UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE BRAGANÇA
FACULDADE DE MATEMÁTICA

Baralho do Cálculo: uma metodologia de ensino para o Cálculo Diferencial e Integral

Júlia Barbosa Santa Brígida

BRAGANÇA-PA
2023

Baralho do Cálculo: uma metodologia de ensino para o Cálculo Diferencial e Integral

Júlia Barbosa Santa Brígida

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de Licenciada Plena em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra Marly dos Anjos Nunes

BRAGANÇA-PA

2023

Baralho do Cálculo: uma metodologia de ensino para o Cálculo Diferencial e Integral

Júlia Barbosa Santa Brígida

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de Licenciada Plena em Matemática.

Bragança, 24 de fevereiro de 2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dra Marly dos Anjos Nunes
Orientadora - UFPA

Prof. Dra Edilene Farias Rozal
Examinador Interno - UFPA

Prof. Me. Nelson Ned Nascimento Lacerda
Examinador Interno - UFPA

Agradecimentos

Durante a escrita deste trabalho, vários sentimentos me acompanham, assim como as lembranças do decorrer do curso. Uma que se destaca é do início das aulas, quando comecei a me fazer questionamentos acerca do caminho a ser percorrido e seus desafios. Surgia ali o receio quanto ao desenvolvimento da atitude necessária para tornar-me uma professora de matemática. Afinal, sendo jovem e uma pessoa reservada sempre limitei a expressão de meus pensamentos, buscando agir de forma coerente.

Ao passar pela última etapa é perceptível o amadurecimento proporcionado a mim. Desenvolvido em parte à dedicação e empenho pessoal, mas também às experiências vivenciadas neste período, bem como ao convívio com diversas pessoas. Sendo assim, não poderia deixar de me referir a todos que contribuíram neste percurso, demonstrando a importância de cada um presente.

Antes do mais, gostaria de dirigir minha gratidão à Deus, meu Senhor e Pai, por todo o aprendizado. Pelo dom da vida, tens me guiado em minhas escolhas e ações, agindo em mim e por meio de mim. Sendo a principal lição recebida neste período, a de que tudo realizado ou permitido por Ele tem algum sentido, uma finalidade. Independente dos planejamentos, o que realmente lhe for necessário ocorrerá no devido tempo.

Em seguida, venho expor minha alegria em ter conhecido um ser único que cruzou o meu caminho, a orientadora deste trabalho Prof. Dra Marly Anjos. Que além de orientar, tornou-se uma verdadeira amiga e confidente, me ensinou algo muito relevante que não está nos livros da graduação "os erros constituem uma parte essencial do aprender", me ofereceu espaço e compreensão, assim pude me permitir comete-los. Aliás, devo enfatizar, a postura que tentam aparentar com apenas palavras, esta prova ter através de ações verdadeiras e genuínas, incentivando seus alunos, em especial a mim, como entrelaçar caráter e profissionalismo.

À professora Edilene Farias, pela sua vasta colaboração e acolhimento durante os 4 anos do curso. Mostrando na teoria e prática aspectos que constituem uma docente de qualidade, através dos momentos de dinamismo que nos fizeram pôr em ação cada ensinamento. Concluindo que o processo de ensino é mutuo, isto é, todos os envolvidos tem algo a receber.

Não poderia deixar de agradecer a minha família, minhas irmãs Juliane e Juliana, minha prima Laissa Vitória, que estiveram presentes, acompanhando meu crescimento.

Porém, devo enfatizar duas mulheres incríveis, os meus maiores exemplos:

Uma é a primeira professora que tive, minha mãe Rosiane de Jesus, que lutou comigo tantas batalhas, sempre ajudando a superar os obstáculos e enfrentar meus medos. Suas ações demonstram muito mais do que seu amor por mim, esteve ao meu lado a cada novo conhecimento e nunca mediu esforços para a minha educação. Tenho orgulho da pessoa que és, um exemplo de como uma mulher é capaz de se reinventar e dar o melhor de si.

A outra é minha avó, Maria de Jesus, a incentivadora mais assídua da educação que conheço. Me mostrou a força que as pessoas possuem para alcançar seus objetivos, serem independentes e sem deixar de fora algo primordial para a essência de alguém, ser acolhimento quando é necessário.

Ainda, à meu pai, Miguel Santa Brígida, pelo privilégio de conviver um período curto porém muito valioso da minha vida. Ele me mostrou o mais belo dos aspectos humanos, o espirito, a essência que cada um carrega em seu coração. Mesmo não estando presente nesta etapa, contribuiu imensamente para que chegasse neste ponto.

Quanto aos demais, cito Glenda de Fátima, amiga de turma desde o ensino fundamental (sendo mais especifica, desde o 6° ano) quando estudávamos na escola E.E.F.M Prof. Bolívar Bordalo da Silva. Diante deste longo período, partilhando juntas esse processo formativo, me sinto muito feliz de estarmos nos apoiando, principalmente nas lutas diárias. Quem diria que aquelas duas meninas que andavam juntas iriam dividir o desejo pela mesma profissão e além disso, aprender tanto uma com a outra.

Adiante, formamos a "panelinha"das meninas, Natália Furtado, Marília Gabrielly, Erica Araújo, Roseane do Carmo e Glenda. Estudamos reunidas, incansavelmente, uma incentivando as outras quando o desânimo se aproximava, em especial, durante a realização dos trabalhos acadêmicos. Também formamos um elo de apoio, sou grata pelo cuidado, por estarem comigo nos momentos difíceis, me fazendo lembrar de quem sou.

Além delas, pude compartilhar muitas experiências com duas pessoas que tornaram-se parte de meu convívio, Edenilson Cunha e Jacó de Brito. Só tenho que lamentar por nossa aproximação tardia, pois contribuíram de forma significativa em minha formação, sendo exemplos de dedicação e eficiência, e, é claro, foram ouvintes dos meus desabafos.

Agora, agradeço à Diego Silva, Gleykson Barbosa e Marcelo Leite, pela participação colaborativa durante a realização desta pesquisa, sendo imprescindiveis. Agradeço pela parceria e proatividade demonstrada durante o trabalho. Juntos à Glenda, Edenilson e Jacó, se dividiram na observação de aspectos necessários para a obtenção dos resultados.

Também, ao Laboratório Pedagógico de Informática e Matemática, tendo como coordenadoras as professoras Marly Anjos e Edilene Farias. Teve um papel importante para a realização deste trabalho, uma vez que o objeto de estudos foi pensado e desenvolvido neste ambiente, durante nossas reuniões em busca de ideias para a produção de materiais. Ele foi um espaço de muito aprendizado, proporcionando muitas experiências que ajudaram no desenvolvimento de habilidades como autonomia, proatividade, trabalho em equipe, entre outros. Contando com a parceria dos voluntários, meus companheiros, Alana Seixas, Emilly Barbosa, Diego Silva, Glenda de Fátima, José Luidy, Lídia Alves, Marcelo Leite, Nathane Lima e Thayana Fernandes.

Ao professor Nelson Nascimento, pelo aprendizado proporcionado durante as disciplinas ministradas para a turma, pela parceira, sempre desafiando e motivando os alunos a buscar o melhor. Também, por ter aceitado compor a banca avaliadora deste trabalho.

Aos meus padrinhos Melquisedeque, Carla Isabele e Ordalete Silva pelo incentivo aos meus estudos. Em especial, a última por estar presente ativamente em minha educação, desde a infância, me auxiliando nos deveres da escola. Dispôs várias vezes de meios que colaboraram neste processo.

À difusão Shalom Bragança, que tornou-se parte da minha família, me amparando nos momentos difíceis. Obrigada a todos que constituíram o alicece que sustentou e me proporcionou uma experiência profunda com Deus. Assim, permitindo a perseverança nos estudos.

Então, não menos importante, a turma entrevistada e observada nesta pesquisa. Pelo acolhimento, participação e colaboração para a aplicação da proposta a eles apresentada, creio também ter contribuído na formação desses discentes. Por fim, após esse período do curso, recheado de aprendizados, posso afirmar com segurança que me sinto apta à profissão que escolhi.

"Os meus passos são teus, o meu próximo minuto é teu, se não for assim, não me deixe ir. Dou minha mão para ti, fecho os olhos e confio em ti, leva-me Senhor."
(Teus Planos - Cassimiro, 2013)

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é fazer o uso deste jogo como ferramenta metodológica no ensino de Cálculo Infinitesimal, visando melhorias na aprendizagem. A aplicação foi realizada num ambiente de graduação na turma 2021 do curso de Licenciatura Plena em Matemática da UFPA - Campus Bragança, do jogo intitulado Baralho do Cálculo, uma adaptaçâo do baralho convencional, trazendo conceitos iniciais do Cálculo Diferencial e Integral, como funções elementares, gráficos, derivadas e integrais. Com a descrição de todo o processo de elaboração do material, a experiência desde a escolha dos objetos de estudo, a fundamentação teórica, as etapas de construção e testes, o contato com os alunos, a utilização de questionários junto as observações da turma para a obtenção de resultados, é possível acompanhar todo o processo que envolve a construção de um jogo e o seu uso como metodologia. Através do método da pesquisa quali-quantitativa, foi possível identificar as principais dificuldades enfrentadas pelos discentes e suas causas durante o período, permitindo adaptações propícias ao intuito do trabalho. Portanto, foi possível obter resultados após a utilização do jogo, sendo eles: a identificação dos conceitos elementares da teoria que geraram a dificuldade de aprendizagem em Cáculo, a necessidade de trabalhar a linguagem matemática em uma via de mão dupla, a motivação, a curiosidade e competitividade saudável gerada diante do metódo de ensino diverdificado.

Palavras-chave: Baralho do Cálculo; Jogo matemático; Metodologia de Ensino; Cálculo Diferencial e Integral.

Lista de Figuras

2.1 Gráficos da Função Constante 17
2.2 Gráficos da Função Afim 18
2.3 Gráficos da Função Quadrática 19
2.4 Gráfico de $f(x) = x^3$ 20
2.5 Gráfico de $g(x) = (x - 1)^3$ 20
2.6 Gráfico de $f(x) = a^x$ 21
2.7 Gráfico de $f(x) = e^x$ 21
2.8 Gráfico de função logarítmica 22
2.9 Ciclo trigonométrico 23
2.10 Gráfico da função seno 23
2.11 Gráfico da função Cosseno 24
2.12 Gráfico da função tangente 25
2.13 Gráfico da função constante 26
2.14 Gráfico da função quadrática 26
2.15 Gráfico da função cosseno 27
2.16 Gráfico da função modular 27
2.17 Gráfico da função Afim 28
2.18 Gráfico da função Cúbica 28
2.19 Gráfico da função Seno 29
2.20 Gráfico da função Tangente 29
2.21 Gráfico 30
2.22 Interpretação Geométrica de Derivada 31
2.23 Área abaixo da curva 40
2.24 Partição do intervalo $[a, b]$ 40
2.25 Representação dos retângulos 41

3.1 Primeiras reuniões do projeto LAPINMAT 44
3.2 Reunião para a seleção do conteúdo 45
3.3 Socialização do baralho tradicional 46
3.4 1º Organização das cartas 48
3.5 Cartas do protótipo referentes à função constante 48
3.6 Primeiras propostas de carta coringa 49
3.7 Primeiro teste com o baralho 50
3.8 Nova proposta de carta coringa 51
3.9 Carta do naipe gráfico da função constante 55
3.10 Padrão de naipes 56
3.11 Interface da versão online do Canva 57
3.12 Upload de imagens no canva 57
3.13 Interface do geogebra 58
3.14 Primeira versão da carta gráfico 58
3.15 Ajuste na configuração do geogebra 59
3.16 Padrão da parte traseira 60
3.17 Versões finais da função afim 60
3.18 Versões finais da função afim 61
3.19 Versão final do coringa 61
3.20 Cartas produzidas 61

4.1 Apresentação do Baralho e suas regras 64
4.2 Organização das equipes 65
4.3 Dinâmica da partida 66
4.4 Durante as aulas 68
4.5 Observação das aulas 68
4.6 Derivada no ponto da $f(x) = \ln x$ 72

Sumário

1 Introdução **13**

2 Fundamentação Teórica **16**

2.1 Funções Elementares 16

2.1.1 Função Constante 17

2.1.2 Função Afim ou Função Polinomial de Grau 1 18

2.1.3 Função Quadrática ou Função Polinomial de Grau 2 18

2.1.4 Função Cúbica ou Função Polinomial de Grau 3 19

2.1.5 Funções Exponenciais 20

2.1.6 Função Logarítmica 22

2.1.7 Funções Circulares 22

2.1.8 Função Seno 23

2.1.9 Função Cosseno 23

2.1.10 Função Tangente 24

2.2 Paridade de Funções 25

2.2.1 Função Par 25

2.2.2 Função Ímpar 27

2.3 Derivadas 30

2.3.1 Derivada no ponto x_0 30

2.3.2 Interpretação Geométrica 31

2.3.3 Derivada de uma função 32

2.3.4 Derivadas das Funções Elementares 33

2.4 Primitivas 37

2.4.1 Relação entre funções com derivadas iguais 37

2.4.2 Primitiva de uma função 37

2.5 Integral Definida (Integral de Riemann) 40
2.5.1 Soma de Riemann 40
2.5.2 Integral de Riemann 41
2.5.3 Teorema Fundamental do Cálculo 42

3 O Baralho do Cálculo 43
3.1 O processo de elaboração 43
3.1.1 Jogo de cartas 43
3.1.2 A escolha do conteúdo 44
3.1.3 O Baralho 45
3.2 O protótipo do baralho 47
3.3 O teste 49
3.4 As regras do jogo 51
3.4.1 Composição 51
3.4.2 A partida 53
3.5 O design das cartas 55
3.5.1 Primeira tentativa 55
3.5.2 *Canva e geogebra* 56
3.5.3 Versão final 59

4 Aplicação em sala de aula 62
4.1 O planejamento 62
4.2 Questionário 63
4.3 Primeiro contato com o Baralho 64
4.4 Aprimorando a teoria Cálculo/Baralho 67
4.5 A segunda aplicação do jogo 69
4.6 Resultados 70

Considerações Finais 73

Referências Bibliográficas 75

Anexos 77

Capítulo 1

Introdução

O Cálculo Diferencial e Integral, também denominado Cálculo Infinitesimal, é uma área da Matemática presente na grade curricular de diversos cursos de graduação (ciências exatas). Na licenciatura em Matemática ele compõe a teoria que geralmente é subdividida em disciplinas, na UFPA (Universidade Federal do Pará) – Campus Bragança esta partição também ocorre, especificamente nas componentes curriculares: Cálculo Diferencial e Integral I, II, III e IV. Com um vasto referencial teórico apresentam-se inúmeras dificuldades no processo de ensino e aprendizagem.

Neste caso, apesar de possuir um público familiarizado assim como nos outros ramos da Matemática não deixa de ser temido pelos alunos. Com linguagem técnica, diversas notações e conceitos abstratos faz-se necessário o uso de metodologias de ensino para obter um aprendizado efetivo e significativo. Porém, a realidade experimentada no nível superior se depara com um imenso obstáculo, a persistência do ensino tradicional dentro das universidades, onde dificilmente observa-se a utilização de métodos variados com conceitos formais.

O uso de jogos como método de ensino da Matemática é uma opção vantajosa por conta da flexibilidade de adaptação ao formato, conteúdo, público alvo e as regras de participação de modo propício a determinadas situações.

> As posturas, atitudes e emoções demonstradas pelas crianças, enquanto se joga, são as mesmas desejadas na aquisição do conhecimento escolar. Espera-se um aluno participativo, envolvido na atividade de ensino, concentrado, atento, que elabore hipóteses sobre o que interage, que estabeleça soluções alternativas e variadas, que se organize segundo algumas normas e regras e, finalmente, que saiba comunicar o que pensa, as estratégias de solução de seus problemas. (GRANDO,2000, p.17)

Neste sentido, pensamos em adaptar o uso de jogos, observadas as vantagens com crianças e jovens, para alunos da graduação, em especial do curso de licenciatura. Então, o material apresentado neste trabalho é o Baralho do Cálculo, cuja adequação advêm do baralho tradicional inserindo conceitos iniciais da área infinitesimal, tais como: funções, gráficos, derivadas e integrais. Com a aplicação destinada a turmas de cursos que possuam como ementa das componentes curriculares tais conceitos.

Desta forma, o objetivo desta pesquisa é fazer uso do jogo denominado Baralho do Cálculo como recurso metodológico para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, visando a melhoria na qualidade do processo de aprendizagem.

Já o interesse pela abordagem da área de Cálculo Diferencial e Integral surgiu a partir de minha experiência pessoal com a mesma, nas disciplinas (Cálculo Diferencial e Integral I, II, III, IV) que fazem parte da grade curricular do curso de Matemática da UFPA. Durante essas vivências, apesar de não obter um bom desempenho nas componentes sentia-me atraída pelo tema. Daí, por não ter tido uma experiência agradável me indagava como seria assistir uma aula dessa temática com uma metodologia de ensino eficiente e diferenciada.

Com a participação voluntária no, então recém aprovado, laboratório de Matemática do Campus de Bragança houve também uma aproximação com a professora coordenadora do projeto e orientadora deste trabalho, cuja atuação profissional é com o Cálculo. Então, o primeiro contato bem sucedido com o conteúdo foi quando me candidatei a uma bolsa de monitoria paras as disciplinas citadas, no cenário pós pandemia, onde as turmas apresentavam muitas dificuldades de aprendizagem. O processo de preparação para as monitorias consistiam em revisões da literatura referencial, o que me proporcionou momentos para aprimorar meus conhecimentos.

Observando o desenvolvimento dos alunos durante esse período, bem como os relatos negativos acerca do conteúdo, foi possível refletir sobre o papel do docente em sala de aula. Há muito tempo nos deparamos com um modelo tradicional de ensino nas escolas e universidades, que consiste em um monólogo do professor pois não há a interação com o aluno, nem participação ativa. O que me levou, instruída pela orientadora, a buscar alternativas, adaptadas ao meio que trouxesse uma metodologia diferenciada a fim de obter a qualidade de ensino e consequentemente um excelente desempenho dos alunos assistidos.

O trabalho está organizado da seguinte forma:

No capítulo 1, temos a introdução. Já no capítulo 2, apresentaremos a fundamentação teórica estudada para a elaboração do Baralho do Cálculo e a sequência do conteúdo ministrado durante a aplicação do mesmo.

Para o capítulo 3 discorreremos todo processo de idealização e materialização do jogo.

Por fim, o capítulo 4 dedicaremos à aplicação do Baralho do Cálculo realizada na oferta de uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral do curso de licenciatura em matemática.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Neste capítulo estudaremos as teorias referentes à parte inicial do Cálculo Diferencial e Integral, dentre elas estão: funções elementares, paridade, derivada e integral. Tópicos estes que são indispensáveis para uma melhor compreensão do conteúdo a ser trabalhado nesta pesquisa.

2.1 Funções Elementares

Nesta seção, apresentaremos as funções elementares necessárias na aplicação da proposta do material desenvolvido no presente trabalho. As funções abordadas são: função constante, função polinomial de grau 1, 2, e 3 (ou seja, afim, quadrática e cúbica, respectivamente), função exponencial, função logarítmica e as funções trigonométricas (seno, cosseno e tangente).

Definicão 2.1.1. *(Função) Uma função f de A em B recebe o nome de função definida de A em B ou aplicação de A em B se, e somente, se para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$*

$$\begin{aligned} f: \quad A &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Uma função está bem definida quando são conhecidos $D(f)$ (domínio da f), $CD(f)$ (contradomínio da f) e a lei de correspondência $y = f(x)$.

Definicão 2.1.2. *(Função Polinomial) Dada a sequência finita de números reais* $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$*, chama-se função polinomial associada a esta sequência a função*

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \end{aligned} \tag{2.1}$$

Os reais $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ são chamados coeficientes e as parcelas $a_0, a_1.x, a_2.x^2, ..., a_n.x^n$ são denominadas termos da função polinomial.

Chama-se grau de uma função polinomial f, não nula, o número natural p tal que $a_p \neq 0$ e $a_i = 0$ para todo $i > p$.

Definicão 2.1.3. *(Gráfico de uma função) Dada uma função* f *de* A *em* B*, o gráfico de* f *é o produto cartesiano* $A \times B$ *definido por*

$$G_f = \{(x, y) \in A \times B; \quad y = f(x)\}$$

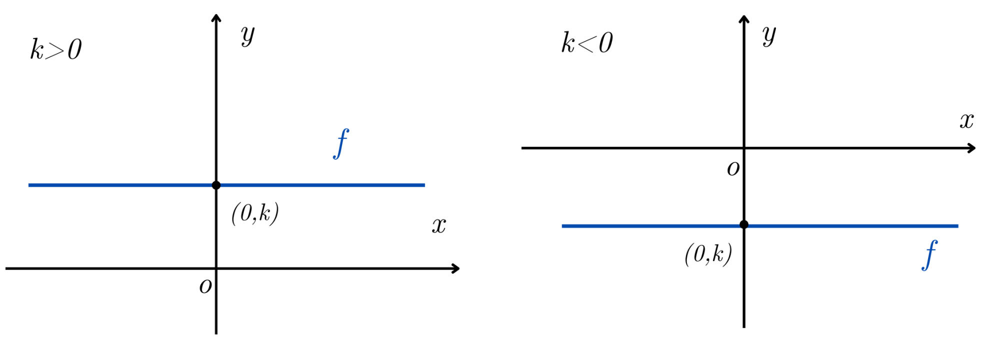
2.1.1 Função Constante

Uma função constante é uma função polinomial do tipo $f(x) = k$, isto é, uma função em que $a_0 = k$ e $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ em (1.1).

Gráfico da Função Constante

O gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo x, passando pelo ponto $(0, k)$. A imagem é o conjunto $Im(f) = k$.

Figura 2.1: Gráficos da Função Constante



(a) Constante positiva (b) Constante negativa

Fonte: Própria da autora (2022)

2.1.2 Função Afim ou Função Polinomial de Grau 1

Uma função polinomial que apresenta $a_0 = b$, $a_1 = a$, $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 0$ em (1.1) é chamada função afim, isto é, uma função polinomial do tipo

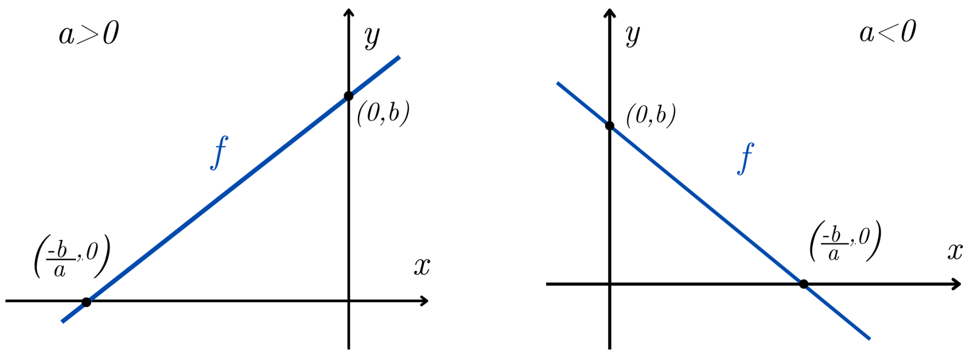
$$f(x) = ax + b, \quad \text{com} \quad a \neq 0.$$

Gráfico da Função Afim

O gráfico de uma função polinomial de grau 1 é uma reta uma passando pelos pontos $(0, b)$ e $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

Quando $a > 0$, a função é crescente. Se $a < 0$, a função é decrescente

Figura 2.2: Gráficos da Função Afim



(a) Crescente (b) Decrescente

Fonte: Própria da autora (2022)

2.1.3 Função Quadrática ou Função Polinomial de Grau 2

Uma função polinomial que tem $a_0 = c, a_1 = b, a_2 = a \neq 0$ e $a_3 = a_4 = \ldots = a_n = 0$ em (1.1) é chamada função quadrática, ou seja, uma função polinomial do tipo

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{com} \quad a \neq 0.$$

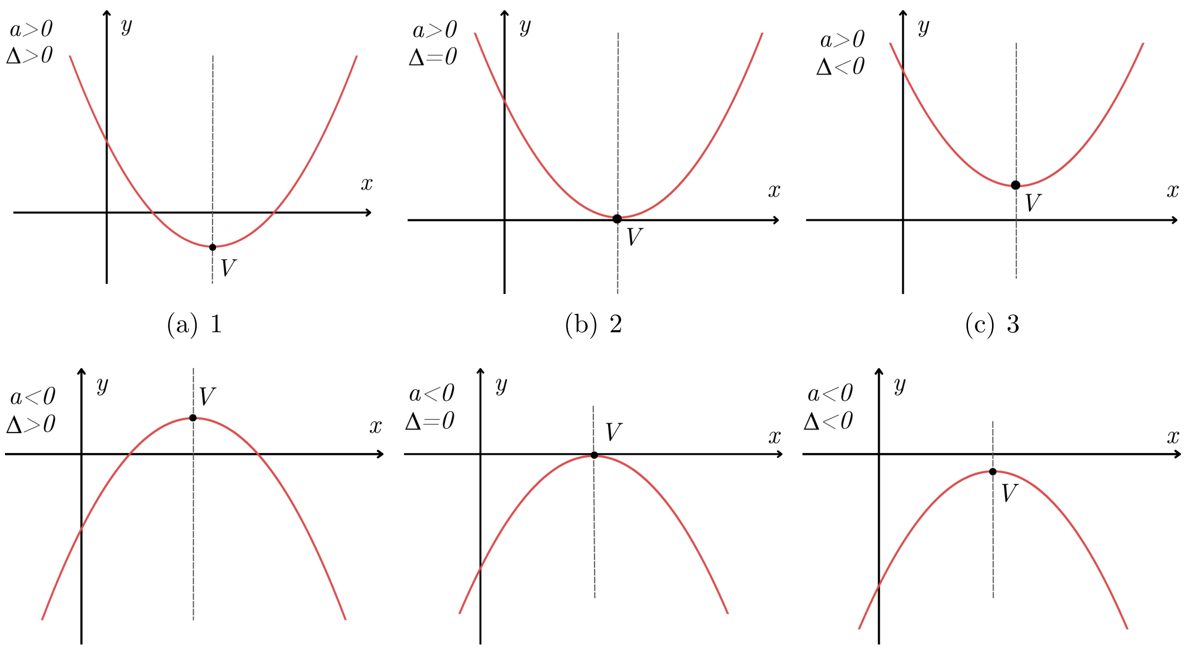
Gráfico da Função Quadrática

O gráfico de uma função polinomial de grau 2 é uma parábola que tem eixo de simetria na reta $x = -\frac{b}{2a}$ e vértice no ponto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima. E, se $a < 0$, para baixo.

Conforme $\Delta = b^2 - 4ac$ seja positivo, nulo ou negativo, a interseção da parábola com o eixo x é formada por 2, 1 ou nenhum ponto, respectivamente.

Figura 2.3: Gráficos da Função Quadrática



(a) 1 (b) 2 (c) 3

(d) 4 (e) 5 (f) 6

Fonte: Própria da autora (2022)

2.1.4 Função Cúbica ou Função Polinomial de Grau 3

Uma função cúbica ou função polinomial de grau 3 é uma função cuja lei de formação será

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Gráfico da Função Polinomial de Grau 3

O gráfico da função polinomial de grau 3 é uma cúbica. Considere $y = f(x), \quad f(x) = x^3$. Tem-se

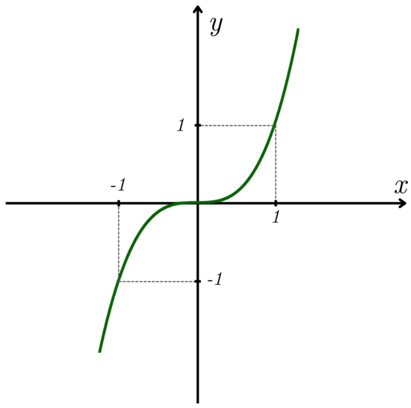
$$\begin{aligned} Df &= \quad \mathbb{R} \\ f(-1) &= \quad (-1)^3 = -1; \quad f(0) = (0)^3 = 0; \quad f(1) = 1. \\ Gf &= \quad \{(x, y); \quad y = x^3, \quad x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Suponha $x > 0$, observe que à medida que x cresce, y cresce acentuadamente $(2^3 = 8;\ 3^3 = 27,\ ...)$. Quando x se aproxima de zero, y se aproxima de zero mais rapidamente $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8},\ \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}, ...\right)$. Esta análise nos dá ideia da parte do gráfico correspondente a $x > 0$. Para $x < 0$, observe que $f(-x) = -f(x)$.

Figura 2.4: Gráfico de $f(x) = x^3$

x	$f(x)$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
1	1
2	8
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
-1	-1
-2	-8

(a)

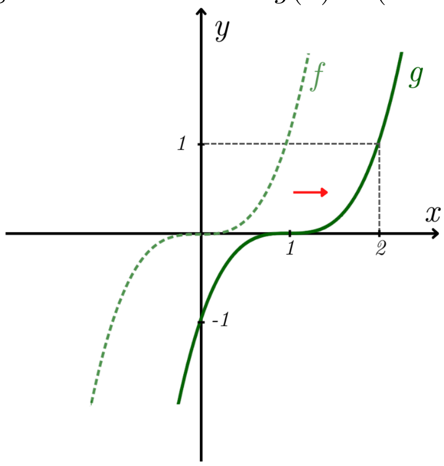


(b)

Fonte: Própria da autora (2022)

Agora, observe o caso da função polinomial de grau 3, $g(x) = (x-1)^3$. Seu gráfico é obtido de $y = x^3$, transladando uma unidade para direita.

Figura 2.5: Gráfico de $g(x) = (x-1)^3$



Fonte: Própria da autora (2022)

2.1.5 Funções Exponenciais

Dado um número real a, com $0 < a \neq 1$, chama-se função exponencial de base a a função definida por

$$
\begin{aligned}
f: \ \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto f(x) = a^x
\end{aligned}
$$

Destacamos as seguintes propriedades:

(i) Sua imagem é $\mathbb{R}_+^*$, isto é, $a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$;

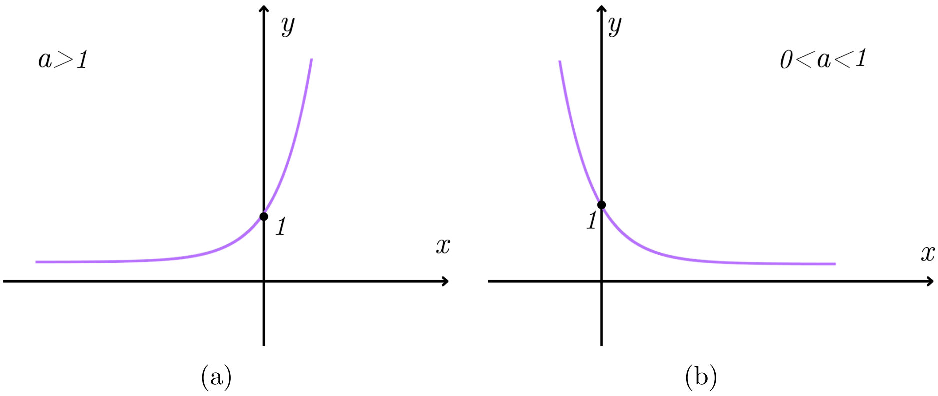
(ii) Se $a > 1$ e $x < y$, então $a^x < a^y$, isto é, $f(x) = a^x$ é estritamente crescente;

(iii) Se $0 < a < 1$ e $x < y$, então $a^x > a^y$, ou seja, $f(x) = a^x$ é estritamente decrescente.

Gráfico da Função Exponencial

O gráfico de uma função exponencial ($f(x) = a^x$) é uma curva exponencial que tem o seguinte aspecto

Figura 2.6: Gráfico de $f(x) = a^x$

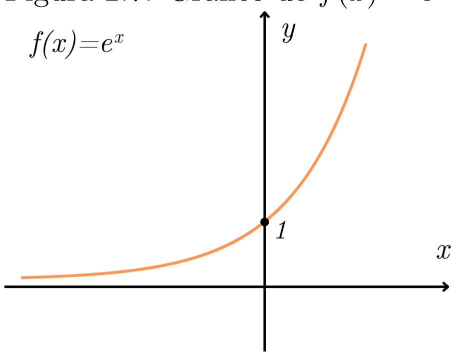


Fonte: Própria da autora (2022)

A função exponencial de base e $(e \cong 2,718281)$, $f(x) = e^x$, desempenhará um papel importante em todo nosso curso.

Observe que $e > 1$, assim o gráfico de $f(x) = e^x$ tem o seguinte aspecto:

Figura 2.7: Gráfico de $f(x) = e^x$



Fonte: Própria da autora (2022)

Definicão 2.1.4. *(Função Inversível) Uma função $f : A \to B$ é inversível se, e somente se, a relação inversa de f também é uma função, isto é, para cada $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $y = f(x)$.*

Notação: f^{-1}

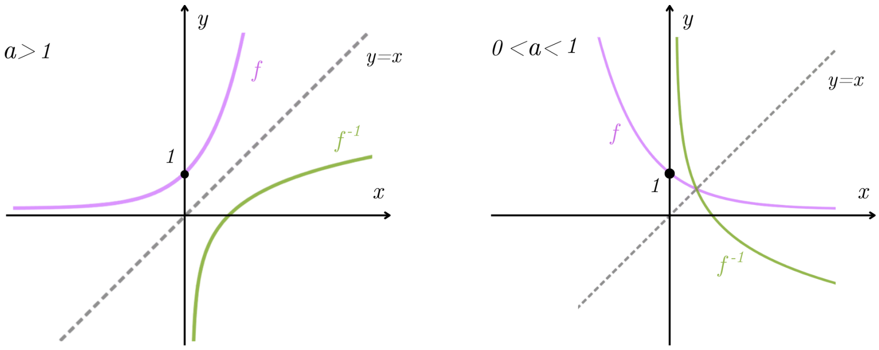
2.1.6 Função Logarítmica

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ dada pela lei $y = a^x, 0 < a \neq 1$, chamada exponencial, é inversível. Sua inversa $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log_a x$ é chamada função logarítmica.

Gráfico da Função Logarítmica

Os gráficos da logarítmica e da exponencial tomam um dos aspectos seguintes:

Figura 2.8: Gráfico de função logarítmica



(a) (b)

Fonte: Própria da autora (2022)

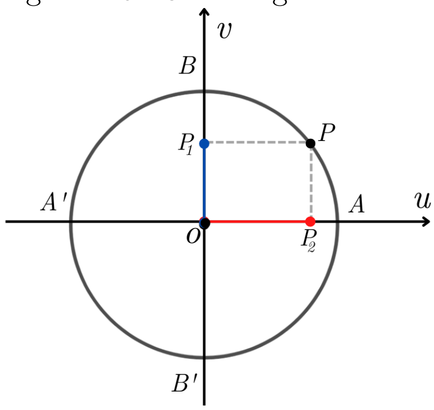
O logaritmo na base e é indicado por $\ln x$, assim $\ln x = \log_e x$. Temos então

$$y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x$$

2.1.7 Funções Circulares

Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo trigonométrico. As coordenadas de P em relação ao sistema $u0v, \overline{OP_2}$ e $\overline{OP_1}$, são chamadas $\cos x$ (cosseno de x) e $sen\, x$ (seno de x), respectivamente.

Figura 2.9: Ciclo trigonométrico



Fonte: Própria da autora (2022)

2.1.8 Função Seno

Chama-se função seno a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que associa a cada real x, o real $\overline{OP_1} = sen\, x$, isto é, $f(x) = sen\, x$.

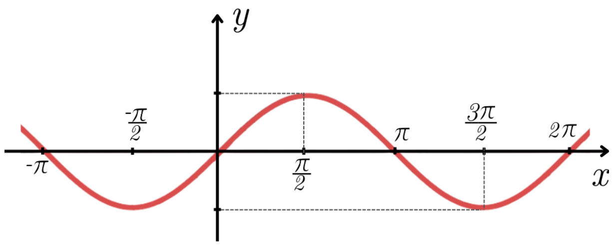
Propriedades:

(i) Sua imagem é $Imf = [-1, 1]$, isto é, $-1 \leq sen\, x \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

(ii) A função seno é periódica e seu período é 2π;

(iii) Seu gráfico é a senóide.

Figura 2.10: Gráfico da função seno



Fonte:: Própria da autora (2022)

2.1.9 Função Cosseno

Chama-se função cosseno a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $\overline{OP_2} = \cos x$, isto é, $f(x) = \cos x$.

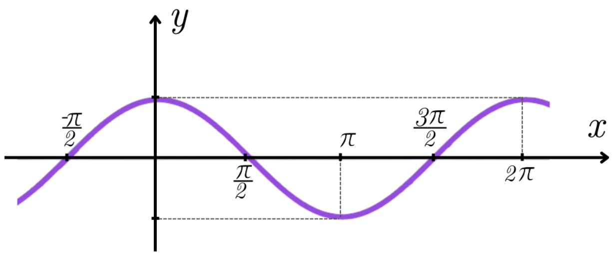
Propriedades:

(i) Sua imagem é o intervalo $[-1, 1]$, ou seja, $-1 \leq \cos x \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

(ii) A função cosseno é periódica e seu período é 2π;

(iii) Seu gráfico é a cossenóide.

Figura 2.11: Gráfico da função Cosseno



Fonte: Própria da autor (2022)

2.1.10 Função Tangente

Para cada $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$, sabemos que $\cos x \neq 0$ e então, existe o quociente $\frac{sen\, x}{\cos x}$, denominado $\tan x$. Chama-se função tangente a função

$$f : \left\{ x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \to \mathbb{R}$$

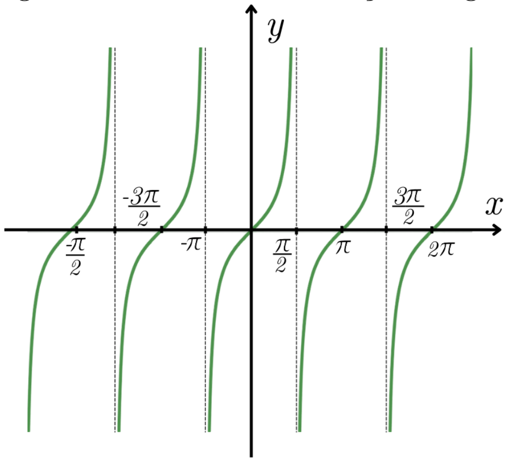
que associa a cada x o real $\tan x = \frac{sen\, x}{\cos x}$, isto é, $f(x) = \tan x$.
Propriedades:

(i) Sua imagem é $\mathbb{R}$, isto é, para todo $y \in \mathbb{R}$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\tan x = y$;

(ii) A função é periódica e seu período é π;

(iii) Seu gráfico é a tangentóide.

Figura 2.12: Gráfico da função tangente



Fonte: Própria da autora (2022)

2.2 Paridade de Funções

2.2.1 Função Par

Uma função $f(x)$ é chamada função par quando para todo $x \in D(f)$ temos

$$f(-x) = f(x).$$

Observe que os elementos simétricos possuem a mesma imagem.

Uma consequência desse fato é que os gráficos cartesianos das funções pares são curvas simétricas em relação ao eixo y (eixo das ordenadas)

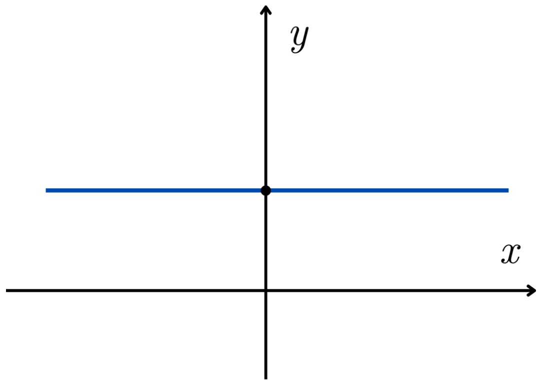
Dizemos que dois pontos são simétricos em relação a uma reta fixa, quando um é a imagem espelhada do outro em relação a esta reta. Esta reta fixa é chamada de eixo de simetria.

Exemplos 2.2.1. *São exemplos de função par*

(i) Função Constante

$$f(x) = k, \quad f(-x) = k \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(-x)$$

Figura 2.13: Gráfico da função constante

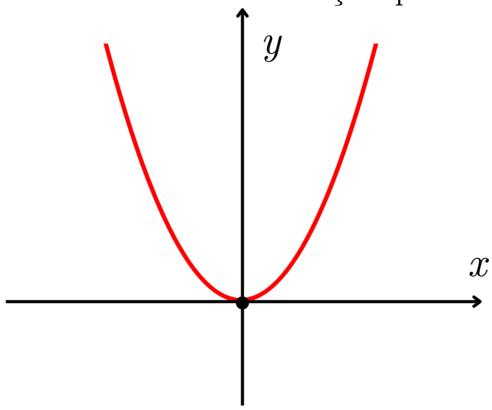


Fonte: Própria do autor (2022)

(ii) Função Quadrática na forma

$$f(x) = x^2, \quad f(-x) = (-x)^2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(-x)$$

Figura 2.14: Gráfico da função quadrática



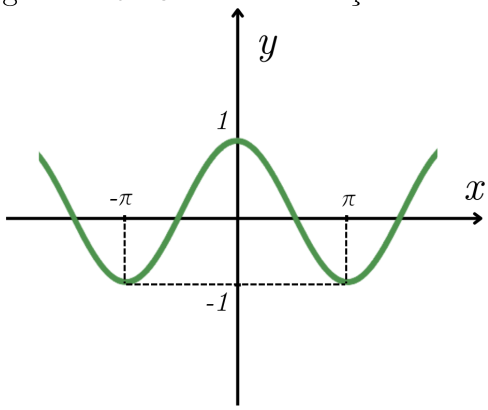
Fonte: Própria da autora (2022)

(iii) Função Cosseno

Seja $f(x) = \cos x, \quad x = \pi$

$$f(\pi) = \cos \pi = -1, \quad f(-\pi) = \cos \pi = -1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(-x)$$

Figura 2.15: Gráfico da função cosseno



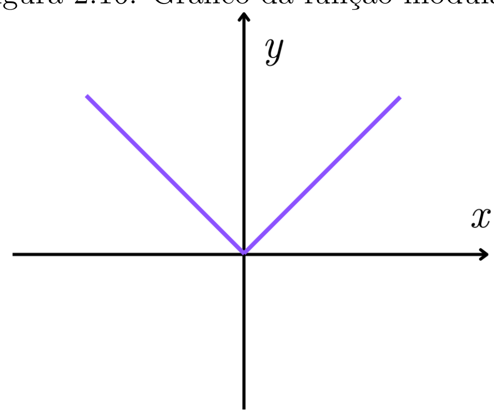
Fonte: Própria da autora (2022)

(iv) Função Modular

Seja $f(x) = |x|$

$$\begin{aligned} f(x) &= \quad |x| = x \quad se \quad x > 0 \\ f(-x) &= \quad |-x| = x \end{aligned}$$

Figura 2.16: Gráfico da função modular



Fonte: Própria da autora (2022)

2.2.2 Função Ímpar

Uma função $f(x)$ é chamada função ímpar quando para todo $x \in D(f)$ temos

$$f(-x) = -f(x).$$

Observe que em uma função ímpar, os elementos simétricos possuem imagens simétricas.

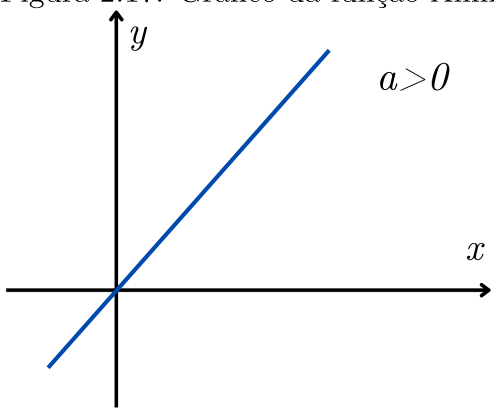
Uma sequência desse fato é que os gráficos cartesianos das funções ímpares são curvas simétricas em relação à origem, ou seja, em relação ao ponto de coordenada $(0, 0)$.

Exemplos 2.2.2. *São funções ímpares*

(i) Função Afim

$$f(x) = ax, \quad f(-x) = a(-x) = -f(x)$$

Figura 2.17: Gráfico da função Afim

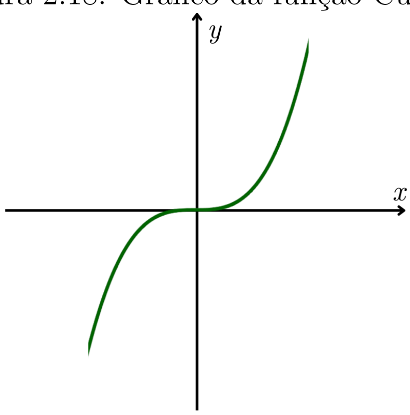


Fonte: Própria da autora (2022)

(ii) Função Cúbica

$$f(x) = x^3, \quad f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

Figura 2.18: Gráfico da função Cúbica



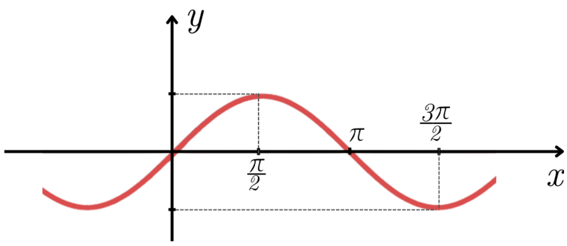
Fonte: Própria da autora (2022)

(iii) Função Seno

Seja $f(x) = sen\, x, \quad x = \frac{\pi}{2}$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 = -f(x)$$

Figura 2.19: Gráfico da função Seno



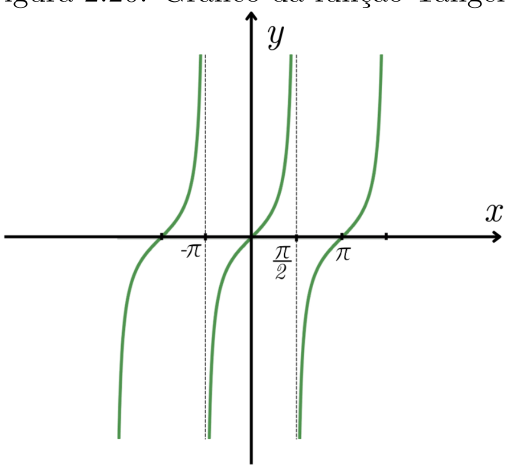
Fonte: Própria da autora (2022)

(iv) Função Tangente

$f(x) = \tan x$

$f(-x) = \tan -x = \dfrac{sen\,(-x)}{\cos(-x)} = -\dfrac{sen\,(x)}{\cos(x)} = -\tan x$

Figura 2.20: Gráfico da função Tangente



Fonte: Própria da autora (2022)

Quando uma função não assume as características de uma função par ou de uma função ímpar, dizemos que ela não possui paridade

Uma função cuja representação gráfica não é simétrica em relação ao eixo y ou em relação à origem não é nem par, nem ímpar.

As funções exponencial e logarítmica são exemplos de função que não tem paridade.

Propriedades 1. *(Paridade de Funções)*

- A única função par e ímpar ao mesmo tempo é a função nula $f(x) \equiv 0$.
- Uma função ímpar definida na origem é nula na origem.
- A soma de duas funções de mesma paridade mantem a paridade.
- O produto de duas funções de mesma paridade é uma função par.
- O produto de duas funções com paridades distintas é uma função ímpar
- A derivada de uma função par é uma função ímpar.
- A derivada de uma função ímpar é uma função par.

2.3 Derivadas

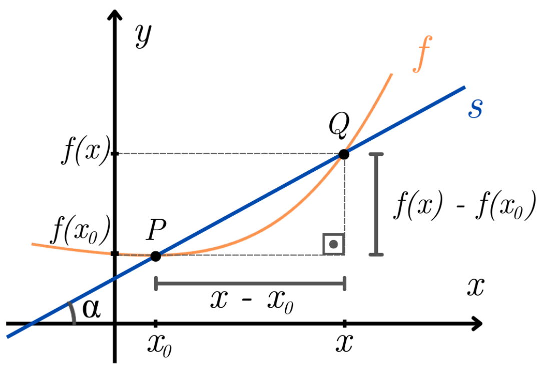
2.3.1 Derivada no ponto x_0

Definicão 2.3.1. *Seja f uma função definida em um intervalo aberto I e x_0 um elemento de I. Chama-se derivada de f no ponto x_0 o $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, se este existir e for finito.*

Notação: $f'(x_0)$; $\left[\dfrac{df}{dx}\right]_{x=x_0}$

Considere

Figura 2.21: Gráfico



Fonte: Própria da autora (2022)

A diferença $\Delta x = x - x_0$ é chamada acréscimo ou incremento de variável x relativamente ao ponto x_0.

A diferença $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ é chamada de acréscimo ou incremento da função f relativamente ao ponto x_0.

O quociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ é a razão incremental de f relativamente ao ponto x_0.

Sendo assim, a derivada de f no ponto x_0 pode ser indicada por

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad ou \\ f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad ou \\ f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \end{aligned}$$

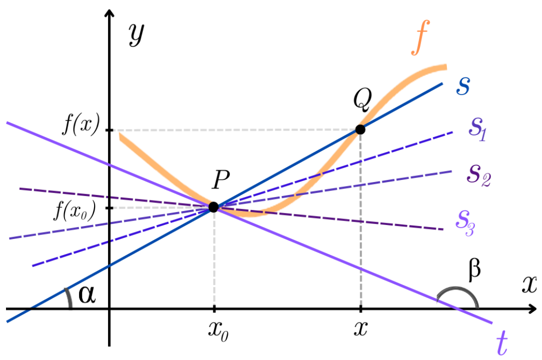
Quando existe $f'(x_0)$, afirmamos que f é derivável no ponto x_0. Além disso, quando existe $f'(x_0)$ para todo $x_0 \in I$, dizemos que f é derivável no intervalo aberto I.

2.3.2 Interpretação Geométrica

Seja f uma função contínua no intervalo aberto f. Admitamos que exista a derivada de f no ponto $x_0 \in I$.

Dado um ponto $x \in I$, tal que $x \neq x_0$, considere a reta secante s determinada pelos pontos $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x, f(x))$.

Figura 2.22: Interpretação Geométrica de Derivada



Fonte: Própria da autora (2022)

A reta s é secante com o gráfico de f e seu coeficiente angular é $\tan \alpha = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Se f é contínua em I, quando x tende a x_0, Q desloca-se sobre o gráfico e aproxima-se de P. Observe que a reta s toma sucessivas posições $s_1, s_2, s_3, ...$ e tende a coincidir com a reta t, tangente à curva no ponto P.

Desde que exista $f'(x_0)$, temos

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} \tan \alpha = \tan(\lim_{x \to x_0} \alpha) = \tan \beta.$$

Assim, a derivada de uma função f no ponto x_0 é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa x_0.

Para obtemos a equação da reta tangente t ao gráfico de uma função f no ponto $(x_0, f(x_0))$, em que f é derivável, recorremos a fórmula da Geometria Analítica

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

tomando $y_0 = f(x_0)$ e $m = f'(x_0)$, a equação da reta t será

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

2.3.3 Derivada de uma função

Se f é derivável no intervalo I. Para cada $x_0 \in I$, existe e é único o limite

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Podemos definir uma função

$$\begin{aligned} f' : \quad I &\to \mathbb{R} \\ x_0 &\mapsto f'(x_0), \end{aligned}$$

aplicando a definição de derivada num ponto genérico $x \in I$

$$\begin{aligned} f' : \quad I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

ou ainda,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}; \quad h = \Delta x.$$

Notação: $f'(x)$, f', $D_x f$, $D_x y$, $\dfrac{dy}{dx}$

Agora, iremos calcular as derivadas de algumas das principais funções elementares.

2.3.4 Derivadas das Funções Elementares

Derivada da função constante

Dada a função $f(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

Logo,

$$f(x) = c \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0.$$

Derivada da função potência

Dada a função $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - (x)^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + \binom{n}{n} \Delta x^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}\Delta x + \cdots + \binom{n}{n} \Delta x^{n-1} \\
f'(x) &= \binom{n}{1} x^{n-1} = n \;\; x^{n-1}
\end{aligned}$$

Logo,

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \;\; x^{n-1}.$$

Derivada da função exponencial

Dada a função $f(x) = e^x; \quad e \in \mathbb{R}, \quad 1 \neq e > 0$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(e^x e^{\Delta x}) - e^x}{\Delta x} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} \\
&= e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} \\
f'(x) &= e^x.1
\end{aligned}$$

Observe que

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1 \tag{2.2}$$

De fato, fazendo

$$\begin{aligned} u=e^h-1 \Rightarrow \quad e^h &= u+1 \qquad (2.3)\\ \ln e^h &= \ln(u+1)\\ h\ln e &= \ln(u+1)\\ h &= \ln(u+1) \qquad (2.4)\end{aligned}$$

Substituindo (2.3) e (2.4) em (2.2), temos $(h\to 0, \quad u\to 0)$

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{u}{\ln(u+1)}\\ &= \lim_{u\to 0}\frac{1}{u^{-1}\ln(u+1)}\\ &= \lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(u+1)^{\frac{1}{u}}}\\ &= \frac{1}{\ln\left(\lim\limits_{u\to 0}(u+1)^{\frac{1}{u}}\right)}\\ &= \frac{1}{\ln e}\\ \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} &= 1\end{aligned}$$

Sabendo que

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

Fazendo $u=\frac{1}{x}$, quando $x\to+\infty$, $u\to 0^+$. Assim, vem que

$$\lim_{u\to 0^+}(u+1)^{\frac{1}{u}}$$

Por outro lado,

$$\lim_{u\to 0^-}(u+1)^{\frac{1}{u}}$$

Portanto,

$$\lim_{u\to 0}(u+1)^{\frac{1}{u}}$$

Derivada da função logarítmica

Dada a função $f(x) = \ln x$, $x > 0$. Assim,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) \\ f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \end{aligned}$$

Tomando $u = \dfrac{h}{x}$, quando $h \to 0$, $u \to 0$, assim

$$\begin{aligned} f'(x) &== \lim_{u\to 0} \frac{1}{ux} \ln(1+u) \\ &= \lim_{u\to 0} \frac{1}{x} \ln(1+u)^{\frac{1}{u}} \\ &= \frac{1}{x} \ln\left(\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right) \\ f'(x) &= \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Derivada da função seno

Considere a função $f(x) = sen\, x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{sen\,(x+h)0 - sen\,(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2sen\,(\frac{x+h-x}{2})\cos(\frac{x+h+x}{2})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2sen\,(\frac{h}{2})\cos(\frac{2x+h}{2})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{sen\,\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \\ &= 1.\cos x \\ f'(x) &= \cos x \end{aligned}$$

Usamos o limite fundamental

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$$

Prova: Ver Guidorizzi, páginas 94 e 95.

Derivada da função cosseno

Considere a função $f(x) = \cos x$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2sen\,(\frac{x+h-x}{2})sen\,(\frac{x+h+x}{2})}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2sen\,(\frac{h}{2})sen\,(\frac{2x+h}{2})}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-sen\,\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} sen\left(\frac{2x+h}{2}\right) \\
f'(x) &= -sen\,x
\end{aligned}$$

Derivada da função tangente

Considere a função $\tan x$

$$f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x+h) - \tan(x)}{h}$$

Fazendo $t = x + h$, observe que $h \to 0$, $t \to x$. Substituindo,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\tan(t) - \tan(x)}{t - x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{sen\,t}{\cos x} - \frac{sen\,x}{\cos x}}{t - x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{sen\,t \cos x - sen\,x \cos t}{\cos t \cos x}}{t - x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{sen\,t \cos x - sen\,x \cos t}{t - x} \cdot \frac{1}{\cos t \cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{sen\,(t - x)}{t - x} \cdot \frac{1}{\cos t \cos x} \\
&= \frac{1}{\cos x \cos x} \\
f'(x) &= \frac{1}{\cos x^2} = \sec^2 x
\end{aligned}$$

2.4 Primitivas

2.4.1 Relação entre funções com derivadas iguais

Teorema 2.4.1. *Seja f contínua no intervalo I. Se $f'(x) = 0$ em todo x interior a I, então existirá uma constante k tal que $f(x) = k$ para todo $x \in I$.*

Prova: ver Guidorizzi pág. 284

Corolário 2.4.1. *Sejam f e g contínuas no intervalo I. Se $f'(x) = g'(x)$ em todo x interior a I, então existirá uma constante k tal que $g(x) = f(x) + k$ para todo x em I.*

Prova: ver Guidorizzi pág. 285

2.4.2 Primitiva de uma função

Seja f uma função definida num intervalo I. Uma primitiva de f em I é uma função F definida em I, tal que $F'(x) = f(x)$, para todo x em I.

Exemplos 2.4.1. *Como determinar as primitivas de uma função?*

(i) Dada a função $f(x) = x^2$. Uma primitiva de $f(x)$ é

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3; \quad pois \quad F'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{3x^2}{3}$$

Além disso, para toda constante k,

$$G(x) = \frac{3x^2}{3} + k$$

é uma primitiva

(ii) A primitiva de $f(x) = 2$ em $\mathbb{R}$ é

$$F(x) = 2x + k,$$

para toda contante k, pois

$$F'(x) = (2x + k)' = (2x)' + (k)' = 2$$

Desde que $F(x)$ é uma primitiva de f em I, então $F(x)+k$, k-constante também é primitiva de f, assim diremos que as funções na forma

$$y = F(x) + k$$

é a família das primitivas de f em I

A notação

$$\int f(x) \quad dx \tag{2.5}$$

será usada para representar a família das primitivas de f.

$$\int f(x) \quad dx = F(x) + k$$

A função f denomina-se integrando, na notação (2.5) e dx indica a variável de integração. Uma primitiva de f é também denominada uma integral indefinida ou antiderivação.

Exemplos 2.4.2. *Integrais Imediatas*

(i) Dada $\int dx$. Observe que o integrando é a função constante $f(x) = 1$. Então,

$$\int dx = \int 1dx = x + k \quad pois \quad (x)' = 1$$

(ii) Seja $\int xdx$

$$\int xdx = \frac{x^2}{2} \quad pois \quad \left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{2x^{2-1}}{2} = x$$

(iii) $\int x^2dx$

$$\int x^2dx = \frac{x^3}{3} + k \quad pois \quad \left(\frac{x^3}{3} + k\right)' = \frac{3x^2}{3} + 0 = x^2$$

(iv) Tome $\int x^n dx$, onde $n \neq -1$ é um real fixo

$$\int x^n dx = \frac{x^{(n+1)}}{n+1} + k \quad pois \quad \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + k\right)' = \frac{x^{n+1-1}}{n+1-1} + 0 = x^n$$

(v) $\int e^x dx$

$$\int e^x dx = e^x + k \quad pois \quad (e^x)' = e^x$$

(vi) $\int \frac{1}{x}dx,\ x>0$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + k \quad \textit{pois} \quad (\ln x + k)' = \frac{1}{x}$$

(vii) $\int sen\, x dx$

$$\int sen\, x dx = -\cos x + k \quad \textit{pois} \quad (-\cos x + k)' = -(-sen\, x) = sen\, x$$

(viii) $\int \cos x dx$

$$\int \cos x dx = sen\, x + k \quad \textit{pois} \quad (sen\, x + k)' = -\cos x$$

(ix) $\int \tan x dx$

$$\int \tan x dx = \ln|\sec x|+k \quad \textit{pois}$$

$$(\ln|\sec x|+k)' = \frac{(\sec x)'}{\sec x} = \frac{(\frac{1}{\cos x})'}{\sec x} = \frac{\frac{sen\, x}{\cos^2 x}}{\sec x} = \frac{sen\, x}{\cos^2 x}\cdot\frac{\cos x}{1} = \frac{sen\, x}{\cos x} = \tan x$$

(x) $\int \sec^2 x dx$

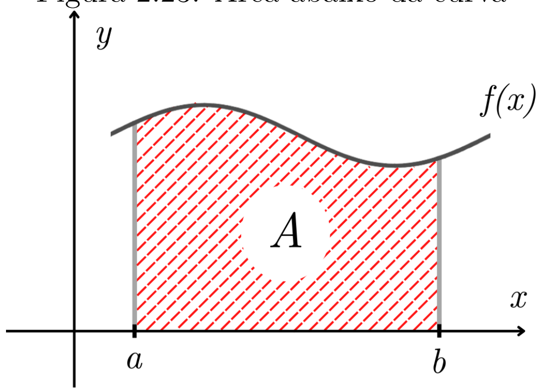
$$\int \sec^2 x dx = \tan x + k \quad \textit{pois} \quad (\tan x + k)' = \sec^2 x$$

2.5 Integral Definida (Integral de Riemann)

2.5.1 Soma de Riemann

Dada uma função f contínua e não negativa em um intervalo $[a, b]$, qual a área da região entre o gráfico de f e o intervalo $[a, b]$ no eixo x?

Figura 2.23: Área abaixo da curva



Fonte: Própria da autora (2022)

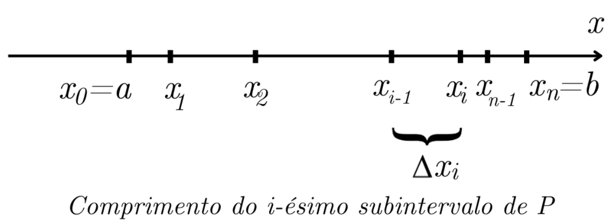
Para resolver o problema de área, utilizaremos a soma de Riemann.

Considere uma partição P do intervalo $[a, b]$, sendo um conjunto finito

$$P = x_0, x_1, x_2, ..., x_n, \quad \text{onde} \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

.

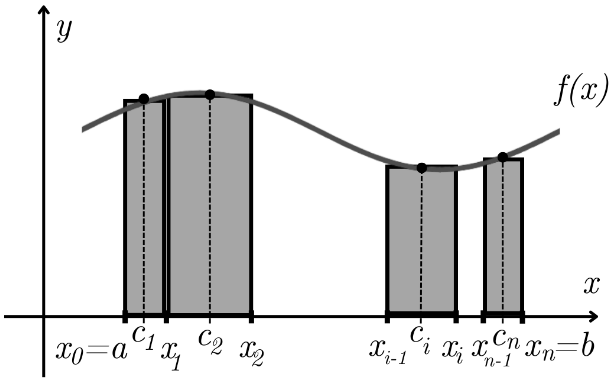
Figura 2.24: Partição do intervalo $[a, b]$



Fonte: Própria da autora (2022)

Em cada subintervalo selecionamos algum número c_i. Depois, em cada subintervalo construímos um retângulo de base Δx_i e altura $f(c_i)$.

Figura 2.25: Representação dos retângulos



Fonte: Própria da autora (2022)

A soma das áreas nos n retângulos denomina-se soma de Riemann de f, relativa à partição P e aos números c_i.

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + ... + f(c_n)\Delta x_n.$$

Sejam F e f definidas em $[a,b]$ e tais que $F' = f$ em $[a,b]$. Seja a partição $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ de $[a,b]$, escolhendo convenientemente $\overline{c_i}$ em $[x_{i-1}, x_i]$, tem-se

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{c}_i)\Delta x_i.$$

Além disso, no caso de f ser contínua em $[a,b]$

$$F(b) - F(a) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

2.5.2 Integral de Riemann

Sejam f uma função definida em $[a,b]$ e L um número real. Dizemos que $\sum_{i=1}^{n} f(\overline{c}_i)\Delta x_i$ tende a L, quando máx$\Delta x_i \to 0$, escrevemos

$$\lim_{max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = L.$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ que só depende de ε mas não da particular escolha dos c_i, tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - L \right| < \varepsilon,$$

para toda partição P de $[a,b]$, com $\text{máx}\Delta x_i < \delta$.

Tal número L, quando existe é único e denomina-se integral (de Riemann) de f em $[a,b]$ e indica-se por

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Assim, por definição

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Se $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ existe, então diremos que f é integrável (segundo Riemann) em $[a,b]$. Além disso, podemos dizer que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ é a integral definida de f em $[a,b]$.

2.5.3 Teorema Fundamental do Cálculo

Se f for integrável em $[a,b]$ e se F for uma primitiva de f em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Prova: Ver Guidorizzi páginas 305 e 306.

Capítulo 3

O Baralho do Cálculo

Nesta etapa apresentaremos o jogo de cartas intitulado “Baralho do Cálculo”, o qual é o objeto de aplicação deste trabalho. Trataremos aqui de todo o processo de elaboração deste material passando pela concepção, o protótipo, o teste, as regras do jogo e por fim o design das cartas.

3.1 O processo de elaboração

3.1.1 Jogo de cartas

O jogo que será descrito é uma produção do LAPINMAT (Laboratório Pedagógico de Informática e Matemática). O mesmo tem como principal objetivo a elaboração de recursos, jogos e materiais didáticos que materializem os conceitos matemáticos, por vezes considerados abstratos dificultando o entendimento dos alunos. Assim, ao alcançar o seu intuito pode-se oferecer tanto ao discente quanto ao docente uma ferramenta que contribuirá no processo de ensino e aprendizagem de matemática.

O Baralho do Cálculo é um resultado do primeiro material produzido com sucesso pelo laboratório. Este, a princípio, contava com a colaboração de 10 discentes voluntários de variadas turmas do curso de licenciatura plena em matemática. Tendo em vista, que o LAPINMAT no momento era um projeto recém aprovado, que iniciava sua implementação em duas salas vazias e ainda não possuía recursos, desejávamos iniciar a produção de nossos próprios materiais. Deste modo, o processo de trabalho ocorreu a partir diversas reuniões semanais, com o intuito de compartilhar ideias para a elaboração de materiais deste novo inventário.

Figura 3.1: Primeiras reuniões do projeto LAPINMAT

Fonte: Própria da autora (2021)

Após debates, em uma das reuniões ficou decidido entre os voluntários e a coordenação, os meios pelos quais poderíamos produzir um recurso acessível, de baixo custo, que trabalhasse um conteúdo relevante para o público a ser alcançado. Além disso, era essencial que o mesmo fosse atrativo para o seu futuro grupo alvo. Dentre uma vasta quantidade de jogos a serem trabalhados ficou evidente a atratividade dos jogos de cartas, independente de faixa etária específica, este sempre aparecia como uma atividade muito atraente para todos os públicos.

3.1.2 A escolha do conteúdo

Além da decisão favorável quanto ao recurso didático, era necessário fazer a escolha do conteúdo que seria abordado no jogo. Como os agentes participantes dessa construção encontravam-se diretamente inseridos no ambiente acadêmico, mais especificamente como graduandos do curso de matemática, foi possível fazer um debate amplo acerca das carências no conhecimento matemático pontuado. Aliás, cabia à situação uma delimitação de público e conteúdo, pois antes de tudo a finalidade do laboratório é atender a área da educação básica ao ensino superior.

Por encontrarem-se situados no meio de formação, havia um contato próximo com uma área da matemática que desperta grande dificuldade nos discentes durante a graduação, o Cálculo Diferencial e Integral. Este compõe uma parte importante da estrutura curricular do curso de licenciatura em matemática da UFPA (Universidade Federal do Pará) - Campus Bragança, 4 disciplinas (Cálculo Diferencial e Integral I, II, III e IV). Diante dos relatos compartilhados pelos participantes, que favoreciam a escolha do tema, decidimos aborda-lo no jogo, contemplando o ensino superior.

Para a elaboração, fez-se necessário ter um conhecimento prévio e aprofundado dos conceitos aos quais se deseja trabalhar. Então, iniciamos um processo de revisão sobre a ementa das componentes curriculares as quais os discentes voluntários já haviam passado. Nele tornou-se evidente a origem das dificuldades mais compartilhadas, destacando-se a situação mais comum: quando não se obtém desempenho satisfatório na primeira disciplina, o que ocasiona um efeito dominó nas subsequentes, pois, uma vez que o aluno não compreende os conceitos que serão indispensáveis a seguir, dificilmente compreenderá um outro que utiliza os anteriores para sua construção.

Figura 3.2: Reunião para a seleção do conteúdo

Fonte: Própria da autora (2021)

Portanto, ficou decidido que a disciplina Cálculo Infinitesimal seria contemplada. A teoria apresentada no capítulo anterior deste trabalho, consistiu na parte inicial do Cálculo com os tópicos que são primordiais para um entendimento do curso inicial de Cálculo e base para a compreensão do jogo.

3.1.3 O Baralho

Em paralelo com a revisão teórica, houve o debate sobre qual jogo de cartas deveria ser adaptado diante de várias opções. Por fim, consideramos o baralho um formato interessante de ser utilizado, pois havia a vantagem de ser bem popular e atrativo em nosso meio. Em seguida, iniciamos um estudo do jogo tradicional com o propósito de conhecer o funcionamento do mesmo, bem como suas regras. Para isso, nos encontramos para jogar algumas partidas e decidir como a adaptação seria feita.

Figura 3.3: Socialização do baralho tradicional

Fonte: Própria da autora (2021)

Após esse contato juntos com as cartas pudemos entender melhor como cada um conhecia o jogo, que se demonstrou bem similar e como cada partida deveria ocorrer. Fez-se observações cruciais, quanto a composição do baralho, a distribuição de cartas, a formação das ternas (ou trincas) e a função da carta coringa (ou *joker*).

Identificamos que o baralho convencional é composto por 52 cartas (ou 54, se acompanhadas pelas coringas), das quais tem-se a representação em: números de 2 a 10; seguidos pelas letras J, Q, K, A, correspondem as denominações de valete, dama, rei e ás, respectivamente. A ordem ocorre da seguinte forma: A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q e K. Além disso, temos os naipes que são os símbolos que acompanham cada letra e número, espadas, paus, copas e ouros.

Uma partida geralmente é jogada com 2 baralhos, totalizando 104 ou 108 cartas. Podem jogar de 2 a 6 pessoas, as rodadas ocorrem em sentido anti-horário, sendo distribuídas 9 cartas para cada jogador. O objetivo do jogo é formar 3 trincas (ou ternas), que consistem em conjuntos de 3 cartas que possuam o mesmo valor e naipes diferentes ou que tenham naipes iguais e sigam a ordem estabelecida. Podem ser utilizadas nestes trios a carta coringa, que pode substituir uma das cartas da terna.

Há outras formas de se jogar, bem como outros tipos de baralhos com composições diferentes, porém optamos por utilizar a forma já descrita, pois tínhamos a vantagem de já conhecê-la. Além disso, consideramos esse modo interessante para a implementação do assunto. Portanto, ficou definida essa organização para a inserção dos tópicos selecionados.

3.2 O protótipo do baralho

Para iniciar a produção de um protótipo para o jogo foi necessário pensar na adaptação do baralho tradicional com a teoria escolhida. Diante disso, nos encontramos para organizar a associação do conteúdo com as cartas. Possuíamos a percepção de como proceder, pois já havíamos decidido utilizar os conceitos de limite, derivada e integral, mas seria inevitável pensar em um “elo” que conseguisse unir esses tópicos, para então haver a formação das ternas. Também, definir regras para essa combinação.

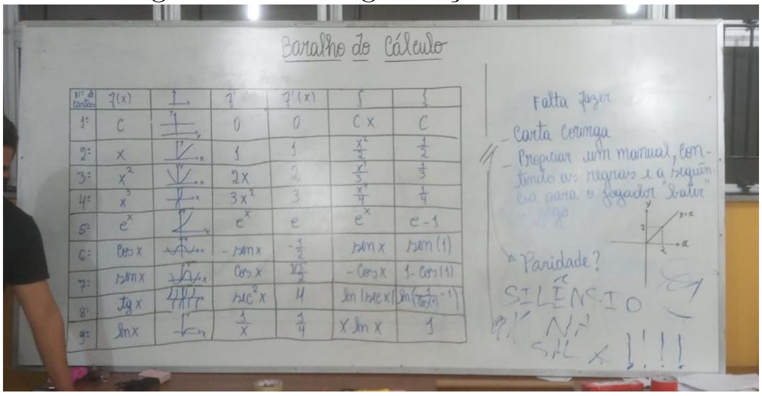
A partir dessa visão, encontramos a intercessão adequada a ser feita nesta organização, inserindo o conceito de função. Associando os tópicos já estabelecidos anteriormente, pois a relação que as cartas teriam é que deveriam se referir a uma única função. Ou seja, uma possibilidade de formação de trinca teria que conter o limite, a derivada e a integral da mesma função.

No decorrer desta decisão, resolvemos ampliar a teoria matemática para trabalhar a ideia de naipes. Como a definição da derivada de uma função é um limite preferimos não o utilizar diretamente, expandindo a parte de derivada, com esta aplicada em um ponto do domínio da função a qual se refere. E seguindo a mesma lógica para as integrais, com estas definidas em um intervalo.

Como já dito antes, trouxemos também a ideia de naipe. Onde os mesmos seriam: função (a lei de formação da mesma), gráfico (a representação geométrica), derivada, derivada no ponto, integral indefinida e integral definida. Agora teremos uma mudança em relação ao baralho tradicional, pois os números e as letras seguem uma ordem, já neste os naipes que devem obedecer a ordem descrita. Também, não teremos os números, em correspondência a eles teremos funções elementares, que não possuem ordem.

Para a seleção das funções elementares, cada um dos graduandos estudou e sugeriu uma aplicação. Nos reunimos no laboratório e compartilhamos as que foram estudadas (constante, afim, quadrática, cúbica, exponencial, logarítmica, seno, cosseno e tangente) e montamos uma tabela que possuía a relação das mesmas com cada naipe. Assim, pudemos iniciar o planejamento da criação do protótipo para os testes.

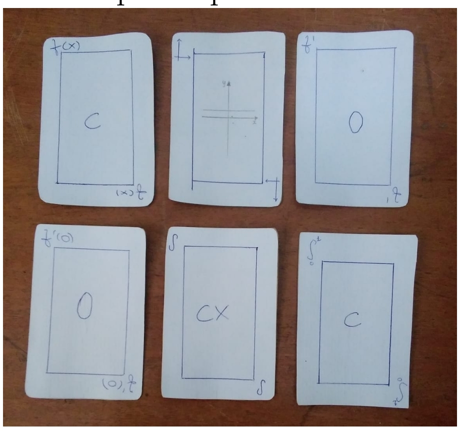
Figura 3.4: 1º Organização das cartas



Fonte: Própria da autora (2021)

A confecção do primeiro baralho foi de modo simples, para não gerar muitos custos utilizamos materiais acessíveis, tesoura, cola, papel cartão, folhas A4, canetas e lápis e fizemos a primeira versão para testes. No local em que nas cartas tradicionais ficavam os números acompanhados pelos naipes, desenhamos os símbolos correspondentes a cada um dos tópicos do Baralho do Cálculo.

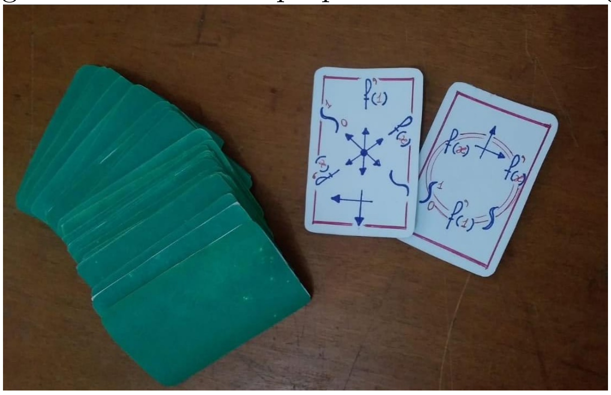
Figura 3.5: Cartas do protótipo referentes à função constante



Fonte: Própria da autora (2021)

Deveríamos fazer uma carta coringa para ser utilizada nas partidas. Logo, pensou-se em criar alguma arte para a mesma e foram feitas a mão algumas propostas para o modelo. Um dos detalhes acertados para isso, era que fosse algo que carregaria todos os elementos dos naipes.

Figura 3.6: Primeiras propostas de carta coringa



Fonte: Própria da autora (2021)

3.3 O teste

No laboratório reuniu-se todos os integrantes para a primeira partida com o jogo de cartas. Havíamos confeccionado apenas um baralho com 56 cartas, das quais 2 eram coringas. Nos separamos em 2 grupos para jogar e observar a dinâmica que seria desenvolvida durante as rodadas. Iniciamos distribuindo apenas 6 cartas para os grupos, para analisar se surgiriam dificuldades em formar as ternas.

A princípio pontuamos alguns aspectos que deveríamos observar durante esse momento do jogo: se a quantidade de cartas seria suficiente, haveria a utilização da carta coringa, existiria a possibilidade de encontrar algum erro no jogo, criar as regras a partir das questões que surgiriam. A partida iniciou com o embaralhamento das cartas e distribuição das mesmas, as restantes ficaram em um monte que seria utilizado para as possíveis compras. Cada grupo se organizou de um modo propício à criação de estratégias, um deles fez uma tabela para tentar lembrar das funções e seus respectivos naipes, anotando quais já possuíam e quais precisariam para formar as ternas.

No decorrer, um dos grupos iniciaria a rodada comprando uma carta do monte e em seguida descartando outra, mas antes analisando suas possibilidades de fazer as trincas. Após, a outra equipe faria o mesmo processo. Os descartes formaram um outro monte, do qual também haveria a possibilidade de pegar a última carta depositada. Também foi permitido fazer ternas utilizando naipes iguais, por exemplo, 3 cartas do naipe gráfico porém com funções distintas.

Figura 3.7: Primeiro teste com o baralho

Fonte: Própria da autora (2021)

Nossas observações mostraram-se bastante proveitosas para o aperfeiçoamento do jogo. Quanto a quantidade de cartas foi perceptível a necessidade de uma melhor adaptação pois no jogo tradicional, ao fazermos a comparação dos valores (números e letras) com as funções, nota-se uma redução nas possibilidades de formação de ternas pois temos apenas 1 carta referente a uma única função para cada naipe. Isto é, numa situação em que tenha as seguintes cartas função afim (lei de formação referente a função polinomial de grau 1) e a derivada da mesma, e espere a compra do seu gráfico, porém ele já tenha sido descartado, não haverá a possibilidade de comprá-lo novamente.

No caso do coringa, a utilização manifestou-se muito automática e nosso intuito é de trabalhar ao máximo o incentivo à busca do entendimento do conteúdo inserido no material. Então deliberamos uma nova proposta para o uso da mesma, podendo ser escolhido uma teoria que fosse proveitosa para o objetivo definido. Assim, determinamos como eleita a paridade de funções, uma vez que essa poderia ser melhor aproveitada no jogo, principalmente em conjunto com os gráficos das funções. Mas as primeiras propostas dessa não foram descartadas e sim destinadas a um possível modelo que iria compôr a parte traseira das cartas.

Figura 3.8: Nova proposta de carta coringa

Fonte: Própria da autora (2021)

Por fim, notamos que um dos modos de se formar as trincas não era favorável aos objetivos estabelecidos na elaboração do jogo. Quando se juntava cartas de funções distintas, mas que possuíssem o mesmo naipe, a partida transcorrida muito rápido e não havia uma procura efetiva dos conceitos a serem aplicados. Então ficou acordado que esta maneira não seria aceita durante as rodadas.

3.4 As regras do jogo

3.4.1 Composição

O Jogo é composto por 2 baralhos de 56 cartas, que possuem 6 naipes de 9 cartas cada. A sequência dos naipes é a seguinte: função (lei de formação), gráfico (representação geométrica), derivada, derivada no ponto, integral indefinida e integral indefinida. Cada carta se refere a uma das funções elementares: constante, afim, quadrática, cúbica, exponencial, logarítmica, seno, cosseno e tangente. Além dessas, possui duas cartas coringas, denominadas "Paridade?".

A seguir, temos duas tabelas que possuem a relação das cartas que compõem o baralho. Na tabela 3.1, há uma coluna para a lei de formação das funções selecionadas, outra para a derivada referente as mesmas e a última traz a derivada aplicada em um ponto de seu domínio.

Tabela 3.1: Relação dos naipes função, derivada e derivada no ponto

Função	Derivada	Derivada no ponto
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$	$f'(0) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$f'(1) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$f'(1) = 2$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$f'(1) = 3$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f'(1) = e$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f'(4) = \frac{1}{4}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$f'(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$f'(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \sec^2 x$	$f'(\frac{\pi}{3}) = 4$

Fonte: Própria da autora (2022)

Nas cartas não estará especificando a que f estão se referindo, no entanto, possuirá o resultado da mesma a qual estão relacionadas. Por exemplo, no momento de uma partida se você tiver em mãos uma carta do naipe derivada com a seguinte sentença escrita e^x, então, para saber a qual função ela está se referindo deve-se pensar em qual função cuja derivada é igual a sentença na carta encontrada, ou seja, que tenha como solução e^x. Com isso, o jogador poderá fazer a devida identificação, que é um intuito da dinâmica do jogo.

Na tabela 3.2, observe a relação de cartas dos últimos dois naipes. Onde novamente teremos apenas sentenças das primitivas, e, no caso da integral definida também estará exposto o intervalo referente. Assim, os jogadores tem que identificar as devidas funções para depois formar as ternas.

Em relação a composição do naipe gráfico, cada carta apresenta um esboço de acordo com a lei de formação da aplicação a qual está vinculado. Dessa forma, para fazer a identificação das mesmas é necessário conhecer sua representação geométrica.

Tabela 3.2: Relação dos naipes Integral e Integral Definida

Função	Integral	Integral definida
Constante	$F(x) = cx$	$\int_0^1 f(x)dx = c$
Afim	$F(x) = \frac{x^2}{2}$	$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$
Quadrática	$F(x) = \frac{x^3}{3}$	$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$
Cúbica	$F(x) = \frac{x^4}{4}$	$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{4}$
Exponencial	$F(x) = e^x$	$\int_0^1 f(x)dx = e - 1$
Logarítmica	$F(x) = x\ln(x) - x$	$\int_1^2 f(x)dx = 2\ln(2) - 1$
Seno	$F(x) = -\cos x$	$\int_0^1 f(x)dx = 1 - \cos(1)$
Cosseno	$F(x) = \sin x$	$\int_0^1 f(x)dx = \sin(1)$
Tangente	$F(x) = \ln\lvert\sec x\rvert$	$\int_0^1 f(x)dx = \ln\lvert \frac{1}{\cos(1)}\rvert$

Fonte: Própria da autora (2022)

3.4.2 A partida

Objetivo

A intensão é formar três trincas, que devem seguir a ordem dos naipes e se referir à mesma função. Ao conseguir fazer a formação, em primeiro lugar e de forma correta, vence a partida.

Preparação

Primeiramente, fez-se a organização dos jogadores, a partida pode ser disputada por 2 a 8 participantes ou ainda pode-se formar grupos (com 2 a 4 pessoas) para a disputa, permitindo a socialização do conteúdo e uma colaboração para a criação de estratégias. Depois, é escolhido um participante para embaralhar e distribuir 9 cartas para cada um, em sentido anti-horário e com as faces voltadas para baixo. A sobra das cartas (maço) é colocada sobre a mesa para o momento de compra.

Como jogar

O jogador que está imediatamente à direita do que distribuiu inicia a partida comprando uma carta do maço. Em seguida, é necessário fazer o descarte que deve ser de acordo com sua estratégia para formação das ternas. Após, todos os demais repetem o processo, em sentido anti-horário até que todos tenham realizado uma jogada, completando assim, uma rodada.

Todos devem possuir sempre 9 cartas em mãos, podendo comprar do maço ou a última da pilha de descarte. Se algum jogador adquirir o coringa (carta: ”paridade?”), pode usá-lo obedecendo a regra de formação de uma terna, com 2 cartas propicias haverá possibilidade de usá-la para substituir a restante. Contudo, é indispensável verbalizar a classificação quanto à paridade da função referente ao conjunto formado.

Tabela 3.3: Classificação das funções quanto a paridade

Função	Paridade
Constante	Par
Afim ($f(x) = x$)	Ímpar
Quadrática ($f(x) = x^2$)	Par
Cúbica ($f(x) = x^3$)	Ímpar
Exponencial	Não possui
Logarítmica	Não possui
Seno	Ímpar
Cosseno	Par
Tangente	Ímpar

Fonte: Própria da autora (2022)

Outra concessão é se o jogador que estiver armado, isto é, faltando apenas uma carta para bater, pode usar o descarte de qualquer um dos outros, não necessariamente o de seu antecessor, para finalizar seu jogo. Lembrando sempre que deve ser a última descartada no monte, ou seja, se o jogador percebeu que precisa da mesma então deve imediatamente anunciar sua vitória, bloqueando um outro que venha a realizar um descarte que o impeça de ganhar.

Por fim, vence quem formar primeiro as 3 ternas, caso utilize o coringa deve obedecer corretamente a sua condição. Do contrário, se um participante afirmar ter vencido e os demais atestarem uma invalidade, este ficará impedido de bater (nesta partida) usando qualquer que seja a carta de descarte. Segue a partida até que se obtenha um ganhador.

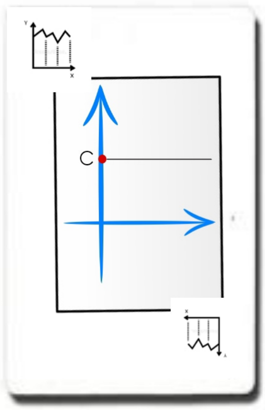
3.5 O design das cartas

3.5.1 Primeira tentativa

Após o período de testes com o protótipo, os integrantes do laboratório se reuniram para debater sobre a criação de um design para a materialização das cartas finais. Ficou decidido que deveriam ser apresentadas propostas de programas ou aplicativos que proporcionassem a edição das imagens desejadas para o modelo. Uma opção sugerida foi o app (versão para android) denominado "picsart", que dispõe de ferramentas para edição de fotos e vídeos.

A princípio, queríamos seguir a ideia elaborada na primeira versão do baralho, que procura se assemelhar ao tradicional, como na posição dos elementos que compõem a estética das cartas. Então, os alunos se disponibilizaram a conhecer o aplicativo e utilizá-lo na tentativa de montar o formato padrão. Na figura 3.9 podemos observar o primeiro modelo criado, com o símbolo do naipe localizado na extremidade superior esquerda e inferior direita, seguindo o exemplo do convencional.

Figura 3.9: Carta do naipe gráfico da função constante



Fonte: Própria da autora (2021)

Observe na figura 3.10, criamos um modelo que seria utilizado para todas as cartas desses naipes. A parte central da mesmo receberia os resultados, ou seja, para a função $f(x) = x$ teríamos apenas o número 1 indicando a derivada e $\frac{x^2}{2}$ a integral.

Figura 3.10: Padrão de naipes

(a) Modelo para derivada (b) Modelo para integral

Fonte: Própria da autora (2021)

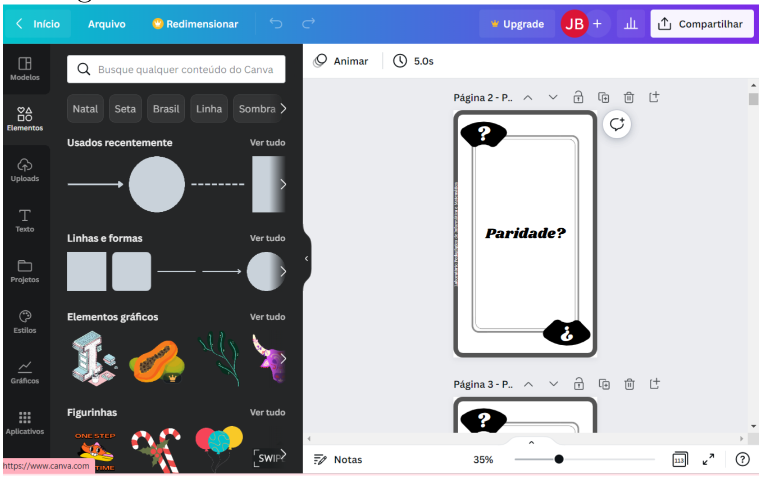
Ao partir para os demais, percebeu-se que seria preciso ter à disposição mais recursos no aplicativo para inserir detalhes mais precisos. No caso das integrais definidas houve dificuldade em inserir o intervalo no símbolo que representaria o naipe. Além disso, ocorreu outras situações que requeriam de mais ferramentas, porém para utiliza-las era necessário pagar por uma assinatura no app, o que inviabilizou a continuidade da produção por meio deste.

3.5.2 *Canva e geogebra*

Diante do impedimento de continuar com a produção no picsart, voltamos a procurar meios de fazer um trabalho mais detalhado. O que terminou na sugestão de utilizar o canva, um aplicativo de edição disponível para celular e com versão online, que possibilita seu uso por meio de computador ou notebook. Então, fizemos um momento de socialização do novo recurso com os agentes do processo.

Descobrimos ser um editor com muitas vantagens, pois mesmo oferecendo uma versão preminum (com assinatura paga), a parte gratuita atendia às necessidades que o processo requeria. Além disso, houve à disposição uma variedade de ferramentas de edição aliada a interface otimizada, veja a figura 3.11.

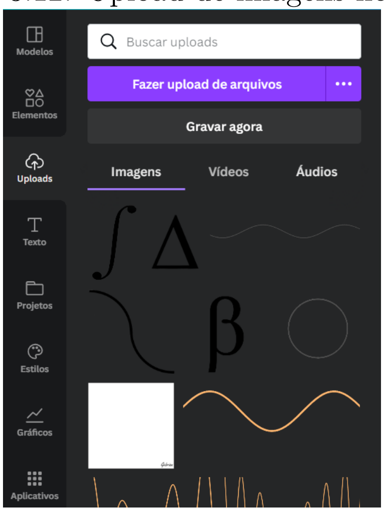
Figura 3.11: Interface da versão online do Canva



Fonte: Própria da autora (2022)

Ainda encontramos uma solução no próprio site para quando precisávamos de um recurso que não possuíamos acesso, como no caso de precisar de uma imagem premium. Era possível fazer upload, ou seja, o envio de arquivos (imagens, vídeos ou áudio) para utilizar na plataforma, o que permitiu a inserção de formas como o símbolo da integral (ver imagem 3.12). Este processo pode ser feito na parte esquerda da interface, ao clicar em "fazer upload de arquivos" pode-se selecionar o arquivo desejado presente no armazenamento interno do computador.

Figura 3.12: Upload de imagens no canva

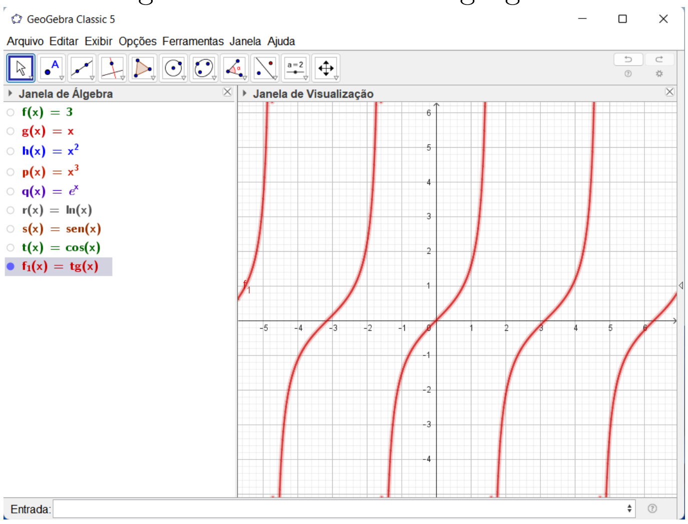


Fonte: Própria da autora (2022)

Ao partir para a edição das cartas referente a representação geométrica das funções fez-se fundamental o uso de algum software para plotar os gráficos a serem inseridos. Como os produtores já tinham familiaridade com a calculadora gráfica Geogebra optou-se pela utilização da mesma. Daí, inserimos no campo de entrada, localizado no parte inferior da interface (figura 3.13), a lei de formação de cada função selecionada, admitindo um valor real para a constante c.

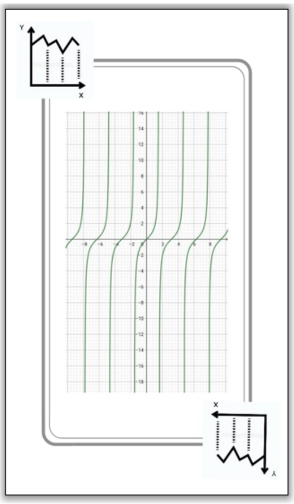
Em seguida, as imagens eram exportadas da calculadora para o site em uso e depois inserido no modelo desejado, resultando na primeira versão dessa carta (figura 3.14). Imediatamente, foi perceptível que deveria ser feito aperfeiçoamentos para que o esboço tivesse uma qualidade superior a do momento. Assim, ajustes foram efetuados no geogebra (figura 3.15) que consistiam em ocultar a malha da janela gráfica e aumentar a espessura da curva.

Figura 3.13: Interface do geogebra



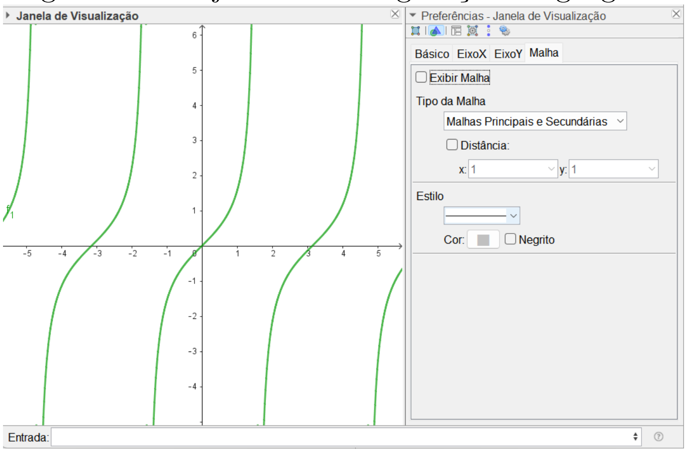
Fonte: Própria da autora (2022)

Figura 3.14: Primeira versão da carta gráfico



Fonte: Própria da autora (2022)

Figura 3.15: Ajuste na configuração do geogebra



Fonte: Própria da autora (2022)

Por fim, é indispensável comentar sobre a qualidade final dos arquivos produzidos no editor escolhido, pois o arquivo final permanece sem distorções nas imagens após ser salvo. Oferecendo uma variedade de formatos para impressão, com benefício a produção do material físico.

3.5.3 Versão final

Em síntese, alcançamos a meta de fazer o design de todas as cartas do baralho com grande satisfação. Criamos um modelo padrão para cada tipo de naipe, sem esquecer da carta coringa e a parte traseira que iria ser a mesma em todas. O próximo passo seria partir para a materialização da fabricação das peça, que deveria ser efetuada no próprio LAPINMAT, com os recursos que estavam a disposição.

A arte que acompanha a parte oposta da carta foi feita com a ideia de uma das primeiras propostas de coringa, que trazia como simbologia, os naipes e suas respectivas notações (ver figura 3.16). Em sua composição trouxemos a denominação do jogo na parte central em sobreposição aos círculos que acompanham os símbolos escolhidos para gráfico, função, derivada, derivada no ponto, integral e integral definida. No ponta inferior direita temos a logo do laboratório, também criada a partir dos recursos do canva, e uma marca d'água na borda exterior com o nome completo do mesmo.

Para as funções, tem o símbolo com $f(x)$ nas extremidades superior esquerda e inferior direita, sendo que o segundo é o reflexo do primeiro (observe a figura 3.17), o que diferencia das demais é que na parte central fica localizada a lei de formação de cada uma. O mesmo ocorre para os outros naipes, temos um mesmo ícone para cada tipo, nestas

Figura 3.16: Padrão da parte traseira

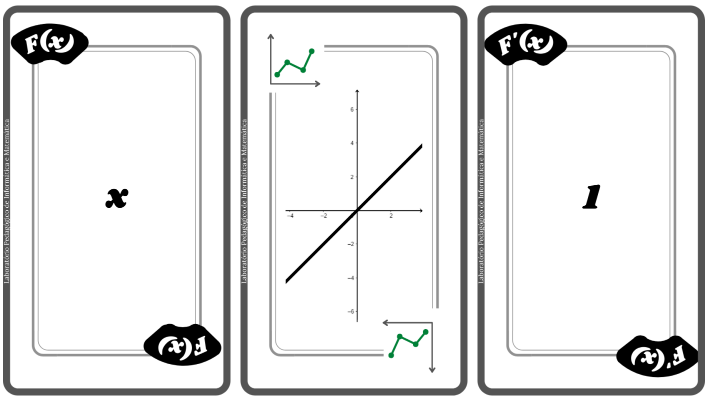
(a) Desenho de inspiração (b) Design final

Fonte: Própria da autora (2022)

posições e o centro diverge de acordo com a f. Além do mais, para a paridade temos o sinal (?) como representação da mesma.

Quanto ao processo de produção, havia acesso a uma impressora, o que permitiu a agilidade da execução. Ademais, foi definido que utilizaríamos papel cartão para estruturar as cartas junto das impressões em papel carmim. Utilizando tesoura e cola foi possível monta-las obtendo um resultado satisfatório (a versão final pode ser encontrada na figura 3.20).

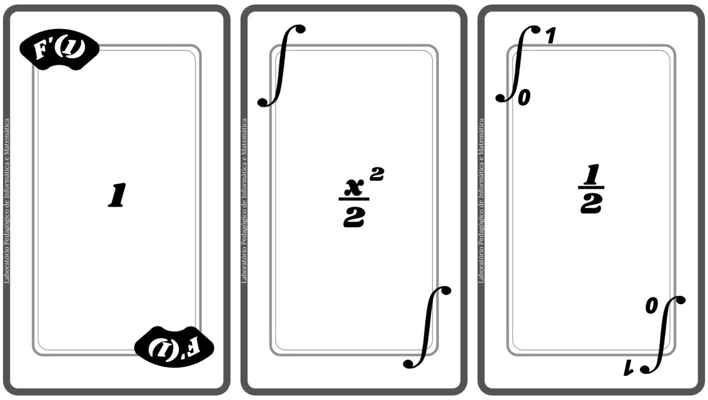
Figura 3.17: Versões finais da função afim



(a) Função (b) Gráfico (c) Derivada

Fonte: Própria da autora (2022)

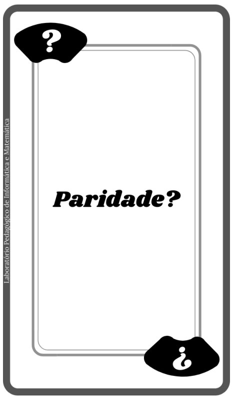
Figura 3.18: Versões finais da função afim



(a) Derivada no ponto (b) Integral (c) Integral definida

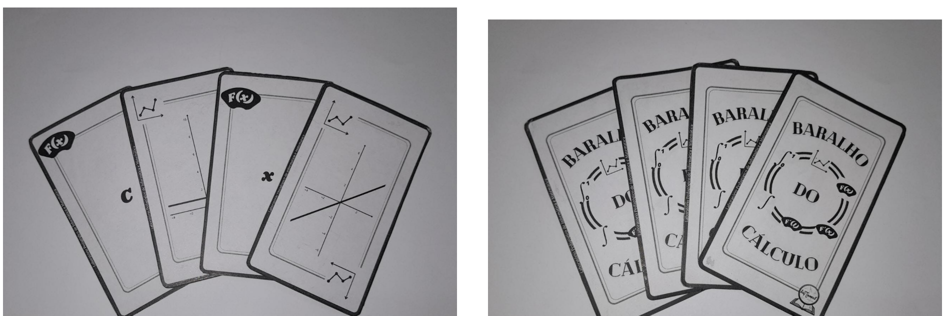
Fonte: Própria da autora (2022)

Figura 3.19: Versão final do coringa



Fonte: Própria da autora (2022)

Figura 3.20: Cartas produzidas



(a) Parte frontal (b) Parte traseira

Fonte: Própria da autora (2022)

Capítulo 4

Aplicação em sala de aula

Neste capítulo descrevemos a aplicação do Baralho do Cálculo em uma turma do Curso de Licenciatura Plena em Matemática, em particular, sendo uma reoferta da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, cuja ementa contempla a parte inicial do Cálculo (limite, derivada e integral).

4.1 O planejamento

Como se trata de uma segunda oferta desta componente curricular planejamos trabalhar de uma forma diferenciada com a turma. Tendo em vista que essa obteve um alto nível de reprovação, ou seja, haveria um número significativo de discentes para cursar a disciplina, esperávamos encontrar os mesmos com várias dificuldades. Inicialmente, deveríamos encontrar uma forma de identificá-las para então organizar a aplicação, definindo objetivos que possam somar nesta situação.

Para isso, optamos por fazer a aplicação de um questionário que ajudasse na identificação das problemáticas (ver anexo). O mesmo seria aplicado no começo das aulas, especificamente, no nosso primeiro contato com a turma antes de serem apresentados ao jogo. O intuito do momento era ter um panorama da situação dos alunos em dois sentidos, quanto às lacunas em relação ao conteúdo e também as expectativas sobre a metodologia proposta.

Posteriormente, ocorreria uma apresentação detalhada do material didático para a turma, trazendo as regras e objetivos da pesquisa, permitindo um contato e familiarização com a proposta. Iniciando a primeira aplicação, sem que eles tenham um preparo prévio, diante da colaboração de todos, dividimos a sala em grupos seguindo as regras pré-estabelecidas para a dinâmica. Com a ajuda de monitores voluntários, observaríamos as rodadas e interação de cada grupo, bem como os pontos positivos e negativos.

A seguir, a professora da turma daria início as aulas trabalhando o conteúdo inserido no material (definição de função, gráficos, funções elementares, paridade, limite, derivada e integral), apresentado no capitulo 2. Essas definições estão ligadas a ementa da disciplina, porém os três últimos tópicos seriam vistos de forma básica, isto é, somente o essencial para um segundo momento de atividade. A revisão do conteúdo ficou planejada para 4 dias.

No quinto dia, faríamos a segunda aplicação do baralho, com o propósito de investigar o processo de evolução dos discentes, em especial, o desenvolvimento de novas estratégias para as jogadas. Agora, a participação dos presentes seria avaliada pelos monitores e a docente, levando assim a uma motivação para que o comprometimento e os objetivos sejam efetivos. Ainda haveria um outro questionário para a pesquisa em busca dos aspectos pós jogo, como os efeitos para a melhoria na qualidade de ensino para o público atendido.

Por fim, a professora voltará a ementa para aprofundar mais o conteúdo que foram vistos de forma básica, contemplando outros tópicos, seguida dos processos avaliativos convencionais, como as provas escritas, com o intuito de observar o impacto da proposta aplicada na aprendizagem da disciplina.

4.2 Questionário

O uso de questionários nesta pesquisa foram essenciais para a coleta dos dados e foram aplicados em dois momentos do processo investigativo (ver modelo nos anexos). O principal intuito, por meio das perguntas que requerem o apontamento de situações específicas, é quantificar as variáveis que apontam onde encontrar a origem da problemática formulada. Tais como, em relação aos conteúdos que geraram déficit no processo de ensino e aprendizagem na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

Por outro lado, há questionamentos a cerca da percepção dos indivíduos sobre si mesmo. Sendo muito útil, uma vez que este trabalho busca o benefício mútuo dos participantes (pesquisador e entrevistados), e, é a partir da consciência das dificuldades a serem enfrentadas que pode-se definir intervenções. Assim, o professor identifica os tópicos que devem receber maior atenção, ou ainda, a utilização de uma metodologia planejada.

Diante de informações quantitativas e qualitativas, temos uma ampla visão para realizar a análise e obter resultados significativos para o estudo. Então, buscou-se uma estratégia de emprego deste recurso que contribuiria para a coleta de dados desejados sem fadigar os destinatários. Com uma quantidade razoável de perguntas e um dialogo prévio e motivador apresentando a pesquisa, seus objetivos, a contribuição dos mesmos, além do beneficiamento duplo.

4.3 Primeiro contato com o Baralho

No primeiro dia de aula da disciplina houve as devidas apresentações necessárias. Primeiramente, a professora conversou com a turma, que ainda não havia cursado nenhuma disciplina com a mesma, mostrou a ementa e cronograma das aulas como de costume, tirando dúvidas recorrentes a cerca de matrícula e referências a serem utilizadas. Seguida da explanação do planejamento da pesquisa a ser efetuada, bem como o consentimento unânime dos alunos diante de uma proposta de ensino diferenciada. Dispondo de monitores experientes com a turma e área devido participações em um projeto de monitoria em Cálculo, que na circunstância observariam as atividades dando apoio nas aplicações.

Figura 4.1: Apresentação do Baralho e suas regras

Fonte: Própria da autora (2022)

O baralho foi apresentado a turma sendo distribuída algumas cartas para os alunos, que puderam ter em mãos um exemplo para acompanhar a explicação. As regras foram postas e debatidas, pois foram incentivados a fazer perguntas sobre o regulamento. Em seguida, foi solicitado o preenchimento do questionário de forma mais espontânea possível, sem se sentirem pressionados com as respostas, uma vez que a identificação era totalmente dispensável.

Após, foram separados em quatro grupos (2 deles com 4 pessoas e os outros com 5, totalizando 18 participantes) formados de modo que se misturassem entre si, para poder observar a interação desvinculada da socialização cotidiana entre eles. Como ainda não conheciam o jogo foi aconselhado que utilizassem papel e caneta para fazer anotações, por exemplo, a ordem dos naipes. Os baralhos foram embaralhadas e as cartas (9 unidades para cada) eram distribuídas por monitores, as restantes formaram o maço de compra. Logo foi acordado qual equipe iniciaria a partida.

Figura 4.2: Organização das equipes

Fonte: Própria da autora (2022)

As rodadas foram supervisionadas pelos colaboradores da pesquisa, os quais anotavam suas percepções diante dos jogadores. Dos pontos observados vale ressaltar alguns: a unanimidade no desconhecimento da definição de paridade de funções, a dificuldade de interpretação de gráficos, aversão às funções trigonométricas e a motivação em entender melhor o jogo. Tendo então, os primeiros direcionamentos para a análise do processo.

Figura 4.3: Dinâmica da partida

Fonte: Própria da autora (2022)

Quanto à carta coringa, não foi exposta a definição vinculada a mesma pois o propósito era instigá-los a curiosidade em aprender o conteúdo que permitia uma vantagem para a vitória. Como não sabiam fazer as classificações pertinentes ficaram impedidos de fazer o pleno uso da estratégia, e, durante cada rodada permanecia a vontade de utilizá-las pois a carta era descartada constantemente.

Outra percepção foi em relação aos gráficos das funções, muitos alunos demonstraram pouco domínio de características próprias do tópico. Na maior parte do tempo não conseguiam associar a curva gráfica à lei de formação referente e quando acreditavam identificar uma acabavam confundindo as funções cujo comportamento aparenta serem semelhantes. Das aplicações distorcidas por eles, sobressaiu a $f(x) = sen\, x$ junto a $f(x) = cosx$ devido a repetição no período das mesmas.

Além disso, houve rejeição imediata da carta tangente de mesmo naipe. O que nos leva a outro posicionamento, a antipatia geral pelas funções trigonométricas. Comprovada por falas como "joga fora", ao comprar essa opção do monte. Porém, essa não era uma dificuldade comum a todos, haviam alunos que estavam fazendo anotações incluindo o esboço desses gráficos.

A investigação da dinâmica também era realizada pelos jogadores, que começavam a elaborar estratégias para o jogo. Notou-se que eles sabiam as cartas que já tinham saído e deduziam quais os seus adversários estariam precisando, para evitar fazer um descarte propício a outro grupo, bem como, possuíam a percepção da quantidade total de cartas, ou seja conseguiam notar se determinada carta já descartada duas vezes ainda apareceria no jogo. Logo, fizeram sugestões: a limitação do tempo para as jogadas, estabelecendo um minuto para cada grupo, e o uso de mais de uma carta coringa na formação de ternas, o que não foi permitido pois não respeitaria a regra para seu uso.

Por outro lado, surgiram dúvidas pertinentes a serem sanadas. Uma delas foi sobre a regra que permite bater na frente, durante a partida um grupo questionou se poderia vencer com uma carta do monte de descarte então os demais se deram conta de que já haviam tido a oportunidade mas não se atentaram para esta regra. Outro ponto foi quanto a ordem dos naipes, pois mesmo com a ordem escrita no quadro, para visualizar em qualquer momento, confundiam a sequência correta.

Em conclusão, ocorreu a socialização das impressões após momento de dinâmica com a turma. Das quais destacaram-se: o interesse por conta de uma possível "memorização"do conteúdo, a rapidez para entender alguns conceitos, o diálogo entre os alunos e a análise dos gráficos das funções na prática. Além disso, o medo por ter tido um bom desempenho na disciplina, como comentavam no início da aula foi substituído pela motivação em: vencer a partida, competitividade saudável e aprender os conteúdos que não possuíam domínio, como a paridade de funções.

4.4 Aprimorando a teoria Cálculo/Baralho

Após a primeira ação da implementação do jogo seguimos de acordo com o planejamento feito, inserindo a teoria apresentada no capítulo de fundamentação teórica nas aulas. Estes momentos foram desenvolvidos por meio de uma exposição dialogada com a turma, incentivando uma participação ativa dos alunos. Ao passo que também eram acompanhados pela discente que realiza a presente pesquisa, com o intuito de fazer observação da evolução e expectativas em sala.

Figura 4.4: Durante as aulas

Fonte: Própria da autora (2022)

A turma foi comunicada sobre a segunda aplicação do baralho, que ocorreria após esse momento de reencontro com a teoria de Cálculo Diferencial e Integral. Em diversos momentos ficou perceptível a empolgação dos alunos para a segunda partida, principalmente quando foram apresentados as definições de paridade que tanto ansiavam em conhecer. Ademais, foi possível reverem características das funções elementares que como mencionado há muito tempo não refletiam, bem como a satisfação que tinham em poder ter uma nova aproximação com estas funções.

Durante as explanações foram incentivados a serem participativos, respondendo as indagações e exemplos sugeridos. Sempre sob a visão que aquele era uma espaço adequado ao diálogo pois como relatado pela docente em sala, os ”erros”fazem parte do aprendizado e com eles temos a oportunidade de sanar uma possível dúvida. Além de que, este é um sinal de que os discentes estão permitindo-se refletir sobre o conteúdo explanado.

Figura 4.5: Observação das aulas

Fonte: Própria da autora (2022)

Sintetizando, após esse período ficou acordado uma mudança no planejamento acerca da segunda partida do Baralho do Cálculo. Esta não seria um momento isolado da disciplina, onde nos prenderíamos a uma observação passiva do processo, do contrário, foi idealizado para que constituísse um meio de avaliar o desempenho da turma frente a tudo que já havia sido exposto.

4.5 A segunda aplicação do jogo

Diante da nova proposta atribuída ao uso do jogo na componente curricular foi imprescindível organizar um plano de ação para examinar a evolução no desenvolvimento de cada aluno. Então, reuniu-se a professora junto aos monitores para definir como ocorreria a aplicação, tal como os critérios a serem considerados para a avaliação. Com a experiência do primeiro exercício foi concebível investir em situações observadas anteriormente.

A primeira mudança na dinâmica seria em relação a composição dos grupos, que não deveria ser a mesma. Haveria um sorteio dos componentes, de modo a não permitir uma formação onde um dos alunos não participasse ativamente diante da certeza da proatividade de um outro colega na atividade. Também, para que todos se envolvessem durante a partida foi arquitetado um rodízio para cada grupo, ou seja, cada integrante teria a oportunidade de realizar uma jogada por conta própria, mudando o jogador ativo do grupo (quem toma a decisão das estratégias) a cada rodada.

Como este constituía um método de avaliação não seria permitido o uso de celular e outros materiais de consulta. Tal qual a interação fora do círculo de seu grupo. Cada um teria a sua disposição folhas de rascunho para que utilizassem na definição de estratégias, que inclusive, possibilitaria a visualização da participação individual no jogo.

Cada equipe esteve acompanhada por um monitor instruído a fazer observações em aspectos como: a participação individual, a criação de estratégias, domínio do conteúdo, a interação com seu grupo e a organização das anotações. Ele estaria com uma ficha para a definição dos conceitos de cada item (ver anexos), a qual somente o mesmo e a docente teria acesso, e as regras do jogo, caso surgisse dúvidas. Este seria o exame durante o jogo.

Contudo, haveria também critérios pós jogo, para considerar o desenvolvimento da escrita teórica de cada integrante. Foram definidos: os registros individuais (permitida o debate acerca com sua equipe, sem copiar a resolução dos demais), a organização da prova, o domínio da teoria e a autonomia na realização. Toda a essa parte, seria determinada com as cartas finais de cada grupo após a partida, isto é, ao finalizar mesmo com apenas um grupo completado a formação das ternas, todos deveriam redigir a escrita para cada função elementar em mãos: a definição, gráfico, derivada, derivada no ponto, integral indefinida, integral definida e a paridade.

Posterior a aplicação da primeira avaliação da disciplina houve a utilização de outro questionário que visava obter a percepção dos alunos quanto a metodologia aplicada e percepção pessoal de si neste processo. Ao mesmo tempo sem abandonar o caráter sigiloso da pesquisa ao não fazer a identificação das respostas com os entrevistados.

4.6 Resultados

A observação das aplicações do Baralho do Cálculo junto ao uso de questionários possibilitou a obtenção de resultados satisfatórios para a pesquisa, uma vez que permitiram uma análise do processo antes e depois do contato com a metodologia proposta. Na primeira parte, investigou-se os pontos de carência na aprendizagem do conteúdo, após pode-se planejar um meio de contribuir para o aperfeiçoamento da teoria destacada.

A investigação nos levou primeiro as funções elementares, as quais tiveram grande destaque as funções trigonométricas, função exponencial e função logarítmica. Diante dos relatos, obtém-se a percepção de que a principal dificuldade está na relação da lei de formação, propriedades, a representação e comportamento dos gráficos de cada uma delas. Com isso, podemos compreender uma consequência, a dificuldade em entender a teoria de limite, que necessita do conhecimento prévio e das características das funções.

Além desse ponto, houve a identificação de outros pontos: a noção intuitiva, notações, propriedades e as indeterminações. Estes descrevem o efeito "dominó" causado pelo baixo domínio do conteúdo anterior, pois, no caso das indeterminações, se o aluno desconhece artifícios da manipulação (como a simplificação) das expressões de modo tornar possível a resolução de um determinado limite, não conseguirá prosseguir. Também saber aplicar as propriedades de limite é imprescindível nas resoluções. Daí foi necessário dar atenção ao modo como tais conceitos seriam abordados em sala.

Nas demais teorias, o comportamento é bem semelhante no que tange a origem dos obstáculos para o desenvolvimento. Porém, relativo ao contato com o desconhecido, na ocasião em que notações são novidade para os discentes é necessário trabalhar a linguagem matemática de modo diferenciado, podendo consistir em uma via de mão dupla, utilizando uma linguagem acessível ao público ao passo da introdução do vocabulário técnico, recorrendo quando necessário as noções intuitivas que constituem grande parte do aprendizado.

As expectativas explícitas foram positivas na recepção da metodologia. O interesse pelos benefícios da utilização do jogo foi despertado diante da possibilidade de diversificação, isto é, aprender jogando e em meio à diversão representou um importante atrativo. Além do mais, a curiosidade pelas estratégias que seriam desenvolvidas pelos participantes era direcionada a fixação do conteúdo vinculado.

Também, a interação entre os alunos foi bem vista por eles, uma vez que, poderiam debater suas percepções em grupo, com interesse comum, diante de um conteúdo considerado difícil sem o receio de cometer "erros" durante as partidas. Assim, a competitividade saudável foi estimulada durante o processo tendo em vista a possível vantagem a ser obtida ao vencer a partida.

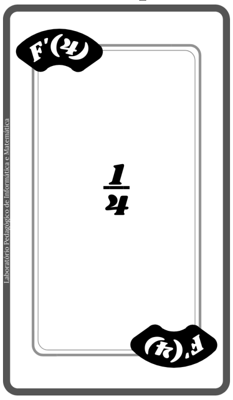
Posteriormente, ficou evidente a motivação gerada pelo planejamento diverso dos métodos conhecidos e vivenciados pelos entrevistados. Relatos da necessidade de rever sempre os tópicos para vencer o jogo foram repetidos constantemente. Da mesma forma que, tinham contato com um novo conhecimento sentiam-se motivados a aprendê-lo.

Assim como, a integração das funções elementares amenizou as carências salientadas no início da pesquisa. Uma vez que, os discentes tiveram a oportunidade de revisar e fazer indagações relativas a caracterização de cada função. Além de que foi plausível a identificação das lacunas resultantes dos processos anteriores, permitindo uma programação do modo a se trabalhar com a turma nestes pontos.

Em contrapartida, identificamos impasses na metodologia. Um deles compartilhado pelos alunos foi acerca da sequência dos naipes do baralho, que a principio gerou confusão, pois alguns pensavam ser o gráfico, o primeiro naipe. Mas, após a familiarização com a composição das cartas a dificuldade foi reduzida gradativamente.

Outro ponto relativo é o visualizar nas cartas, derivada no ponto, de qual função a derivada estaria representando. Por exemplo, na figura 4.6 temos a carta de derivada no ponto da função logarítmica ($f(x) = \ln x$), observe na parte central que temos $\frac{1}{4}$, que está representando a derivada aplicada no ponto $x = 4$ obtido de $f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{4}$.

Figura 4.6: Derivada no ponto da $f(x) = \ln x$



Fonte: Própria da autora (2022)

Por fim, foi evidenciado por unanimidade entre os alunos que o Baralho do Cálculo contribuiu de forma significativa no processo de ensino e aprendizagem desenvolvido durante a oferta da componente curricular de Cálculo Diferencial e Integral para uma turma de graduação em matemática da UFPA.

Considerações Finais

Este trabalho realizou uma aplicação do jogo Baralho do Cálculo como metodologia empregada no ensino de Cálculo infinitesimal. Apresentando toda a fundamentação teórica necessária para sua compreensão e que também foi utilizada no decorrer das aulas. Expôs a elaboração desde as primeiras reuniões no LAPINMAT até as partidas com a turma contemplada. E mostrou o desfecho da análise feita através das observações e informações dos questionários.

Diante disso, é evidente a satisfação dos pesquisadores envolvidos, com os resultados alcançados. Desde o momento de idealização do material pedagógico, até o presente nos deparamos com a progressão dos objetivos mas também com alguns obstáculos. Assim, foi possível enxergar os aspectos da pesquisa por outros ângulos aos quais não tínhamos em vista a princípio, para então contornar os embates de forma propícia, com o compromisso de fazer uma pesquisa significativa.

A contribuição desta pesquisa para os investigadores é relativa ao efeito das experiências vivenciadas neste processo, pois permitiram o amadurecimento quanto ao uso dos jogos como metodologia. Uma vez que, houve uma participação proativa em todas as etapas que envolvem a utilização do recurso, como o planejamento e o contato para a observação das necessidades do público alvo, levando à percepção das possibilidades de adaptação. Destacando esta com a união das práticas pedagógicas, visto que, não é possível que uma trabalhe isolada das outras.

Quanto ao público atendido, tratando-se de um grupo inserido diretamente num ambiente de aprendizado das metodologias de ensino, é notável a disposição em participar dessa experiência. Além disso, foram atendidos pela finalidade da aplicação do jogo, ou seja, fizeram uso de uma ferramenta de ensino e aprendizagem vinculada a uma teoria da qual apresentavam várias dificuldades. Consequentemente, desfrutaram da motivação despertada à aprender Cálculo Diferencial e Integral através de um objeto tão próximo a realidade cotidiana.

Ademais, apresentamos a relevância do trabalho desenvolvido para a comunidade acadêmica. Não restrita somente aos docentes, temos um trabalho que traz resultados diante do uso de um jogo, atrelado ao conteúdo amplo e elementar do Cálculo, e inserido no ambiente de sala de aula da graduação. Visto que, durante o período transcorrido pelos alunos no curso, não haviam tido contato com uma metodologia sendo aplicada tendo os mesmo como alvo, sem incluir as disciplinas pedagógicas.

Por fim, deixamos sugestões para a continuidade dessa pesquisa. Posterior a materialização das cartas do baralho, notamos ajustes que poderiam ser feitos na composição do design dos naipes $f(x)$ e $f'(x)$ (referentes à função e derivada), pois a notação foi utilizada com letras maiúsculas quando, usualmente, tem que ser minúsculas. Além de adaptações do conteúdo atrelado, podendo incluir definições, outras funções elementares ou em outro formato, que não foram trabalhadas na constituição do jogo. Lembrando de usar a mudanças de acordo com os aspectos já comentados, para obter um melhor aproveitamento dessa ferramenta.

Referências

AVILA, G. **Cálculo I: Funções de uma variável.** 6° edição. Rio de Janeiro: LTC, volume I, 1993.

FLEMMING, D. M. **Criatividade e jogos didáticos**. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 8, 2004, Recife-PE. Anais do VIII ENEM. SBEM, 2004.

GERHARDT, T. E. SILVEIRA, D. T. (org.). **Métodos de pesquisa.** Porto Alegre: UFRGS, 2009.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4° edição. São Paulo: Editora Atlas, 2002.

GONÇALVES, M.B. FLEMMING, D. M. **Cálculo A: Funções, Limite, Derivação, Integração** . 5° edição. São Paulo: Makron, 1992.

GRANDO, R. C. **O conhecimento matemático e o uso dos jogos na sala de aula.** Tese(Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação. Campinas, SP, p. 239, 2000. Disponível em: https://www.repositorio.unicamp.br/Resultado /Listar?guid=1676589551235. Acesso em: 12/2022.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo - Volume 1.** 5° edição. Rio de Janeiro: LTC, 1989.

IEZZI, G. DOLCE, O. MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar 2: Logaritmos**. 9° edição. São Paulo, Atual, 2004.

IEZZI, G. MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar 1: Conjuntos, Funções**. 7° edição. São Paulo: Atual, 1993.

IEZZI, G. MURAKAMI, C. MACHADO, N. J. **Fundamentos de matemática elementar, 8 : limites, derivadas, noções de integral**. 7° edição. São Paulo: Atual, 2013.

MUNIZ NETO, A. C. **Tópicos da Matemática Elementar Volume 3: Introdução à Análise.** 2° edição. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SANTA BRÍGIDA, J. SILVA, D. NUNES, M. **Baralho do Cálculo: Uma proposta de material didático para a componente de Cálculo Diferencial e Integral I**. In: X Bienal de Matemática, 10, 2022, Belém - PA. Anais da X Bienal de Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, RJ : SBM, 2022. p. 425 - 436.

Anexos

(A)

1º QUESTIONÁRIO DE APLICAÇÃO DO BARALHO DO CÁLCULO

1) Qual a sua expectativa em relação a um jogo relacionado ao Cálculo Diferencial e Integral?

2) Você tem dificuldades em trabalhar com as funções elementares? Quais?

3) Você tem dificuldade em compreender a teoria que envolve o conteúdo de Limite? Se sim, em qual parte?

4) E em relação a teoria que envolve os tópicos de Derivada? Quais?

5) Quanto a parte da teoria ligada ao conceito de Integral, comente seu está entendimento?

6) Que tópicos de ementa de Cálculo I você se sente seguro em afirmar que aprendeu?

(B)

2º QUESTIONÁRIO DE APLICAÇÃO DO BARALHO DO CÁLCULO

1) O jogo do Baralho do Cálculo contribuiu para a sua aprendizagem da disciplina? De qual forma?

2) O que mais chamou sua atenção no jogo?

3) Qual/quais conteúdos você conseguiu compreender melhor com o baralho do cálculo?

4) Você teve alguma dificuldade para compreender o baralho do cálculo? Qual?

5) Você entendeu melhor os conteúdos com o baralho do Cálculo? De que forma?

6) Comente em poucas palavras a eficácia do jogo para o ensino da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I?

(C)

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral I

Professora: Dra. Marly dos Anjos Nunes

Grupo:

A: ________________________________

B: ________________________________

C: ________________________________

D: ________________________________

E: ________________________________

Ficha de Avaliação – 17/11/2022

- Durante o Jogo

	A	B	C	D	E
Participação					
Criação de estratégias					
Domínio					
Interação					
Organização					

- Pós-jogo

	A	B	C	D	E
Organização					
Escrita					
Domínio					
Autonomia					