



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LERIANA CHAVES DA SILVA

**APLICAÇÃO DOS MÉTODOS NÚMERICOS SÉRIE DE TAYLOR E RUNGE-
KUTTA NA SOLUÇÃO DO MODELO EPIDEMIOLÓGICO DETERMINÍSTICO SI
(SUSCETÍVEIS-INFECTADOS) SOBRE OS DADOS REAIS DA TUBERCULOSE
NO MUNICÍPIO CODÓ-MA ENTRE OS ANOS 2001 E 2014**

CASTANHAL-PARÁ

2022

LERIANA CHAVES DA SILVA

APLICAÇÃO DOS MÉTODOS NÚMERICOS SÉRIE DE TAYLOR E RUNGE-KUTTA NA SOLUÇÃO DO MODELO EPIDEMIOLÓGICO DETERMINÍSTICO SI (SUSCETÍVEIS-INFECTADOS) SOBRE OS DADOS REAIS DA TUBERCULOSE NO MUNICÍPIO CODÓ-MA ENTRE OS ANOS 2001 E 2014

Trabalho de conclusão de curso apresentado à banca examinadora da Universidade Federal do Pará, para a obtenção do título de licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof^o Frayzer Lima de Almeida

CASTANHAL-PARÁ
2022

LERIANA CHAVES DA SILVA

APLICAÇÃO DOS MÉTODOS NÚMERICOS SÉRIE DE TAYLOR E RUNGE-KUTTA NA SOLUÇÃO DO MODELO EPIDEMIOLÓGICO DETERMINÍSTICO SI (SUSCETÍVEIS-INFECTADOS) SOBRE OS DADOS REAIS DA TUBERCULOSE NO MUNICÍPIO CODÓ-MA ENTRE OS ANOS 2001 E 2014

Trabalho de conclusão de curso apresentado à banca examinadora da Universidade Federal do Pará, como parte das exigências para a obtenção do título de licenciatura em Matemática.

Castanhal, ____ de junho de 2022.

BANCA EXAMINADORA:

PROF^o FRAYZER LIMA DE ALMEIDA
Orientador/Prof^o da FACMAT-UFPA

PROF^o JOSÉ GERALDO GONÇALVES DA SILVA
Membro da banca avaliadora/Prof^o da FACMAT-UFPA

Dedico este trabalho a minha família e amigos, em especial minha mãe Silvana, meu pai Livaldo, meu irmão Leuri Samuel e meu namorado Lucas que de forma direta ou indireta me ajudaram a vencer cada uma das etapas desse desafio.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família por confiarem esse processo a mim, e terem me dado todo apoio necessário para tal realização que é se formar no ensino superior em uma universidade pública.

Aos amigos, que sempre estiveram ao meu lado, pela amizade incondicional e pelo apoio demonstrado ao longo de todo o período de tempo em que me dediquei a este trabalho.

Agradeço ao professor e orientador Frayzer Lima de Almeida por toda atenção e disposição e por ter empenhado tal função com tamanha dedicação e amizade.

Aos professores, pelas correções e ensinamentos que me permitiram apresentar um melhor desempenho no meu processo de formação profissional ao longo do curso.

Aos meus colegas de turma da Matemática, com quem convivi intensamente durante os últimos anos, pelo companheirismo e pela troca de experiências que me permitiram crescer não só como pessoa, mas também como formando e profissional no âmbito da profissão que estou seguindo.

À instituição de ensino Universidade Federal do Pará campus Castanhal, essencial no meu processo de formação profissional, pela dedicação, oportunidade e por tudo o que aprendi ao longo dos anos do curso.

RESUMO

Em geral, a tuberculose, é causada por uma infecção por *Mycobacterium tuberculosis* ou Bacilo de Koch. O tratamento da tuberculose é à base de antibióticos e leva à cura, desde que não ocorra o abandono ao tratamento (MARCOLINO, 2016). A partir de dados reais da tuberculose cedidos pelo SINAM/Codó-MA entre os anos de 2001 e 2014 (MARCOLINO, 2016), este trabalho propõe através do modelo epidemiológico determinístico SI (suscetíveis, infectados), modelar e solucionar, através dos métodos numéricos da Série de Taylor e de Runge-Kutta, ambos de 2ª ordem, analisar a convergência das soluções numéricas propostas e calcular suas estimativas de previsão, tanto de infectados quanto de suscetíveis no município de Codó-MA. Observamos, que as soluções numéricas de infectados e suscetíveis, por (Série de Taylor e Runge-Kutta), aproximam-se tanto entre si quanto aos dados reais de infectados e de suscetíveis respectivamente. Constatamos, que estas soluções numéricas de infectados decrescem e suscetíveis crescem ambas de forma polinomial. A partir de 2014, é possível realizar estimativas de previsões através das soluções numéricas tanto dos infectados quanto dos suscetíveis.

Palavras-chave: Epidemiologia, Bio-matemática, Tuberculose, Taylor, Runge-Kutta.

ABSTRACT

Tuberculosis is usually caused by an infection with *Mycobacterium tuberculosis* or Koch's Bacillus. The treatment of tuberculosis is based on antibiotics and leads to a cure, provided that treatment is not abandoned (MARCOLINO, 2016). Based on real tuberculosis data provided by SINAM/Codó-MA between 2001 and 2014 (MARCOLINO, 2016), this work proposes, through the deterministic epidemiological model SI (susceptible, infected), to model and solve, through numerical methods from the Taylor and Runge-Kutta series, both of 2nd order, to analyze the convergence of the proposed numerical solutions and calculate their forecast estimates, both of infected and susceptible in the city of Codó-MA. We observed that the numerical solutions of infected and susceptible, by (Taylor and Runge-Kutta series), are as close to each other as to the real data of infected and susceptible respectively. We found that these numerical solutions of infected decrease and susceptible increase both in a polynomial way. From 2014 onwards, it is possible to estimate forecasts through numerical solutions for both infected and susceptible individuals.

Keywords: Epidemiology, Bio-mathematics, Tuberculosis, Taylor, Runge-Kutta.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	9
CAPÍTULO 1	10
1.1 HISTÓRIA DA TUBERCULOSE	10
1.2 AGENTE ETIOLÓGICO	11
1.3 TRANSMISSÃO DA TUBERCULOSE	12
1.4 SINTOMAS DA TUBERCULOSE	13
1.5 DIAGNOSTICO DA TUBERCULOSE	14
1.6 TRATAMENTO DA TUBERCULOSE	15
1.7 A TUBERCULOSE NO BRASIL	17
CAPÍTULO 2	20
2.1 EPIDEMIOLOGIA	20
2.2 MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS DETERMINÍSTICOS	20
2.3 MODELOS COMPARTIMENTAIS	21
2.4 MODELO SI – SUSCETÍVEL E INFECTADO	22
2.5 MODELO SIS – SEM DINÂMICA VITAL	25
CAPÍTULO 3	27
3.1 AS PROPOSTAS DE SOLUÇÃO SOBRE O MODELO EPIDEMIOLOGICO SI (SUSCETIVEIS-INFECTADOS) A PARTIR DOS MÉTODOS SÉRIE DE TAYLOR DE 2ª ORDEM E RUNGE-KUTTA DE 2ª ORDEM	27
3.2 SÉRIE DE TAYLOR 2ª ORDEM	28
3.3 RUNGE-KUTTA DE 2ª ORDEM	31
CAPÍTULO 4	32
4.1 MODELO EPIDEMIOLÓGICO PARA A TRANSMISSÃO DA TUBERCULOSE	32
4.2 MODELO SI PARA A DINÂMICA DA TUBERCULOSE	32
4.3 MODELAGENS DETERMINÍSTICAS DAS SOLUÇÕES APROXIMADAS REFERENTES AO MODELO COMPARTIMENTAL DA TUBERCULOSE	33
4.4 APLICAÇÃO DO MODELO EPIDEMIOLÓGICO DETERMINÍSTICO SOBRE DADOS REAIS DE TUBERCULOSE NO MUNICÍPIO DE CODÓ-MA ENTRE 2001 E 2014 ATRAVÉS DA SÉRIE DE TAYLOR DE 2ª ORDEM E O MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE 2ª ORDEM NO AMBIENTE OCTAVE	35
CONCLUSÃO	39
REFERÊNCIAS	40

INTRODUÇÃO

A tuberculose é doença que acompanha a humanidade por muito tempo, devido seus números preocupantes de mortes em todo mundo e sua facilidade de contágio por via aérea, ou seja, a transmissão da tuberculose é direta, de pessoa a pessoa: a pessoa com tuberculose expõe, ao falar, espirrar ou tossir, pequenas gotas de saliva que contêm o agente infeccioso e podem ser aspiradas por outro indivíduo, o contaminando. É causada por uma infecção pelo *Mycobacterium tuberculosis* ou Bacilo de Koch. Outras espécies de micobactérias também podem causar a tuberculose, tais como: *Mycobacterium bovis*, *Africanum* e *microti*.

Ademais, a tuberculose é uma doença infecciosa causada por tais bactérias, que afetam principalmente os pulmões, mas também pode ocorrer em outros órgãos do corpo, como ossos, rins e meninges (membranas que envolvem o cérebro), (MARCOLINO, 2016). O tratamento da tuberculose é à base de antibióticos e leva à cura, desde que não ocorra o abandono ao tratamento. Para prevenir a tuberculose é necessário imunizar as crianças com a vacina BCG (Bacilo de Calmette e Guérin).

Diante disso, se inclui a modelagem matemática com modelos epidemiológicos determinísticos, onde para cada tipo de epidemia há um modelo epidemiológico que irá se encaixar mesmo com diferentes tipos de indivíduos. Assim sendo, mesmo que uma epidemia seja de grande impacto e com isso grandes eventos históricos mundialmente, ela se torna importante para regular a população mundial. Desse modo, as taxas dos indivíduos em transformação são representadas por derivadas, a fim de ser incluída como uma ferramenta que utiliza de cálculos em forma de sistemas de equações diferenciais.

Em síntese, a partir de dados da tuberculose cedidos pelo SINAM/Codó-MA (MARCOLINO, 2016) entre os anos de 2001 e 2014 no município de Codó no estado do Maranhão, o presente trabalho propõe estudar o comportamento e/ou a convergência das soluções numéricas propostas, assim como, a dinâmica da referida epidemia através da modelagem numérica do modelo compartimental SI (suscetíveis e infectados), onde a proposta é modelar e solucionar o referido modelo SI segundo a Série de Taylor de 2ª ordem e o método de Runge-Kutta de 2ª ordem, e assim calcular suas estimativas.

CAPÍTULO 1

1.1 HISTÓRIA DA TUBERCULOSE

Trata-se de uma doença tão antiga quanto a humanidade, presume-se que o bacilo de Koch como é chamada essa microbactéria é antecedente ao próprio homem. No entanto, há relatos da doença em múmias egípcias e evidências na pré-história em ossos humanos a mais de 2.500 anos a.C. Ademais, onde em terras gregas, os gregos a chamavam de doença do peito.

Evidências arqueológicas e históricas, admitem casos de tuberculose (TB), a peste branca, em múmias egípcias, há mais de 5.000 anos a.C., às quais apresentavam anormalidades típicas do comprometimento vertebral pela tuberculose (o Mal de Pott). Já na América do Sul, achados arqueológicos apontam para a presença de TB pulmonar em uma múmia Peruana que morreu há 1.100 anos a.C. (MARCOLINO, 2016, p.15).

Visto que, na idade média por volta dos séculos XV e XVI a tuberculose se instaurou de maneira volumosa na Europa, centro da civilização. Ainda assim, começou fortemente a exclusão dos infectados, pois naquele momento o conhecimento sobre tal doença era muito limitado e de maneira lenta os infectados aguardavam a morte. Além disso, a doença começou a ganhar uma proporção imensa e intrigante já que havia um grande volume de falecimentos (BERTOLLI, 2001).

O encontro entre o germe da tuberculose e a espécie humana levou o agente infeccioso a desenvolver estratégias de adaptação ao novo hospedeiro: além da perda da capacidade de multiplicação no meio exterior, o bacilo inicialmente sofreu um significativo aumento de virulência para, na continuidade, restringir sua capacidade destrutiva, tornando-se um comensal aceitável para os indivíduos e para os agrupamentos humanos (BERTOLLI, 2001).

Nessas condições, os micróbios da tuberculose encontraram um micro ecossistema favorável no pulmão humano e ganharam a possibilidade de se multiplicar em um ambiente quente, úmido, ventilado e sombreado. À medida que as bactérias se proliferam na colônia, partes das sementes frequentemente migram para outras áreas do sistema respiratório e são capazes de se espalhar para organismos contaminados pelas vias brônquica, linfática e hematogênica. Outra parte da bactéria é excretada pelo trato respiratório e polui o meio ambiente.

Com isso, ao longo dos séculos a tísica foi se alastrando com pouco conhecimento para a população, porém com estudos de profissionais da saúde, acompanhamento dos doentes e com diagnósticos dos sinais e sintomas da doença. Em que, “A clínica fundamentada na anatomia e na patologia assumiu o papel de promotora da medicina moderna que, mais do que nunca, buscou conhecer os mecanismos específicos do mal do peito” (BERTOLLI, 2001, p. 36).

Aliás, o responsável por deferir reconhecer a singularidade biológica da doença descrevendo os sintomas clínicos e a aparência do pulmão foi o clínico Bayle. “diferenciando-a de outras entidades mórbidas anunciadas pelo estado febril. Apoiado no método anatomopatológico, coube a este clínico destacar a “natureza essencial” da tuberculose” (BERTOLLI, 2001, p. 37).

No final do século XVIII, a tuberculose era considerada uma "doença romântica", idealizada em obras literárias e artísticas, e identificada como uma doença de poetas e intelectuais. Enquanto isso, em 1882 o alemão, Robert Koch anunciou a descoberta da bactéria Koch, o agente causador da tuberculose, cientificamente conhecido como *Mycobacterium tuberculosis*. Bem como, a descoberta é um marco importante na compreensão da doença e inspirou várias tentativas de controlá-la e tratá-la. No final do século XIX, a doença foi classificada como uma "doença social" e passou a ser associada a condições de vida precárias, com muitos fatores, incluindo má ventilação e habitação com pequeno número de moradores, má qualidade da alimentação e falta de higiene.

1.2 AGENTE ETIOLÓGICO

A tuberculose é uma doença infecto contagiosa causada por uma bactéria que afeta e instaura-se primordialmente o pulmão do infectado, causando lesões nos tubérculos no órgão respiratório do infecto. Como resultado, a tuberculose é frequentemente causada pela infecção pelo *Mycobacterium tuberculosis*, também conhecido como bactéria Koch (BK). O complexo *Mycobacterium tuberculosis* consiste em várias espécies: *Mycobacterium tuberculosis*, *Mycobacterium bovis*, *Mycobacterium Africanum* e *Mycobacterium micro*. Outras espécies microbianas podem produzir manifestações clínicas semelhantes à tuberculose, e o diagnóstico diferencial requer referência à cultura laboratorial e identificação (GUIA DE VIGILÂNCIA, 7ª ed., 2009).

Em alguns locais, o agente bacteriano *Mycobacterium M. bovis* proveniente de gado bovino assume o papel de principal agente etiológico causador da doença, apresentando-se de forma idêntica ao *M. Tuberculosis*, mas com maior incidência da forma ganglionar e outras extrapulmonares. Visto que, para GUIA DE VIGILÂNCIA (7ª ed., 2009, p. 458):

Sua ocorrência, é mais frequente em comunidades que consomem leite e produtos derivados (não pasteurizados ou fervidos), de rebanho bovino infectado, e em pacientes rurais e profissionais (veterinários, ordenhadores, funcionários de matadouros, entre outros). Uma vez confirmada a contaminação humana, os serviços sanitários devem ser informados, para atuar na imediata identificação das fontes de infecção, e tomada das medidas de controle adequadas, prevenindo assim a ocorrência de novos casos.

1.3 TRANSMISSÃO DA TUBERCULOSE

Essa doença tem como forma de contágio principal por via atmosférica, ou seja, pelo ar causada por pacientes com tuberculose pulmonar ativa (pulmão ou garganta) que inalam aerossóis das vias aéreas ao falar, espirrar ou tossir, que são liberados no ar como aerossóis contendo bacilos médios. De acordo com o GUIA DE VIGILÂNCIA (7ª ed., 2009) a tosse do doente de tuberculose pulmonar bacilífera lança no ar gotículas contendo o bacilo do Koch e dependendo do diâmetro de seus núcleos,

podem atingir os brônquios e alvéolos e assim iniciar a infecção com a multiplicação da bactéria. Outra via comum de contágio em décadas passadas constituía-se na ingestão de leite e de carne bovina comprometidas pela *Mycobacterium bovis*, bacilo similar ao *M. tuberculosis* e que também pode causar a tísica.

1.4 SINTOMAS DA TUBERCULOSE

Em grande maioria das pessoas que são infectados pela bactéria de Koch, poucos ou quase nula não apresentam sintomas aparentes. Em virtude de, que a bactéria leva um tempo para se estabelecer no organismo do infectado. Tanto que, os sintomas quando aparecem demoram dias, meses e até anos, ainda assim o estado clínico do indivíduo exclui a exposição de algum sintoma ou sinal que caracteriza a doença, por isso uma vez contaminado o indivíduo pode desenvolver a tuberculose em qualquer momento da vida. “Apenas em torno de 10% das pessoas infectadas adoecem, metade delas durante os dois primeiros anos após a infecção e a outra metade ao longo de sua vida.” (MANUAL TÉCNICO PARA O CONTROLE DA TUBERCULOSE, 2002, p.11).

Ademais, habitualmente logo que os sintomas aparecem é acometido de um repertório um tanto quanto característico, como fadiga, febre, perda de apetite seguido de perda de peso, dores locais no peito e torácica principalmente quando atinge diretamente os pulmões e tosse seguidos de catarro, bem com, geralmente acompanhada de sangue. Além disso em crianças e adolescente, com hipótese de infecção, a ocorrência de sintomas podem ser os mais diversos além dos já citados, pode também ocorrer tosse produtiva, febre permanente por mais de duas semanas e sudorese noturna (GUIA DE VIGILÂNCIA, 7ª ed., 2009).

Em resumo, todos os órgãos podem ser atingidos pelo bacilo da tuberculose, porém, ocorre mais regularmente em órgãos como, nos pulmões, gânglios, pleura, rins, cérebro e ossos. Logo abaixo, na figura (1.1) podemos observar e localizar os órgãos que podem também ser afetados pela tuberculose.

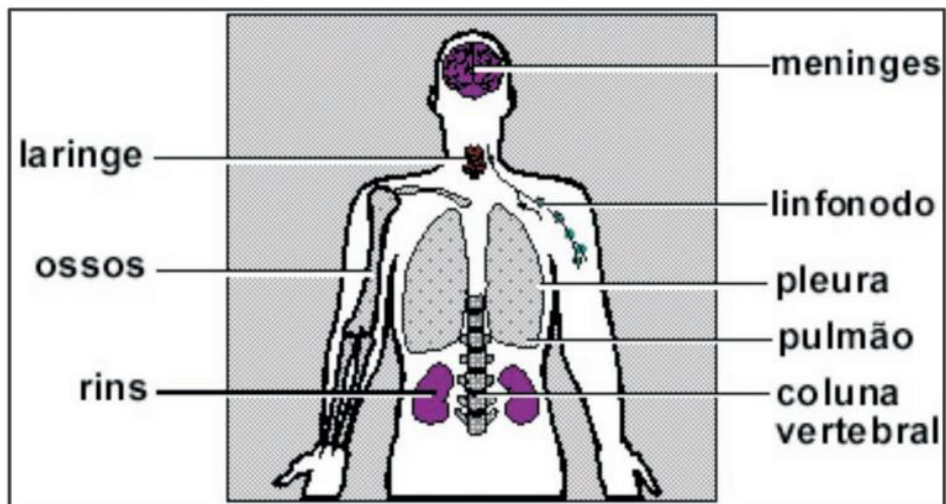


Figura (1.1): Órgãos mais frequentemente acometidos pela tuberculose doença.

Fonte: MANUAL TÉCNICO PARA O CONTROLE DA TUBERCULOSE (2002).

1.5 DIAGNOSTICO DA TUBERCULOSE

O diagnóstico para a infecção da tuberculose, será de maneira laboral utilizando os seguintes métodos, bacteriológico, radiografia e tomografia computadorizada em contato com o paciente, seguindo de outras maneiras de identificar a doença. Assim como, a prova tuberculínica, o exame bioquímico, sorológico, histológico e citológico.

Em seguida, iremos pontuar cada um dos diagnósticos segundo GUIA DE VIGILÂNCIA (7ª ed., 2009, p. 462):

- Exame bacteriológico: consiste na coleta de duas amostras de escarro, a primeira de imediato na consulta e a segunda no dia seguinte assim que o paciente despertar. E também, é utilizada para acompanhar a evolução bacteriológica do paciente durante o tratamento.
- Exame radiológico: este exame nos pacientes já diagnosticados com tuberculose, tem o objetivo identificar outra doença pulmonar associada, que iria precisar de tratamento simultâneo com a tísica.

- Tomografia: é um método muito útil quando a radiografia sozinha não expõe de forma proveitosa o diagnóstico, porém esse meio de análise é um tanto escasso pois tem um custo elevado.
- Broncoscopia: pode ser necessário no diagnóstico da tuberculose em algumas situações, sendo elas, alguma suspeita de outra doença pulmonar, tuberculose endobrônquica ou de pacientes imunodeprimidos, singularmente em indivíduos infectados pelo HIV.
- Prova tuberculínica: principalmente indicada, como um método para auxiliar nas pessoas que não foram vacinadas com a BCG (Bacilo de Calmette-Guérin), e/ou pessoas infectadas pelo vírus HIV (Imunodeficiência Humana) já que todos que são soro positivos devem ser submetidos a prova tuberculínica.
- Exame anatomopatológico (histológico e citológico): precisa-se aplicar a biópsia para esse exame, nas formas extra-pulmonares. E também para identificar toda a execução inflamatória granulomatosa compatível com a tuberculose.
- Exame bioquímico: usado principalmente em casos de tuberculose extrapulmonar, onde a presença de meningoencefalite tuberculosa.
- Exame sorológico e de biologia molecular: um método mais recente porém com um alto custo, utilizado para um diagnóstico precoce da doença e assim um tratamento mais eficiente. Porém, com o custo alto fica restrito em alguns centros de pesquisas.

Com isso, a partir dos sintomas sofridos pelo infectado, poderá analisar o melhor e mais eficiente exame para seus devidos sintomas.

1.6 TRATAMENTO DA TUBERCULOSE

No Brasil existe o sistema único de saúde (SUS), onde os indivíduos infectados pela tuberculose podem realizar, tanto os exames como também o tratamento caso ele seja acometido pela doença, totalmente gratuito, como também, a vacina BCG

(Bacilo de Calmette & Guérin) que deve ser administrada em crianças de até cinco anos de idade, mas, de preferência, em recém-nascidos e, é fornecida pelo SUS gratuitamente. Além do mais, desde que a quimioterápica seja seguida corretamente pelo paciente infectado, poderá ter a infecção totalmente anulada, seguindo as restrições médicas e respeitando todo o processo já que uma vez iniciado o tratamento em momento algum pode ser interrompido. Ademais, caso ocorra o abandono do tratamento a doença voltará a continuar atacar o sistema imunológico do paciente. De acordo com GUIA DE VIGILÂNCIA (7ª ed., 2009, p. 464):

Antes de iniciar a quimioterapia, é necessário orientar o paciente quanto ao tratamento. Para isso, deve-se explicar, em uma entrevista inicial e em linguagem acessível, as características da doença e o esquema de tratamento que será seguido - drogas, duração, benefícios do uso regular da medicação, consequências advindas do abandono do tratamento, e possíveis efeitos adversos dos medicamentos.

Desse modo o tratamento para a tuberculose e de forma supervisionada, no posto de saúde mais próximo do infectado, para que assim os índices de abandono no tratamento sejam amenizados. Ainda assim, utilizando a estratégia de DOTS (Tratamento Diretamente Supervisionado de Curto Prazo) que tem o objetivo de facilitar o acesso aos infectados “e o aumento da cura, reduzindo-se o risco de transmissão da doença na comunidade. Tem como elemento central o Tratamento Supervisionado” (GUIA DE VIGILÂNCIA, 7ª ed., 2009, p. 465).

De modo que, os indivíduos “pulmonares positivos” não precisam, nem devem, ser segregados do convívio familiar e da comunidade. Uma vez que, os meios de evitar a contínua contaminação bacteriana, basta respeitar o uso correto dos medicamentos e o tempo determinado nas supervisões. Assim, evitando as complicações da doença e pôr fim a cura do enfermo (GUIA DE VIGILÂNCIA, 7ª ed., 2009).

Em alguns casos particulares são sugeridos a internação, em que o GUIA DE VIGILÂNCIA (7ª ed., 2009, p. 465) explica que:

A hospitalização só está indicada nas seguintes situações: meningite tuberculosa; indicações cirúrgicas em decorrência da doença; complicações

graves; intolerância medicamentosa incontrolável em ambulatório; intercorrências clínicas e/ou cirúrgicas graves; estado geral que não permita tratamento em ambulatório; em casos sociais, como ausência de residência fixa, ou grupos especiais, com maior possibilidade de abandono, especialmente se for caso de retratamento ou de falência. O período de internação deve ser reduzido ao mínimo necessário, independentemente do resultado do exame bacteriológico.

Dessa forma, a anulação das fontes de infecção, através do tratamento correto dos doentes, é um dos aspectos mais importantes no controle da tuberculose. Compete aos serviços de saúde prover os meios necessários para garantir que toda a pessoa com diagnóstico de tuberculose venha a ser, sem atraso, adequadamente tratado.

1.7 A TUBERCULOSE NO BRASIL

No Brasil, as primeiras incidências de tuberculose aconteceram com a chegada dos portugueses seguindo da alfabetização e conversão religiosa por parte dos portugueses para com os residentes nativos dessas terras. “O contato permanente dos doentes com os índios proporcionou o adoecimento e a morte de muitos nativos.” (MACIEL et al., 2012).

Nos séculos seguintes entramos no período de escravidão, onde os negros africanos eram transportados para o Brasil e isso “permitiu que um novo grupo provavelmente não tuberculinizado chegasse ao Brasil, sendo que os negros, em pouco tempo, tornaram-se as principais vítimas da fatal tísica.” (BERTOLLI, 2001).

No decorrer dos séculos XIX e começo do século XX, a doença passou a ser vista como uma maneira romântica pelos artistas da época, pois os artistas e escritores expressavam a doença de forma a romantizar seu próprio sofrimento e pelos sintomas específicos de que a doença possui, alguns poetas até almejavam contrair a doença. Um grande nome da literatura brasileira, também já citou a tísica em suas obras esse conhecido nada mais é, do que, Machado de Assis. Com isso MACIEL et al. (2012, p. 3) explica que:

A partir do século XX, no entanto, ocorre o declínio da associação entre a tuberculose e a criação artística, a partir de quando a doença passa a ser identificada, de forma mais clara, como preocupante problema de saúde, por sua persistência e propagação, particularmente entre as populações desfavorecidas. Relacionado a esse novo cenário, observou-se, também, a mudança de concepção sobre a enfermidade, passando de “mal romântico” a “mal social”, contexto que acabou convergindo para a estigmatização social do enfermo, a qual se perpetua, em grau distinto, até os dias atuais.

Sendo assim, ainda no século XX começou a campanha de vacinação contra tuberculose com a vacina BCG (Bacilo de Calmette & Guérin) e a descoberta de fatores para o diagnóstico da doença, como a radiografia de tórax.

Atualmente no Brasil, a tuberculose ainda é um problema de saúde populacional junto com mais 21 países que estão economicamente em desenvolvimento, que abrange até 80% de todos os casos mundiais relacionados a doença. Há uma estimativa de que até um terço de toda população mundial esteja infectada com o *Mycobacterium tuberculosis*, podendo desenvolver a doença em seu organismo. Segundo relato do GUIA DE VIGILÂNCIA (7ª ed., 2009, p. 458):

Em torno de oito milhões de casos novos e quase 3 milhões de mortes por tuberculose, ocorrem anualmente. Nos países desenvolvidos é mais frequente entre as pessoas idosas, nas minorias étnicas e imigrantes estrangeiros. Nos países em desenvolvimento, estima-se que ocorram 95% dos casos e 98% das mortes causadas pela doença, ou seja, mais de 2,8 milhões de mortes por tuberculose e 7,5 milhões de casos novos, atingindo a todos os grupos etários, com maior predomínio nos indivíduos economicamente ativos (15-54 anos) da sociedade. No Brasil, os homens adoecem duas vezes mais do que as mulheres. No país estima-se que, do total da população, mais de 50 milhões de pessoas estejam infectados pelo *M. tuberculosis*, com aproximadamente 80 mil casos novos por ano.

Em particular, o presente trabalho propõe analisar o comportamento da tuberculose no estado do Maranhão na cidade de Codó, nos anos de 2001 a 2014, pois houve grande incidência de casos da doença, que se tornou preocupante para as autoridades locais do governo e da saúde. Viste que, em Codó, foi onde se concentrou a maior ocorrência de casos em todo o estado do Maranhão. Segundo o Sistema de Informação de Agravos de Notificação – SINAM, localizado no município

de Codó-MA, o referido município possui aproximadamente 957 casos de tuberculose no período compreendido entre 2001 e 2014 (MARCOLINO, 2016).

No entanto, houve grande mobilização com campanhas de vacinação, tratamento e ações de conscientização por todo estado por meio de agente de saúde, ainda assim os doentes abandonavam seus tratamentos. Em MARCOLINO (2016, p. 22) é apresentado o motivo do abandono ao tratamento em:

Os fatores físicos, sociais e culturais influenciam no abandono do tratamento, a não-adesão ao tratamento da tuberculose vem sendo atribuída a inúmeras causas, dentre as quais: os efeitos colaterais dos medicamentos, o custo indireto do tratamento (gastos com passagem, etc.), a falta de suporte da rede social, a interpretação da doença e a conscientização, atitudes e crenças referentes ao próprio tratamento, melhora apresentada nos primeiros três meses do tratamento, também contribuem para o abandono.

Diante de todo cenário o trabalho pretende realizar um estudo relacionado a modelagem epidemiológica determinística sobre a questão da tuberculose com os dados cedidos por SINAM, Codó/MA entre os anos de 2001 e 2014 presentes em (MARCOLINO, 2016) como é possível observar na tabela (4.1) (Capítulo 4, página 34). E assim, modelar e analisar as previsões para a questão de saúde pública na cidade de Codó/MA utilizando o modelo escolhido SI (suscetíveis e infectados) para esse caso, por conta do limite de dados apresentados.

CAPÍTULO 2

2.1 EPIDEMIOLOGIA

A palavra epidemiologia deriva do grego epi que significa sobre, demio é igual a povo ou população e logos e o estudo. Com isso, temos seu significado o estudo sobre o povo ou algo que afeta a população. De acordo com ARAÚJO (2015, p. 23):

a epidemiologia é a ciência que estuda a distribuição da ocorrência de doenças infectocontagiosas, os fatores condicionantes e determinantes na população humana. Uma das suas funções é descrever a distribuição da doença, ou seja, descobrir de que padecem os indivíduos, onde e quando. A epidemiologia identifica ainda, as causas ou fatores de risco para as doenças com o objetivo de se obter a razão pelo qual nem todos os indivíduos têm a mesma doença de maneira uniforme.

A necessidade de adotar maneiras de previsões contra futuras epidemias, foi-se necessário estudos epidemiológicos onde são utilizados modelos matemáticos. Somente compreender a doença não é suficiente para manter medidas de combate e impedir que a doença se alastre com altos graus de mortalidade humana. Por isso, houve essa carência de estabelecer algo concreto para haver um controle, com isso, o problema das doenças foi estabelecido um ponto qualitativo de obter alguma veracidade com relação ao seu combate. A fim de que, a relevância de se estudar epidemiologia está totalmente relacionado com as previsões e comportamentos de epidemias para assim antecipar seus meios de combate (SOARES, 2010; ARAÚJO, 2015).

2.2 MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS DETERMINÍSTICOS

Os modelos epidemiológicos determinísticos foram desenvolvidos por meio de modelação matemática de doenças que contaminam em larga escala, como exemplo

a tuberculose. Bem como, são conhecidos por modelos compartimentais, em que cada grupo da população é identificado por um compartimento distinto, onde referenciam em fases diversas da doença a qual o indivíduo está infectado (ARAÚJO, 2015).

Além do mais, o fato de estudarmos epidemiologia, são justamente as previsões que podemos obter com esses desenvolvimentos de modelos matemáticos, e assim criar medidas antecipadamente para caso de epidemias com doenças que se alastram de maneira rápida e com facilidade em geral as doenças infecciosas. suficiente. Mais precisamente, “é necessário considerar o problema da doença do ponto de vista quantitativo, de modo a que se decida sobre vacinações ou outras medidas preventivas para a sua contenção” (ARAÚJO, 2015, p.23).

2.3 MODELOS COMPARTIMENTAIS

A diferentes modelos para descrever as doenças transmissíveis ou infectocontagiosas, porém os modelos compartimentais tem uma função especificamente para cada dado referente a uma doença há um modelo compartimental que poderá modelar de forma adequada, pois cada compartimento irá representar a forma com que cada indivíduo se encontra ao desenvolvimento da referida doença. “Os diferentes compartimentos são geralmente designados por letras maiúsculas como, por exemplo, S, I e R” (ARAÚJO, 2015). Em que, S representa a população dos Suscetíveis a doença, o I represente a população de infectados e que pode transmitir a doença aos suscetíveis e R são os indivíduos Recuperados, podendo ser os que morreram em decorrência da doença ou que foram curados, em caso de cura, em algumas doenças esse indivíduo poderá voltar a ser um suscetível novamente.

Dessa forma, os modelos determinísticos são formulados por meio de termos com sistemas de equações diferenciais. As escolhas de inclusão de compartimentos no modelo dependem das características de cada doença. “modelos epidemiológicos clássicos: SI (Suscetível-Infectado), SIS (Suscetível-Infectado-Suscetível), SIR

(Suscetível-Infetado-Recuperado) e SIRS (Suscetível-Infetado-Recuperado-Suscetível), formuladas por Kermack e McKendric.” (SOARES, 2010)

2.4 MODELO SI – SUSCETÍVEL E INFECTADO

O modelo epidemiológico determinístico SI (suscetível-infetado) é o mais simples dos modelos epidemiológicos, pois ele não fornece a recuperação dos infectados bem como esse modelo epidemiológico sem dinâmica vital consideramos a população constante, sem mortes ou nascimento. Segundo SOARES (2010), assim quando um indivíduo suscetível adquire a doença, o mesmo não volta a pertencer a classe dos suscetíveis. Neste caso, também a classe R está embutida em I.

No entanto, algumas doenças modeladas pelo SI (suscetível-infetado) são, como exemplo, a AIDS (síndrome da imunodeficiência humana) transmitida pelo vírus HIV, isto é, uma vez infectado o indivíduo não volta para a classe dos suscetíveis. Bem como, o vírus da gripe pois quando contraímos a gripe uma vez não é possível ter novamente infecção com o mesmo vírus. Ademais, podemos usar o modelo epidemiológico determinístico SI para modelar várias doenças, desde de que, atribuíse as classes de suscetíveis e infectados corretamente para os dados disponíveis, assim como a tuberculose e os dados que serão utilizados neste trabalho.

Dessa forma, o SI é o mais simples dos modelos epidemiológicos e sem dinâmica vital. Logo abaixo temos uma análise do seu esquema compartimental.

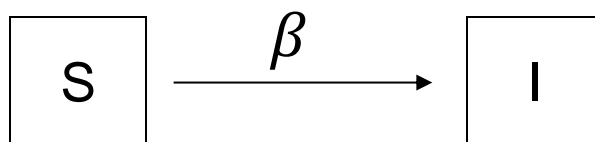


Figura (2.1): Esquema compartimental SI;

Fonte: SOARES (2010).

Onde β é a taxa de transmissão da doença e βSI é dado pelo princípio de ação das massas (SOARES, 2010).

Dessa forma o modelo SI poder ser descrito pelo sistema de duas equações diferenciais ordinárias não lineares,

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI \end{cases} \quad (2.1)$$

β é o coeficiente de transmissão da doença, S e I são as proporções de suscetíveis e infectados respectivamente e $N(t)$ representa a população total.

Se considerarmos a população total $N(t) = S(t) + I(t)$ como constante, teríamos $\frac{dN}{dt} = 0$ e se $N(t) = 1$, para todo $t \geq 0$ (SOARES, 2010; MARCOLINO, 2016).

Dessa forma, podemos apresentar:

$$S(t) = 1 - I(t), \forall t. \quad (2.2)$$

Substituindo a equação (2.2) na segunda equação do sistema (2.1), obtemos:

$$\frac{dI}{dt} = \beta(1 - I)I. \quad (2.3)$$

O sistema formado pelas equações (2.2) e (2.3) é equivalente ao sistema de equações (2.1) (SOARES, 2010).

Podemos resolver a equação (2.3), que é do tipo logístico, pelo método de separação de variáveis, assim

$$\frac{dI}{(1 - I)I} = \beta dt$$

De acordo com o desenvolvimento das equações por SOARES (2010).
Operando com frações parciais obtemos,

$$\frac{1}{(1-I)I} = \frac{A}{1-I} + \frac{B}{I} = \frac{B + (A-B)I}{(1-I)I}$$

Então

$$\begin{cases} B = 1 \\ (A - B) = 0 \Rightarrow A = 1. \end{cases}$$

Logo,

$$\int \frac{1}{(1-I)} dt + \int \frac{1}{I} dI = \int \beta dt$$

$$-\ln(1-I) + \ln(I) = \beta t + c$$

$$\ln\left(\frac{I}{1-I}\right) = \beta t + c$$

$$\frac{I}{1-I} = e^{\beta t + c}$$

$$I = \frac{e^{\beta t + c}}{1 + e^{\beta t + c}}$$

Em que c é a constante de integração.

Dispondo das condições iniciais $I(0) = I_0$ e $S(0) = s_0$, obtemos

$$I_0 = \frac{e^c}{1 + e^c} \Rightarrow$$

$$e^c = \frac{I_0}{1 - I_0} \Rightarrow$$

$$e^c = \frac{I_0}{S_0}.$$

Dessa forma, a solução dos indivíduos infectados I no sistema de equações (2.1) é dada por:

$$I(t) = \frac{I_0 e^{\beta t}}{S_0 + I_0 e^{\beta t}}. \quad (2.4)$$

Com isso, usando a solução dos infectados (2.4) obtém-se a solução para os suscetíveis, portanto:

$$\begin{aligned} S(t) &= 1 - I(t) \\ S(t) &= 1 - \frac{I_0 e^{\beta t}}{S_0 + I_0 e^{\beta t}} \\ S(t) &= \frac{S_0}{S_0 + I_0 e^{\beta t}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Então, observamos como a previsão do próprio esquema compartimental do modelo epidemiológico SI, a população em sua totalidade será infectada, logo ocorrerá uma epidemia. Haja vista, que quando $t \rightarrow \infty$ temos $I(t) = 1$ e $S(t) = 0$ (SOARES, 2010; MARCOLINO, 2016).

2.5 MODELO SIS – SEM DINÂMICA VITAL SUSCETÍVEL-INFECTADO-SUSCETÍVEL

O modelo epidemiológico determinístico SIS (susceptível-infectado-susceptível) é descrito por não ter imunidade definitiva para o ser humano, pois mesmo depois de recuperado o indivíduo volta para a classe dos suscetíveis. Sendo assim, as doenças que podemos modelar com o SIS são as doenças causadas por bactérias e também por protozoários.

Como exemplo, algumas doenças causadas por agentes bacterianos são, infecção urinária, meningite, pneumonia, doenças sexualmente transmissíveis, leptospirose, tuberculose, entre outras.

Como relata MARCOLINO (2016) nesse modelo só é possível analisar os indivíduos infectados pois não fornece a recuperação dos infecciosos. Com isso, logo abaixo será apresentado o esquema compartimental do modelo SIS sem dinâmica vital.

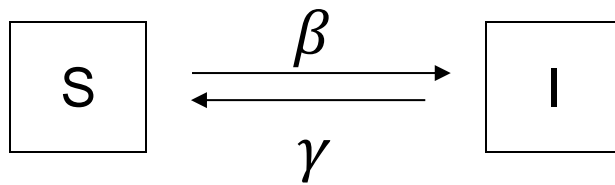


Figura (2.2): esquema compartimental do modelo SIS sem dinâmica vital;

Fonte: SOARES (2010).

O modelo SI é representado pelo seguinte sistema de equações diferenciais.

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma I \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \end{cases} \quad (2.6)$$

Em que β corresponde a taxa de transmissão onde tem-se a média de contatos entres os suscetíveis e os infecciosos em função do tempo e γ representa a taxa de pessoas que se recuperam e voltam a classe S de suscetíveis. A equação que melhor retrata o número total de indivíduos, com a população constante é dada por $N = S(t) + I(t)$.

Considerando a população constante então temos que $\frac{dN}{dt} = 0$. Desse modo, quando temos $t \rightarrow \infty$, ou seja, em um longo período de tempo observamos que ocorrera um equilíbrio estável entre os indivíduos infectados e suscetíveis (SOARES, 2010; MARCOLINO, 2016).

CAPÍTULO 3

3.1 AS PROPOSTAS DE SOLUÇÃO SOBRE O MODELO EPIDEMIOLOGICO SI (SUSCETIVEIS-INFECTADOS) A PARTIR DOS MÉTODOS SÉRIE DE TAYLOR DE 2ª ORDEM E RUNGE-KUTTA DE 2ª ORDEM

Nesta seção, apresentamos para o modelo epidemiológico determinístico SI a sua modelagem de solução segundo a Série de Taylor de 2ª ordem e o método de Runge-Kutta de 2ª ordem.

O modelo SI, Eq. (3.1), assume que os indivíduos podem ser suscetíveis, S e, infecciosos, I. Desta maneira, os suscetíveis são aqueles que podem contrair a doença e, os infecciosos são os que estão doentes e podem transmitir a doença.

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \mu(S(t) + I(t)) - \beta S(t)I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

com $S(t_0) = S_0$ e $I(t_0) = I_0$.

Em que, μ é a taxa de crescimento da população, β é a taxa de transmissão da doença e γ é a taxa de recuperação ou remoção. O número total de indivíduos é dado por $N = S(t) + I(t)$, S_0 e I_0 , são as quantidades de indivíduos suscetíveis e infectados, respectivamente, no tempo inicial $t_0 \geq 0$.

Agora, tomando $f(S(t), I(t)) = \mu(S(t) + I(t)) - \beta S(t)I(t)$, $g(S(t), I(t)) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t)$, o sistema acima fica:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = f(S(t), I(t)) \\ \frac{dI(t)}{dt} = g(S(t), I(t)) \end{cases} \quad (3.2)$$

Com $S(t_0) = S_0$ e $I(t_0) = I_0$.

Desta forma, aplicamos, sobre a Eq. (3.2), o desenvolvimento da Série de Taylor de 2ª ordem e o método de Runge-Kutta de 2º ordem para solucionar o sistema da Eq. (3.1).

3.2 SÉRIE DE TAYLOR 2ª ORDEM

A resolução do sistema de equações (3.2), consiste em expandir o modelo epidemiológico determinista SI, pois foi o modelo escolhido para esse caso da tuberculose por conta dos dados fornecidos. Com isso, o S classe dos suscetíveis e I a classe dos infectados pelo método de expansões da série de Taylor que nesse caso irá até a 2ª ordem.

Utilizando esse esquema, logo a baixo podemos visualizar as aproximações pela série de Taylor de 2ª ordem, para o S (suscetíveis) e I (infectados) respectivamente.

Nos quais:

$$S^{(1)}(t) = \frac{dS(t)}{dt},$$

porém

$$\frac{dS(t)}{dt} = f(S(t), I(t)).$$

e

$$S^{(2)}(t) = \frac{d^{(2)}S(t)}{dt^{(2)}},$$

mas

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dS(t)}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (f(S(t), I(t))),$$

onde

$$\frac{d}{dt} (f(S(t), I(t))) = \frac{\partial f(t)}{\partial s(t)} \frac{\partial s(t)}{\partial t} + \frac{\partial f(t)}{\partial I(t)} \frac{\partial I(t)}{\partial t},$$

mas

$$\frac{\partial s(t)}{\partial t} = \frac{dS(t)}{dt}$$

e

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} = \frac{dI(t)}{dt},$$

assim

$$\frac{d}{dt} (f(S(t), I(t))) = \frac{\partial f(t)}{\partial s(t)} \frac{dS(t)}{dt} + \frac{\partial f(t)}{\partial I(t)} \frac{dI(t)}{dt}$$

e, portanto,

$$S^{(2)}(t) = \frac{\partial f(t)}{\partial s(t)} \frac{dS(t)}{dt} + \frac{\partial f(t)}{\partial I(t)} \frac{dI(t)}{dt} \quad (3.3)$$

Da mesma forma, dispomos:

$$I^{(1)}(t) = \frac{dI(t)}{dt},$$

mas

$$\frac{dI(t)}{dt} = g(S(t), I(t)).$$

agora

$$I^{(2)}(t) = \frac{d^{(2)}I(t)}{dt^{(2)}},$$

porém

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dI(t)}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (g(S(t), I(t))),$$

em que

$$\frac{d}{dt} (g(S(t), I(t))) = \frac{\partial g(t)}{\partial s(t)} \frac{\partial s(t)}{\partial t} + \frac{\partial g(t)}{\partial I(t)} \frac{\partial I(t)}{\partial t},$$

desse modo

$$\frac{d}{dt} (g(S(t), I(t))) = \frac{\partial g(t)}{\partial s(t)} \frac{dS(t)}{dt} + \frac{\partial g(t)}{\partial I(t)} \frac{dI(t)}{dt}$$

e, portanto,

$$I^{(2)}(t) = \frac{\partial g(t)}{\partial s(t)} \frac{dS(t)}{dt} + \frac{\partial g(t)}{\partial I(t)} \frac{dI(t)}{dt} \quad (3.4)$$

Dessa forma, as aproximações de $S(t)$ e $I(t)$ segundo a Série de Taylor de 2ª ordem e, discretizadas no tempo, são respectivamente:

$$S(t_{i+1}) \cong S(t_i) + \frac{h}{1!} S^{(1)}(t_i) + \frac{h^2}{2!} S^{(2)}(t_i) \quad (3.5)$$

$$I(t_{i+1}) \cong I(t_i) + \frac{h}{1!} I^{(1)}(t_i) + \frac{h^2}{2!} I^{(2)}(t_i) \quad (3.6)$$

$$t_{i+1} - t_i = h, 0 \leq i \leq n, S(t_0) = S_0, I(t_0) = I_0.$$

3.3 RUNGE-KUTTA DE 2ª ORDEM

Prontamente, no método de Runge-Kutta de 2ª ordem para o modelo SI (suscetíveis-infectados), as aproximações de $S(t)$ e $I(t)$ são respectivamente:

$$S(t_{i+1}) \cong S(t_i) + h\varphi(S_i, I_i) \quad (3.7)$$

$$I(t_{i+1}) \cong I(t_i) + h\omega(S_i, I_i) \quad (3.8)$$

$$t_{i+1} - t_i = h, 0 \leq i \leq n, S(t_0) = S_0, I(t_0) = I_0.$$

Tal que $\varphi(S_i, I_i) = \alpha K_1 + \beta K_3$, $\omega(S_i, I_i) = \alpha K_2 + \beta K_4$, em que $K_1 = f(S_i, I_i)$, $K_2 = g(S_i, I_i)$, $K_3 = f(S_i + ph, I_i + qhK_1)$, $K_4 = g(S_i + ph, I_i + qhK_2)$. Onde φ e ω são as funções incrementos e h é o comprimento do passo. As constantes α, β, p e q em K_3 e K_4 , são determinadas através da resolução de um sistema não linear, para que se obtenha o método de Runge-Kutta de 2ª ordem. Assim temos, para a escolha $\beta = \frac{1}{2}$, tem-se $\alpha = \frac{1}{2}$, $p = 1$ e $q = 1$ (BARROSO et al., 1987; BURDEN, 2008).

CAPÍTULO 4

4.1 MODELO EPIDEMIOLÓGICO PARA A TRANSMISSÃO DA TUBERCULOSE

Nesta seção, explicamos qual o modelo epidemiológico para a transmissão da tuberculose, e os critérios cedidos para poder usar tal modelo. No entanto, como mencionado no capítulo 1 deste trabalho sabemos que a tuberculose é uma doença grave, porém curável, em praticamente 100% dos casos novos, desde que os princípios da quimioterapia sejam seguidos, ou seja, os suscetíveis são pessoas saudáveis que têm contato direto (transferência da tuberculose) com os infectados. Os infectados são os que transmitem a doença e os removidos são os curados ou mortos. No caso da tuberculose os infectados são curados, caso não abandonem o tratamento.

Outrossim, um modelo epidemiológico mais geral que o SI e que estuda algumas doenças virais e também a tuberculose, pode ser formado pelos três seguintes compartimentos: suscetíveis, infectados e removidos, o qual é denominado de modelo epidemiológico (SOARES, 2010).

Dessa forma, como os dados disponibilizados pelo SINAM/Codó-MA entre os anos de 2001 a 2014 são constituídos apenas pelos números de infectados e da população municipal, optamos pela simplificação do modelo SIR e SIS resultando no SI (suscetíveis-infectados), que consiste no modelo epidemiológico determinístico SI e a sua modelagem segundo a Série de Taylor de 2ª ordem e o método de Runge - Kutta de 2ª ordem.

4.2 MODELO SI PARA A DINÂMICA DA TUBERCULOSE

O modelo SI, Eq. (3.1), assume que os indivíduos podem ser suscetíveis, S e, infecciosos, I. Desta forma, os suscetíveis são aqueles que podem contrair a doença e, os infecciosos são os que estão doentes e podem transmitir a doença.

No entanto, no capítulo 2 foi mencionado que podemos utilizar o modelo SI em diversos casos de doenças e epidemias, a partir da atribuição correta para as classes dos suscetíveis e infectados do modelo epidemiológico determinístico SI. Da mesma forma, que será usado para esse caso com relação a modelagem da doença tuberculose para os dados cedidos delimitados o qual está modelado pelas equações diferenciais ordinárias acima, Eq. (3.1).

Portanto, como já citado no trabalho usaremos o modelo SI por conta dos dados reais entre os anos de 2001 a 2014 fornecidos pelo SINAM/Codó-MA, em seguida, determinamos os parâmetros do modelo epidemiológico SI a partir de dados reais da tuberculose entre os anos 2001 a 2014 cedidos pelo SINAM/Codó-MA, apresentados na Tabela (4.1) neste capítulo.

4.3 MODELAGENS DETERMINÍSTICAS DAS SOLUÇÕES APROXIMADAS REFERENTES AO MODELO COMPARTIMENTAL DA TUBERCULOSE

No presente segmento, apresentamos os cálculos para os parâmetros usando a modelagem do sistema de equações (3.1) a partir do modelo SI e logo a seguir relatar as convergências das soluções aproximadas tanto através da série de Taylor de 2ª ordem, como de Runge-Kutta de 2ª ordem.

A aplicação de dois métodos numéricos distintos para solucionar a Eq. (3.1) a partir de dados reais da tuberculose no município de Codó-MA, se dá, para se constatar ou não a convergência das soluções, ou seja, se tanto as soluções e/ou aproximações de infectados quanto de suscetíveis aproximam-se entre si, respectivamente, ou não, atestando assim o correto desenvolvimento teórico e computacional de ambas as metodologias numéricas propostas, ou não.

Para determinar os parâmetros β , μ e γ , em que μ é a taxa de crescimento da população, β é a taxa de transmissão da doença e γ é a taxa de recuperação ou remoção, do modelo SI, Eq. (3.1), utilizamos os dados reais da tuberculose cedidos pelo SINAM/Codó-MA (MARCOLINO, 2016), o qual é apresentado na Tabela (4.1) abaixo:

Tabela (4.1) - Números de infectados e suscetíveis de tuberculose e, o número da população no município de Codó-MA entre os anos de 2001 a 2014.

Ano	Nº de Infectados	Nº da População	Nº de Suscetíveis
2001	108	111587	111479
2002	116	112271	112155
2003	90	112793	112703
2004	66	113889	113823
2005	96	114496	114400
2006	80	115098	115018
2007	89	110574	110485
2008	50	113768	113718
2009	48	113937	113889
2010	42	118072	118030
2011	43	118567	118524
2012	30	119079	119049
2013	65	119641	119576
2014	34	119962	119928

Fonte: MARCOLINO (2016).

O parâmetro β (taxa de transmissão) é calculado através da razão entre a média aritmética de infectados com a média aritmética da população conforme dados da Tab. (4.1). A partir das médias aritméticas dos infectados e suscetíveis, da taxa dos suscetíveis, obtida a partir de regressão linear, e da estimativa do parâmetro β , já calculado, é possível determinar o parâmetro μ (taxa de crescimento da população), ao substituir estes valores na primeira equação diferencial da Eq. (3.1) e isolar o parâmetro μ . Da mesma forma, a partir das médias aritméticas dos infectados e suscetíveis, da taxa dos infectados, também obtida a partir de regressão linear, e da estimativa do parâmetro β , é também possível determinar o parâmetro γ (taxa de recuperação ou remoção), ao substituir estes valores na segunda equação diferencial da Eq. (3.1) e isolá-lo.

Dessa forma, as médias aritméticas dos infectados e suscetíveis, a taxa dos suscetíveis e a taxa dos infectados estão todos normalizados pela média aritmética da população, Tab. (4.1). Assim temos, $\beta = 5.930345397692557e-004$, $\mu =$

0.00571071618166 e $\gamma = 0.08521013333092$. Dado que estes parâmetros são determinados a partir de equações algébricas normalizadas pela média aritmética da população, cabe ressaltar que na implementação, no Ambiente OCTAVE, tanto a Série de Taylor de 2ª ordem quanto o método de Runge-Kutta de 2ª ordem sobre o modelo SI, Eq. (3.1), as suas soluções aproximadas de suscetíveis e infectados estão normalizadas durante o processo de simulação computacional, porém ao final do processamento estas soluções são desnormalizadas.

4.4 APLICAÇÃO DO MODELO EPIDEMIOLÓGICO DETERMINÍSTICO SOBRE DADOS REAIS DE TUBERCULOSE NO MUNICÍPIO DE CODÓ-MA ENTRE 2001 E 2014 ATRAVÉS DA SÉRIE DE TAYLOR DE 2ª ORDEM E O MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE 2ª ORDEM NO AMBIENTE OCTAVE

Em suma, utilizando a aplicação do modelo epidemiológico determinístico SI (suscetíveis e infectados) para esse caso no município de Codó-MA entre os anos de 2001 a 2014 com dados reais, oriundos de (MARCOLINO, 2016). Assim, após os cálculos dos parâmetros atribuídos pela Equação (3.1) enfim podemos aplicar e reunir todas essas informações no ambiente OCTAVE que é uma linguagem computacional, porém desenvolvida para a computação matemática, onde iremos confeccionar os gráficos em relação aos infectados e suscetíveis e desse modo observar seus comportamentos e fazer previsões.

Enfim vamos apresentar e analisar a convergência das soluções aproximadas de infectados e suscetíveis tanto através da Série de Taylor de 2ª ordem quanto do método de Runge-Kutta de 2ª ordem, a partir de dados reais da tuberculose no município de Codó-MA entre os anos de 2001 a 2014, às quais são regidas e/ou oriundas do modelo epidemiológico determinístico SI, Eq. (3.1).

Em seguida, vamos analisar a monotonicidade destas aproximações de infectados e suscetíveis da tuberculose e fazer uma análise do comportamento das curvas, e em relação as previsões durante os anos seguintes.

Dessa forma, segundo a Série de Taylor de 2ª ordem e o método de Runge-Kutta de 2ª ordem, juntamente com suas aplicações a dados reais de infectados e suscetíveis na, Tab. (4.1), temos o comportamento dos infectados e suscetíveis através das Figuras (4.1) e (4.2), respectivamente, aqui propostos.

Logo abaixo temos a simulação referente a população de infectados e as suas previsões conforme a figura (4.1) expõe. Adiante, uma análise mais minuciosa de todos os tópicos do gráfico.

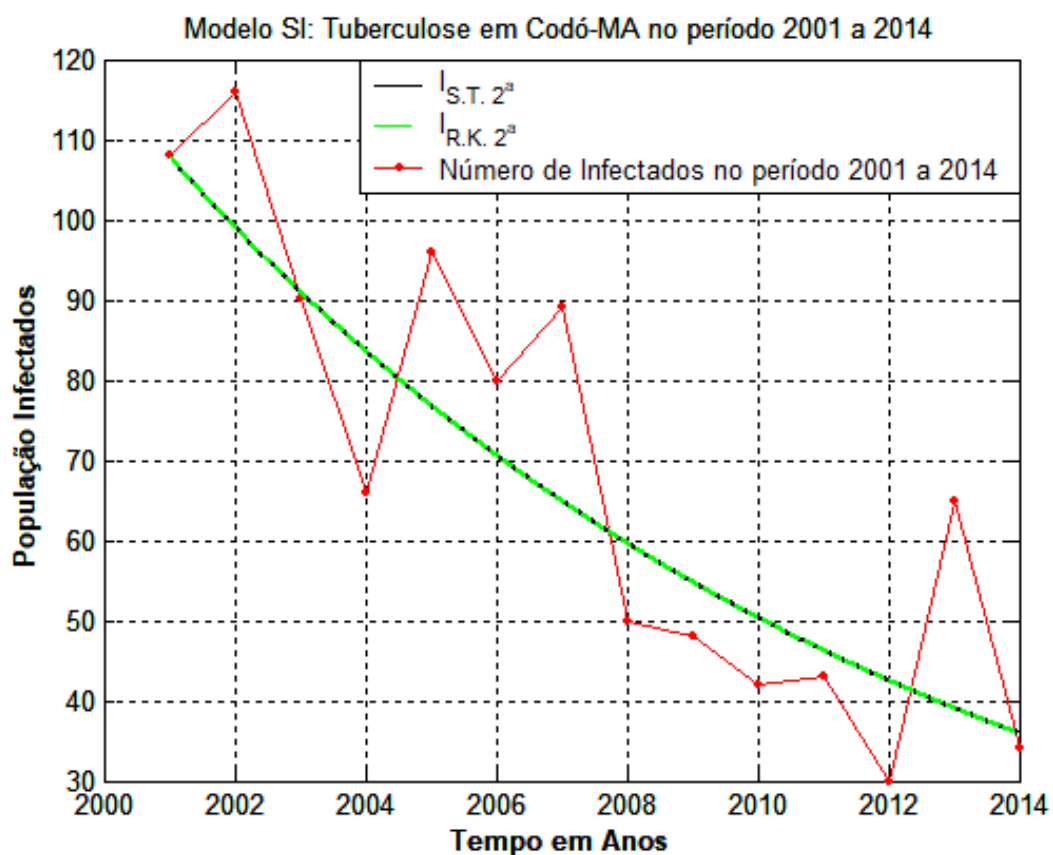


Figura (4.1): População de infectados (tuberculose) no município de Codó-MA de 2001 a 2014 (pontos em vermelho), juntamente com as soluções numéricas de infectados tanto segundo a Série de Taylor de 2ª ordem, $I_{S.T.2^a}$ (curva preta), quanto o método de Runge-Kutta de 2ª ordem, $I_{R.K.2^a}$ (curva verde).

O objetivo de realizar simulações entre diferentes metodologias na produção de gráficos para previsões, é observar o comportamento em relação as soluções que foram propostas. Além disso, é de suma relevância que haja uma convergência entre

essas soluções. Dessa forma, é isso que observamos, na Figura (4.1), que as curvas numéricas de infectados $I_{S.T.2^a}$ (curva preta) e $I_{R.K.2^a}$ (curva verde) aproximam-se entre si, atestando o correto desenvolvimento teórico e computacional acerca das metodologias propostas para solucionar a Eq. (3.1) a partir de dados reais da tuberculose no município de Codó-MA e, portanto, ambas a soluções numéricas de infectados são convergentes. Por outro lado, tais curvas aproximam-se aos dados reais de infectados da tuberculose no município de Codó-MA. É possível também verificar que tais aproximações decrescem com o passar dos anos e que este decréscimo é de ordem polinomial. Com isso, a partir do ano de 2014, é possível realizar estimativas de previsão para os anos seguintes através das curvas de aproximações aos infectados, presente na Figura (4.1).

Em seguida, veremos as aproximações e simulações para a população de suscetíveis conforme a figura (4.2).

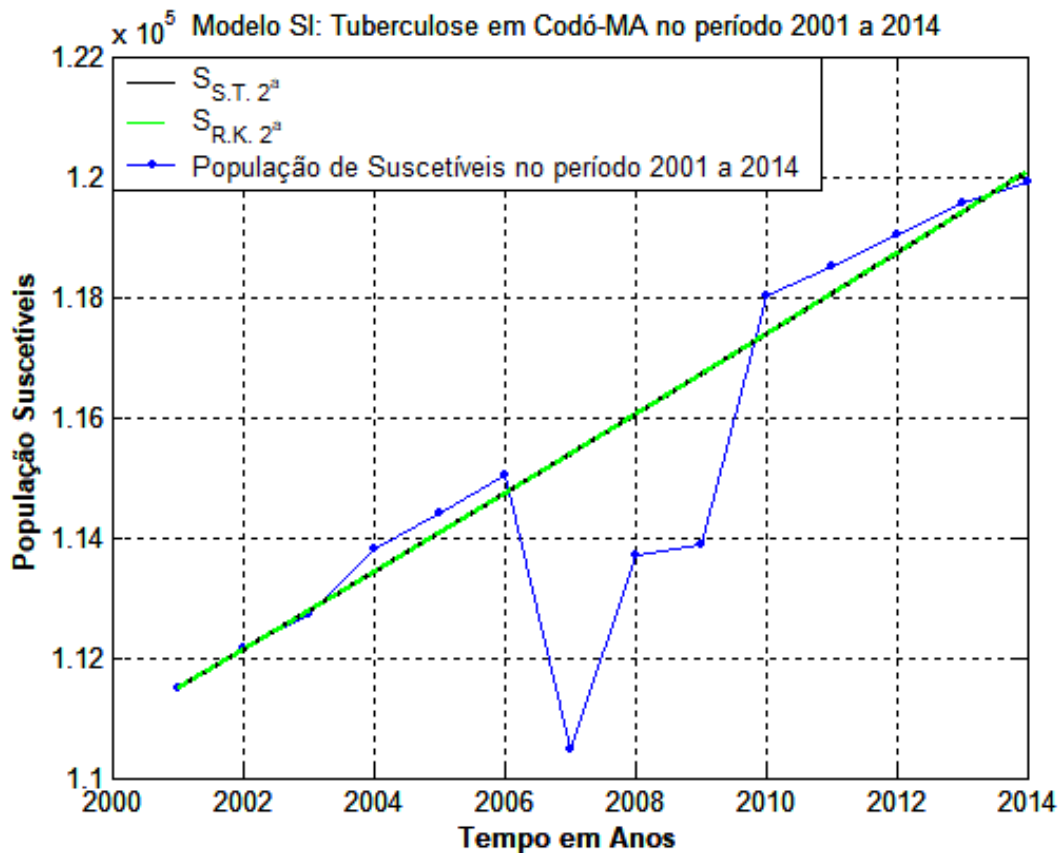


Figura (4.2): População de suscetíveis (tuberculose) no município de Codó-MA de 2001 a 2014 (pontos em azul), juntamente com as soluções numéricas de suscetíveis tanto segundo a Série de Taylor de 2ª ordem, $S_{S.T.2^a}$ (curva preta), quanto o método de Runge-Kutta de 2ª ordem, $S_{R.K.2^a}$ (curva verde).

Do mesmo modo, observamos, na Fig. (4.2), que as curvas numéricas de suscetíveis $S_{S.T.2^a}$ (curva preta) e $S_{R.K.2^a}$ (curva verde) aproximam-se entre si, evidenciando o correto desenvolvimento teórico e computacional acerca das metodologias propostas para solucionar a Eq. (3.1) a partir da utilização de dados reais da tuberculose no município de Codó-MA e, portanto, ambas as soluções numéricas para a população de suscetíveis são convergentes. Em contrapartida, tais curvas (preta e verde) na Fig. (4.2) aproximam-se aos dados reais de suscetíveis da tuberculose no município de Codó-MA, com à exceção entre os anos de 2007 e 2008, uma vez que os parâmetros que se encontram na Eq. (3.1) não variam no tempo. Além do mais, é verificado que tais aproximações crescem com o passar dos anos e que este crescimento também é de ordem polinomial.

Por fim, as aproximações e previsões feitas a partir dessas soluções, a Série de Taylor de 2ª ordem e o método de Runge-Kutta de 2ª ordem, estão em harmonia com os resultados apresentados e atestam o desenvolvimento correto de ambas para esse caso de tuberculose em Codó-MA tanto na Fig. (4.1) quanto na Fig. (4.2), podem ser usadas para antecipar os números de casos futuros da tuberculose nessa determinada região que podem ser modificadas por outros fatores e com isso, pode-se antecipar os recursos para lidar com o aumento ou diminuição dos casos da doença.

CONCLUSÃO

O desenvolvimento do presente estudo possibilitou uma análise sobre o modelo epidemiológico determinístico SI (suscetíveis e infectados), para modelar a doença da tuberculose no município de Codó no Maranhão, onde propomos duas metodologias distintas a saber, a Série de Taylor de 2ª ordem e o método de Runge-Kutta de 2ª ordem, para solucionar a Eq. (3.1) a partir de dados reais da tuberculose no município de Codó-MA entre os anos de 2001 a 2014. Constatamos as aproximações, tanto entre as soluções numéricas de infectados, Fig. (4.1), quanto, entre, às de suscetíveis, Fig. (4.2), através de ambas as metodologias acima citadas, comprovando assim a convergência das soluções numéricas aqui propostas.

Como resultado, a partir das curvas de infectados, Fig. (4.1), constatamos um decréscimo no número de infectados com o passar dos anos e, que este decréscimo é de ordem polinomial, uma vez que tal decréscimo não é abrupto e/ou de forma repentina com o passar do tempo. Já a partir das curvas de suscetíveis, Fig. (4.2), ocorre um crescimento no número de suscetíveis e, que este é também de ordem polinomial. Através das curvas aproximadas de infectados e suscetíveis, Figs. (4.1) e (4.2), é possível realizar previsões, bastando para tanto realizar novas simulações a partir do ano de 2001 e o ano desejado, após o ano de 2014.

Ainda que, utilizando os dados que constam em (MARCOLINO, 2016) não sejam recentes, porém são suficientes para desenvolver pesquisa. De tal forma que, a metodologia escolhida para este trabalho foi o modelo epidemiológico SI modelado por Série de Taylor e Runge-Kutta ambos de 2ª ordem. Visto que, podem ser muito bem aplicadas em futuras análises, como também em outros modelos epidemiológicos e conseqüentemente em dados recentes.

Portanto, a importância da modelagem matemática em epidemias é um estudo que deve ser usado para o desenvolvimento de políticas públicas de saúde, com grande alcance populacional, por exemplo, campanhas de vacinação, por outro lado, são necessários investimentos por partes dos governantes em pesquisas na área da saúde, em particular na epidemiologia e suas extensões, onde poderão analisar suas previsões e simulações. Bem como, utilizar destas pesquisas para diminuir as taxas de infectados por essas doenças de caráter epidêmico.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, ANA CATARINA CARNEIRO. **Modelação Matemática de Epidemias**. Dissertação (Mestrado em Tecnologia Biomédica) – Escola Superior de Tecnologia e Gestão Instituto Politécnico de Bragança, p. 96. Bragança, novembro de 2015.

BARROSO, L. C., BARROSO, M. M. A., FILHO, FREDERICO, F. C., Carvalho, M. L. B., MAIA, M. L. (1987). **Cálculo Numérico**. Editora Harbra Ltda. São Paulo.

BERTOLLI FILHO, C. **História social da tuberculose e do tuberculoso: 1900-1950** [online]. Rio de Janeiro. Fiocruz, 2001. 248 p. Antropologia & Saúde collection. ISBN 85-7541-006-7. <Disponível em <https://static.scielo.org/scielobooks/4/pdf/bertolli-8575410067.pdf>. Acesso em: 23 abril. 2022>.

BRASIL. MINISTÉRIO DA SAÚDE. **Secretaria de Vigilância em Saúde. Departamento de Vigilância Epidemiológica. Guia de vigilância epidemiológica / Ministério da Saúde, Secretaria de Vigilância em Saúde, Departamento de Vigilância Epidemiológica**. – 7. ed. – Brasília: Ministério da Saúde, 2009. 816 p. – (Série A. Normas e Manuais Técnicos)

BRASIL. MINISTÉRIO DA SAÚDE. **Secretaria de Políticas de Saúde Departamento de Atenção Básica. Manual Técnico para o Controle da Tuberculose**. – 1ª. ed. – Brasília: Ministério da Saúde, 2002. 15 p. – (Série A. Normas e Manuais Técnicos)

BURDEN, R. L., Faires, J. D. **Análise Numérica**. 2008, CENGAGE Learning.

MACIEL, MARINA DE SOUZA. ET AL. **A história da tuberculose no Brasil: os muitos tons (de cinza) da miséria / The history of tuberculosis in Brazil: The many shades (gray) of the misery**. <Rev. Soc. Bras. Clín. Méd;10(3), maio-jun. 2012>.

MARCOLINO, RAIMUNDO DOS SANTOS. **Modelos matemáticos epidemiológicos da tuberculose em Codó-MA**. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas, p.107. Campinas-SP, 2016.

ROCHA, M. M. **Análise de Previsões de Casos de HIV/AIDS em Castanhal mediante um Modelo Epidemiológico Determinístico.** 2014, p. 62. TCC (Graduação) – Curso de Licenciatura em Matemática, Campus Universitário de Castanhal/UFPA, Castanhal/PA, 2014.

SOARES, ANNA LÍGIA OENNING. **Modelagem Alternativa para Sistemas Epidemiológicos.** Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC, p. 98. Santo Andre, 2010.