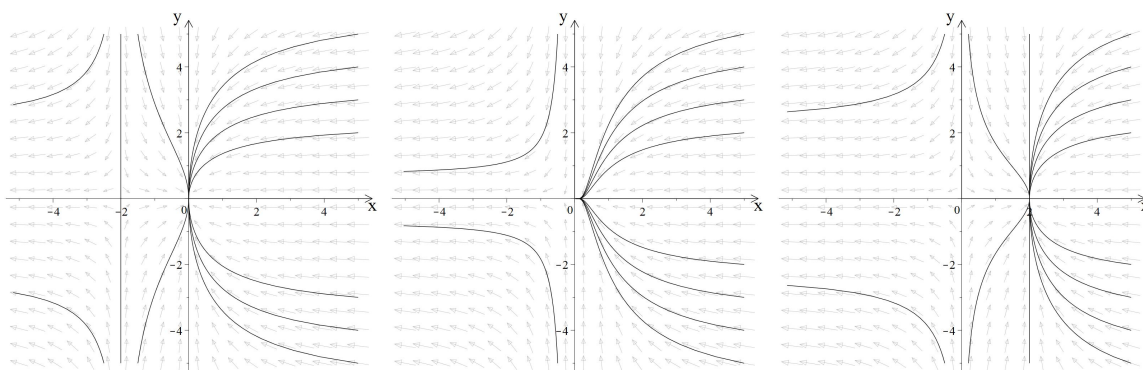


Figura 2.5 – Retrato de fase do sistema (2.40)

Representação do retrato de fase do sistema (2.40) com parâmetros -2, 0, 2, respectivamente.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

3. Bifurcação forquilha

Na bifurcação de forquilha, um ponto fixo estável sofre uma ramificação dando origem a dois novos pontos fixos estáveis. Para exemplificar veremos um exemplo,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \beta x(t) - x^3(t), \\ \dot{y}(t) = -y(t) \end{cases} \quad (2.28)$$

Para linearizar este sistema encontramos a matriz Jacobiana Agora podemos fazer o retrato de fase, verificando o comportamento do sistema para os diferentes valores de β .

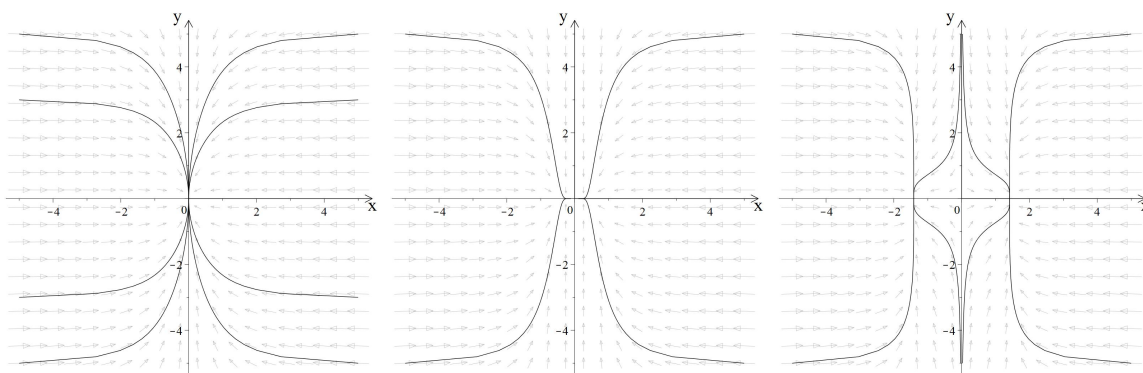


Figura 2.6 – Retrato de fase do sistema (2.42)

Representação do retrato de fase do sistema (2.42) com parâmetros -2, 0, 2, respectivamente.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

No retrato de fase observa-se que quando o valor do parâmetro β é nulo o ponto fixo é não-hiperbólico e estável. Para valores de β positivo existem três pontos fixos $(-\sqrt{\beta}), (0, 0)$ e

$(\sqrt{\beta}, 0)$. As variações de parâmetros poderão ser melhor observadas no próximo capítulo, onde serão tratadas aplicações dos sistemas dinâmicos com auxílio de programas computacionais.

4. Bifurcação de Hopf

As bifurcações vistas até o momento são caracterizadas por exigir que o autovalor da matriz Jacobiana seja real, no entanto, para a bifurcação de Hopf os autovalores apresentam-se em forma de pares complexos-conjugados e o sistema deve ser no mínimo bidimensional. Este caso de bifurcação não resultará em nós ou selas, pois o autorvalor não é real. Ao invés disso, teremos espirais e centros além do ciclo limite após a ramificação do ponto fixo. Como exemplo será usado o sistema de equações que segue

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) + x(t)[\beta - (x^2(t) + y^2(t))], \\ \dot{y}(t) = x(t) + y(t)[\beta - (x^2(t) + y^2(t))] \end{cases} \quad (2.29)$$

A matriz Jacobiana deste sistema dinâmico fica

$$A = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 1 & \beta \end{bmatrix}$$

onde os autovalores são $\beta_1 = \beta + i$, $\beta_2 = \beta - i$. Dessa maneira, quando o parâmetro $\beta < 0$ o ponto fixo é uma espiral estável, $\beta > 0$ é uma espiral instável e para $\beta = 0$ é um centro ou rotor. Outro caso interessante é quando o valor de $\beta > 0$ uma solução oscilante periódica do tipo $x(t) = (\sqrt{\beta} \cos t, \sqrt{\beta} \sin t)$ que tende a formar um ciclo limite. O retrato de fase desses sistemas pode ser observado na figura 2.7

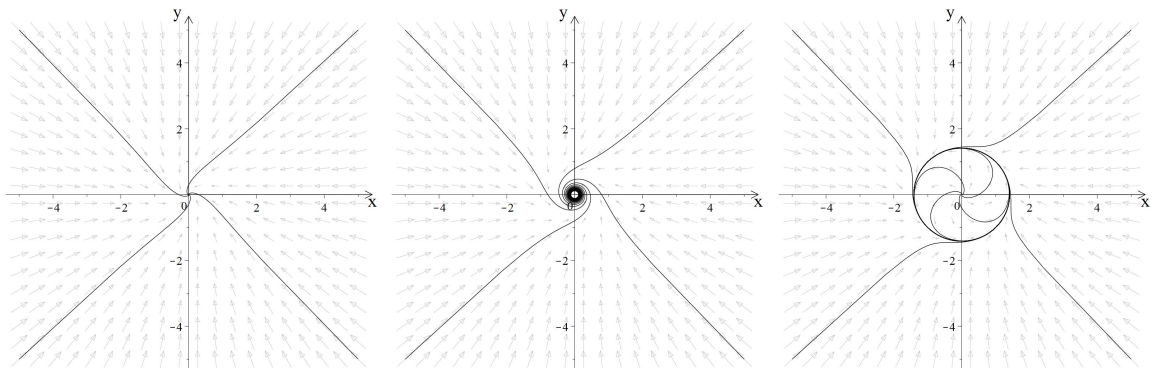


Figura 2.7 – Retrato de fase do sistema (2.43)

Representação do retrato de fase do sistema (2.43) com parâmetros -2, 0, 2, respectivamente.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

é possível observar o comportamento do sistema no retrato de fase, onde se percebe nitidamente a transformação dos pontos de acordo com os valores do parâmetro de controle.

2.7 Mapa de Poincaré

Em 1963, o matemático francês Jules Henri Poincaré desenvolveu uma técnica matemática eficaz nas análises qualitativas de sistemas dinâmicos que tenham soluções temporais e também espaços de fases de várias dimensões. Esta técnica, em homenagem ao autor se chama Seção de Poincaré. A função desta é analisar um espaço de fase N dimensional, de modo que, o corte de Poincaré irá tirar a dependência temporal da trajetória utilizando uma hipersuperfície de $N - 1$. Nesta hipersuperfície, Σ , no espaço de fase, a discretização do tempo é determinada pelos instantes que Σ é perfurada por uma trajetória $X(t)$. É importante ressaltar que não é qualquer trajetória que atravessa a hipersuperfície Σ que resultará na discretização do tempo. A trajetória $X(t)$ deve estar transversalmente em relação ao campo vetorial. Assim, $N(X) \cdot F(X) = 0$ em toda a hipersuperfície, sendo $N(X)$ a normal em relação Σ no ponto X . A vantagem do corte de Poincaré é a redução de dimensão do espaço de fase de N para $N - 1$, o que é muito importante para análise qualitativa. Com o mapeamento de Poincaré é possível fazer um estudo dos pontos X_n e da sequência desses pontos pela seguinte relação,

$$P : X_n \rightarrow X_{n+1} \quad (2.30)$$

assim através do mapeamento, cada ponto da sequência X_0, X_1, X_2, \dots se conecta com seu sucessor. Por meio iterações sucessivas no mapa de Poincaré podem ser encontrados os outros pontos da seção de Poincaré, assim

$$X_1 = P(X_0) \quad (2.31)$$

Deste modo, o comportamento a longo prazo de uma trajetória pode ser derivado das propriedades do mapeamento iterado de Poincaré P^n quando $n \rightarrow \infty$. Se a evolução do tempo do sistema dinâmico é determinada por uma equação diferencial do tipo $\dot{x} = F(x, t)$, o mapeamento de Poincaré é único e também reversível (possivelmente exceto para pontos singulares), uma vez que as trajetórias não podem se interceptar no espaço de fase. Na seção anterior, foi tratado sobre o problema da estabilidade dos caminhos periódicos, para isso vamos usar a seguinte expressão matemática para analisar os desvios da trajetória de referência na aproximação linear,

$$\zeta(t) = x(t) - x_r(t) \quad (2.32)$$

nesta aproximação o mapeamento de Poincaré simplifica a um mapeamento linear, isto é, a multiplicação por uma matriz \mathbf{C} :

$$\zeta_{n+1} = C\zeta_n; \quad \text{consequentemente} \quad x_n = C^n \zeta_0 \quad (2.33)$$

Dessa forma, são obtidos os autovalores λ_i da matriz \mathbf{C} que são importantes para analisar o comportamento a longo prazo do desvio $\zeta(t)$. Se todos os autovetores corresponderem a condição $|\lambda_i| < 1$, o mapeamento irá contrair, e a sequência converge para zero. Neste caso, a solução periódica $xr(t)$ é assintoticamente estável. Se pelo menos um dos autovalores $|\lambda| > 1$, as perturbações estão aumentando ao longo da direção do autovetor associado, e o caminho é instável.

2.8 Expoente de Lyapunov

A teoria da estabilidade de sistemas dinâmicos foi desenvolvida pelo físico e matemático russo Aleksandr Mikhailovich (1857 – 1918). A estabilidade de um sistema dinâmica pode ser estudada através do expoente de Lyapunov o qual é uma medida logarítmica para a taxa média por iteração da distância entre duas trajetórias infinitesimalmente próximas [1]. Considerando um mapeamento discreto unidimensional com duas trajetórias distintas. Para sabermos se elas estão convergindo ou divergindo precisamos de uma técnica para medir a velocidade dessas trajetórias no espaço de fase. Para realizar essa medida é necessário a utilização do expoente de Lyapunov,

$$\sigma_{x_r, \xi_0} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{\xi(t)}{\xi(t_0)} \right| \quad (2.34)$$

por meio deste expoente podemos medir a sensibilidade do sistema. Os expoentes de Lyapunov são de grande utilidade para determinar a estabilidade de sistemas dinâmicos e, inclusive, se estes sistemas são caóticos ou não. Ele funciona como uma medida logarítmica para a taxa média por iteração da distância entre duas trajetórias infinitesimalmente próximas.

O ξ é a distância entre duas trajetórias inicialmente próximas, mas podemos analisá-lo como uma perturbação em relação a uma das trajetórias. Por exemplo, seja uma trajetória de referência que recebe uma perturbação ξ_0 , com essa perturbação será obtida outra trajetória.

O expoente de Lyapunov analisa se o fluxo de fase dessas trajetórias se afastam exponencialmente ou se elas se aproximam. Se elas se aproximarem, a trajetória de referência é estável e das definições do expoente de Lyapunov essa instabilidade leva ao caos e para cada dimensão do sistema existe um expoente de Lyapunov.

Aplicação de sistemas dinâmicos não-lineares

No capítulo anterior, foram mostrados alguns exemplos de sistema dinâmico não linear que podem ser encontrados na natureza como por exemplo na meteorologia, física, química, biologia, economia, engenharia, etc. Neste capítulo serão abordadas algumas aplicações dos temas tratados anteriormente com auxílio de software matemáticos, dessa forma, poderá ser vista a beleza destes tipos de sistemas através de gráficos matemáticos. Na seção anterior foram estudados os conceitos de atratores, os quais podem receber denominações diferenciadas de acordo com o seu comportamento. Por exemplo, existem atratores fixos, no caso de uma bola que é atraída para o centro de uma cavidade por ação da gravidade e do atrito ou também, os pontos fixos vistos na seção 2.4, mas os pontos fixos de um sistema dinâmico não são necessariamente um atrator atrativo no sistema. Por exemplo, se uma tigela contendo um mármore rolante for invertida e o mármore se equilibrar no topo da tigela, o fundo central (agora superior) da tigela é um estado fixo, mas não um atrator. Isto é equivalente às diferenças entre equilíbrios estáveis e instáveis. No caso de um mármore em cima de uma tigela invertida (uma colina), esse ponto no topo da tigela (colina) é um ponto fixo (equilíbrio), mas não um atrator com equilíbrio estável. Existem também atratores periódicos, sendo o caso dos ciclos limite estudado na seção 2.5, desde que o sistema não seja dissipativo, ou seja, não pode ocorrer perda de energia. Além disso, existe o atrator caótico visto na seção 2.3 e por último, o atrator estranho, também tratado na seção 2.3 que pode ser representado pelo atrator de Lorenz que será abordado neste capítulo com uma análise qualitativa através do Expoente de Lyapunov, este último visto na seção 2.8. Além disso, será mostrado o comportamento de um oscilador harmônico simples com uma subseção da análise numérica do expoente de Lyapunov com auxílio de softwares matemáticos. Outro caso será o oscilador amortecido para diferentes valores de amortecimento onde será feita uma análise qualitativa e por fim o oscilador de Van der Pol que é um oscilador periódico, as observações realizadas neste tópico serão de acordo com os valores distintos no controle de parâmetro.

3.1 Aplicação do atrator de Lorenz

A maioria dos sistemas não-lineares exibem comportamento de estado estacionário a maior parte do tempo, portanto, é possível prever, por exemplo, o clima, o movimento dos planetas, a propagação de uma epidemia, o movimento de um pêndulo acionado ou a batida do coração humano. No entanto, sistemas não-lineares também podem exibir comportamento caótico onde a previsão precisa se torna impossível. Existem muitos exemplos de aplicações de sistemas autônomos tridimensionais ao mundo real. Estes sistemas obedecem ao teorema de existência e unicidade, mas a dinâmica pode ser muito mais complicada do que no caso bidimensional. O exemplo a seguir tirado da meteorologia têm sido amplamente investigados nos últimos anos. Em 1963, o meteorologista do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT) Edward Lorenz construiu um modelo altamente simplificado de um fluido de convecção. Este modelo simples também exibe uma grande variedade de comportamento e para alguns valores de parâmetros o seu comportamento é caótico. As equações diferenciais podem ser usadas para modelar o fluxo convectivo através do centro e para baixo nos lados das colunas hexagonais. O sistema é dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} = x(r - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde x mede a taxa de retorno de convecção, y mede a variação horizontal de temperatura, z mede a variação de temperatura na vertical, σ é o número de Prandtl, r é o número de Rayleigh e b é um fator de escala. O número de Prandtl está relacionado com a viscosidade do fluido e o número de Rayleigh está associado com a diferença de temperatura entre o topo e o fundo da coluna. Lorenz estudou o sistema quando $\sigma = 10$ e $b = 8/3$. O sistema pode ser considerado um modelo muito simplificado para o clima. De fato, as fotografias de satélite do espaço mostram padrões hexagonais em pisos de deserto não perturbados. Mesmo este modelo muito simples do clima pode exibir fenômenos caóticos. Como o sistema é sensível às condições iniciais, pequenas mudanças na velocidade do vento (convecção), por exemplo, geradas pela aba das asas de uma borboleta, podem alterar o valor dos resultados consideravelmente. Por exemplo, uma borboleta batendo as asas na Grã-Bretanha pode causar ou impedir que um furacão ocorra nas Bahamas em um futuro não tão distante, este evento é conhecido popularmente como efeito borboleta [7]. Naturalmente, existem muitas outras variáveis que devem ser consideradas ao tentar modelar sistemas climáticos, e este

modelo simplificado ilustra alguns dos problemas que os meteorologistas têm de enfrentar. Algumas propriedades simples das equações de Lorenz serão listadas e todas essas características podem ser investigadas com o auxílio do software Mathematica:

1. O sistema (3.1) tem simetria natural $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$.
2. O eixo z é invariante.
3. O fluxo é volume contratante desde $\nabla \cdot X = -(\sigma + b + 1) < 0$, onde X é o campo vetorial.
4. Se $0 < r < 1$, a origem é o único ponto crítico, e é um atrator global.
5. Em $r = 1$, há uma bifurcação, e há mais dois pontos críticos em $C_1 = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ e $C_2 = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$.
6. Em $r = r_H \approx 13,93$, existe uma bifurcação homoclínica e o sistema entra em um estado de caos transitório.
7. A $\approx 24,06$, um atrator estranho é formado.
8. Se $1 < r < r_O$, onde $r_O = 24,74$, a origem é instável e C_1 e C_2 são estáveis.
9. Em $r > r_O$, C_1 e C_2 perdem a sua estabilidade por absorção de um limite instável ciclo em uma bifurcação Hopf subcrítica.

A maioria dos resultados acima podem ser observados traçando retratos de fase ou séries temporais usando o software Mathematica. Um atrator estranho e caótico é mostrado na Figura 3.1.

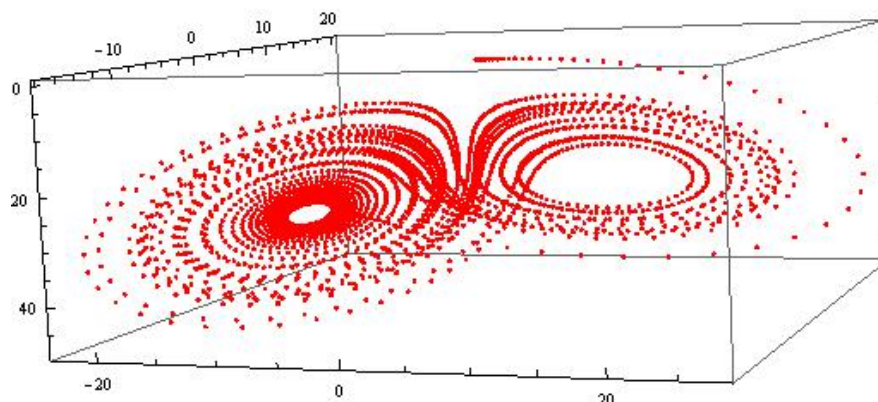


Figura 3.1 – Atrator de Lorenz com $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $r = 28$.

Fonte: Autoria Própria, 2017.

As trajetórias oscilam em torno dos dois pontos críticos C_1 e C_2 de uma maneira aparentemente aleatória e imprevisível. O atrator estranho tem as seguintes propriedades:

- A trajetória é aperiódica (ou não periódica).
- A trajetória permanece no atrator para sempre (o atrator é invariante).
- A forma geral é independente das condições iniciais.
- A sequência de enrolamentos é sensível às condições iniciais.
- O atrator tem estrutura fractal, sendo um fractal quase-autossimilar, pois aparentemente é observado uma forma idêntica de fractais em escalas distintas.

3.2 Expoente de Lyapunov para o Atrator de Lorenz

O cálculo do expoente de Lyapunov é importante para sabermos a caoticidade do sistema dinâmico. Por conta disso, nós vamos encontrar o expoente de Lyapunov para o atrator de Lorenz.

Para isso utilizamos o software mathematica, o pacote usado foi o "LCEs". Após o carregamento do pacote nós introduzimos as equações diferenciais que descrevem o sistema do atrator de Lorenz estabelecendo os valores das condições iniciais e dos parâmetros σ, b e r . Com estas informações podemos plotar o gráfico através do comando "LCEsPlot para True"

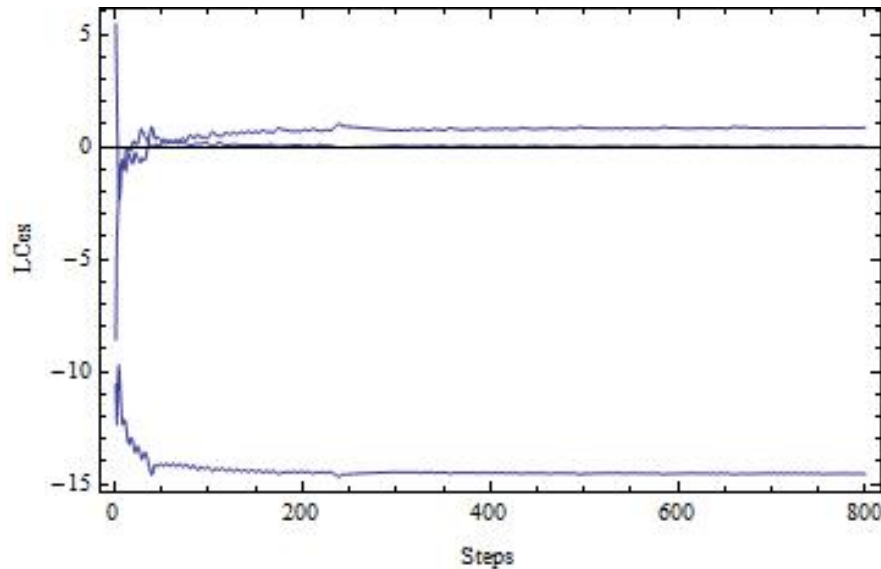


Figura 3.2 – Expoente de Lyapunov para o atrator de Lorenz.

Fonte: Autoria própria, 2017.

Os expoentes de Lyapunov encontrados foram 0.883414, 0.00363811 e -14.552 , que segundo o artigo [9] este atrator é classificado como um atrator caótico. As soluções desse atrator que representam trajetórias que inicialmente eram próximas, convergem para o infinito, o comportamento dessas trajetórias não é possível prever com precisão. Dessa maneira, o que pode ser feito são análises probabilísticas para a descrição desse atrator.

3.3 O Pêndulo Simples

O estudo da natureza das oscilações e a descoberta da periodicidade do movimento pendular foi desenvolvido por Galileu Galilei. O movimento de um pêndulo simples envolve basicamente uma grandeza chamada período, representado por T , onde este é o intervalo de tempo que o corpo leva para percorrer toda a trajetória. O pêndulo simples é a representação de um sistema não-linear com trajetória previsível que oscila em torno de um ponto fixo. Na figura 3.3 é mostrado um esquema

de um pêndulo simples, onde um corpo rígido de massa m pendurado em uma barra de ferro de comprimento l e ângulo de variação θ

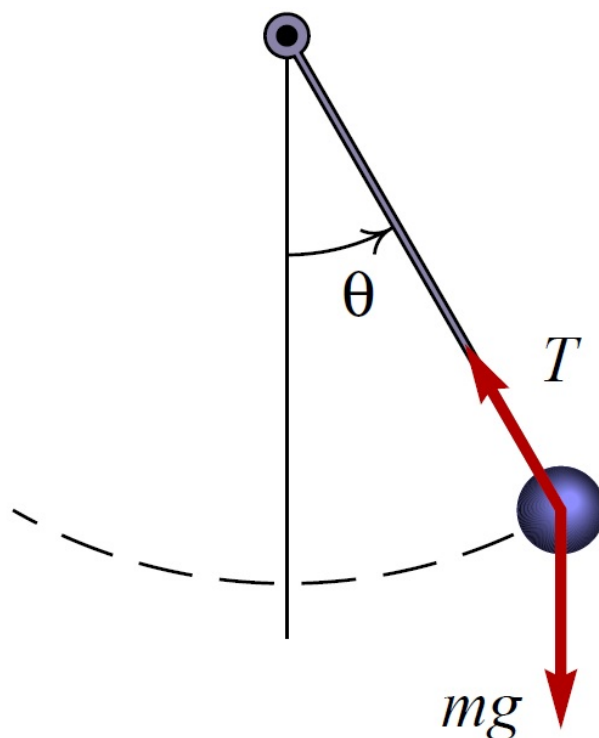


Figura 3.3 – Representação de um Pêndulo Simples

O pêndulo simples. A força de vínculo é a tensão no fio, que mantém a partícula a uma distância fixa $r = a$ da origem.

Fonte: Tópicos de Mecânica Clássica [3]

A aceleração tangencial desse corpo rígido é igual ao comprimento do pêndulo l vezes a aceleração angular ω . Por outro lado, a aceleração tangencial será igual à projeção tangencial do peso, a dividir pela massa:

$$l\dot{\omega} = -g\sin\theta \quad (3.2)$$

onde $\omega = \dot{\theta}$ é a velocidade angular. Este sistema não-linear é de segunda ordem como pode ser visto no sistema abaixo:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\frac{g}{l}\sin\theta \end{cases} \quad (3.3)$$

Os pontos fixos deste sistema estão no eixo do ângulo θ , desse modo o ângulo formado é zero, então a velocidade angular ω será nula, os valores do $\sin\theta$ para estes pontos fixos são nulos. Dessa forma,

existem um número infinito de pontos fixos:

$$(0, 0), (\pm\pi, 0), (\pm2\pi, 0), \dots$$

A posição de equilíbrio do pêndulo, no caso $\theta = 0$, corresponde ao primeiro ponto fixo $(0, 0)$ do sistema. Neste caso, trata-se de um ponto de equilíbrio estável onde um pequeno impulso coloca o pêndulo a oscilar em torno desse ponto, então esse ponto deve ser um centro no retrato de fase. Os pontos fixos pares, $\theta = \pm2\pi, \pm4\pi, \dots$ são o mesmo ponto, mas somente após o pêndulo ter realizado pelo menos uma volta desde a posição inicial. O segundo ponto $(\pi, 0)$ corresponde a posição mais alta do pêndulo, onde é possível mantê-lo em equilíbrio. Este ponto corresponde ao mesmo ponto em $\theta = -\pi, \pm3\pi, 4\pi, \dots$. Esses pontos são pontos de equilíbrio instáveis, assim um pequeno impulso faz com que o pêndulo deixe da sua posição de equilíbrio, podendo ser um nó repulsivo ou um ponto de sela. Para identificar a natureza desses pontos fixos será construído a matriz jacobiana,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} & \frac{\partial \omega}{\partial \omega} \\ -\frac{g}{l} \frac{\partial \sin \theta}{\partial \theta} & -\frac{g}{l} \frac{\partial \sin \theta}{\partial \omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos \theta & 0 \end{bmatrix}$$

Pode-se observar que o traço da matriz é nulo. Isso indica que os pontos fixos serão pontos de centro ou de sela. O determinante da matriz jacobiana é

$$D = \frac{g}{l} \cos \theta \tag{3.4}$$

onde a aceleração da gravidade, g , e o comprimento do pêndulo, l , são constantes positivas. Dessa maneira, o determinante dos pontos fixos em $\theta = 0, \pm2\pi, \pm4\pi, \dots$ é positivo. Devido esse ponto apresentar essas características pode-se concluir que estes pontos fixos são centros. Enquanto que para os pontos fixos $\theta = \pm\pi, \pm3\pi, \dots$ o determinante é negativo. De acordo com a subseção 2.7.1 esses pontos fixos são pontos de sela. Para plotar o retrato de fase deste pêndulo serão dados valores para as constantes g e l . Os valores usados são da referência [5], assim o comprimento do do pêndulo é de 50 cm e a aceleração da gravidade é igual a $9.8m/s^2$. Dessa forma, no sistema internacional de unidades, e usando o sistema 3.25 temos as equações do pêndulo:

$$\dot{\theta} = \omega \quad \dot{\omega} = -19.6 \sin \theta \tag{3.5}$$

Para usar o software matemático Maple, as coordenadas θ e ω serão substituídas por x e y , respectivamente. O intervalo θ irá variar de -10 a 10 onde aparecerão 3 pontos fixos do tipo centro $(-2\pi, 0, 2\pi)$ e 4 pontos de sela $(-3\pi, -\pi, \pi, 3\pi)$. Esses termos podem ser observados na figura 3.4

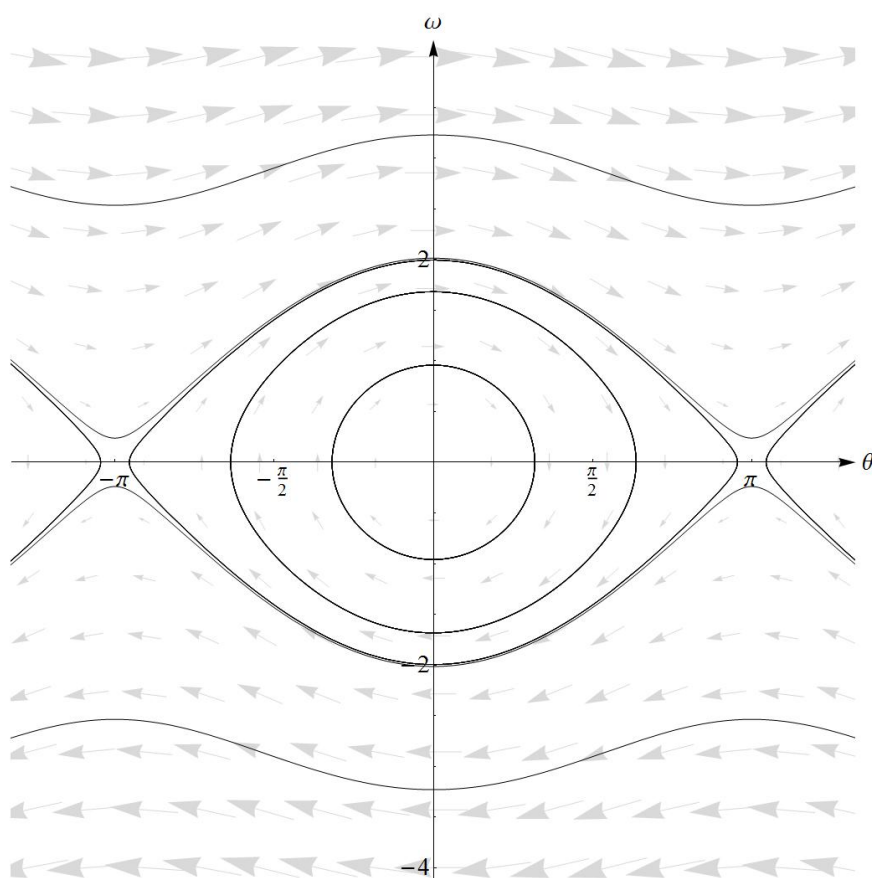


Figura 3.4 – Representação do Pêndulo Simples

Retrato de fase do Pêndulo Simples.

Fonte: Autoria própria, 2017.

Na região elíptica, o pêndulo foi largado do repouso. Na região entre $-\pi$ e π corresponde ao lançamento do pêndulo, apesar deste movimento parecer harmônico a solução dele no espaço de fase não é uma elipse perfeita. Assim as funções $\theta(t)$ e $\omega(t)$ não são funções harmônicas

3.3.1 Expoente de Lyapunov para o Pêndulo Simples

Na seção 2.8 foram estudadas algumas características do expoente de Lyapunov. Agora nós iremos tratar da característica desse expoente para o caso do pêndulo simples. Os expoentes de Lyapunov indicam a sensibilidade das soluções através da divergência ou convergência de uma função exponencial. A sensibilidade do sistema dinâmico quanto às condições iniciais deve ser analisada para cada dimensão do sistema [8]. Desse modo, os expoentes obtidos para um caso bidimensional e a caoticidade são estudados por meio de observação dos maiores expoentes de Lyapunov.

Os expoentes de Lyapunov foram calculados usando o comando LCEsC do software *mathematica* que podem ser observados a seguir

$$\begin{aligned}
 &0.0411351, -0.0411351 \\
 &0.0257132, -0.0257132 \\
 &0.0202607, -0.0202607 \\
 &0.0164802, -0.0164802 \\
 &0.0137167, -0.0137167 \\
 &0.0114003, -0.0114003 \\
 &0.0094274, -0.0094274 \\
 &0.00850269, -0.00850269
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Nos pares ordenados (σ_1, σ_2) temos valores que tendem a zero, Por exemplo, para $\sigma_1 = 0,0411351$ e $\sigma_2 = -0,0257132$, no primeiro par ordenado, usamos 800 passos e para o segundo par ordenado com valores de σ_1 e σ_2 de $0,0257132$ e $-0,0257132$, respectivamente. Neste caso os valores de passos foram dobrados. Por fim, temos o último par ordenado usado com $\sigma_1 = 0,00850269$ e $\sigma_2 = -0,00850269$ com 6.400 passos confirmando o esperado dessa solução. Todas as soluções tem o mesmo comportamento, os pares ordenados são simétricos, o sistema é conservativo e eles tendem a zero. Uma solução no tempo t varia exponencialmente com a condição inicial e a exponencial é $e^{\sigma t}$. Então o mais importante que nós temos é o sinal, pois é o sinal que vai determinar se essa função vai aumentar ou diminuir exponencialmente. Não importa quais são os expoentes, mas verificar o maior deles, porque é através deste que o comando calcula o expoente de Lyapunov de maneira que quando os espaços tendem ao infinito o valor que estamos obtendo tende ao expoente de Lyapunov. Espera-se que o número de passos no infinito a solução vai tender a zero. Nesse caso, não é um atrator, mas uma solução periódica em um sistema conservativo [9].

3.4 Osciladores amortecidos

As oscilações harmônicas simples, normalmente, aparecem nos estudos de sistemas conservativos. No entanto, na prática sempre ocorre dissipação de energia. Quando um sistema físico é posto a oscilar livremente, as oscilações diminuem com o passar do tempo até o sistema ficar em estado estacionário. Seja um sistema de suspensão de um automóvel. Dentro da mola há um **amortecedor**, ou seja, um cilindro cheio de óleo, que produz uma força contrária ao movimento, diretamente

proporcional a velocidade:

$$F_v = -av$$

onde a é uma constante. A equação de movimento do oscilador amortecido é apresentada na forma diferencial:

$$\ddot{y} + b\dot{y} + \omega^2 y = 0 \tag{3.7}$$

onde $b = a/m$. Trata-se de uma equação linear de segunda ordem, que pode ser resolvida analiticamente usando o comando **DEtools** do software Maple, figura, e os comandos estão disponíveis no apêndice A deste trabalho

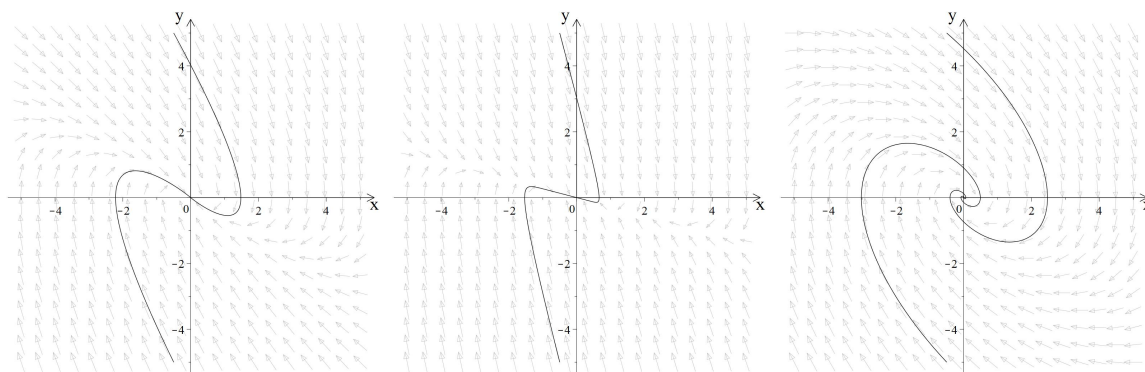


Figura 3.5 – Representação do oscilador hamônico amortecido Amortecedor à esquerda e gráfico dos amortecimentos fraco, forte e crítico à direita.

Fonte: Introdução ao sistema dinâmico-abordagem prática com o máxima.

Neste caso são obtidas três soluções. No gráfico da figura (3.5) é possível perceber essas três soluções. Para $b < 2\omega$, onde o amortecimento é fraco, e a solução é uma função que oscila com uma amplitude que decresce rapidamente. Quando $b = 2\omega$ é um tipo de **amortecimento crítico**, pois é obtida uma solução que decresce rapidamente, aproximando-se de $y = 0$, neste caso, para algumas situações o valor de y pode mudar de sinal antes de tender a zero. Finalmente, $b > 2\omega$ que corresponde ao caso de **sobreamortecimento** (ou amortecimento forte), em que y decresce para zero. Um oscilador real sempre tem um termo de amortecimento devido ao atrito com o ar. Dessa forma, o amortecimento pode ser muito fraco, assim a amplitude das oscilações diminui lentamente. O sistema autônomo de primeira ordem que representa este oscilador é,

$$\begin{cases} \dot{x} = y(t) \\ \dot{y} = -\omega(t) - by(t) \end{cases} \tag{3.8}$$

No retrato de fase, no exemplo do automóvel, os amortecedores produzem amortecimento crítico ou forte. Com o passar do tempo, o óleo do amortecedor começa a perder pressão, devido ao resgaste, e quando o sistema entra na fase de amortecimento fraco, o carro oscila quando a carroceria é empurrada para baixo, desse modo é indicado a necessidade de mudar os amortecedores.

3.5 Osciladores de Van der Pol

O oscilador de Van der Pol é um tipo de oscilador que é excitado por uma força externa periódica. Este é o caso mais geral Um caso de particular interesse é quando $f(x)$ é negativo para pequenas magnitudes (intensidades) de x , e positivo para grandes deslocamentos. A mais simples aproximação que representa esse comportamento é um polinômio quadrático:

$$f(x) = \alpha(x^2 - x_0^2), \quad (3.9)$$

Onde α é o coeficiente de não linearidade que funciona como um parâmetro de controle e dois zeros estão onde $x = \pm x_0$. Os zeros podem ser ajustados para o valor 1 sem perda de generalidade, reescrevendo as variáveis para $x' = x/x_0$ com $\alpha' = \alpha x_0^2$. Por conveniência pode ser escolhido o valor 1 para a frequência, reescrevendo o tempo: $t_j = \omega_0 t$ com $\alpha_j = \alpha_j/\omega$, resultando na nova equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (3.10)$$

Essa é a equação diferencial do engenheiro Balthasar Van der Pol foi discutida em 1926. A princípio, ela foi utilizada para descrever circuitos oscilatórios eletrônicos com válvulas, no entanto, para o ele a equação poderia ser aplicada para uma variedade de processos vibracionais. Na verdade a origem dessa equação pode ser traçada ainda mais longe, desde cerca de 1880 quando Lord Rayleigh investigou as seguintes equações diferenciais no contexto de vibrações não lineares:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \alpha \left[\frac{1}{3} \left(\frac{dv}{dt} \right)^3 - \frac{dv}{dt} \right] + v = 0 \quad (3.11)$$

Observando as equações (3.16) e (3.19), vemos que basta diferenciarmos a equação de Rayleigh com relação ao tempo e substituímos

$$\frac{dv}{dt} = x, \quad (3.12)$$

para chegar na equação de Van der Pol (3.10). Assim, as equações são essencialmente equivalentes uma a outra. A equação de van der Pol (3.10) pode ser transformada usualmente na forma padrão

(2.1) de duas equações diferenciais de primeira ordem para o vetor $x(t) = (x, y)^T$:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad (3.13)$$

$$\frac{dy}{dt} = -x - \alpha(x^2 - 1)y. \quad (3.14)$$

É conveniente transformar para coordenadas polares no plano de espaço de fase x, y :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (3.15)$$

As derivadas temporais de r e θ podem ser expressas por aquelas de x, y . Para a coordenada radial a relação segue imediatamente para a diferencial de $r^2 = x^2 + y^2$:

$$r \frac{dr}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \quad (3.16)$$

É uma relação análoga para coordenadas angulares pode ser obtida pela derivada temporal de (3.15):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta, \quad (3.17)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \frac{d\theta}{dt} \cos \theta. \quad (3.18)$$

Multiplicando a primeira equação por y , e a segunda por x e subtraindo ambas as equações, obtém-se

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = x \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt}. \quad (3.19)$$

Usando (3.11) e (3.14), o sistema de equações de Van der Pol em coordenadas polares, se torna:

$$\frac{dr}{dt} = -\alpha(r^2 \cos \theta - 1)r \sin^2 \theta, \quad (3.20)$$

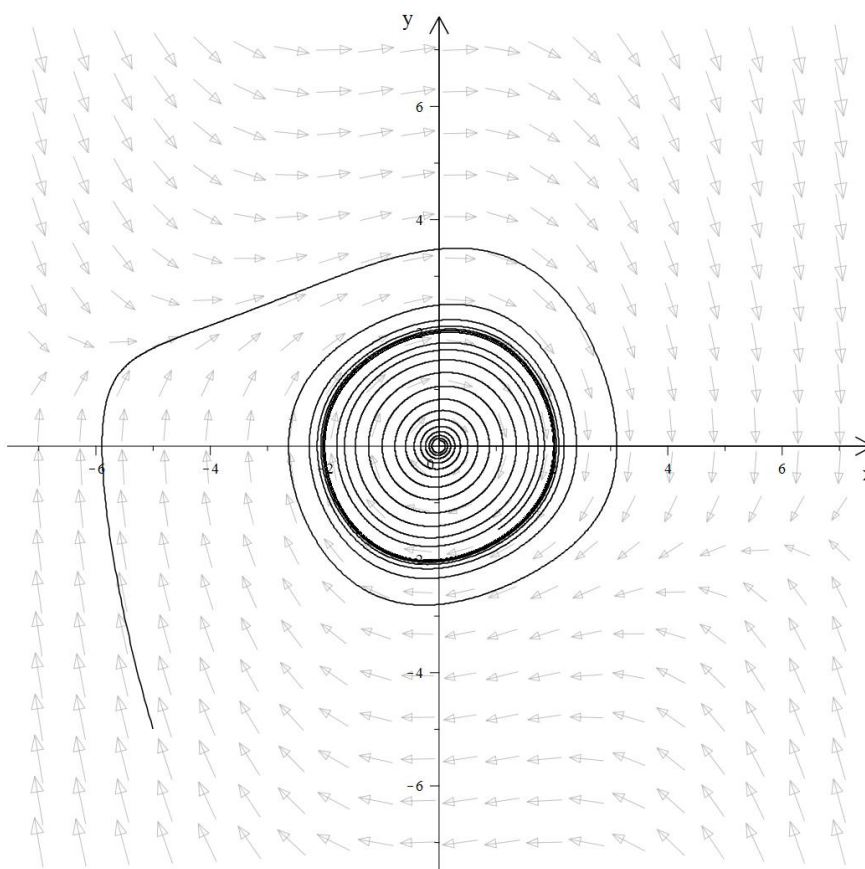
$$\frac{d\theta}{dt} = -1 - \alpha(r^2 \cos \theta - 1) \sin \theta \cos \theta. \quad (3.21)$$

Os termos não lineares do lado direito tem formato bastante complexo, mas podem ser feitas algumas afirmações qualitativas na solução esperada. Para o limite de $\alpha = 0$, deve existir um oscilador harmônico normal. As trajetórias no espaço de fase são ciclos que são percorridos uniformemente com frequência 1, ou seja,

$$x(t) = \rho \sin(t - t_0). \quad (3.22)$$

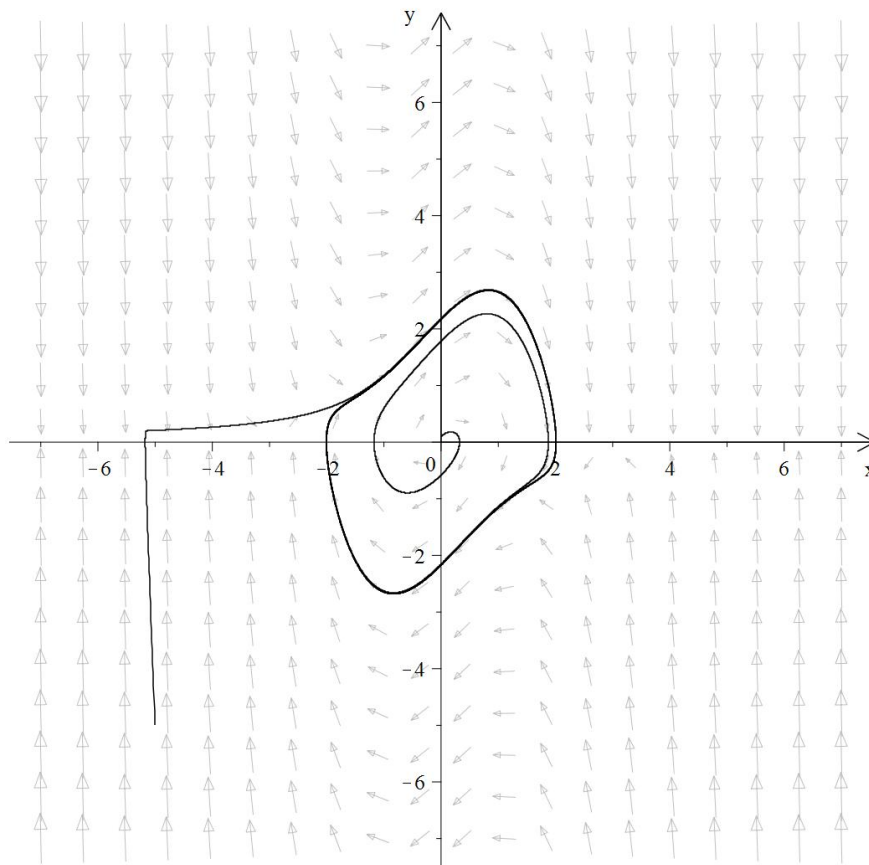
com ρ e t_0 arbitrários. Dada a devida não linearidade em (3.20) e (3.21), o comportamento da solução é modificado. Contudo que $\alpha \ll 1$, a influência de frequência de revolução permanece pequena: desde que a função $\sin \theta \cos \theta$ mudam os seus sinais duas vezes em cada período, a influência do

termo não linear em (3.21) se cancelam na média. Para o movimento radial como a função $\text{sen}\theta\text{cos}\theta$ muda seu sinal duas vezes em cada período. A influência do termo não-linear no momento $\text{sen}^2\theta$ é definido positivamente, e pequenas modificações no raio podem acumular de período a período. A direção de evolução do efeito é determinado pelo sinal de $-\alpha(r^2\text{cos}^2\theta - 1)$. As soluções podem variar de comportamento conforme o valor de α . Por exemplo, para deslocamentos muito menores que 1, esse termo $-\alpha(r^2\text{cos}^2\theta - 1)$ será sempre positivo, porque o termo será muito pequeno, ficando apenas α . Para deslocamentos muito grandes, em que $r \gg 1$, esse termo $-\alpha(r^2\text{cos}^2\theta - 1)$ não terá influência nenhuma α será positivo e o resto será negativo. E nós acabamos com um $\text{cos}^2\theta$ presente na equação, ou seja, quando temos um deslocamento muito grande surge um termo periódico; a periodicidade será determinada pelo α . Então o ciclo limite seria um movimento quando o sistema tende para um tempo muito grande. Se o valor de α começar pequeno e depois tender para um valor grande, a trajetória é uma espiral se aproximando de um ciclo limite. O resultado para um cálculo numérico com os comandos do software matemático Maple para o valor de $\alpha = 0.1$ é representado na figura 3.6. É possível seguir o movimento espiralado em direção ao ciclo limite. Além disso, desvios de vibrações puramente harmônicas se tornam visíveis.

Figura 3.6 – Oscilador de Van der Pol com $\alpha = 0.1$.

Fonte: Walter Greiner

Ainda mais interessante é a solução no limite oposto, quando $\alpha \gg 1$, no qual a não linearidade toma um papel dominante. Aqui também, o ciclo limite se desenvolve pelas mesmas razões, o formato do qual, no entanto, fortemente difere de uma vibração harmônica. A Figura 3.7 mostra o espaço de fase e a tendência da amplitude do ciclo limite para o caso em que $\alpha = 10$. É possível notar que o deslocamento se mantém no alcance de amplitude máxima $x = 2$, e lentamente decresce para $x = 1$. Subsequentemente uma virada repentina se ajusta e o deslocamento diminui para $x = -2$. Então o processo se repete, mas com sinal oposto. O comprimento do período desse tipo de vibração não é mais determinado pela frequência de oscilação, mas por um valor muito maior.

Figura 3.7 – Oscilador de Van der Pol com $\alpha = 10$.

Fonte: Walter Greiner

O movimento executado por um oscilador de Van der Pol para α grande é chamado de vibração de relaxamento. O nome indica que a tensão aumenta lentamente, o que então se equilibra por um processo de relaxamento súbito. Essas vibrações de relaxamento ocorrem frequentemente na natureza. Por exemplo, a vibração em uma corda excitada por ar, o rangido de um freio, ou mesmo o ritmo da batida do coração ou a variação do tempo da população de animais podem ser classificadas dessa forma. Uma importante e também propriedade útil na prática dos osciladores não lineares com o ciclo limite reside no fato de *auto excitações* vibracionais, ocorrem e são bem definidas independentemente das condições iniciais. Assim, sem a prova de um teorema matemático, os possíveis tipos de movimento em sistemas bi-dimensionais, que correspondem a um sistema mecânico com um grau de liberdade são completamente governados por pontos fixos e ciclos limite.

Considerações Finais

O desenvolvimento deste trabalho possibilitou uma análise física de alguns fenômenos existentes na natureza. Essas análises foram feitas por meio de livros, dissertações e apostilas relacionadas a estes assuntos. Além disso, foram utilizados três softwares matemáticos, Maxima, Maple e Mathematica, possibilitando uma análise com mais detalhes através dos dados obtidos de forma rápida e eficaz e, também, proporcionando outra maneira de visualizar os problemas relacionados à física.

Neste trabalho foi realizada uma abordagem histórica sobre os caminhos da mecânica até os tempos de Isaac Newton. Após a formulação da mecânica de Newton, foram desenvolvidas outras técnicas para descrever a mecânica vetorial. Essas novas técnicas emergiam do formalismo de Hamilton e de Lagrange. Em seguida, foram introduzidos os conceitos sobre os sistemas dinâmicos não-lineares por meio das definições de sistemas dissipativos, soluções em equilíbrio, estabilidade em duas dimensões, atratores, ciclo limite, bifurcações onde foi possível observar os comportamentos dos sistemas com as mudanças de parâmetros de controle e condições iniciais. E por fim o software Mathematica foi usado para calcular os expoentes de Lyapunov do atrator de Lorenz e do pêndulo simples onde foi observado dois fenômenos distintos. O atrator de Lorenz apresenta um comportamento caótico, enquanto que o pêndulo simples mostra-se com comportamento previsível.

No decorrer do desenvolvimento do presente trabalho foram utilizadas algumas ferramentas de apoio como livros que tratavam de sistemas dinâmicos como é o caso do livro "Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics", de Walter Greiner, dissertações com temas afins, revistas acadêmicas sobre o assunto e os softwares Maple e Mathematica para a realização dos cálculos e plotagem dos gráficos mostrados nos capítulos com a finalidade de uma abordagem mais completa.

O mapa de Poincaré incluso neste trabalho é útil em análises qualitativas para a discretização do espaço, no entanto, não foi utilizado na análises das aplicações devido o tempo limitado. Assim, espera-se que sejam feitas novas análises para contribuir no campo das ciências em futuros trabalhos acadêmicos.

Referências Bibliográficas

- [1] GREINER, Walter. **Classical Mechanics: Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics**. 2ª Edição. New York: Springer, 2010. 580 p.
- [2] WATARI, Kazunori. **Mecânica Clássica, vol. 1**. 2ª Edição. São Paulo: Livraria da Física, 2004.
- [3] AGUIAR, Marcus A. M. **Tópicos de Mecânica Clássica**. São Paulo: Livraria da Física, 2010. 250 p.
- [4] HALLIDAY, David. **Fundamentos da Física: Mecânica, vol. 1**. 8ª Edição. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- [5] VILLATE, Jaime A. **Introdução aos Sistemas Dinâmicos: Uma Abordagem Prática com Maxima**. Disponível em: http://www.villate.org/doc/sistemasdinamicos/sistdinam-1_2.pdf. Edição do Autor: Porto, 2007.
- [6] LEMOS, Nivaldo. **Mecânica Analítica**. 2ª Edição. São Paulo: Livraria da Física, 2007.
- [7] Lynch, Stephen. **Dynamical System with Applications using Mathematica**. 1ª Edição. Boston: Birkhäuser, 2007. 497 páginas.
- [8] MEDEIROS, Everton S. **Controle de Caos e Saltos entre Atratores em um Sistema com Impactos**. 77 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2010.
- [9] SANDRI, Marco. **Numerical Calculations of Lyapunov Exponents**. *The Mathematica Journal*, v.6, n.3, p.78-84, 1996.
- [10] GOLDSTEIN, Herbert; POOLE, Charles P.; SAFKO, John L. **Classical Mechanics**. 3ª Edição. Pearson Educ, 2001.



Comandos do Maple e Mathematica

Neste tópico serão mostrados os comandos dos softwares utilizados ao longo do trabalho de conclusão de curso. A intenção de disponibilizar os comandos é facilitar os trabalhos futuros que necessitem dessas ferramentas. Neste trabalho foram utilizados dois tipos de softwares, o Maple e o mathematica, a princípio serão tratados os comandos das figuras do Maple.

A.1 Comandos - Maple

A utilização de imagens em qualquer trabalho acadêmico é inevitável, no entanto, nem sempre encontramos a imagem desejada. Os softwares de simulação gráfica podem auxiliar e para utilizá-los é necessário saber como funcionam alguns comandos. No capítulo 2 foi utilizado o Maple para plotar os retratos de fase vistos na seção 2.4 de estabilidade linear em duas dimensões e na seção 2.6 de bifurcações. O primeiro passo é definir as equações de movimento e utilizar o comando "DEplot" para especificar as condições iniciais, os tipos de soluções, o tamanho de das setas etc. Assim, serão agrupados vários comandos através do comando "display". A seguir é mostrado os

comandos do primeiro retrato de fase da figura 2.1 do capítulo 2

$$deS := diff(x(t), t) = -x(t) + y(t)$$

$$deI := diff(y(t), t) = (1/2) * x(t) - y(t)$$

```
p1 := DEtools[DEplot]([deS, deI], [x(t), y(t)], t = 0..40, x = -5..5, y = -5..5, [[x(0) = 0, y(0) = 5], [x(0) = 0.1e - 3, y(0) = -5], [x(0) = -0.1e - 4, y(0) = -5], [x(0) = 0.1e - 4, y(0) = 5], [x(0) = -5, y(0) = 0.1e - 4], [x(0) = 5, y(0) = 0.1e - 4]], arrows = medium, color = gray, numpoints = 1000, linecolor = black, arrowsize = magnitude, thickness = 1, axesfont = [title, "ROMAN", 26], labels = [, ], eixos := plots[textplot]([[-.3 * (5/3), 3.15 * (5/3), "y"], [3.15 * (5/3), -.3 * (5/3), "x"]], font = [title, "ROMAN", 26], 'align' = 'above', 'right'), setax := plots[arrow](<, >, (0, 3.25 * (5/3)), shape = arrow, color = black, width = [0.7e - 1 * (5/3)], headlength = [.13 * (5/3)]), setay := plots[arrow](<, >, (3.25 * (5/3), 0), shape = arrow, color = black, width = [0.7e - 1 * (5/3)], headlength = [.13 * (5/3)]), plots[display](p1, eixos, setay, setax, size = [1050, 1050])
```

(A.1)

Como pode ser observado na imagem 2.1 da seção de estabilidade linear em duas dimensões, temos outros retratos de fase e para todos eles foram utilizados os mesmos comandos. No trabalho foram utilizados dois pacotes o “*DEtools*” e “*plots*” onde pode ser observado no comando acima que utilizamos “*DEtools[DEplot]*”, “*plots[display]*”, “*plots[textplot]*” e “*plots[arrow]*”, cada comando exerce uma função as quais serão explicadas em seguida.

1. “*DEplot*”

Este comando é utilizado quando se deseja plotar o retrato de fase do sistema. O retrato de fase é construído de acordo com o sistema de equações diferenciais usado. Observando os comandos percebemos os comandos devem estar entre parênteses e os termos individuais estão separados por vírgulas como é caso das equações das variáveis “[*deS, deI*]”, das variáveis “[*x(t), y(t)*]” e os outros termos encontrados separados por vírgulas. É importante ressaltar que, neste comando os parâmetros devem estar de forma explícita, no modo $x(t)$.

É importante identificar as equações utilizadas por nomes diferentes. Para isso, escreve-se o nome escolhido e depois coloque o símbolo $:=$. Esta identificação de equações é feita para facilitar o uso do comando “*display*”. Os nomes das equações para este caso são “*deS*” e

“*deI*” e estão no primeiro colchete do comando “*DEplot*”. Em seguida colocamos as variáveis com a dependência do parâmetro, o qual deve ser identificado em seguida, por exemplo, “[$x(t), y(t)$], $t = 0..40$,”. Logo após temos “ $x = -5..5, y = -5..5$ ”, esse comando corresponde a delimitação do espaço de fase através da limitação dos eixos x e y . Dessa maneira, é plotado o campo vetorial do sistema de equações diferenciais escolhido. Na sequência colocamos as condições iniciais entre parênteses, como nos outros comandos, para a plotar as soluções que irão parecer no retrato de fase. Com todos os comandos citados no texto temos uma imagem com várias informações contidas.

Na imagem obtida podemos utilizar dois métodos para personalizá-la. O primeiro é utilizar as opções do comando e o segundo é plotar outras figuras para depois unir todas elas com a imagem original usando o comando “*display*”. Nos comandos do programa existem outros termos do “*DEplot*”. Entre esses termos existe o “*arrow*” que apresenta a função de definir os tamanhos das setas do campo vetorial, “*color*” para definir a cor do campo vetorial. “*mumpoints*” para limitar a quantidade de pontos a serem plotados, “*linecolor*” que dá a cor das soluções, “*arrowsize*” que identifica a intensidade do campo vetorial através do tamanho das setas, “*thickness*” que define a espessura das linhas das soluções, “*axesfont*” que serve para escolher a fonte dos números e rótulos dos eixos e por fim, o “*labels*” que identifica o rótulo dos eixos e foi deixado em branco para controlarmos melhor esta informação, como veremos.

2. “*textplot*” e “*arrow*”

Para melhorar a visualização da figura podemos rotular as figuras utilizamos os comandos “*textplot*” e “*arrow*” para a orientação das setas. O primeiro comando é usado na forma “*plots[textplot]([posiovertical], “texto”, opes)*”. Assim, podemos colocar letras em parte do plano por meio da opção “*font*” para a escolha do tipo e o tamanho da fonte e o comando “*align*” para alinhar as palavras em uma caixa de texto, caso sejam muitas. O segundo comando foi usado na forma `plot[arrow](‘ <, >’(coordenada 1 do ponto de origem, coordenada 2 do ponto de origem), ‘ <, >’(coordenada 1 do ponto final, coordenada 2 do ponto final), opções)`. O termo ‘ <, >’, é usado para representar vetores, por exemplo, ‘ <, >’ (x, y)” é uma representação de um vetor com coordenadas x e y . Neste comando foi utilizado apenas um dos pontos para plotar uma seta da origem até o ponto final. Com as coordenadas utilizadas, estas setas foram úteis para colocar a seta de orientação dos dois eixos x e y nas figuras, depois

de ajustá-las com as opções “*shape*” para escolher o formato desejado das setas, “*color*” para definir as cores das setas e “*width*” e “*headlength*” onde o primeiro é para definir a largura e o segundo é para o comprimento da ponta.

3. “display”

Este serve para combinar várias imagens em apenas uma sendo imprescindível para complementar a imagem principal. Como cada comando tem seus respectivos nomes, colocamos eles no comando “*plots[display](nomedafigura1, ..., nomedafiguran, opes)*”. Como as imagens serão plotadas em própria proporção, as imagens menores podem apresentar pouco visibilidade, para este caso. Para resolver este problema será usado o comando “*size*” para definição das imagens em pixels e para padronizar o tamanho das figuras.

A.2 Comandos - wxMaxima

Este programa pode ser utilizado no estudo em sistema com duas dimensões. Com ele podem ser feitos cálculos e plotagem de gráficos. Neste trabalho o software foi utilizado para fazer os cálculos da matriz Jacobiana na seção 2.6 de bifurcações. A seguir são mostrados os comandos usados

$$\begin{aligned} A &: matrix([2x, 0], [0, -1]); \\ &eigenvectors(A); \end{aligned} \tag{A.2}$$

e calculamos a matriz jacobiana nos quatro pontos do sistema 2.41, seus traços e determinantes com:

$$\begin{aligned} l &: [2 - x^2, -y]; \\ fixos &: ev(solve(l), numer); \\ v &: [x, y]; \\ h[i, j] &:= diff(f[i], v[j]); \\ jacobiana &: genmatrix(h, 2, 2); \\ jacobiana1 &: jacobiana, fixos[1]; \\ determinant &(jacobiana1); \\ jacobiana1[1, 1] &+ jacobiana1[2, 2]; \end{aligned} \tag{A.3}$$

Cada comando tem uma função importante no programa, estes serão explicadas como segue

1. “matrix” e “eigenvectors”

Estes comandos indicam que a saída do comando está sendo identificada por algum nome, neste caso o código dado é a letra "A". O comando `matrix` é utilizado na programação do software na forma: `matrix([2x, 0], [0, -1])`, onde o termo $2x$ é o elemento da primeira linha e primeira coluna, o 0 é o elemento da segunda linha e primeira coluna, o 0 é o elemento da segunda linha e segunda coluna e o -1 , do segundo parênteses é o elemento da primeira coluna. Tendo uma matriz podemos usar o comando "eigenvectors" que serve para calcular os autovetores e autovalores da matriz Jacobiana.

2. "ev" e "solve"

Na parte do cálculo dos determinantes, nos comandos acima, foi feita uma lista com duas equações como "l". Para efetuar o cálculo das equações que estão em "l" usamos o comando "fixos" para encontrarmos os pontos fixos deste sistema. Para obter o valor numérico da expressão utilizamos o comando "ev", colocando "number" na parte opção. Para a expressão usou-se o comando "solve" na resolução das equações. Caso seja de interesse encontrar calcular cada ponto fixo utiliza-se o comando "fixos[1]" para o primeiro ponto, "fixos[2]" para o segundo ponto e assim sucessivamente.

3. "diff", "genmatrix" e "determinant"

Após os procedimentos anteriores, temos que encontrar a matriz Jacobiana. Para isso, utilizamos definimos uma nova lista "v:[x,y]". Com cada elemento da lista obedece a equação, X, podemos definir o termo "h[i,j]:=diff(f[i],v[j])". O comando "diff" fornece o resultado da derivada de uma função por uma dada variável. Como cada termo da lista tem um índice, podemos usá-lo para escolher um termo da matriz individualmente. Assim, podemos utilizar o comando "genmatrix" que foi rotulado como jacobiana para construir a matriz Jacobiana. Isto pode ser observado nos comandos na forma: "jacobiana: genmatrix(h,2,2)". Caso seja de interesse encontrar a matriz Jacobiana com os valores dos pontos fixos no lugar de suas variáveis usa-se "jacobiana, fixos[1]". Por fim, temos o comando "determinant" para calcular o determinante da matriz.

A.3 Comandos - Mathematica

O software mathematica pode ser usado para plotar gráficos e efetuar cálculos numéricos. Neste trabalho este software foi usado para plotar o retrato de fase do atrator de Lorenz no capítulo 3,

seção 3.1 e para calcular o expoente de Lyapunov para o atrator de Lorenz, os comandos de ambos seguem respectivamente.

```
a = 10; b = 8/3; r = 28;
x = 1; y = 1; z = 1; points = {{1, 1, 1}};
i := AppendTo[ points, {x = N[x + (a*y - a*x)/100], y = N[y + (-x*z + r*x - y)/100], z = N[z + (x*y -
Do[i, {3000}]
ListPointPlot3D[points, PlotStyle -> {Red, PointSize[Tiny]]}

```

(A.4)

Analisando os comandos acima podemos perceber que não foram precisos vários comandos. Na primeira linha temos os valores dos parâmetros do sistema com seus respectivos valores, na segunda linha temos a delimitação dos eixos x , y e z e a quantidade de pontos em cada direção, na terceira linha foi dada uma identificação para a função, neste caso “i”. O comando “AppendTo” tem a função de \$. Na quarta linha temos o comando para o número de passos e na última temos o comando para \$.

O próximo comando é do expoente de Lyapunov do atrator de Lorenz,

```
<< LCE`F[{x_, y_, z_}] := {10*(y - x), x*(28 - z) - y, x*y - 8/3*z}
LCEsC[F, {1, 1, 1}, 0.1, 800, 20, 0.02]
LCEsC[F, {1, 1, 1}, 0.1, 800, 20, 0.02, LCEsPlot -> True]

```

(A.5)

Para este caso temos um item ainda não mencionado, o “« LCE” que é um pacote que ativa o comando “LCEsC” que foi utilizado para encontrar os expoentes de Lyapunov das seções 3.2 e 3.4.