



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO BAIXO TOCANTINS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

ROSINILDO NUNES MOTA

**EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO
DIFERENCIAL ORDINÁRIA ESCALAR $x' = f(t, x)$
VIA MÉTODO DA POLIGONAL**

Abaetetuba-PA

2018

ROSINILDO NUNES MOTA

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO
DIFERENCIAL ORDINÁRIA ESCALAR $x' = f(t, x)$
VIA MÉTODO DA POLIGONAL

Trabalho de Conclusão de Curso, Apresentada a Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Pará, Campus Universitário do Baixo Tocantins como parte dos requisitos necessários para a conclusão do curso de licenciatura plena em Matemática, sob a orientação do Prof^o. Dr. Renato Fabrício Costa Lobato.

Abaetetuba-PA

2018

ROSINILDO NUNES MOTA

**EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO
DIFERENCIAL ORDINÁRIA ESCALAR $x' = f(t, x)$
VIA MÉTODO DA POLIGONAL**

Este trabalho de conclusão de curso foi julgado e aprovado em 28/06/2018, para a obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática pelo corpo docente da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Pará, Campus Universitário do Baixo Tocantins.

BANCA EXAMINADORA

Profº Dr. Renato Fabrício Costa Lobato - UFPA
Orientador

Profº Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro - UFPA

Profº Dr. Ducival Carvalho Pereira -UEPA

Dedicatória

”Aos meus pais, Raimundo Ferreira Mota
e Dulcinéia Nunes Mota.”

Agradecimentos

- Nesta árdua caminhada, e nesta pequena parte de minha vida quero agradecer primeiramente a Deus por me conceder as mais belas oportunidades, por estar junto a mim, ajudando-me a alcançar mais um objetivo e poder realiza-lo.
- Aos meus pais Raimundo e Dulcineia, os quais me deram a branda e calorosa força de vontade e incentivo para que esse objetivo pudesse ser alcançado.
- Aos meus irmãos (Renildo, Rosinei e Rosivaldo) e a irmã (Dilcineia) e também aos meus avós Aurita Ferreira que que foi morar junto a Deus e ao Raimundo mota pelos incentivos e ajudas que me deram ao decorrer do curso.
- Ao Professor Renato Fabrício pela orientação e principalmente pela oportunidade concedida de poder participar de seu projeto de pesquisa, a qual dediquei-me arduamente.
- Aos meus amigos e colegas de graduação e pesquisa, Izaque Pantoja e Jennifer Macedo pela amizade e presença de te-los como companheiros de caminhada.
- A todos meus amigos de classe os meus sinceros agradecimentos.

”Uma mente que se abre a uma nova ideia
jamais volta ao seu tamanho original.”

ALBERT EINSTEIN

Resumo

Neste trabalho faremos uma abordagem básica sobre a teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias no que tange a existência da solução de uma equação escalar de primeira ordem. Para tal, apresentamos as principais definições e exemplos de espaços métricos e abordamos sobre sequências em espaços métricos em especial as de Cauchy, em seguida, fizemos um estudo básico sobre conjuntos compactos e seus principais teoremas e introduzimos o conceito de funções contínuas em espaços métricos. Mostramos o teorema de Arzelà Ascolí e demonstramos o teorema de Cauchy-Peano o chamado método da poligonal e por fim fizemos uma aplicação do teorema principal à ecologia.

Palavra-chave: Método da Poligonal, Problema de Valor Inicial, Existência de Solução, Teorema de Arzelà-Ascolí, Teorema de Cauchy-Peano.

Abstract

In this work we will take a basic approach on the qualitative theory of the ordinary differential equations. In what concerns the existence of the solution of a scalar equation of first order. To do so, we present the main definitions and examples of metric spaces and approach sequences in metric spaces, especially those of Cauchy, then we did a basic study on compact sets and their main theorems and introduced the concept of continuous functions in metric spaces. We show the theorem of Arzelà Ascoli and we demonstrate the theorem of Cauchy-Peano called the method of the polygonal and finally we made an application of the main theorem to the ecology.

Keywords: Polygonal Method, Initial Value Problem, Solution Existence, Arzelà-Ascoli Theorem, Cauchy-Peano Theorem.

Sumário

Introdução	1
1 Uma Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias	4
1.1 Conceito de EDO	4
1.2 EDO de Primeira Ordem	5
1.3 O Problema de Valor Inicial (P.V.I)	8
2 Introdução à Teoria dos Espaços Métricos	12
2.1 Espaços Métricos	12
2.1.1 Métrica do Supremo	13
2.2 Bolas, Esferas e Conjuntos Limitado	15
2.3 Sequências em Espaços Métricos	16
2.3.1 Sequências de Cauchy	18
2.4 Conjuntos Compactos	21
2.5 Funções Contínuas em Espaços Métricos	23
2.6 Sequências de Funções	28
3 O Método da Poligonal e a Existência de Solução para a Equação Escalar	
$x' = f(t, x)$	32
3.1 Espaços Normados	32
3.2 O Teorema de Arzelà - Ascoli	33
3.3 Teorema Principal - Método da Poligonal	38
4 APLICAÇÃO À ECOLOGIA	49
4.1 Modelo DBO - OD	49

4.1.1	O Modelo DBO	50
4.1.2	Solução da equação 4.1	50
4.1.3	Modelo do Deficit de Oxigenio Dissolvido D_{OD}	51
4.1.4	Modelo do Oxigênio Dissolvido OD	52
4.2	Existência de Solução do Sistema DBO-OD	53
4.3	Solução Analítica do Problema	54
Considerações Finais		59
A Função φ_n é derivável		60
B Teorema Fundamental do Cálculo		63
B.1	Teorema Fundamental do Calculo Parte 1	63
B.2	Teorema Fundamental do Calculo Parte 2	65
Referências Bibliográficas		67

Introdução

Neste trabalho pretende-se estudar a existência de solução para equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, do tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

Tal estudo, será feito de maneira qualitativa e para demonstrar a existência da solução desta EDO será utilizado o método idealizado por Peano o qual é chamado “Método da Poligonal” este, por sua vez se baseia em conceitos básicos de Topologia e Análise, a qual explicitaremos no decorrer deste trabalho. A grande importância de estudar tal método está no fato de, ele exigir o mínimo de hipóteses para garantir a existência da solução de uma EDO.

Para realçar o embasamento teórico da equação (1) e suas consequências lembremos o ponto de partida de tal estudo. A construção da teoria das equações diferenciais está associada ao desenvolvimento geral da matemática em especial ao cálculo. Esta teoria, iniciou-se no final do século XVII e início do século XVIII com Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) os quais introduziram conceitos, notações e métodos de resolução para estes tipos de equações. Como por exemplo;

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad e \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

e a notação

$$\frac{dy}{dx}$$

idealizada por Libniz.

A questão fundamental das equações diferenciais é; dada uma equação diferencial or-

dinária, qual função satisfaz tal equação?

No final do século XVIII, vários métodos elementares já tinham sido descobertos para solucionar equações diferenciais ordinárias, em quanto que novas classes de equações estavam sendo descobertas e suas soluções eram praticamente impossíveis de expressar, mesmo nos raros casos em que eram possíveis explicitar essas soluções, elas eram muito complicadas e conseqüentemente não eram muito úteis para compreender como realmente elas se comportam.

Neste sentido, iniciou-se no final do século XIX principalmente com Jules Henri Poincaré (1854-1912) e Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918) um estudo profundo sobre questões de existência e unicidade de soluções para equações diferenciais, a qual é chamada atualmente de Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais. Tal teoria, recorre a ferramentas de Análise e Topologia como mencionado anteriormente, para “resolve-las” sem explicitar numericamente as suas soluções e fazer um estudo detalhado sobre seu comportamento e suas propriedades.

Nesta direção, *Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)* formulou o seguinte problema: Dado o ponto (t_0, x_0) fixo será que existe alguma solução de (1) tal que no ponto t_0 assume o valor x_0 ? e se existe, será que ela é única?

Há duas razões principais pelo interesse nos estudo do Problema de Valor Inicial; primeiro, porque seu uso é proeminente como modelo de vários fenômenos. Segundo, os estudos das EDO's (relacionadas ao problema de Cauchy) adquire grande importância pelo fato de, equações diferenciais parciais serem transformadas em equações diferenciais ordinárias equivalentes e assim solucionando uma EDO equivale solucionar uma EDP.

Dessa forma, através deste trabalho vamos responder a primeira pergunta do problema de Cauchy, de maneira qualitativa. A unicidade dessas solução não será demonstrada, pois vamos supor que essas soluções são aplicações somente contínuas, com isso perderemos a unicidade.

Este trabalho está estruturado em quatro capítulos da seguinte forma: O capítulo 1, apresenta o conceito de equações diferenciais ordinárias, juntamente com sua solução e é feita uma introdução formal do Problema de Valor Inicial.

No capítulo 2, apresentamos as bases da teoria da Análise e os conceitos básicos de Topologia, na seção (1.1) introduzimos o conceito de Espaços Métricos e métrica do supremo.

Na seção, (1.2) expomos os conceitos de Bolas, Esferas e Conjuntos Limitados. Adiante na seção (1.3), mencionamos uma breve introdução aos conjuntos compactos. Na seção (1.4), falamos sobre sequências em espaços métricos, dando uma maior atenção as sequências de Cauchy e sequências de funções. E por fim, na seção (1.5) introduzimos os conceitos de funções contínuas e na seção (1.6) conceituamos Sequências de Funções e sobre suas formas de convergências.

No capítulo 3, vamos demonstrar o teorema de Arzelà- Ascoli, o qual é uma condição suficiente é necessária para garantir a existência de uma subsequência uniformemente convergente de uma parte infinita limitada e uniformemente equicontínua de um espaço métrico, no entanto, para este trabalho iremos fazer somente a condição suficiente. Além disso, na seção (3.3) será demonstrado o tema principal deste trabalho, o teorema de Cauchy- Peano, que exige apenas a continuidade da função como condição de regularidade para garantir a existência de solução de um problema de valor inicial.

No capítulo 4, fizemos uma aplicação do teorema de Cauchy- Peano, na área da ecologia, na qual garantimos a existência de solução do modelo da demanda dos níveis de oxigênio em águas com fonte de poluição biodegradáveis, e além disso, mostramos o modelo da solução desse sistema.

Capítulo 1

Uma Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias

Neste capítulo será definido o conceito de equações diferenciais ordinárias, especificamente as de primeira ordem, juntamente com o conceito de sua solução, também discutiremos sobre um problema da teoria clássica das EDO's, o de valor inicial.

1.1 Conceito de EDO

Definição 1.1. (Geral)

Uma equação diferencial ordinária é uma expressão da forma

$$x^{(k)} = f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)})$$

onde $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é uma função definida num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^{(1+kd)}$, a variável t toma valores em $\mathbb{R}$ e as variáveis $x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}$ tomam valores em $\mathbb{R}^d$. Os inteiros $k \geq 1$ e $d \geq 1$ são chamados, respectivamente, ordem e dimensão da equação diferencial.

Quando $k = 1$, tem-se $x^1 = f(t, x)$, isto é, $x' = f(t, x)$ que é chamada de equação diferencial de primeira ordem, também chamada de equação escalar a qual é o objetivo de estudo deste capítulo onde a veremos com mais detalhes.

1.2 EDO de Primeira Ordem

Seja Ω um subconjunto do espaço $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ onde $\mathbb{R}$ é a reta real e $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ o espaço euclidiano n -dimensional. Um ponto de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ será denotado por (t, x) , $t \in \mathbb{R}$ e $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ em $\mathbb{E}$.

Considere $f : \Omega \rightarrow \mathbb{E}$ uma aplicação contínua e I um intervalo não degenerado, com I podendo ser aberto, fechado ou semi-fechado, finito ou infinito.

Definição 1.2.

Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}$ uma aplicação, com $\mathbb{R}^2 = \{(t, x); t, x \in \mathbb{R}\}$. Chama-se equação diferencial ordinária de primeira ordem ou escalar a expressão

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad \text{ou} \quad x' = f(t, x) \quad (1.1)$$

Obs: A variável x é dependente enquanto que a variável t é independente e a equação é chamada de primeira ordem, pelo fato de a variável dependente envolver somente a derivada primeira.

Exemplo 1.

A expressão $\frac{dx}{dt} = \sin(2t)$ é uma equação diferencial de primeira ordem. Pois, ela é da forma da equação (1.1), onde x é a variável dependente e t é a variável independente.

Definição 1.3.(Conceito de Solução)

Chama-se solução de uma equação diferencial do tipo (1.1) no intervalo $I \subset \mathbb{R}$, uma função $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

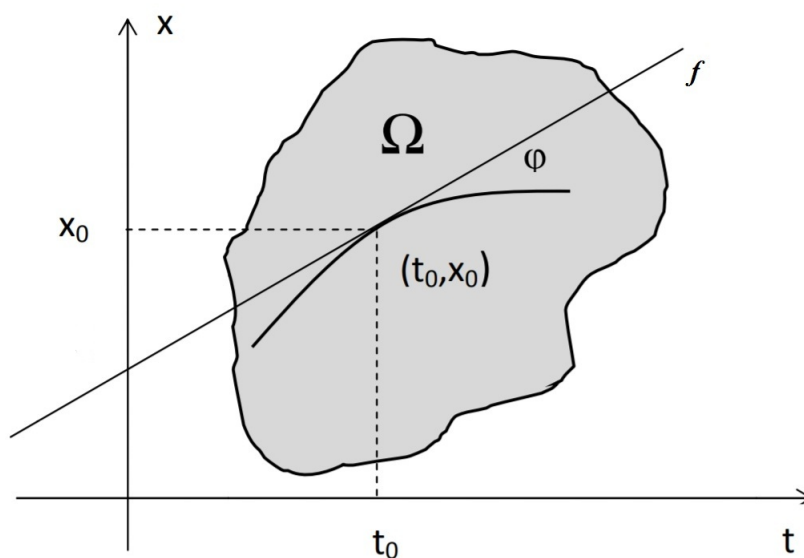
1. $G_\varphi = \{(t, \varphi(t)); t \in I\} \subset \Omega$, isto é, o gráfico de φ esteja contido em Ω
2. $\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(t, \varphi(t))$ para todo $t \in I$.

Se t é um ponto extremo do intervalo, então a derivada de φ é a respectiva derivada lateral.

$$\frac{\varphi(t)}{dt} - \quad \text{ou} \quad \frac{\varphi(t)}{dt} +$$

Geometricamente, temos

Figura 1.1: solução genérica



Fonte: Produção do autor

Em outras palavras, a solução de uma EDO de primeira ordem, é uma função que satisfaz a equação diferencial em algum intervalo I . Para melhor entendermos, vejamos um exemplo.

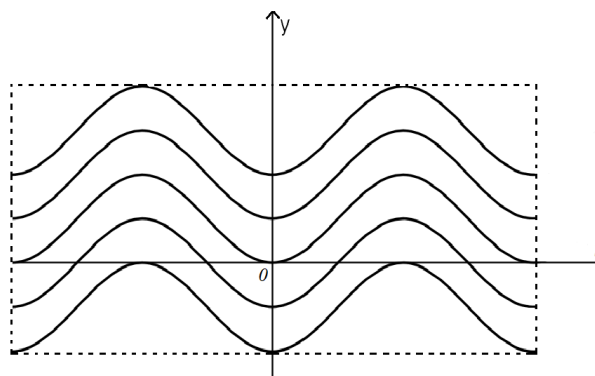
Exemplo 2.

Considere a equação diferencial do exemplo 1 definida em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Uma solução para esta equação é a função $\varphi(t) = -\frac{\cos(2t)}{2} + c$ onde, $c \in \mathbb{R}$ é uma constante. Pois

$$\varphi'(t) = \text{sen}(2t)$$

Veja no gráfico a seguir

Figura 1.2: Soluções da equação do exemplo 1



Fonte: Produção do autor

A função $\varphi(t)$ é chamada de solução geral, pois as soluções particulares são aquelas em que a constante c assume valores diferentes, isto é, para cada valor atribuído a c a solução terá um valor numérico x diferente.

Exemplo 3.

Seja a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = 2t + \pi \quad (1.2)$$

definida em $\Omega \subset \mathbb{R}$. Queremos determinar sua solução, isto é, queremos encontrar uma função que satisfaça a equação acima.

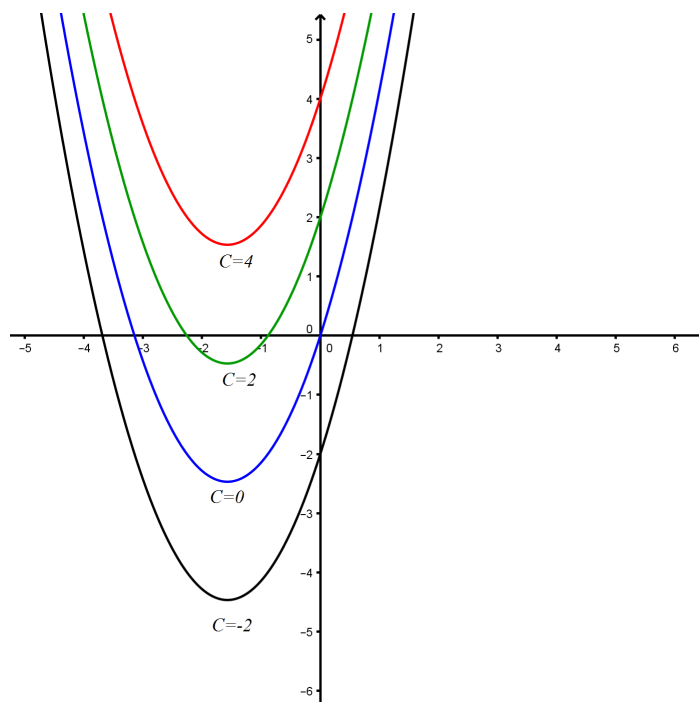
De início, vamos atentar para o seguinte raciocínio: Suponha que x seja solução da equação (1.2). Então, integrando em ambos os lados, temos

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{dt} dt &= \int (2t + \pi) dt \\ x(t) &= t^2 + \pi t + c \end{aligned}$$

com c uma constante. Isto, nos mostra que $x(t) = t^2 + \pi t + c$ é solução da equação (1.2). Note que, qualquer equação desta forma, para valores diferentes atribuídos a c ainda continua sendo solução.

Veja a seguir, o gráfico da solução geral da equação (1.2) onde c é uma constante.

Figura 1.3: Solução geral



Fonte: Produção do autor

No exemplo acima obtemos infinitas soluções. Porém, note que existe somente uma solução $x(t)$ passando por exemplo em $x(0) = 0$. Tal que, condição é chamada de "Problema de Valor Inicial".

1.3 O Problema de Valor Inicial (P.V.I)

Sob hipótese bem gerais sobre f , a fim de garantir que a equação $x' = f(t, x)$ possua pelo menos uma solução (existência) e em que condições pode-se garantir a unicidade dessa solução, foi formulado o seguinte problema:

Dado um ponto $(t_0, x_0) \in \Omega$. Existe uma, e só uma, solução φ de (1.1) passando pelo ponto (t_0, x_0) .

Em termos mais formalista, este problema consiste em demonstrar a existência de $\varphi(t)$, $t \in I$ em um dado ponto $(t_0, x_0) \in \Omega$ com a gráfico de $\varphi(t)$ contido em Ω tal que

$$\begin{cases} \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) & \text{com } t \in I \\ \varphi(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Este problema ficou conhecido como “*Problema de Valor Inicial*” ou “*Problema de Cauchy*” formulado pelo matemático Francês *Augustin-Louis Cauchy* (1789-1857).

Exemplo 4.

Seja a equação diferencial $x'(t) = 2t + 3$ definida em $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}^2$ com a seguinte condição inicial

$$\begin{cases} \varphi'(t) = 2t + 3 \\ \varphi(1) = 5 \end{cases}$$

Veja que, $f(t, \varphi(t)) = 2t + 3$ é uma função contínua em todo o $\mathbb{R}^2$. Usando um método simples para encontrar solução, temos

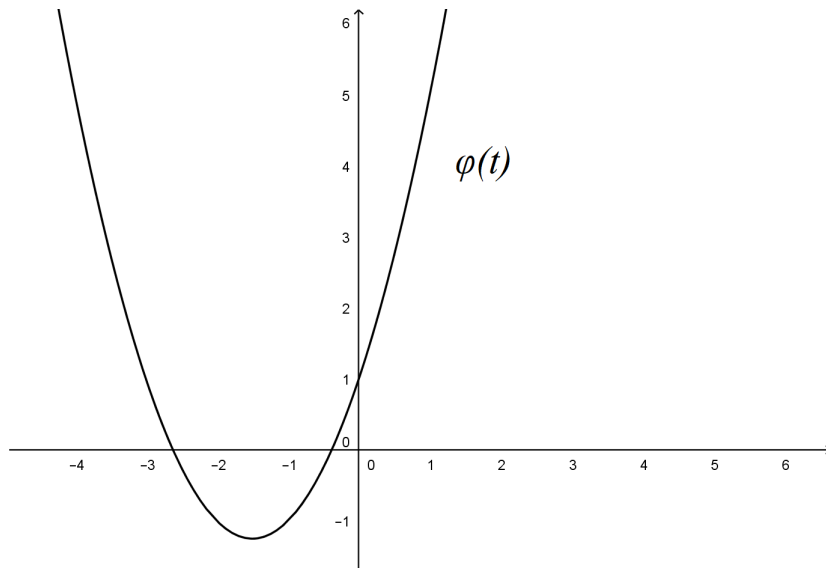
$$\begin{aligned} \int \varphi'(t) dt &= \int (2t + 3) dt \\ \varphi(t) &= t^2 + 3t + C \end{aligned}$$

Onde c é uma constante. Aplicando $t = 1$ à $\varphi(t)$, temos

$$\varphi(1) = 1^2 + 3 \times 1 + C = 4 + C = 5 \implies C = 1$$

Logo, a solução do problema de valor inicial é a função $\varphi(t) = t^2 + 3t + 1$. Veja o gráfico abaixo:

Figura 1.4: Solução particular



Fonte: Produção do autor

Exemplo 5.

Considere a equação do *exemplo 1*, com as seguintes condições;

$$\begin{cases} \varphi'(t) = \operatorname{sen}(2t) \\ \varphi(0) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

em um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e com $2 < t < 3$.

Observe que, $\varphi(t) = -\left(\frac{\cos(2t)}{2}\right) + C$ é a solução geral de $x'(t) = \operatorname{sen}(2t)$ como já havíamos mostrado no exemplo 2. Porém, queremos encontrar uma em particular tal que, $\varphi(0) = -\frac{1}{2}$.

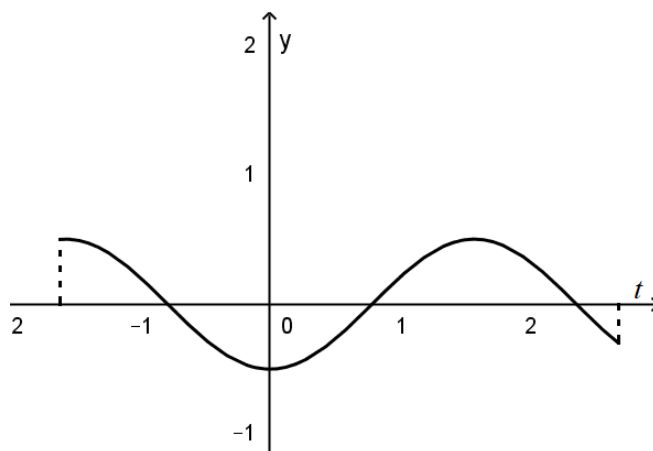
Para isso, basta calcular $\varphi(t) = -\left(\frac{\cos(2t)}{2}\right) + C$ no ponto $t = 0$. Assim, temos

$$\varphi'(0) = -\left(\frac{\cos(2 \times 0)}{2}\right) + C = -\left(\frac{\cos(0)}{2}\right) + C = -\frac{1}{2} + C = -\frac{1}{2} \implies C = 0$$

Logo, $\varphi(t) = -\left(\frac{\cos(2t)}{2}\right)$ é a solução do problema de valor inicial. Observe no gráfico abaixo

Note que, só existe essa função passando neste ponto, pois se existir uma outra, então elas serão iguais. Tal fato, é que constitui a essência do problema de Cauchy.

Figura 1.5: Solução particular da equação do exemplo 1



Fonte: Produção do autor

Uma primeira observação sobre as equações é que elas não definem completamente a resposta. Veja que nos *exemplos* (2) e (3) há um parâmetro, ou mais, que pode ser escolhido. Isso está ligado ao teorema fundamental do cálculo em que sabemos que a primitiva de uma função não está completamente determinada já que sempre podemos somar uma constante na resposta [ver apêndice]. Para conseguir definir completamente a resposta torna-se necessário dar mais informação além da equação como nos *exemplos* (4) e (5). É essa informação adicional que nos remota a encontrar soluções únicas caso elas existem. O fato, que nós leva a estudar esse problema clássico é o rigor de formalizar em quais situações essas soluções existem, sem expressá-las analiticamente.

Capítulo 2

Introdução à Teoria dos Espaços Métricos

2.1 Espaços Métricos

Definição 2.1.

Seja M um conjunto não vazio. Uma métrica em M é uma função $d : M \times M \longrightarrow [0, +\infty)$ tal que para quaisquer x, y e $z \in M$ tem-se

- (i) $d(x, y) \geq 0$, e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (**positividade**)
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (**simetria**)
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (**desigualdade triangular**)

O par ordenado (M, d) , onde M é um conjunto e d é uma métrica é chamado de espaço métrico.

Exemplo 6.(Métrica Usual da Reta).

Considere o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, chamamos d , definido por $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ de métrica onde d é dada por $d(x, y) = |x - y|$

Exemplo 7.(Subespaços métricos ou métrica induzida).

Seja (M, d) um espaço métrico, se X é um subconjunto de M então podemos induzir

como sendo a métrica usual da reta, uma métrica natural em M , a partir da métrica d

$$d_X = d|_{X \times X} : \longrightarrow [0, +\infty)$$

é uma métrica em X . Dessa forma, todo subconjunto de um espaço métrico pode ser considerado um espaço métrico.

2.1.1 Métrica do Supremo

Considere $\mathbb{B}(X, \mathbb{R})$ o conjunto das funções limitadas $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Defini-se uma métrica d em $\mathbb{B}(X, \mathbb{R})$ pondo para cada função $f, g \in \mathbb{B}(X, \mathbb{R})$

$$d(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|$$

De fato,

i)(positividade) Se $f \neq g$ então

$$d(f, g) = \sup |f(x) - g(x)| > 0$$

pois, por definição de módulo, como $f \neq g$ segue que,

$$|f(x) - g(x)| > 0 \quad \forall x \in X$$

e conseqüentemente

$$\sup |f(x) - g(x)| > 0.$$

Se $f = g$, então $d(f, f) = \sup |f(x) - f(x)| = \sup |0| = 0$.

ii)(simetria) Como

$$d(f, g) = \sup |f(x) - g(x)| = \sup |(-1)(-f(x) + g(x))| = \sup |-1||g(x) - f(x)|$$

pela propriedade de valor absoluto, segue que

$$d(f, g) = \sup [| - 1| |g(x) - f(x)|] = \sup 1 \cdot |g(x) - f(x)| = \sup |g(x) - f(x)| = d(g, f).$$

iii)(desigualdade triangular) Veja que,

$$d(f, h) = \sup |f(x) - h(x)| = \sup |(f(x) - g(x)) + (g(x) - h(x))|$$

pela desigualdade triangular na reta, temos

$$|(f(x) - g(x)) + (g(x) - h(x))| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|$$

assim

$$d(f, h) = \sup |f(x) - h(x)| \leq \sup [|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|]$$

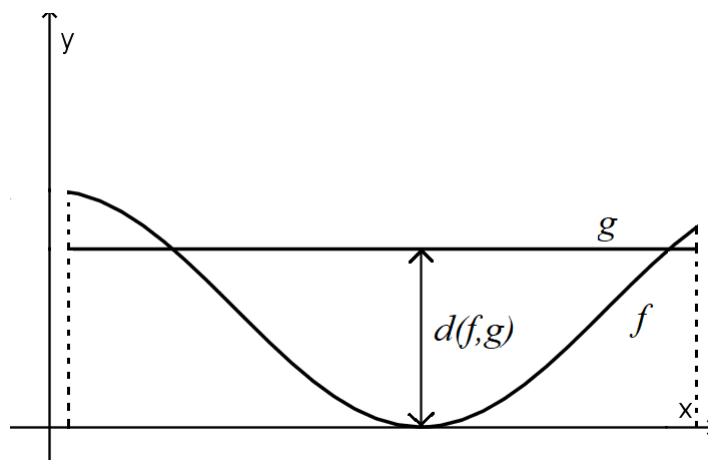
Pela regra do supremo, segue que

$$d(f, h) = \sup |f(x) - h(x)| \leq \sup |f(x) - g(x)| + \sup |g(x) - h(x)|$$

daí, segue que

$$d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h).$$

Portanto, d é uma métrica e todo conjunto que contém essa métrica é um espaço métrico.

Figura 2.1: Maior distância entre f e g 

Fonte: Produção do autor

2.2 Bolas, Esferas e Conjuntos Limitado

Definição 2.2.

Sejam (M, d) um espaço métrico e $x \in M$, seja ainda $r > 0$ um real positivo, definimos

i) Uma bola aberta de centro x e raio r como sendo

$$\mathbb{B}(x, r) = \{y \in M; d(x, y) < r\}$$

ii) Uma bola fechada de centro x e raio r como sendo

$$\mathbb{B}(x, r) = \{y \in M; d(x, y) \leq r\}$$

iii) Uma esfera de centro x e raio r como sendo

$$\mathbb{B}(x, r) = \{y \in M; d(x, y) = r\}$$

Definição 2.3. (Conjunto limitado).

Um subconjunto $A \subset M$ de um espaço métrico (M, d) é dito limitado quando existe uma constante $c > 0$ tal que $d(x, y) \leq c$ para quaisquer $x, y \in A$.

Definição 2.4. (Ponto interior).

Seja $A \subset M$ com $A \neq \emptyset$. Diz-se que um ponto $x \in A$ é um ponto interior de A se existir

uma bola aberta de centro em x e contida em A .

O conjunto de todos os pontos interiores de A é denominado interior de A .

Notação: $x \in \text{int}(A) \Leftrightarrow \exists B(x, r) \subset A$.

Definição 2.5.

Seja $A \subset M$ de um espaço métrico, diz-se que A é um conjunto aberto se todo ponto de A é ponto interior de A , isto é, $A = \text{int}A$.

Exemplo 8.

O conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 2\}$ é aberto em $\mathbb{R}$

Exemplo 9.

Toda bola aberta é um conjunto aberto, pois todo $x \in B(x, r) = \{y \in (M, d) / d(x, y) < r\}$ está contido no interior de B , isto é, $\forall y \in B, y \in \text{int}\{B\}$.

2.3 Sequências em Espaços Métricos

Definição 2.6. (Sequência)

Seja (M, d) um espaço métrico e X um subconjunto de M . Toda aplicação $x_n : X \rightarrow M$ é chamada sequência de elementos de M e indicamos por $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ ou (x_n)

Definição 2.7. (Sequência Limitada)

Uma sequência (x_n) em um espaço métrico (M, d) , diz-se limitada quando existe um número real $c > 0$ tal que $d(x_m, x_n) \leq c$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.8.

Sejam (M, d) um espaço métrico e $(x_n) \in M$ uma sequência. Diz-se que o ponto $a \in M$ é limite da sequência (x_n) quando para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$.

Para indicar que a é limite da sequência (x_n) usa-se a notação,

$$\lim x_n = a \quad \text{ou} \quad x_n \rightarrow a$$

Para designar este fato, diz-se que a sequência (x_n) é convergente, isto é, o conjunto dos

pontos da sequência se aproximam do ponto a quando n tende ao infinito.

Exemplo 10.

Considere o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais com a métrica usual. A sequência $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, onde $x_n = \frac{n}{n+1}$ converge para 1.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, tome um $n_0 \in \mathbb{N}$ de maneira que $\frac{1}{n_0+1} < \varepsilon$. Assim, para todo $n > n_0$ tem-se

$$d(x_n, 1) = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n_0+1} < \varepsilon$$

Note que, obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $d(x_n), 1 < \varepsilon$, mostrando que $x_n \rightarrow 1$.

Definição 2.9. (Subsequência.)

Dada uma sequência (x_n) em M . Dizemos que a aplicação $k_i \rightarrow x_{n_k}$ com $\{k_1, k_2, \dots, k_i, \dots\} \subset \mathbb{N}$ e $(k_1 < k_2 < \dots < k_i < \dots)$ é uma subsequência ou subsucessão de (x_n) .

Teorema 2.1.

Sejam (M, d) um espaço métrico e $(x_n) \in M$ uma sequência, então

- 1. Existe um único $a \in M$ tal que $\lim x_n = a$*
- 2. Toda sequência convergente é limitada*
- 3. Se $\lim x_n = a$, então toda subsequência $(x_n)_k$ converge para a*

Esse teorema não será demonstrado neste trabalho, entretanto, para ver sua demonstração leia [5, pg.85, 86e96]. A demonstração esta expressa em [5].

Teorema 2.2.

Toda sequência monótona e limitada é convergente.

Este teorema estabelece uma condição necessária e suficiente, para que uma sequência qualquer em um espaço métrico seja convergente. Ele supri a reciproca do enunciado do item 2 do teorema 2.1, pois nem toda sequência limitada é convergente. Ver demonstração em [5, pg.86]

Exemplo 11.

A sequência $x_n = (-1)^n$ é limitada, entretanto não é convergente pois, ela possui duas subsequências que convergem para limites diferentes, a saber $x_{2n} = (1, 1, 1, \dots)$ que converge para 1 e $x_{2n-1} = (-1, -1, -1, \dots)$ que converge para -1 .

2.3.1 Sequências de Cauchy

Nesta seção, mostraremos que as sequências de Cauchy é um tipo especial de sequências em espaços métricos que tem como propriedade intrínseca a aproximação de suas distâncias. Veremos ainda que toda sequência de Cauchy que converge nesse espaço para um elemento do mesmo é completo, ou seja, a convergência das sequências de Cauchy determinam a completeza dos espaços métricos.

Definição 2.10.

Uma sequência (x_n) num espaço métrico (M, d) é dita de cauchy quando para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Intuitivamente, essa definição significa dizer que as distâncias entre os termos da sequência se tornam arbitrariamente pequenos, para os índices m e n convenientemente grandes.

Proposição 2.11.

Em um espaço métrico toda sequência convergente é de cauchy.

Demonstração:

Seja (x_n) uma sequência convergente. Então existe um $a \in M$ tal que

$$\lim x_n = a$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \implies d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

tome $m > n_0$ de tal forma que $d(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ assim, teremos que

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Logo, (x_n) é de Cauchy.

Nota: Nem toda sequência de Cauchy é convergente.

De fato, Seja (x_n) uma sequência de pontos de $\mathbb{Q}$ definida por recorrência do seguinte modo

$$x_1 = 2 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) \quad \forall n \geq 1$$

fazendo x_n^2 , temos

$$x_{n+1}^2 = \left[\frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) \right]^2 = \frac{1}{4} \left(x_n - \frac{2}{x_n} \right)^2 + 2$$

veja que, $x_n - \frac{2}{x_n} \neq 0$, pois cada x_n é racional. Como $c^2 > 0$ para quaisquer que sejam $c \in \mathbb{R}$, então

$$\left(x_n - \frac{2}{x_n} \right)^2 > 0$$

aplicando a raiz quadrada em ambos os membros, temos

$$x_n - \frac{2}{x_n} > 0$$

multiplicando por x_n em ambos os membros, segue que

$$x_n^2 - 2 > 0 \implies x_n^2 > 2 \quad \forall n \geq 1$$

assim

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) < \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{x_n^2}{x_n} \right) = x_n \implies x_{n+1} < x_n$$

para qualquer $n \geq 1$. Logo, o conjunto dos pontos da sequência é decrescente, isto é,

$$x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n > \dots > 1$$

note que, a sequência é monótona e limitada, logo pelo teorema (2.2) x_n converge para um $a \in \mathbb{R}$ e portanto x_n é de Cauchy em $\mathbb{Q}$.

Como $(x_n) \longrightarrow a$, então

$$\lim \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) = a \implies a = \frac{1}{2} \left(a + \frac{2}{a} \right)$$

Donde, segue que $a = \sqrt{2}$, mas $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Portanto, conclui-se que a recíproca do teorema é falso.

Proposição 2.2.

Seja (x_n) uma sequência de Cauchy num espaço métrico M . Se (x_n) admite uma subsequência convergente então, o limite de (x_n) converge para o mesmo limite da subsequência.

Demonstração: Seja $(x_n)_k$ uma subsequência de (x_n) . Por hipótese $(x_n)_k$ converge para algum valor em $a \in M$.

Afirmamos que $\lim x_n = a$. De fato, dado $\varepsilon > 0$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_k > n_0 \implies d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Existe também um $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para

$$m, n > n_1 \implies d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Assim, para todo $n > n_2 \exists n_k > n_2$, e dessa forma,

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_k) + d(x_k, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Portanto, (x_n) converge para o mesmo limite da subsequência.

Definição 2.11.

Diz-se que um espaço métrico X é completo quando toda sequência de Cauchy converge para algum valor de X .

Exemplo 12.

O conjunto dos números reais, é um espaço métrico completo, pois para quais quer $m, n \in \mathbb{N}$ tem-se que $m, n > n_0 \implies |x_m - x_n| < \varepsilon$. Isto é, Qualquer sequência de Cauchy converge em $\mathbb{R}$

2.4 Conjuntos Compactos

Nessa seção vamos caracterizar os subconjuntos do $\mathbb{R}^n$. Para tal, vamos definir o conceito de cobertura.

Definição 2.12.

Seja (M, d) um espaço métrico e K um subconjunto de M . Diz-se que uma família $\mathcal{L} = \{C_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de conjuntos de $C_\lambda \in M$ é uma cobertura de K se $K \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$

Chama-se uma subcobertura $\mathcal{F}$ de $\mathcal{L}$ uma subfamília $\{C_\alpha\}_{\alpha \in N}$ com $N \subset L$ tal que ainda se tem $K \subset \bigcup_{\alpha \in N} C_\alpha$.

Exemplo 13.

Os intervalos abertos $C_1 = \left(0, \frac{2}{3}\right)$, $C_2 = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ e $C_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{10}\right)$, constituem uma cobertura $\mathcal{C} = (C_1, C_2, C_3)$ do intervalo $X = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$. De fato, o intervalo $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \subset C_1 \cup C_2 \cup C_3 = (0, 1)$, ou seja, $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ para $L = \{1, 2, 3\}$. Agora, observe que $L' = \{1, 3\}$ determina uma subcobertura de $\mathcal{C}$, pois o intervalo $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \subset C_1 \cup C_3 = \left(0, \frac{9}{10}\right)$.

Definição 2.13.

Seja $K \subset (M, d)$ um subconjunto de um espaço métrico. Diz-se que K é compacto se toda cobertura por abertos de K possui uma subcobertura finita.

Teorema 2.3. (Borel- Lebesgue.)

Toda cobertura de $[a, b]$ por meio de intervalos abertos admite uma subcobertura finita.

Teorema 2.4 (Heine-Borel.)

Seja $K \subset \mathbb{R}^n$, K é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.

Os teoremas (2.3) e (2.4) são equivalentes. Suas demonstrações estão expressa em [8]

Proposição 2.3.

Todo espaço métrico compacto é completo e limitado.

Demonstração:

Seja (x_n) uma sequência de Cauchy num espaço métrico compacto M . Vamos mostrar que (x_n) é convergente. De fato, como M é compacto, por definição (x_n) admite uma

subsequência convergente para algum ponto $a \in M$, pela proposição (2.2), $(x_n) \rightarrow a$. Portanto, M é completo.

Agora mostraremos que M é limitado. De fato, como M é compacto, então existe um número finito de bolas abertas de centro a e raio ε , $B(a, \varepsilon)$ tal que

$$M = \bigcup_{a \in M} B(a, \varepsilon)$$

pelo teorema (2.3) de Borel - Lebesgue, podemos extrair uma subcobertura finita

$$M = B(a_1, \varepsilon) \bigcup, \dots, \bigcup B(a_n, \varepsilon)$$

e pelo teorema de Heine Borel, segue que M é limitado.

Por tanto, conclui-se que M é completo e limitado.

A recíproca do teorema acima não é verdadeira, pois existem conjuntos limitados que não são compactos, por exemplo um espaço métrico M com a métrica *zero-um*, obviamente M é limitado, já que, $d(M) = 1$.

Teorema 2.5. (Bolzano-Weierstrass).

Seja (M, d) um espaço métrico e seja X um subconjunto infinito de M . Diz-se que X é compacto se, e somente se, toda sequência em X possui uma subsequência convergente em X

Demonstração:

Seja x_n uma sequência em X . Defina $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, como X é compacto, então pelo teorema de Heine-Borel X é limitado e fechado. Tomando $\varepsilon = \varepsilon_1$, tem-se que X pode ser coberto por um número finito de bolas de raios $\frac{1}{2}$ e centros $y_1, \dots, y_i$. Pelo menos uma dessas bolas deve conter infinitos pontos da sequência x_n para um número infinito de índices, pois do contrário x_n seria finita. Chame esta bola de B_1 assim, $x_n \in B_1$ para $n \in N_1$. Note que, B_1 é limitada e fechada, pois $B_1 \subset X$. Dessa forma, $X \cap B_1$ pode ser coberto por um número finito de bolas de raio $\varepsilon_2 = \frac{1}{2^2}$ e centro $y_{i_j} \in M$. Assim, existe pelo menos uma dessas bolas que contem infinitos pontos da sequência x_n para um número infinito de índices, chame esta bola de B_2 assim $x_n \in B_2$ para $n \in N_2$. Continuando indutivamente, obtemos

uma sequência de bolas B_k de raio $\frac{1}{2^k}$ e uma sequência decrescente de subconjuntos infinitos N_k de $\mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_k$ para $n \in N_k$. Escolha $n_1 \in N_1, n_2 \in N_2, \dots, n_k \in N_k, \dots$ tal que $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$. Assim temos que (x_{n_k}) é uma sequência monótona por construção. Como X é compacto então, pela proposição (2.3), x_{n_k} é limitado. Sendo x_{n_k} monótona e limitada, então pelo teorema (2.2) conclui-se que (x_{n_k}) é convergente.

Reciprocamente, suponha que (x_n) admita uma subsequência convergente. Mostraremos que para todo $\varepsilon > 0$ dado, podemos exprimir X como a reunião de um número finito de bolas de raio ε . Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, escolha um $x_1 \in X$ tal que, se $X = B_1(x_1, \varepsilon)$, o resultado está provado. Caso contrário, existe $x_2 \in X$ tal que $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$. Se $X = B_1(x_1, \varepsilon) \cup B_2(x_2, \varepsilon)$ o resultado está provado. Se não, existe um $x_3 \in X$ tal que $d(x_2, x_3) \geq \varepsilon$ e assim $d(x_1, x_3) \geq \varepsilon$. Prosseguindo desta maneira, temos duas possibilidades; ou encontramos $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$X = B_1(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B_n(x_n, \varepsilon)$$

ou obtemos uma sequência (x_n) tal que $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ para $m \neq n$. Neste caso, nenhuma subsequência de (x_n) seria convergente, o que contraria a hipótese. Logo, $M = \bigcup_{i=1}^n B_i(x_i, \varepsilon)$ é fechado e limitado, pois as bolas $B_i(x_i, \varepsilon)$ são limitadas e fechadas. Portanto, pelo teorema (2.4) conclui-se que X é compacto.

O teorema acima estabelece características gerais de um conjunto compacto, pois além de ele ser completo e limitado como enunciado pela proposição (2.3), ele possui uma subsequência convergente. Dessa forma, pode-se reformular este teorema para o conjunto dos números reais da seguinte forma, “*Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente*” pois, o conjunto dos reais é completo.

2.5 Funções Contínuas em Espaços Métricos

Definição 2.14.(Continuidade Simples.)

Sejam X, Y dois espaços métricos. Diz-se que a aplicação $f : X \longrightarrow Y$ é simplesmente contínua no ponto $x_0 \in X$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ é possível obter um $\delta > 0$ tal que

$$d(x_0, x) < \delta \Rightarrow d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$$

Quando f é contínua em todos os pontos $a \in M$ dizemos que a função f é contínua.

Definição 2.15. (Continuidade Uniforme).

Sejam X e Y dois espaços métricos. Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ diz-se uniformemente contínua quando, para cada $\varepsilon > 0$ dado, existir $\delta > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Para quaisquer $x, y \in M$

Veja que, a continuidade simples é um fenômeno local, em quanto que a continuidade uniforme é um fenômeno global, isto é, o comportamento da aplicação relaciona todo o espaço simultaneamente em questão.

Exemplo 14.

Seja f uma aplicação, sendo $f : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x+r}$ com $r > 0$. Esta função, é uniformemente contínua.

Com efeito, seja $\varepsilon > 0$ devemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\forall x, y \in (0, 1), |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Tomando $\delta = \varepsilon r^2$, segue que

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x+r} - \frac{1}{y+r} \right| = \left| \frac{y-x}{(x+r).(y+r)} \right| = \left| \frac{1}{(x+r)} \right| \left| \frac{1}{(y+r)} \right| |y-x|$$

Como $(x+r) > r$, então

$$\frac{1}{x+r} < \frac{1}{r}$$

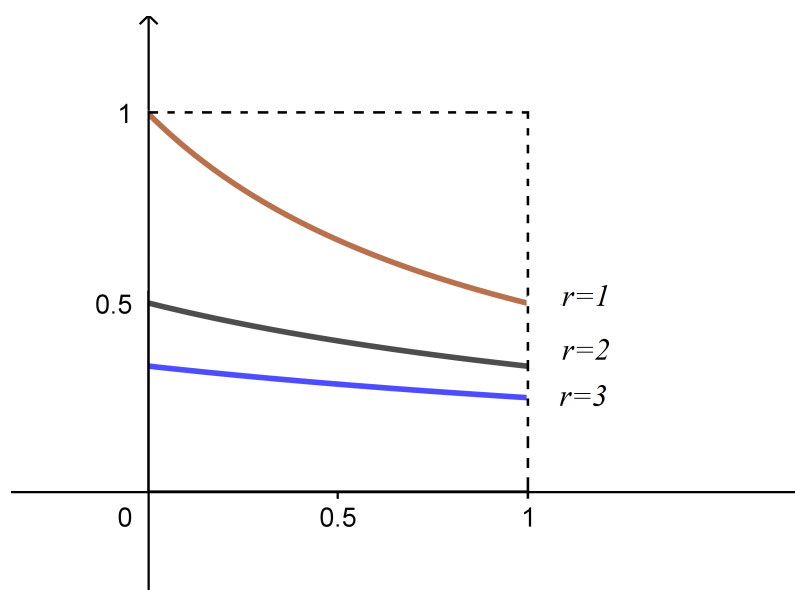
Pelo mesmo motivo $\frac{1}{y+r} < \frac{1}{r}$

$$\left| \frac{1}{(x+r)} \right| \left| \frac{1}{(y+r)} \right| |y-x| < \frac{1}{r} \frac{1}{r} |y-x|$$

Por hipótese $|y - x| < \delta$, assim temos

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{(x+r)} \right| \left| \frac{1}{(y+r)} \right| |y - x| < \frac{\delta}{r^2} = \frac{\varepsilon r^2}{r^2} = \varepsilon$$

Mostrando que f dada é uniformemente contínua.

Figura 2.2: continuidade uniforme de f 

Fonte: Produção do autor

Definição 2.16.

Sejam X, Y dois espaços métricos. Diz-se que $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação lipschitziana quando existe uma constante $c > 0$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

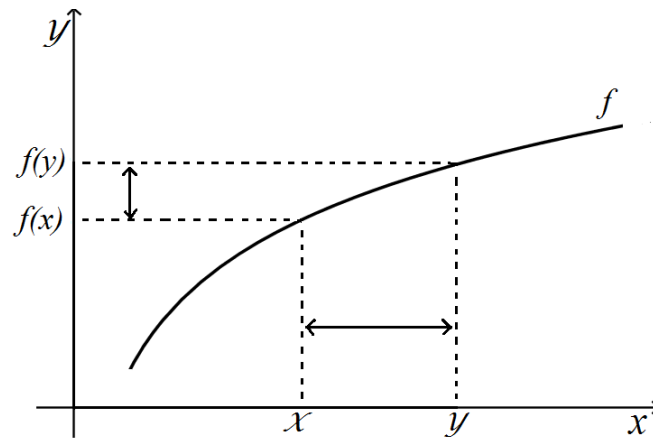
Geometricamente, significa dizer que

a distância entre as imagens de dois pontos qualquer do domínio da função é menor do que ou igual a distância entre os dois pontos.

Nota: c é chamada de constante de lipischitz.

Existem alguns casos particulares para a desigualdade acima que recebem algumas denominações próprias de acordo com os valores de c .

- Diz-se que f é uma contração quando $0 < c < 1$.
- Diz-se que f é um contração fraca quando $c = 1$, isto é, $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$.

Figura 2.3: distâncias f 

Fonte: Produção do autor

- diz-se que f é uma imersão isométrica quando $c = 1$ e $d(f(x), f(y)) = d(x, y) \forall x, y \in X$.

Proposição 2.4.

Toda aplicação lipschitziana é uniformemente contínua.

Demonstração:

De fato, se $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$, dado $\varepsilon > 0$ tome um $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$, então

$$d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y) \leq c\delta < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$$

Consequentemente, toda aplicação lipschitziana é contínua, pois toda aplicação uniformemente contínua é contínua.

Exemplo 15.

Seja a aplicação $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) = x^2$, sendo X um subconjunto limitado e considerando a métrica usual. Afirmamos que $f(x) = x^2$ é lipschitziana.

De fato, seja $|x| < k$ para todo $x \in X$, então dados $x, y \in X$ quaisquer, tem-se

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y| \cdot |x - y| < 2k|x - y|$$

tomando $c = 2k$ resulta que

$$|f(x) - f(y)| < c|x - y|$$

O que prova $f(x) = x^2$ ser lipschitziana.

Além disso, $f(x) = x^2$ é uniformemente continua pela proposição acima pois, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \frac{\varepsilon}{2k}$ tal que

$$|x - y| < \frac{\varepsilon}{2k} \implies 2k|x - y| < \varepsilon \implies |x - y||x + y| < \varepsilon \implies |x^2 - y^2| < \varepsilon$$

Nota: A função $f(x) = x^2$ não é uniformemente contínua em uma parte ilimitada $X \subset \mathbb{R}$.

Com efeito, sendo $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - x^2 = 2 + \frac{1}{x^2} > 2$, tomando $\varepsilon = 1$ e observando que, seja qual for o $\delta > 0$ escolhido, sempre existe $x \in X$ com $|x| > \frac{1}{\delta}$ e portanto $y = x + \frac{1}{x}$ cumpre $|y - x| < \delta$ mas $|f(y) - f(x)| = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - x^2 > 2 > \varepsilon$.

2.6 Sequências de Funções

Definição 2.17

Seja X um subconjunto do espaço métrico (M, d) . Chama-se *sequências de funções* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a aplicação $f_n : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, onde a cada $n \in \mathbb{N}$ associa a uma função f_n .

Exemplo 16.

Seja $f_n : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação, tal que $f_n(x) = \frac{x^3}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Observe que, para cada valor atribuído a $n \in \mathbb{N}$ temos uma função correspondente, isto é,

$$f_1 = x^3, f_2 = \frac{x^3}{2}, \dots$$

assim obtêm-se a sequência de funções

$$f_n(x) = \left(x^3, \frac{x^3}{2}, \frac{x^3}{4}, \dots, \frac{x^3}{k}, \dots\right).$$

Definição 2.18

Seja X um subconjunto do espaço métrico (M, d) . Diz-se, que a sequência de aplicações $f_n : X \longrightarrow (M, d)$ converge simplesmente em X para a aplicação $f : X \longrightarrow M$, quando para cada $x \in X$ a sequência $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots)$ tem limite $f(x)$ em M . Isto é, para cada

$x \in X$ tem-se $\lim f_n(x) = f(x)$

Isso significa dizer, que dado arbitrariamente $x \in X$ e $\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ (dependendo de x e de ε) tal que $n > n_0 \implies d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Definição 2.19.

Diz-se, que a sequência de aplicações $f_n : X \longrightarrow (M, d)$ converge uniformemente em X para a aplicação $f : X \longrightarrow M$, quando para todo $\varepsilon > 0$ for possível obter um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \implies d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

para qualquer que seja $x \in M$.

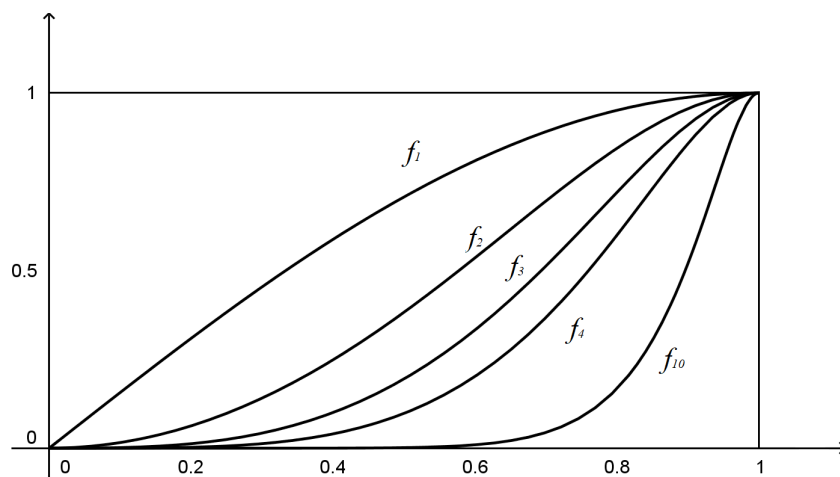
A diferença entre a convergência simples e a convergência uniforme, está no fato de esta ultima exige um n_0 natural escolhido a partir do $\varepsilon > 0$ dado, tal que é satisfatório para todo $x \in X$.

Exemplo 17.

Seja $f_n : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_n(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x^n\right)$ com $n \in \mathbb{N}$.

Observe graficamente que f_n converge simplesmente. Por exemplo, note que em $x = 0,8$ a medida que n aumenta a sequência de função se aproxima de zero, neste ponto. Já, se

Figura 2.4: Convergência Simples



Fonte: Produção do autor

consideramos $x = 1$ a mesma se aproxima de 1 a medida que n tende ao infinito. Mostrando

que f_n converge localmente.

Exemplo 18.

Considere a sequência de funções do exemplo (16). Esta sequência $f_n(x) = \frac{x^3}{n}$ converge uniformemente para a função 0.

De fato, observe que ela é limitada no ponto $(0, 2) \subset \mathbb{R}$. Então $\forall x \in X$ tem-se $|x| \leq 2$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ devemos encontrar um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n > n_0$ tem-se

$$n \geq n_0 \implies d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

$\forall x \in X$.

Definindo a métrica $d(f_n(x), f(x)) = |f_n(x) - f(x)|$. Note que,

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x^3}{n} - 0 \right| = \left| \frac{x^3}{n} \right| = \frac{|x^3|}{|n|} = \frac{|x^3|}{n}$$

Como $|x| \leq 2$ então $|x^3| \leq 8$ daí, segue que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{|x^3|}{n} \leq \frac{8}{n} < \varepsilon$$

Tomando, $n_0 > \frac{8}{\varepsilon}$, temos que

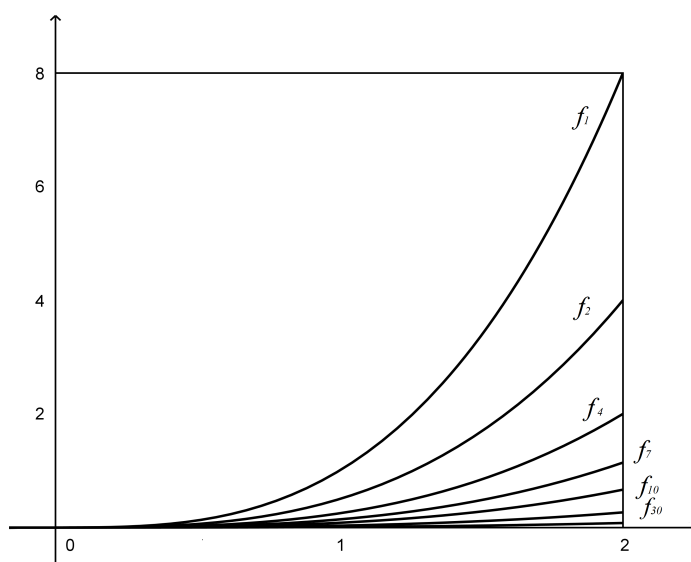
$$\frac{8}{n_0} < \varepsilon$$

Logo, para todo

$$n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

para todo $x \in X$, significando que a sequência de funções f_n converge uniformemente para a função 0. Como representado a seguir

Figura 2.5: Sequência de Funções



Fonte: Produção do autor

Capítulo 3

O Método da Poligonal e a Existência de Solução para a Equação Escalar

$$x' = f(t, x)$$

Neste paragrafo vamos mostrar que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \varphi'(t) &= f(t, \varphi(t)) \quad \text{com } t \in I \\ \varphi(t_0) &= x_0. \end{cases}$$

admite pelo menos uma solução, sendo $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e considerando Ω uma parte aberta de $\mathbb{R}^2 = \{(t, x)/t, x \in \mathbb{R}\}$. Os argumentos utilizados para mostrar essa existência se baseia em propriedades de compacidade, para tanto, iremos expressar no que se segue, para garantir tais propriedades.

3.1 Espaços Normados

Definição 3.1.

Seja E um espaço vetorial real. Uma norma em E é uma função $\|\cdot\| : E \longrightarrow [0, +\infty[$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0 \ \forall x \in E$ (**positividade**)
- (ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall x \in E$ (**dilatação**)

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E$ (**desigualdade triangular**)

O par $(E, \|\cdot\|)$ em que E é um espaço vetorial e $\|\cdot\|$ uma norma em E é chamado de espaço vetorial normado. Lembrando que uma sequência (x_n) em um espaço métrico M é dita de Cauchy se, para todo $\varepsilon > 0$, existir um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, se $n, m > n_0$. O mesmo vale para espaços normados, logo se toda sequência de Cauchy converge em um espaço métrico $(E, \|\cdot\|)$, dizemos que este espaço é *completo*.

Definição 3.2.

Um espaço normado completo é chamado de espaço de Banach.

Exemplo 19.

O espaço $\mathbb{R}$ dos números reais é um espaço de Banach, pois como vimos no exemplo 12, toda sequência de Cauchy de números reais converge.

Exemplo 20.

Seja $\mathbb{R}^n$ um espaço vetorial com a norma

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, o conjunto $(\mathbb{R}^n, \|x\|)$ é um espaço de Banach, o qual é chamado de espaço real euclidiano.

3.2 O Teorema de Arzelà - Ascoli

Considere $H \subset C(I)$ um espaço de Banach com aplicações contínuas $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, sendo I um intervalo compacto de $\mathbb{R}$ e a métrica de $C(I)$ induzida pela norma do supremo, isto é, $d(x, y) = \|x - y\| = \sup |x(t) - y(t)|$ onde $x, y \in C(I)$ e $I = \{t \in \mathbb{R} \mid a \leq t \leq b\}$.

Definição 3.3.

Diz-se que uma parte $H \subset C(I)$ é uniformemente limitada, quando existe uma constante $k > 0$ tal que $|x| < k$ para toda função $x \in H$.

Definição 3.4.

Uma parte $H \subset C(I)$ diz-se equicontinua em $C(I)$, quando para cada $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $\forall t_1, t_2 \in I$ com $|t_1 - t_2| < \delta$, tem-se $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon \forall x \in H$

A seguir, será demonstrado um lema que garante a existência de uma sequência convergente em um espaço métrico completo, o qual é necessário para mostrarmos o teorema de Arzelà - Ascoli.

Lema 3.1.

Seja H um subconjunto infinito uniformemente limitada do espaço de Banach $C(I)$. Então, para toda parte enumerável $E \subset I$, existe uma sequência $(x_n) \subset H$ tal que $(x_n(t))$ é convergente para todo $t \in E$.

Demonstração:

Considere o conjunto numérico $\{x(t_1)/x \in H\}$, isto é, o conjunto dos pontos das funções que tem abscissa t_1 , este conjunto é limitado pois, por hipótese H é limitado. Logo, pelo teorema 1.5 (de Bolzano-Weierstrass), existe uma sequência convergente nesse conjunto. Chame esta sequência de $(x_n^{(1)}(t_1))$. Agora considere a sequência de funções $(x_n^{(1)}) \subset H$ e a sequência numérica $\{x_n^{(1)}(t_2)\}$ com $t_2 \in E$. Aplicando novamente o teorema 1.5, existe uma subsequência convergente em $\{x_n^{(1)}(t_2)\}$. Chame esta sequência de $(x_n^{(2)}(t_2))$, agora considere a sequência de funções $(x_n^{(2)}) \subset H$ e a sequência numérica $\{x_n^{(2)}(t_3)\}$ com $t_3 \in E$. E aplicando o mesmo argumento para $(t_4, t_5, \dots, t_k, \dots)$ encontramos uma cadeia decrescente de funções

$$\{(x_n^{(1)}) \supseteq (x_n^{(2)}) \supseteq (x_n^{(3)}) \supseteq \dots \supseteq (x_n^{(k)}) \supseteq \dots\}$$

com $(x_n^{(k)}(t_k))$ convergente para $k = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$. Observe que para k tendendo ao infinito temos a sequência $(x_n^{(n)})$ que é chamada de sequência diagonal é convergente para todo ponto de $E = \{t_k\}$, pois $(x_n^{(n)}(t_k))$ é uma subsequência de alguma sequência convergente para todo K . O que demonstra o teorema.

Teorema 3.1.(Arzelà - Ascoli)

Seja $H \subset C(I)$ uma parte infinita com H uniformemente limitada e equicontínua, então toda sequência de H possui uma subsequência uniformemente convergente.

Em outras palavras o teorema diz que, toda parte $H \subset C(I)$ uniformemente limitada e equicontinua é sequencialmente compacta em $C(I)$. Não será feita neste trabalho a demos-

tração da recíproca do teorema acima.

Ideia da demonstração.

1. Vamos mostrar que existe uma sequência convergente em $H \subset C(I)$ para todo $t \in I$.
2. Mostraremos que existe uma subsequência convergente em H .
3. Vamos provar que esta subsequência converge uniformemente para alguma função em H .

Demonstração:

Seja $\{t_r\}$ o conjunto numérico dos racionais $\mathbb{Q} \cap I$ de $I = [a, b]$. Note que, $\{t_r\}$ é finito, logo é enumerável. Como H é infinito e uniformemente limitado, pelo *lema 1*, existe uma sequência de funções $(x_n) \in H$, tal que (x_n) é convergente para todo racional $t_r \in I$.

Para completar esta primeira parte da demonstração, devemos mostrar que (x_n) converge para todo $t \in I$.

De fato, seja t um irracional de I como os racionais são densos em $I \subset \mathbb{R}$ e H é equicontínuo, então para cada $\varepsilon > 0$ existe um racional $t_r \in I$ tal que

$$|x_n(t) - x_n(t_r)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $x_n \in H$. O que significa dizer que $(x_n(t_r))$ é convergente nos racionais de I .

Sendo $(x_n(t_r))$ convergente para o $\varepsilon > 0$ dado anteriormente, então existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m > n_0$ tem-se

$$|(x_n(t_r)) - (x_m(t_r))| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Daí, temos

$$\begin{aligned} |x_n(t) - x_m(t)| &= |x_n(t) + x_n(t_r) - x_n(t_r) + x_m(t_r) - x_m(t_r) - x_m(t)| \\ &\leq |x_n(t) - x_n(t_r)| + |x_n(t_r) - x_m(t_r)| + |x_m(t_r) - x_m(t)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Provando que a sequência (x_n) converge para todo $t \in I$.

Sendo (x_n) convergente em H para todo I , então pelo teorema 1.5 (de Bolzano - Weierstrass)

(x_n) admite uma subsequência (x_{n_k}) convergente em I . Ponha $(x_{n_k}) = y_k$, para facilitar a notação. Vamos provar que (y_k) converge uniformemente para alguma função em H .

Seja $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $\varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t)$. Vamos verificar que φ é continua.

De fato, para cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para todo $t \in I$ tem-se

$$|t_\alpha - t_\beta| < \delta \implies |y(t_\alpha) - y(t_\beta)| < \varepsilon$$

para toda função $y \in H$. Como estas desigualdades valem para toda função em H , então valem para todas y_k . Assim

$$|t_\alpha - t_\beta| < \delta \implies |y_k(t_\alpha) - y_k(t_\beta)| < \varepsilon$$

tomando o limite quando $k \rightarrow \infty$, temos

$$|\lim_{k \rightarrow \infty} (y_k(t_\alpha) - y_k(t_\beta))| = |\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t_\alpha) - \lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t_\beta)|$$

por definição, temos

$$|\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t_\alpha) - \lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t_\beta)| = |\varphi(t_\alpha) - \varphi(t_\beta)| < \varepsilon$$

de onde, segue que para cada $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que

$$|t_\alpha - t_\beta| < \delta \implies |\varphi(t_\alpha) - \varphi(t_\beta)| < \varepsilon$$

Logo, φ é continua em I .

Observe que, (y_k) é uma sequência de funções equicontínuas, pois $(y_k) \in H$. Considere $V(y, \delta)$ o conjunto de todos os $t \in I$ logo, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $t_i, t_j \in I$, tem-se

$$|t_i - t_j| < \delta \implies |y_k(t_i) - y_k(t_j)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (3.1)$$

e da continuidade de $\varphi \in I$, temos que para todo $t_i, t_j \in I$

$$|t_i - t_j| < \delta \implies |\varphi(t_i) - \varphi(t_j)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (3.2)$$

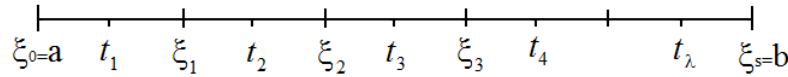
por definição I é compacto e limitado então, I pode ser coberto por um numero finito de subintervalos abertos assim, tomemos a decomposição de $I = [a, b]$ por meio dos pontos

$$\xi = a, \quad \xi_1 = a + \frac{(b-a)}{s}, \quad \xi_2 = a + 2\frac{(b-a)}{s}, \dots, \xi_p = a + p\frac{(b-a)}{s}, \dots, \xi_s = b.$$

Observe que, os pontos $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p, \dots, \xi_s)$ dividem o intervalo $[a, b]$ em um número finito de subintervalos de comprimento $\frac{b-a}{s}$.

Seja t_λ o centro de cada um desses intervalos e seja $V_\lambda \left(t_\lambda, \frac{b-a}{s} \right)$ uma vizinhança de t_λ em cada um dos intervalos.

Figura 3.1: intervalo I



Fonte: Produção do autor

Dessa forma, para $(t_1, t_2, t_3, \dots, t_\lambda)$ com $1 \leq \lambda \leq S$, tem-se

$$I = \bigcup_{i=1}^{\lambda} V_i \left(t_i, \frac{b-a}{s} \right)$$

assim para todo t_λ , temos

$$\varphi(t_\lambda) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k$$

dessa forma, $\exists N_\lambda \in \mathbb{N}$ tal que para $k > N_\lambda$ tem-se

$$|y_k(t_\lambda) - \varphi(t_\lambda)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (3.3)$$

logo, para cada $\lambda \in \{0, 1, 2, \dots, S\}$ e tomando $N = \max\{N_1, N_2, N_3, \dots, N_s\}$, tem-se

$$\begin{aligned} |y_k(t) - \varphi(t)| &= |y_k(t) - y_k(t_\lambda) + y_k(t_\lambda) - \varphi(t_\lambda) + \varphi(t_\lambda) - \varphi(t)| \\ &= |(y_k(t) - y_k(t_\lambda)) + (\varphi(t_\lambda) - \varphi(t)) + (y_k(t_\lambda) - \varphi(t_\lambda))| \end{aligned}$$

pela desigualdade triangular, temos

$$|y_k(t) - \varphi(t)| \leq |y_k(t) - y_k(t_\lambda)| + |\varphi(t_\lambda) - \varphi(t)| + |y_k(t_\lambda) - \varphi(t_\lambda)|$$

De (3.1), (3.2) e (3.3), segue que

$$|y_k(t) - \varphi(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

para todo $k > N > N_\lambda$ e todo $t \in I$. Logo, y_k converge uniformemente.

Portanto, a subsequência $y_k = x_{n_k}$ converge uniformemente para a função φ em H .

3.3 Teorema Principal - Método da Poligonal

Teorema 3.2.(Cauchy-Peano).

Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sendo Ω um aberto do $\mathbb{R}^2$ for contínua, então por cada ponto (t_0, x_0) interior a Ω passa pelo menos uma solução contínua $x' = f(t, x)$.

A prova da existência de pelo menos uma solução do problema de Cauchy, sendo f apenas contínua prossegue em duas etapas: Primeira é demonstrada por construção que existe uma solução aproximada em Ω no intervalo de raio r , então prova-se que essa solução tende para uma solução do problema proposto.

Demonstração:

Seja V uma vizinhança de (t_0, x_0) contida em Ω , onde f seja limitada e $M = \sup_V |f(t, x)|$.

Considere o retângulo $R = \{(t, x) \in V\} / |t - t_0| < a \text{ } |x - x_0| < b$. Onde,
 $r = \min \left(a, \frac{b}{M} \right)$.

A prova do teorema será construída para o intervalo $[t_0, t_0 + r]$, sendo análoga para o intervalo $[t_0 - r, t_0]$. A solução aproximada consistirá em um caminho que chamaremos posteriormente de poligonal a partir de (t_0, x_0) à um certo ponto de a direita de t_0 no intervalo $[t_0, t_0 + r]$.

Para tanto, considere uma decomposição do intervalo em n partes iguais.

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t_0 + r$$

a direção propriamente dita de uma solução $x = x(t)$ de $x' = f(t, x)$ num ponto qualquer (α, β) de R é dada por $f(\alpha, \beta)$.

Neste sentido, a reta que passa por (t_0, x_0) possuindo a direção de uma solução neste ponto é dada por

$$x - x_0 = f(t_0, x_0)(t - t_0)$$

considere $x = x(t)$ dada pela equação acima como solução aproximada de $x' = f(t, x)$ no intervalo $[t_0, t_1]$. Fazendo $x_1 = x(t_1)$ dada pela equação da reta, conclui-se que $(t_1, x_1) \in R$. Isto, segue imediatamente da definição do intervalo $[t_0, t_0 + r]$ e de $M = \sup_V |f(t, x)|$.

Desta forma, a reta que passa por (t_1, x_1) , em direção a uma solução neste ponto é dada por

$$x - x_1 = f(t_1, x_1)(t - t_1)$$

tome $x = x(t)$ dada pela equação acima como solução aproximada de $x' = f(t, x)$ no intervalo $[t_1, t_2]$. Fazendo $x_2 = x(t_2)$ dada pela mesma equação, conclui-se que o ponto $(t_2, x_2) \in R$.

Desta forma, repetindo o mesmo argumento sucessivas vezes, em um número finito de passos encontra-se um conjunto de pontos

$$(t_0, x_0), (t_1, x_1), (t_2, x_2), \dots, (t_n, x_n)$$

pertencentes ao intervalo R e suas respectivas soluções aproximadas dadas por

$$x - x_{i-1} = f(t_{i-1}, x_{i-1})(t - t_{i-1})$$

para $t \in [t_{i-1}, x_{i-1}]$ com $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Representemos por P_i , com $i = 1, 2, 3, \dots, n$ as funções $P_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$P_i = x_{i-1} + f(t_{i-1}, x_{i-1})(t - t_i)$$

e por $\chi[t_{i-1}, x_{i-1}]$ a função característica do intervalo $[t_{i-1}, x_{i-1}]$. Note que, P_i é a função de cada seguimento do intervalo $[t_{i-1}, x_{i-1}]$. Dessa forma, obtém-se a aplicação

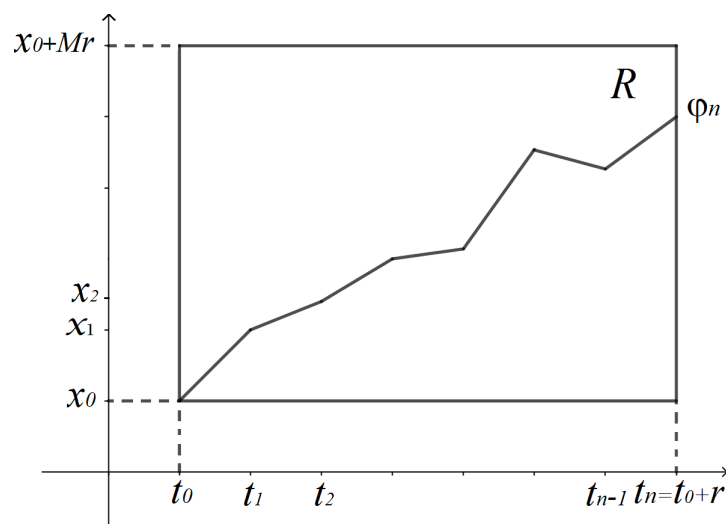
$\varphi_n : [t_0, t_0 + r] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi_n(t) = (\chi[t_0, t_1]P_1)(t) + (\chi[t_1, t_2]P_2)(t) + \dots + (\chi[t_{n-1}, t_n]P_n)(t)$$

tal que tem como gráfico em R uma poligonal com vértices nos pontos $(t_0, x_0), (t_1, x_1), (t_2, x_2), \dots, (t_n, x_n)$

Como no grafico abaixo;

Figura 3.2: poligonal φ_n



Fonte: Produção do autor

Dessa forma, tem-se uma sequência $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $n = 1, 2, 3, \dots, n$ de poligonais contidas no retângulo R .

É simples verificar que φ_n é derivável para cada $n \in \mathbb{N}$, exceto nos pontos $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ pois, neste existem as derivadas laterais. Da análise real sabe-se que toda função derivável é contínua. Logo, tem-se que φ'_n é contínua em $(t_0, t_0 + r)$ exceto nos pontos $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ nos quais, toda via, possuem limites laterais. [ver apêndice A].

Como toda função derivável em um intervalo fechado é integrável, resulta daí, que φ'_n é integrável em $[t_0, t_0 + r]$ assim

$$\int_{t_0}^t \varphi'_n(\xi) d\xi = \varphi_n(t) - \varphi_n(t_0)$$

como em $\varphi_n(t_0) = x_0$ segue que

$$\int_{t_0}^t \varphi'_n(\xi) d\xi = \varphi_n(t) - x_0$$

dai

$$\varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \varphi'_n(\xi) d\xi.$$

Vejamos que $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaz as condições do teorema de Arzelã Ascoli; para tal sejam dois pontos t_0 e t qualquer no intervalo $[t_0, t_0 + r]$ fazendo

$$|\varphi_n(t) - \varphi_n(t_0)| = \left| \int_{t_0}^t \varphi'_n(\xi) d\xi \right| \leq \int_{t_0}^t |\varphi'_n(\xi)| d\xi$$

como $M = \sup |f(t, x)|$ e $f(t, x) \in R$ e $\varphi_n \in R$ segue que

$$|\varphi_n(t) - \varphi_n(t_0)| \leq \int_{t_0}^t |\varphi'_n(\xi)| d\xi \leq M|t - t_0| \leq Mr$$

para todo $t \in [t_0, t_0 + r]$. Logo, φ_n é uniformemente limitada.

Agora considere t_α, t_β dois pontos qualquer de $[t_0, t_0 + r]$, tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, tem-se que $|t_\alpha - t_\beta| < \frac{\varepsilon}{M}$, assim, temos que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|\varphi_n(t_\alpha) - \varphi_n(t_\beta)| = \left| \int_{t_\alpha}^{t_\beta} \varphi'_n(\xi) d\xi \right| \leq \int_{t_\alpha}^{t_\beta} |\varphi'_n(\xi)| d\xi \leq M|t_\alpha - t_\beta| < M \frac{\varepsilon}{M} < \varepsilon$$

logo, $\{\varphi_n\}$ é uma família de funções equicontínuas. Aplicando o teorema de Arzelã - Ascoli, resulta que existe uma subsequência (φ_{n_k}) de (φ_n) convergindo uniformemente em $[t_0, t_0 + r]$ para uma função φ contínua.

Vamos mostrar que φ assim definida é uma solução de $x' = f(t, x)$ passando por (t_0, x_0) . De fato, consideremos as aplicações $\psi_{n_k} : [t_0, t_0 + r] \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por

$$\psi_{n_k} = x_0 + \int_{t_0}^t f(\xi, \varphi_{n_k}(\xi)) d\xi \quad (3.4)$$

Vamos mostrar que ψ_{n_k} converge uniformemente para φ . Para isso, é suficiente demonstrar que $(\psi_{n_k} - \varphi_{n_k}) \rightarrow 0$ uniformemente em $[t_0, t_0 + r]$ pois, $\varphi_{n_k} \rightarrow \varphi$ uniformemente.

Para mostrar que $(\psi_{n_k} - \varphi_{n_k}) \rightarrow 0$ uniformemente devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$,

existe $\nu > 0$ tal que

$$n_k > \nu \implies |(\psi_{n_k}(t) - \varphi_{n_k}(t)) - 0| < \varepsilon \iff n_k > \nu \implies |(\psi_{n_k}(t) - \varphi_{n_k}(t))| < \varepsilon$$

para todo $t \in I$.

Sendo $\varphi_{n_k}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \varphi'_{n_k}(\xi) d\xi$, pois φ_{n_k} é subsequência de φ_n e de (3.4) temos

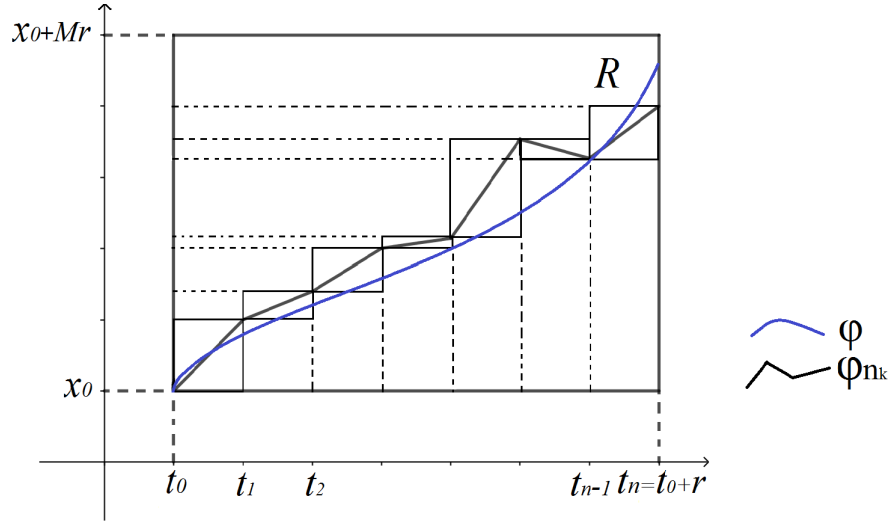
$$\begin{aligned} |\psi_{n_k}(t) - \varphi_{n_k}(t)| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^t f(\xi, \varphi_{n_k}(\xi)) d\xi - \left(x_0 + \int_{t_0}^t \varphi'_{n_k}(\xi) d\xi \right) \right| \\ &= \left| x_0 + \int_{t_0}^t f(\xi, \varphi_{n_k}(\xi)) d\xi - x_0 - \int_{t_0}^t \varphi'_{n_k}(\xi) d\xi \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^t f(\xi, \varphi_{n_k}(\xi)) d\xi - \int_{t_0}^t \varphi'_{n_k}(\xi) d\xi \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^t [f(\xi, \varphi_{n_k}(\xi)) - \varphi'_{n_k}(\xi)] d\xi \right| \end{aligned}$$

$$|\psi_{n_k}(t) - \varphi_{n_k}(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(\xi, \varphi_{n_k}(\xi)) - \varphi'_{n_k}(\xi)| d\xi \quad (3.5)$$

Por hipótese f uniformemente contínua em R , logo para cada $\varepsilon_0 > 0$ existe um $\sigma > 0$ tal que a oscilação de f é menor do que ε , nos sobretângulos de R de diagonais menores do que σ .

Devemos exibir um $\nu(\sigma)$ tal que $d_k < \sigma$, isto é, as diagonais de φ_{n_k} sejam menores do que σ . Para isso, considere os retângulos com os lados paralelos aos eixos e para diagonais os lados do gráfico de φ_{n_k} . Imagine φ_{n_k} coberta por tais retângulos. Veja o gráfico abaixo

Figura 3.3: poligonal φ_n



Fonte: Produção do autor

Observe que, a projeção de φ_{n_k} sobre o eixo dos t é $\frac{r}{n_k}$ e sobre o eixo dos x é $\frac{Mr}{n_k}$.
 Como queremos que para todo $n_k > \nu$ ocorra $d_k < \sigma$ em cada retângulo, então

$$d_k < \sigma$$

elevando ao quadrado ambos os membros

$$d_k^2 < \sigma^2$$

multiplicando por 2 ambos os membros, temos

$$2d_k^2 < 2\sigma^2$$

assim

$$2d_k^2 < \sigma^2 + \sigma^2$$

dai,

$$d_k^2 < \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2}$$

$$d_k^2 < \left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}} \right)^2 \quad (3.6)$$

Sendo $\frac{r}{n_k}$ a projeção de φ_{n_k} sobre o eixo t e $\frac{Mr}{n_k}$ a projeção da mesma sobre o eixo x para cada retângulo, então teremos que

$$d_k^2 = \left(\frac{Mr}{n_k} \right)^2 + \left(\frac{r}{n_k} \right)^2 \quad (3.7)$$

comparando as equações (3.6) e (3.7), temos que

$$\frac{Mr}{n_k} < \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \implies \frac{n_k}{Mr} > \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \implies n_k > \frac{Mr\sqrt{2}}{\sigma}$$

e

$$\frac{r}{n_k} < \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \implies \frac{n_k}{r} > \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \implies n_k > \frac{r\sqrt{2}}{\sigma}$$

logo, tomando

$$\nu = \max \left(\frac{r\sqrt{2}}{\sigma}, \frac{Mr\sqrt{2}}{\sigma} \right) \text{ temos que}$$

$$n_k > \nu(\sigma) \implies |f(\xi, \varphi_{n_k}(\xi) - \varphi'_{n_k}(\xi)| < \varepsilon_0$$

De (3.5) segue que

$$|\psi_{n_k}(t) - \varphi_{n_k}(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(\xi, \varphi_{n_k}(\xi) - \varphi'_{n_k}(\xi)| d\xi < \int_{t_0}^t \varepsilon_0 d\xi = \varepsilon_0(t - t_0) < \varepsilon_0 r$$

tomando $\varepsilon_0 r = \varepsilon$ temos que

$$|\psi_{n_k}(t) - \varphi_{n_k}(t)| < \varepsilon$$

para todo $t \in [t_0, t_0 + r]$. Portanto, isto implica na convergência uniforme de ψ_{n_k} para φ em $[t_0, t_0 + r]$.

Para completar a demonstração, devemos provar que

$$\int_{t_0}^t f(\xi, \varphi_{n_k}(\xi)) d\xi \longrightarrow \int_{t_0}^t f(\xi, \varphi(\xi)) d\xi$$

uniformemente em $[t_0, t_0 + r]$.

Como $\varphi_{n_k} \rightarrow \varphi$ uniformemente e ao σ determinado em função do ε_0 , especificamente e da continuidade uniforme de f , associemos $\nu = \nu(\sigma) > 0$ tal que

$$|\varphi_{n_k}(\xi) - \varphi(\xi)| < \sigma$$

para $n_k > \nu$ e todo $\xi \in [t_0, t_0 + r]$. Daí resulta que os pontos $(\xi, \varphi_{n_k}(\xi))$ e $(\xi, \varphi(\xi))$ pertencem a uma mesma bola de raio σ . Logo, devido a continuidade uniforme da f , obtém-se

$$|f(\xi, \varphi_{n_k}(\xi)) - f(\xi, \varphi(\xi))| < \varepsilon_0$$

passando a integral em ambos os membros, temos

$$\int_{t_0}^t |f(\xi, \varphi_{n_k}(\xi)) - f(\xi, \varphi(\xi))| d\xi < \int_{t_0}^t \varepsilon_0 d\xi$$

pela desigualdade integral, temos

$$\left| \int_{t_0}^t [f(\xi, \varphi_{n_k}(\xi)) - f(\xi, \varphi(\xi))] d\xi \right| < \varepsilon(t - t_0)$$

$$\left| \int_{t_0}^t f(\xi, \varphi_{n_k}(\xi)) d\xi - \int_{t_0}^t f(\xi, \varphi(\xi)) d\xi \right| < \varepsilon_0 r = \varepsilon$$

para todo $\xi \in [t_0, t_0 + r]$ e cada $\varepsilon > 0$. Logo,

$$\int_{t_0}^t f(\xi, \varphi_{n_k}(\xi)) d\xi \rightarrow \int_{t_0}^t f(\xi, \varphi(\xi)) d\xi$$

converge uniformemente em $[t_0, t_0 + r]$.

Assim, sendo $\psi_{n_k} \rightarrow \varphi$ e $\int_{t_0}^t f(\xi, \varphi_{n_k}(\xi)) d\xi \rightarrow \int_{t_0}^t f(\xi, \varphi(\xi)) d\xi$ uniformemente, e fazendo $n_k \rightarrow \infty$ na equação (3.4)

$$\psi_{n_k}(\xi) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\xi, \varphi_{n_k}(\xi)) d\xi$$

obtém-se

$$\varphi(\xi) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\xi, \varphi(\xi)) d\xi$$

Provando assim que φ é solução contínua de $x' = f(t, x)$ passando por (t_0, x_0) .

Observação: O teorema de Cauchy - Peano não garante a unicidade, pelo fato de a função f não ser Lipschitziana.

Para comprovar este fato, considere a equação diferencial ordinária $f(t, x) = x^{\frac{2}{3}}$ tal que

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(0) &= 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Note que, esta equação não é Lipschitziana no ponto $(0, 0)$.

De fato, pois se fosse Lipschitz existiria um $k > 0$ tal que

$$|f(x) - f(0)| \leq k|x - 0|$$

isto é,

$$\begin{aligned} \left| x^{\frac{2}{3}} - 0 \right| &\leq k|x - 0| \\ \left| x^{\frac{2}{3}} \right| &\leq k|x| \\ \frac{\left| x^{\frac{2}{3}} \right|}{|x|} &\leq k \\ \left| x^{-\frac{1}{3}} \right| &\leq k \\ \frac{1}{\left| x^{\frac{1}{3}} \right|} &\leq k \end{aligned} \quad (3.8)$$

Quando $x \rightarrow 0$ a equação (3.9) tende ao infinito, isto é, a equação (3.9) diverge quando x se aproxima de zero. Logo, não existe $k > 0$ tal que ocorra a desigualdade em (3.9), isto implicando que a condição de Lipschitz não é satisfeita e portanto, f não é Lipschitziana.

Pelo método da separação de variáveis, temos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x^{\frac{2}{3}} \\ \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}} &= dt \end{aligned}$$

Aplicando a integral em ambos os membros

$$\int x^{-\frac{2}{3}} dx = \int dt$$

temos

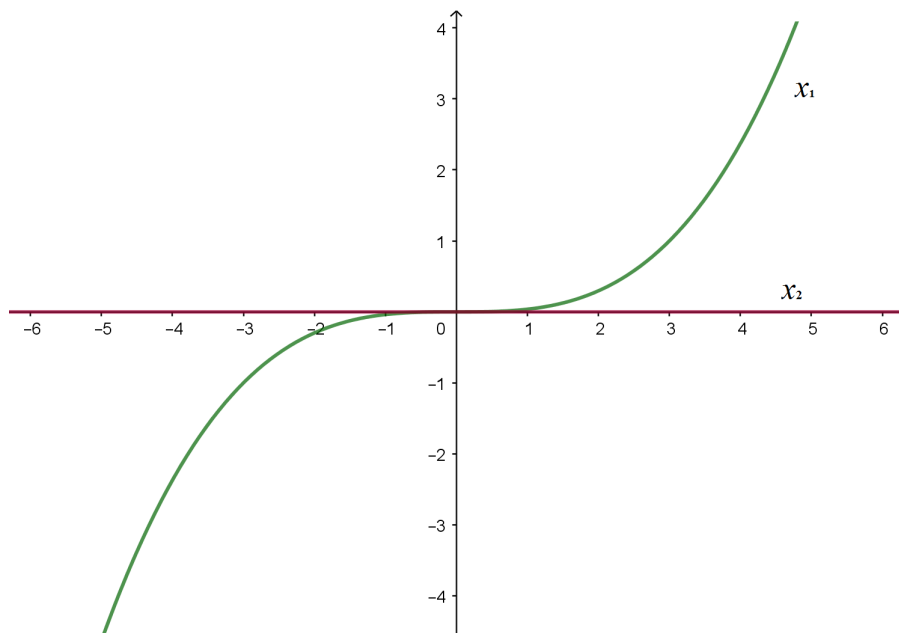
$$\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} = t + c$$

assim temos que

$$x(t) = \left(\frac{t + c}{3} \right)^3 \tag{3.10}$$

A equação (3.10) é a solução geral de (3.8), tomando em particular $c = 0$ temos $x_1(t) = \left(\frac{t}{3}\right)^3$ é uma solução de (3.8). Entretanto, ela não é única, pois $x_2(t) = 0$ também é solução. Observe o gráfico.

Figura 3.4: soluções da equação do problema (3.8).



Fonte: Produção do autor

Portanto, conclui-se que a solução do problema não é única.

Capítulo 4

APLICAÇÃO À ECOLOGIA

Neste capítulo, será modelado o Oxigênio Dissolvido em águas superficiais onde existe uma fonte poluidora e estabeleceremos o deficit de oxigênio em termos da Demanda Bioquímica do oxigênio onde será aplicado o teorema de Cauchy - Peano para encontrar o modelo DBO-OD.

4.1 Modelo DBO - OD

Sabemos que em um corpo d'água o oxigênio é produzido e consumido ao mesmo tempo de forma natural. A produção do mesmo é feita através da fotossíntese algas e plantas aquáticas além de ser trocado com o oxigênio atmosférico por um processo chamado de aeração. Já, o seu consumo dependerá da respiração de bactérias e outros organismos presentes durante a decomposição de substâncias orgânicas (biodegradáveis).

Afim de, estudar esse processo Streeter e Phelps em 1925 desenvolveram um conjunto de equações a qual descreve o consumo e produção de oxigênio em um meio aquático. Abaixo será citado três conceitos básicos de ecologia, para desenvolvermos essa aplicação:

- **Demanda Bioquímica de Oxigênio (DBO):** É o parâmetro que mede a quantidade de oxigênio dissolvido na água, necessária para a decomposição da matéria orgânica.
- **Oxigênio dissolvido (OD):** É a quantidade de oxigênio que está dissolúvel na água.
- **Deficit de Oxigênio Dissolvido (D_{OD}):** É a diminuição dos níveis de oxigênio nas águas à um nível crítico, o qual não é possível a sobrevivência de seres aeróbicos, isto

é, seres que necessitam de oxigênio para respirar.

Uma vez definidas estas variáveis de controle, é possível entender os principais processos que permeiam um sistema hídrico (qualidade da água em rios lagos que recebem uma fonte de efluentes), bem como fazer a análise dos parâmetros físicos, químicos e biológicos envolvidos nas equações.

4.1.1 O Modelo DBO

A hipótese básica do modelo Streeter - Phelps é que a taxa de decomposição (oxigenação) da matéria orgânica no meio aquático é proporcional à concentração da matéria orgânica presente em um dado instante de tempo, que é dada por:

$$\frac{dC_{DBO}}{dt} = -k_1 C_{DBO} \quad (4.1)$$

onde,

dC_{DBO} : Variação da concentração de DBO.

dt : Variação do tempo.

K_1 : Constante de desoxigenação.

C_{DBO} : Concentração de DBO

t : Tempo.

Assim, quanto maior a concentração de DBO, mais rápido se processará a desoxigenação.

4.1.2 Solução da equação 4.1

Da equação 4.1 temos

$$\frac{dC_{DBO}}{dt} = -k_1 C_{DBO}$$

daí,

$$\frac{dC_{DBO}}{C_{DBO}} = -k_1 dt$$

integrando em ambos os membros

$$\int \frac{dC_{DBO}}{C_{DBO}} = \int -k_1 dt$$

$$\int \frac{1}{C_{DBO}} dC_{DBO} = \int -k_1 dt$$

$$\ln(C_{DBO}) = -k_1 t + w$$

w é a constante de integração aplicando a exponencial em ambos os membros

$$e^{\ln(C_{DBO})} = e^{(-k_1 t + w)}$$

daí, segue que

$$C_{DBO} = e^{(-k_1 t + w)}$$

$$C_{DBO} = e^{-k_1 t} e^w$$

$$C_{DBO} = e^{-k_1 t} w_1 \quad (4.2)$$

com $w_1 = e^w$.

Para o instante $t = 0$ temos que $C_{DBO} = C_{DBO_0}$, assim

$$C_{DBO_0} = e^{-k_1 \times 0} w_1$$

$$C_{DBO_0} = w_1 \quad (4.3)$$

substituindo (4.3) em (4.2), segue que

$$C_{DBO} = C_{DBO_0} e^{-k_1 t} \quad (4.4)$$

4.1.3 Modelo do Deficit de Oxigenio Dissolvido D_{OD}

Podemos definir a taxa de variação temporal do deficit de oxigênio dissolvido pela seguinte equação,

$$\frac{dD_{OD}}{dt} = k_1 C_{DBO} - k_2 D_{OD} \quad (4.5)$$

onde

D_{OD} : Deficit de oxigênio dissolvido.

k_2 : Coeficiente de reaeração.

Também podemos definir a deficit de oxigênio dissolvido, pela diferença entre o oxigênio dissolvido saturado (que não depende do tempo) e a concentração de oxigênio dissolvido.

$$D_{OD}(t) = C_{ODS} - C_{OD}(t) \quad (4.6)$$

onde

C_{ODS} : Concentração de oxigênio saturado.

C_{OD} : Concentração de oxigênio dissolvido.

4.1.4 Modelo do Oxigênio Dissolvido OD

A velocidade com que o oxigênio dissolvido é consumido está diretamente ligada à velocidade de desaparecimento de matéria orgânica e isto, é modelada pela seguinte equação

$$\frac{d}{dt}C_{OD} = -k_1C_{DBO} + k_2D_{OD} \quad (4.7)$$

onde,

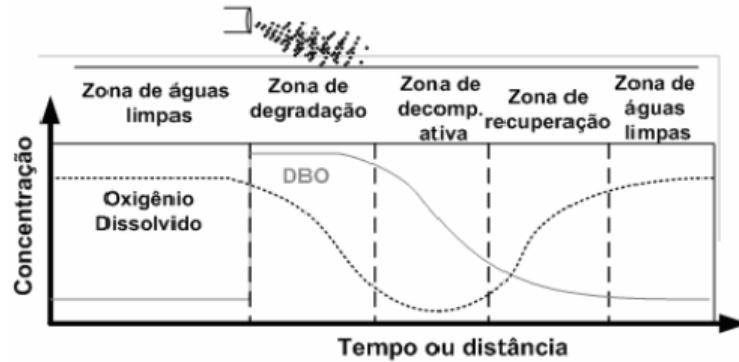
C_{OD} : Concentração do oxigênio dissolvido

Portanto, da equação (4.5) e da equação (4.4) temos

$$\frac{dD_{OD}}{dt} = k_1C_{DBO_0}e^{-k_1t} - k_2D_{OD} \quad (4.8)$$

Em um sistema natural temos os seguintes níveis de oxigênio dissolvido e para a demanda bioquímica de oxigênio para uma fonte poluidora em um rio:

Figura 4.1: Principais zonas de autodepuração



Fonte:(adaptado de Braga e col., 2002).

4.2 Existência de Solução do Sistema DBO-OD

Considerando as equações (4.6) e (4.8), formularemos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dD_{OD}}{dt} = k_1 C_{DBO_0} e^{-k_1 t} - k_2 D_{OD} \\ D_{OD}(t_0) = C_{ODS} - C_{OD}(t_0) \end{cases} \quad (4.9)$$

onde o objetivo aqui é determinar se este problema admite solução e se sim expressar uma de maneira analítica.

Veja que

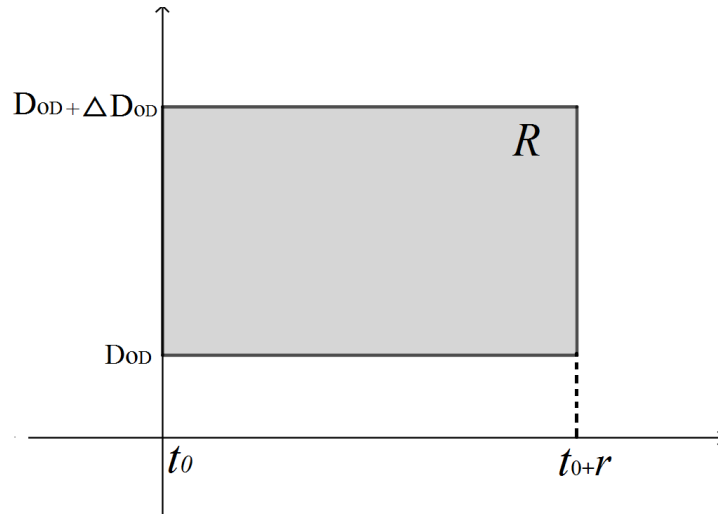
$$f(t, x(t)) = f(t, D_{OD}(t)) = k_1 C_{DBO_0} e^{-k_1 t} - k_2 D_{OD}$$

note que $f(t, D_{OD}(t))$ é uma função contínua que depende de D_{OD} e do tempo. Graficamente temos:

onde $R : \{t_0 \leq t \leq t_0 + r; D_{OD} \leq x \leq D_{OD} + \Delta D_{OD}\}$ e $I = [t_0, t_r]$

Assim, na região R esta definida a função f e possui um máximo $M = (D_{OD} + \Delta D_{OD})$ pertencente a R .

Sobe estas condições, as hipóteses do teorema de Cauchy - Peano se cumprem. Logo, pelo teorema (3.2), existe solução do problema de valor inicial no intervalo I com $M = \sup |f(D_{OD}, t)|$.

Figura 4.2: função f 

Fonte: Produção do autor

4.3 Solução Analítica do Problema

Para demonstrar essa solução, iremos fazer de maneira construtiva a partir das hipótese do mesmo.

Da equação (4.9) temos

$$\frac{dD_{OD}}{dt} = k_1 C_{DBO_0} e^{-k_1 t} - k_2 D_{OD}$$

multiplicando por $e^{k_2 t}$ em ambos os membros, temos

$$\frac{dD_{OD}}{dt} e^{k_2 t} = e^{k_2 t} k_1 C_{DBO_0} e^{-k_1 t} - e^{k_2 t} k_2 D_{OD}$$

dai

$$\frac{dD_{OD}}{dt} e^{k_2 t} + e^{k_2 t} k_2 D_{OD} = e^{k_2 t} k_1 C_{DBO_0} e^{-k_1 t}$$

$$\frac{dD_{OD}}{dt} e^{k_2 t} + D_{OD} k_2 e^{k_2 t} = k_1 C_{DBO_0} e^{k_2 t - k_1 t}$$

como

$$\frac{d}{dt}(e^{k_2 t}) = k_2 e^{k_2 t}$$

então, temos

$$\frac{d(D_{OD})}{dt}e^{k_2t} + D_{OD}\frac{d(e^{k_2t})}{dt} = k_1C_{DBO_0}e^{t(k_2-k_1)}$$

Observe que, o lado esquerdo da equação é o resultado da derivada do produto entre D_{OD} e e^{k_2t} , logo

$$\frac{d}{dt}(D_{OD}e^{k_2t}) = k_1C_{DBO_0}e^{t(k_2-k_1)}$$

$$d(D_{OD}e^{k_2t}) = k_1C_{DBO_0}e^{t(k_2-k_1)}dt$$

integrando em ambos os membros

$$\int d(D_{OD}e^{k_2t}) = \int k_1C_{DBO_0}e^{t(k_2-k_1)}dt$$

$$\int D_{OD}e^{k_2t} = k_1C_{DBO_0} \int e^{t(k_2-k_1)}dt$$

$$D_{OD}e^{k_2t} = k_1C_{DBO_0} \left(\frac{e^{t(k_2-k_1)}}{k_2 - k_1} \right) + C_1 \quad (4.10)$$

agora aplicando a condição inicial para $t = 0$, temos

$$D_{OD} = D_{OD_0} = C_{ODS} - C_{OD_0}$$

dai, temos

$$D_{OD_0}e^{k_2 \cdot 0} = k_1C_{DBO_0} \frac{e^{0(k_2-k_1)}}{k_2 - k_1} + C_1$$

$$D_{OD_0} = \frac{k_1C_{DBO_0}}{k_2 - k_1} + C_1$$

$$C_1 = D_{OD_0} - \frac{k_1C_{DBO_0}}{k_2 - k_1} \quad (4.11)$$

substituindo (4.11) em (4.10), temos

$$D_{OD}e^{k_2t} = k_1C_{DBO_0} \left(\frac{e^{t(k_2-k_1)}}{k_2-k_1} \right) + D_{OD_0} - \frac{k_1C_{DBO_0}}{k_2-k_1}$$

dai

$$D_{OD}e^{k_2t} = \frac{k_1C_{DBO_0}}{k_2-k_1}(e^{t(k_2-k_1)} - 1) + D_{OD_0}$$

$$D_{OD} = \frac{k_1C_{DBO_0}}{k_2-k_1} \left(\frac{e^{t(k_2-k_1)} - 1}{e^{k_2t}} \right) + \frac{D_{OD_0}}{e^{k_2t}}$$

$$D_{OD} = \frac{k_1C_{DBO_0}}{k_2-k_1} [(e^{t(k_2-k_1)} - 1)e^{-k_2t}] + D_{OD_0}e^{-k_2t}$$

$$D_{OD} = \frac{k_1C_{DBO_0}}{k_2-k_1} (e^{-k_1t} - e^{-k_2t}) + D_{OD_0}e^{-k_2t} \quad (4.12)$$

Esta equação é a solução do sistema (4.9). Para deixar o oxigênio dissolvido em termos da demanda bioquímica do oxigênio basta substituir a equação (4.12) na equação (4.6) assim temos

$$C_{OD} = C_{ODS} - \left[\frac{k_1C_{DBO_0}}{k_2-k_1} (e^{-k_1t} - e^{-k_2t}) + D_{OD_0}e^{-k_2t} \right]$$

sendo

$$D_{OD_0} = C_{ODS} - C_{OD_0}$$

segue que

$$C_{OD} = C_{ODS} - \left[\frac{k_1C_{DBO_0}}{k_2-k_1} (e^{-k_1t} - e^{-k_2t}) + (C_{ODS} - C_{OD_0})e^{-k_2t} \right] \quad (4.13)$$

A equações (4.12) calcula o deficit de oxigênio dissolvido enquanto que, a equação (4.13) calcula o nível de oxigênio dissolvido na água em termos da demanda bioquímica de oxigênio a qual é chamada de modelo DBO-OD.

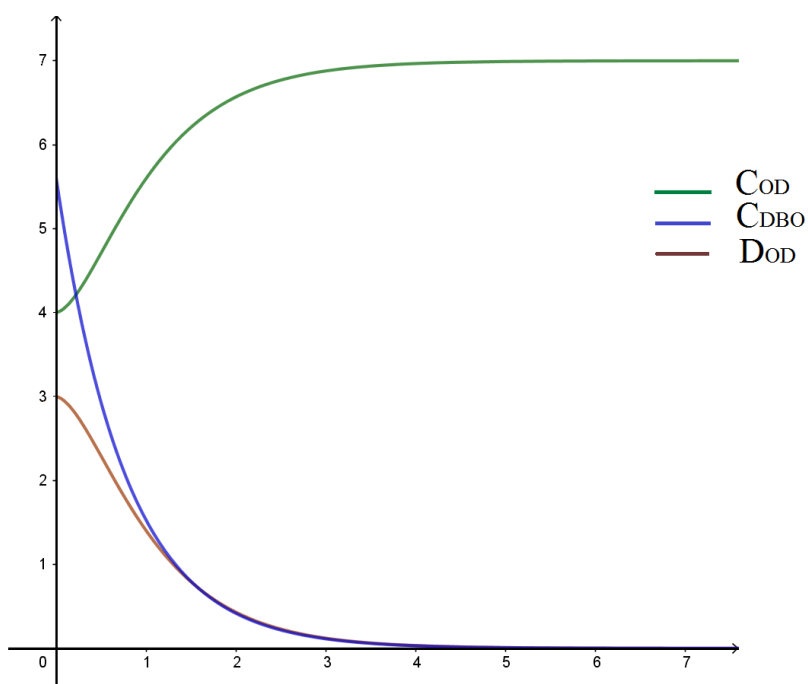
Para ratificar a veracidade da solução do sistema, faremos ua análise gráfica para os seguintes valores sintéticos:

$k_1 = 1,3 \text{ mg/l}$, $k_2 = 2,5 \text{ mg/l}$, $C_{ODS} = 7 \text{ mg/l}$, $C_{DBO_0} = 5,6 \text{ mg/l}$, $C_{OD_0} = 4 \text{ mg/l}$ e $D_{OD_0} = (7 - 4) = 3 \text{ mg/l}$

Tempo (Dias)	$D_{OD} \text{ (mg)/l}$	$C_{OD} \text{ (mg)/l}$	$C_{DBO} \text{ (mg/l)}$
0	3	4	5,6
1	1,4	5,6	1,53
2	0,43	6,57	0,42
3	0,12	6,88	0,11
4	0,03	6,97	0,03
5	0,01	6,99	0,01
6	0,0	7	0,0
7	0,0	7	0,0

Graficamente, temos

Figura 4.3: Níveis de DBO, OD e DOD f



Fonte: Produção do autor

Observe que, no tempo inicial a demanda bioquímica de oxigênio está alta, significando que há efluentes biodegradáveis e o meio necessita de oxigênio dissolvido para garantir a oxigenação desse efluente. É possível perceber essa falta de oxigênio dissolvido, uma vez que, o nível do déficit do mesmo é alta. Note que, no ponto de intercessão entre a DBO e OD é o momento em que o meio começa o seu processo de recuperação do nível de oxigênio dissolvido, por meio da troca com a atmosfera e da fotossíntese. Para os valores sintéticos estabelecidos o meio estabiliza os níveis de (C_{OD}) , (C_{DBO}) e (D_{OD}) no sexto dia este é o momento em que o meio recupera totalmente o equilíbrio. Portanto, as equações (4.12) e (4.13) estão de acordo com os conceitos estabelecidos.

Considerações Finais

Neste trabalho de conclusão de curso, tivemos a possibilidade de estudar acerca da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais no aspecto da existência de solução do problema de valor inicial, na qual mostramos a existência de solução da equação escalar $x' = f(t, x)$ com dados iniciais, sendo esta equação somente contínua.

Estudar essa teoria foi grande desafio, uma vez que, não tivemos a possibilidade de estudá-la na graduação. E por esse motivo, encontrei várias dificuldades durante a elaboração deste trabalho, principalmente nas áreas do Cálculo e Análise. Tal dificuldade não era por defasagem de conteúdo, e sim pela falta de emadurecimento do mesmo.

Entretanto aventurar-se em uma ideia nunca antes trabalhada, foi prazeroso, pois na tentativa de superar as dificuldades encontramos o perfil pesquisador matemático em sua essência, e por este motivo fez me adquirir experiência.

Em suma, espero poder contribuir com este trabalho a outras pessoas que tenham interesse em estudar esta teoria, e acentuar-se a demonstração aqui apresentada via método da poligonal para mostrar a existência da mesma.

Apêndice A

Função φ_n é derivável

Sendo $\varphi_n(t) = (\chi[t_0, t_1]P_1)(t) + (\chi[t_1, t_2]P_2)(t) + \dots + (\chi[t_{n-1}, t_n]P_n)(t)$ vamos fazer a verificação da derivada para $n = 1$, no intervalo $]t_0, t_1[$ aberto. Dessa forma, temos

$$\varphi_1(t) = (\chi[t_0, t_1]P_1)(t)$$

Como $(\chi[t_0, t_1]P_1)$ é a função característica do intervalo $[t_0, t_1]$ tem-se que $\varphi_1(t) = P_1(t)$ e como $P_1 = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0)$ segue que

$$\varphi_1(t) = \varphi_1(t_0) + f(t_0, x_0)(t - t_0)$$

Lembrando que $f(t_0, x_0)$ é o coeficiente angular de φ_1 . Chamemos por facilidade de expressão $f(t_0, x_0) = m$. Seja c um ponto em $]t_0, t_1[$, então, temos

$$1. \varphi_1(t) = m(t - t_0) + \varphi_1(t_0)$$

$$2. \varphi_1(c) = m(c - t_0) + \varphi_1(t_0)$$

A derivada de φ_1 no ponto c é dada por

$$\varphi_1'(c) = \lim_{t \rightarrow c} \frac{\varphi_1(t) - \varphi_1(c)}{t - c}$$

Assim temos

$$\begin{aligned}
 \varphi'_1(c) &= \lim_{t \rightarrow c} \frac{m(t - t_0) + \varphi_1(t_0) - [m(c - t_0) + \varphi_1(t_0)]}{t - c} \\
 &= \lim_{t \rightarrow c} \frac{m(t - t_0) + \varphi_1(t_0) - m(c - t_0) - \varphi_1(t_0)]}{t - c} \\
 &= \lim_{t \rightarrow c} \frac{m(t - t_0) - m(c - t_0)}{t - c} \\
 &= \lim_{t \rightarrow c} \frac{mt - mt_0 - mc + mt_0}{t - c} \\
 &= \lim_{t \rightarrow c} \frac{m(t - c)}{t - c} \\
 &= \lim_{t \rightarrow c} m \\
 &= m = f(t_0, x_0)
 \end{aligned}$$

Logo, existe a derivada de φ_1 no ponto c . Note que, ela existe para todo $c \in]t_0, t_1[$, pelo fato de a função φ_1 ser linear.

Suponha que $\varphi_n(t)$ seja derivável para $n = k$

$$\varphi_k(t) = (\chi[t_0, t_1]P_1)(t) + (\chi[t_1, t_2]P_2)(t) + \dots + (\chi[t_{k-1}, t_k]P_k)(t) \quad (\text{A.1})$$

queremos mostrar que ela é derivável para $n = k + 1$, isto é,

$$\varphi_{k+1}(t) = (\chi[t_0, t_1]P_1)(t) + \dots + (\chi[t_{k-1}, t_k]P_k)(t) + (\chi[t_k, t_{k+1}]P_{k+1})(t)$$

De fato, como $\varphi_k(t) = P_k(t)$, sendo $P_k(t) = x_{k-1} + f(t_{k-1}, x_{k-1})(t - t_{k-1})$ a função linear em cada intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ característico e somando $\varphi_1(t)$ em ambos os membros da equação (1), temos

$$\varphi_k(t) + \varphi_1(t) = (\chi[t_0, t_1]P_1)(t) + (\chi[t_1, t_2]P_2)(t) + \dots + (\chi[t_{k-1}, t_k]P_k)(t) + \varphi_1(t)$$

como $\varphi_1(t) = P_1(t)$, temos que

$$\varphi_k(t) + \varphi_1(t) = (\chi[t_0, t_1]P_1)(t) + (\chi[t_1, t_2]P_2)(t) + \dots + (\chi[t_{k-1}, t_k]P_k)(t) + (\chi[t_k, t_{k+1}]P_{k+1})(t)$$

Dai

$$\varphi_k(t) + \varphi_1(t) = \varphi_{k+1}(t) = (\chi[t_0, t_1]P_1)(t) + (\chi[t_1, t_2]P_2)(t) + \dots + (\chi[t_{k-1}, t_k]P_k)(t) + (\chi[t_k, t_{k+1}]P_{k+1})(t)$$

Por construção $\varphi_1(t)$ é derivável em $]t_0, t_1[$ e por hipótese $\varphi_n(t)$ é derivável em $\bigcup_{i=1}^k]t_{i-1}, t_i[$ pela propriedade da soma de derivadas, temos que

$$\varphi_{k+1}(t) = (\chi[t_0, t_1]P_1)(t) + (\chi[t_1, t_2]P_2)(t) + \dots + (\chi[t_{k-1}, t_k]P_k)(t) + (\chi[t_k, t_{k+1}]P_{k+1})(t)$$

é derivável em $\bigcup_{i=1}^{k+1}]t_{i-1}, t_i[$.

Portanto, φ_n é derivável para todo n . Para os pontos $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_i\}$ tem-se a derivada laterais, isto é,

$$\varphi'_i(t_i) = \lim_{t \rightarrow t_i^-} \frac{\varphi_i(t) - \varphi_i(t_i)}{t - t_i} = \lim_{t \rightarrow t_i^+} \frac{\varphi_i(t) - \varphi_i(t_i)}{t - t_i} = m$$

Da análise real sabe-se que toda função derivável é contínua. Logo, tem-se que φ'_n é contínua.

Apêndice B

Teorema Fundamental do Cálculo

B.1 Teorema Fundamental do Calculo Parte 1

Se f for contínua em $[a, b]$, então a função G definida por

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (\text{B.1})$$

com $a \leq x \leq b$ é contínua e derivável em (a, b) e $G'(x) = f(x)$.

Demonstração:

Se x e $x + h$ pertencem ao intervalo (a, b) , então

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

e

$$G(x + h) = \int_a^{x+h} f(t)dt$$

fazendo

$$G(x + h) - G(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

por propriedade de integral temos

$$G(x + h) - G(x) = \left(\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt \right) - \int_a^x f(t)dt$$

assim

$$G(x+h) - G(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Logo, para $h \neq 0$, temos

$$\frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt \quad (\text{B.2})$$

Suponha $h > 0$, como f é contínua em $[x, x+h]$ aplicando o teorema dos valores extremos, existem u e v pertencentes em $[x, x+h]$ tais que $f(u) = m$ e $f(v) = M$, onde m e M são os valores mínimo e máximo absolutos de f em $[x, x+h]$ respectivamente. Logo, pela propriedade de integrais, tem-se

$$mh \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq Mh$$

assim

$$f(u)h \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq f(v)h$$

como $h > 0$, dividindo as desigualdades acima, temos

$$f(u) \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt \leq f(v) \quad (\text{B.3})$$

substituindo (2) em (3), temos

$$f(u) \leq \frac{G(x+h) - G(x)}{h} \leq f(v) \quad (\text{B.4})$$

Agora, tomando $h \rightarrow 0$, teremos que $u \rightarrow x$ e $v \rightarrow x$, pois $u, v \in [x, x+h]$. Logo, da continuidade de f , segue que

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(u) = \lim_{u \rightarrow x} f(u) = f(x)$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(v) = \lim_{v \rightarrow x} f(v) = f(x)$$

Aplicando o limite quando $h \rightarrow 0$, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(u) \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0} f(v)$$

daí

$$f(x) \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} \leq f(x)$$

aplicando o teorema do confronto, segue que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(x)$$

por definição

$$G'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(x)$$

Portanto, $G'(x) = f(x)$

A demonstração é feita de modo análoga para o caso $h < 0$.

B.2 Teorema Fundamental do Calculo Parte 2

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Então

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$

onde $F(x)$ é uma função qualquer, com $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Demonstração:

Tome uma $f(x)$ com $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Do teorema 1, temos que $G'(x) = f(x)$ sendo $G(x) := \int_a^x f(t)dt \forall x \in [a, b]$, isto é, G é uma primitiva de f , o que implica dizer que $F'(x) = G'(x)$. Logo, F e G diferem por uma constante. Assim,

$$F(x) = G(x) + C$$

para todo $x \in [a, b]$ em particular, para $x = b$ temos

$$F(b) = G(b) + C \tag{B.5}$$

e para $x = a$ temos

$$F(a) = G(a) + C$$

mas fazendo $x = a$ na equação (1) temos que

$$G(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

logo,

$$F(a) = 0 + C$$

$$F(a) = C \tag{B.6}$$

Substituindo (6) em (5) temos

$$F(b) = G(b) - F(a) \implies G(b) = F(b) - F(a)$$

da equação (1) temos que

$$G(b) = \int_a^b f(t)dt$$

assim,

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

e portanto fazendo $t = x$ segue que

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

■

Referências Bibliográficas

- [1] DOMINGUES, H. Higyno **Espaços Métricos e Introdução à Topologia**. 1º edição. São Paulo: Atual, 1982.
- [2] EARL A, C; NORMAN, L. **Theory of Ordinary Differential Equations**. 9ª edição. New York: Tata McGraw-Hill, 1972.
- [3] FERNÁNDES, J. D. E; AGURTO, E. O. F. **Aplicación del Teorema de Cauchy-Peano para determinar la Existencia de la Solución del Modelo Matemático de Demanda de Oxígeno en Aguas Superficiales**. Trabalho acadêmico (Graduação em Matemática), UNPRJ, 2016.
- [4] HALE, J. K. **Ordinary Differential Equation**. 2º edição, Florida: Robert E. Krieger Publishing Company, 1980.
- [5] LIMA, E. L. **Curso de Análise Vol.1**. 10ª edição. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2002.
- [6] LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. 3ª edição. Rio de Janeiro: Editora LTC, Livros Técnicos e Científicos, 1993.
- [7] MEDEIROS, L. A. **Lições sobre a Equação Diferencial $x' = f(t, x)$** . 37f. Monografia – Setor de Educação, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, 1971.
- [8] RUDIN, W. **Principles of Mathematical Analysis**. 3ª edição. New York: Editora McGraw-Hill, 1976.
- [9] SOTOMAYOR, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. 3ª edição. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 1979.

- [10] TERCINI, J. R. B. **Modelagem da Qualidade da Água integrando Rio e Reservatório.** Dissertação de Mestrado, Escola politécnica da Universidade de São Paulo, 2014.