UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ABAETETUBA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOÃO PAULO DE AZEVEDO FARIAS
WELINGTON LIMA DOS SANTOS

DESENVOLVIMENTO DO ESTUDO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS E SUAS APLICAÇÕES INTERDISCIPLINARES

ABAETETUBA - PA
2023

JOÃO PAULO DE AZEVEDO FARIAS

WELINGTON LIMA DOS SANTOS

DESENVOLVIMENTO DO ESTUDO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS E SUAS APLICAÇÕES INTERDISCIPLINARES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática, do Campus Universitário de Abaetetuba, da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa

ABAETETUBA - PA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A994d Azevedo de Farias, João Paulo.
Desenvolvimento do estudo de funções exponenciais e logarítmicas e suas aplicações interdisciplinares / João Paulo Azevedo de Farias, Welington Lima dos Santos. — 2023.
49 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Curso de Matemática, Abaetetuba, 2023.

1. Funções especiais. 2. História da matemática para o ensino. 3. Abordagem interdisciplinar do conhecimento na educação. 4. Contextualização. I. Título.

CDD 370

JOÃO PAULO DE AZEVEDO FARIAS
WELINGTON LIMA DOS SANTOS

DESENVOLVIMENTO DO ESTUDO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS E SUAS APLICAÇÕES INTERDISCIPLINARES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática, do Campus Universitário de Abaetetuba, da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática. Orientador: Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa

Conceito: Excelente

BANCA EXAMINADORA:

Abaetetuba (PA), 03 de Janeiro de 2023.

José Francisco da S. Costa
Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa
Presidente/Orientador

Prof. Dr Aubedir Seixas Costa
Membro Interno – FACET/CUBT

José Maria dos Santos Lobato Júnior
José Maria dos Santos Lobato Júnior
Membro Externo-IFPA

Marinaldo Carvalho Lobato
Prof. Ms. Marinaldo Carvalho Lobato
Membro externo-SEDUC/PA

AGRADECIMENTOS

Primeiramente à Deus pela força e sabedoria que ele nos proporcionou durante essa longa caminhada na graduação do curso de Licenciatura em Matemática.

Aos docentes que acompanharam de perto todo nosso processo de aprendizado, contribuindo de forma direta e indireta para que fosse possível chegar até aqui.

Aos colegas e amigos de curso, que sempre incentivaram e apoiaram em momentos difíceis, a permanência na graduação.

Aos nossos familiares que fizeram parte da nossa trajetória.

Ao orientador Professor Dr. José Francisco da Silva Costa, pela paciência, instrução e ensinamento, que foram de suma importância para o desenvolvimento deste trabalho.

Por fim, um ao outro pela parceria e compreensão, dedicação e paciência, e acima de tudo, pela amizade, pois não teria sido possível realizarmos isso tudo, se um não contribuísse com o outro.

RESUMO

A Matemática passou por diversas transformações, que nos proporcionaram melhor entendimento, métodos e aplicações dela, pela ciência moderna. E essas transformações estão diretamente ligadas com a necessidade do homem de compreender fenômenos, situações e a própria coexistência das relações homem-natureza. Sendo assim, o desenvolvimento dos logaritmos e exponenciais, ou melhor, das funções logarítmicas e exponenciais, tiveram um papel fundamental para esse desenvolvimento, em vista de que, para o homem dos séculos passados, realizar operações de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação, era uma tarefa árdua, que sem o uso de ferramentas computacionais as quais conhecemos hoje, levar-se-ia anos para a realização de um trabalho como este. Em relação a metodologia é de caráter teórico tendo em vista um formalismo detalhado sobre propriedades, formulações matemáticas e gráficos de funções exponencial e logarítmica e com base na contextualização e interdisciplinar com problemas voltados ao cotidiano do aluno. Dessa maneira, esse artigo enfatiza o desenvolvimento do estudo de funções exponenciais e logarítmicas e suas aplicações interdisciplinares considerando que seja relevante para uma melhor compreensão da teoria além de acrescentar um breve relato histórico do desenvolvimento dos conceitos de exponenciais e logaritmos até a forma como conhecemos hoje, destacando-se alguns dos grandes matemáticos que contribuíram com o tema abordado. Quanto as aplicações das funções inserem alguns problemas contextualizados (ENEM, anos 2012, 2016 e 2017) relacionados com o cotidiano. Conclui-se a pesquisa considerando que a abordagem realizada sobre as duas vertentes teoria e prática, podem ser realizadas e aplicadas no contexto da sala de aula e que podem contribuir para um melhor processo de ensino e aprendizagem, uma vez que o aluno passa a compreender o campo de aplicação com problemas ligados ao seu cotidiano.

Palavras-chave: Funções, Logaritmos, Exponenciais, Interdisciplinar.

ABSTRACT

Mathematics has gone through various cycles of transformations, which will provide us with a better understanding, methods and applications of modern science. And these transformations are directly linked to the need of man to understand phenomena, situations and the proper coexistence of man-nature relationships. Being thus, the development of two logarithms and exponentials, or better, of the logarithmic and exponential functions, would have a fundamental role for this development, in view of the fact that, for the same two centuries past, carry out operations of multiplication, division, power and radiation, It was an arduous task, which without using computer tools as we know it today, would take years to carry out a job like this, BOYER; MERZBACH, (2012), in his work on planetary orbits, with not so conventional methodologies. In relation to methodology, it is of a theoretical nature, I have in view a detailed formalism on properties, mathematical formulations and graphs of exponential and logarithmic functions and based on contextualization and interdisciplinary with problems faced in the daily life of the student. In this way, this article emphasizes the development of the study of exponential and logarithmic functions and their interdisciplinary applications, considering that it is relevant for a better understanding of the theory as well as adding to a brief historical account of the development of the concepts of exponential and logarithmics in relation to the way we know it today. , highlighting some two great mathematicians who contributed to the topic addressed. As for the applications of the functions, we insert some contextualized problems (ENEM, years 2012, 2016 and 2017) related to everyday life. The research was concluded considering that the approach carried out on the two aspects of theory and practice, can be carried out and applied in the context of the classroom and that they can contribute to a better teaching and learning process, once the student begins to understand the field of application with problems linked to his daily life.

Keywords: Functions, Logarithms, Exponentials, Interdisciplinary.

ÍNDICE DE ILUSTAÇÕES

FIGURAS

Figura 1 – Gráfico da Função $f(x) = 2^x$.....20

Figura 2 – Gráfico da Função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.....21

Figura 3 – Gráfico das Funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.....22

Figura 4 – Gráfica da Função $f(x) = log_3 x$.....32

Figura 5 – Gráfico da Função $f(x) = log \frac{1}{2}^x$.....33

Figura 6 – Gráfico das Funções $y = 2^x$ e $y = log_2 x$.....34

Figura 7 – Gráfico da Questão 3.....39

Figura 8 – Gráfico da Questão 5.....41

TABELAS

Tabela 1 – Dados para a construção do gráfico.....20

Tabela 2 – Dados para a construção do gráfico.....20

Tabela 3 – Dados para a construção do gráfico.....31

Tabela 4 – Dados para a construção do gráfico.....32

Tabela 5 – Concentração de H_3O^+ de acordo com o seu material.....44

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....9

2. ASPECTOS HISTÓRICOS DAS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA...11

2.1 HISTÓRIA DA FUNÇÃO 11

2.2 A ORIGEM DA FUNÇÃO EXPONENCIAL 13

2.3 A ORIGEM DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA 14

3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO DAS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA.....16

3.1 POTÊNCIA DE UM EXPOENTE NATURAL.....16

3.1.1 POTÊNCIA DE EXPOENTE INTEIRO NEGATIVO.....17

3.1.2 POTÊNCIA DE EXPOENTE RACIONAL.....18

3.1.3 PROPRIEDADES DA POTÊNCIA.....18

3.2 FUNÇÃO EXPONENCIAL.....18

3.2.1 GRÁFICO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL.....19

3.3 EQUAÇÃO EXPONENCIAL.....22

3.4 LOGARITMO.....23

3.4.1 PROPRIEDADES OPERATÓRIAS.....25

3.5 FUNÇÃO LOGARÍTMICA.....30

3.5.1 GRÁFICO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA.....31

3.5.2 A RELAÇÃO ENTRE A FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA.....33

4. INTERDISCIPLINARIDADE E APLICAÇÃO DAS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA........35

4.1 INTERDISCIPLINARIDADE.....35

4.2 APLICAÇÃO INTERDISCIPLINAR DAS FUNÇÕES.....36

5. CONCLUSÃO.....47

6. REFERÊNCIAS.....48

1. INTRODUÇÃO

A proposta desse trabalho é apresentar um estudo sobre o desenvolvimento e utilização das funções exponenciais e logarítmicas e algumas de suas aplicações na descrição de fenômenos ligados a outros ramos da ciência que transpassam nosso cotidiano. Para o desenvolvimento deste trabalho, utilizamos de duas ideias: a primeira, trata-se do desenvolvimento teórico das funções; e, a segunda, sobre a contextualização do conteúdo no âmbito interdisciplinar. Para melhor compreender esse estufo, considera-se como objetivo geral, desenvolver um estudo de funções exponenciais e logarítmicas e suas aplicações interdisciplinares.

Outra questão é considerar o conceito de funções que está atrelado a diversos momentos de evolução da humanidade (BOYER; MERZBACH,2012) e sob esse processo histórico, Euler foi quem fez a distinção entre as funções algébricas e transcendente dando a notação $f(x)$ para representar uma função de x (CORREIA, 1999). Dessa maneira, justifica-se esse artigo considerando que o estudo das funções no aspecto histórico visando a contextualização podem auxiliar para uma melhor compreensão do tema, pois aplicações contextualizadas podem aguçar o aluno a avaliar melhor o desenvolvimento teórico abordado.

Portanto, enfatizando esse processo de ensino, o artigo apresenta como objetivos específicos: compreender como ocorreu o aspecto histórico das funções exponencial e logarítmica; verificar o desenvolvimento teórico das funções exponencial e logarítmica; mostrar a relevância da interdisciplinaridade e aplicação das funções exponencial e logarítmica.

Quanto ao roteiro, o trabalho possui o seguinte critério de subdivisão, na 1ª seção, trata-se de uma breve contextualização dos aspectos históricos e origem das funções exponencial e logarítmica, citando alguns dos nomes que contribuíram para a evolução e difusão das ideias sobre funções. Procura-se ainda verificar as necessidades de refinamento dos conceitos e ideias sobre os logaritmos e exponenciais, para que fosse compreensível sua utilização.

Na 2ª seção, aborda-se o desenvolvimento teórico das funções exponencial e logarítmica, a caracterização e definição destas funções, suas propriedades e representações gráficas. Apresentam-se características operatórias dessas funções, abordadas em livros de matemática. Verificam-se as "tábuas" logarítmicas, partindo de sua origem e o uso efetivo delas para resolução de cálculos. Também será possível compreender que as funções exponenciais e logarítmicas estão intimamente ligadas, seja no âmbito teórico, de conceituação dessas funções, como na resolução de situações-problemas a partir do cálculo matemático.

Na 3ª seção, apresenta-se por meio de exercícios resolvidos, algumas aplicações das funções exponenciais e logarítmicas na descrição de fenômenos, a saber, na datação do carbono,

magnitude de um terremoto, escala de ruídos, entre outros. Estes mostram como estas funções se relacionam com o avanço da ciência e da tecnologia.

2. ASPECTOS HISTÓRICOS DAS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

Para melhor compreender sobre os principais aspectos e utilização das funções exponenciais e logarítmicas, partimos nesse capítulo sobre a contextualização histórica dos seus conceitos, e ao decorrer do capítulo, serão abordadas seções sobre a história e conceito de função, origem do conceito de funções exponenciais e logarítmicas, e veremos momentos e nomes importantes que contribuíram para o desenvolvimento da Matemática no campo das funções, bem como avanços para a evolução da ciência e da própria humanidade.

Verifica-se nessa seção, em uma linha cronológica, a contribuição dos principais pensadores da época, que culminaram na construção do que conhecemos e aprendemos até hoje sobre funções exponenciais e logarítmicas. O contexto sociocultural ao qual se deu o surgimento dos logaritmos e exponenciais, recorria da necessidade de resolver operações aritméticas com mais agilidade, seja no ramo da astronomia, como nas grandes navegações. Diante dessas problemáticas, muitos estudiosos dessas épocas, buscaram métodos que facilitassem a resolução desses problemas, entre eles, destacavam-se: Stifel (1487-1567) e John Napier (1550-1617).

2.1. HISTÓRIA DA FUNÇÃO

O conceito de funções é atrelado a diversos momentos de evolução da humanidade. Desde a Idade da Pedra, onde os homens já utilizavam intuitivamente de suas experiências cotidianas, a possibilidade de realizar algumas analogias, relações de semelhança, e de segregação, entre conjuntos de objetos variados; que a partir de um estabelecimento de correspondência entre eles, gerava o processo de contagem (BOYER; MERZBACH,2012), até os cálculos mais sofisticados nos mais diversos campos da ciência moderna. As funções têm grande relevância, não somente no âmbito do cálculo, mas na difusão do seu conceito e aplicações, seja nas engenharias, biociência, medicina, entre outros ramos científicos que surgiram após o século XX.

Na história do desenvolvimento do pensamento algébrico, duas grandes civilizações se destacavam, os gregos e os babilônicos; este segundo, por ser um grande compilador de tabelas, as quais eram utilizadas para realizar operações de dependência, mostrando que o conceito de funções já estava implicitamente surgindo. A maioria dos estudos babilônicos, eram ligados ao campo da Astronomia, e de fato podemos considerar que a ideia de função surgiu ali.

As primeiras ideias sobre o conceito de funções, surgiram em meados do século XVII, a partir da necessidade de observações de fenômenos e de leis que pudessem explicá-los. Galileu Galilei (1564-1642) e Isaac Newton (1642-1727), foram alguns dos grandes nomes, que

em seus trabalhos, aplicaram leis e dependências fortemente ligadas com o conceito de funções. Já no século XVIII, nomes como Jean Bernoulli (1667-1748), Leonhard Euler (1707-1783) e Gottfried Leibniz (1646-1716), popularizaram o termo *"função",* que na ocasião, seria utilizado para designar valores obtidos através de operações entre variáveis e constantes.

Davies' Legendre (1752-1833), publicou um tratado em três volumes denominado *"Exercices du calcul integral"* entre os anos de 1811 e 1819, rivalizando assim com o tratado de Leonhard Euler. Já entre 1825 e 1832, Legendre expandiu seus trabalhos em outros três importantes volumes, aos quais denominou de *"Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulerianas",* e foi a partir dele que surgiu o termo "Equações Eulerianas". Outro importante matemático do século XVIII, foi Joseph-Louis Lagrande (1736-1813). Algumas de suas contribuições mais relevantes são os estudos sobre o cálculo de variações, ramo novo na matemática, na qual era possível encontrar-se uma relação funcional $\boldsymbol{\left(y = f(x)\right)}$ de tal modo que uma integral $\boldsymbol{\int_b^a g\ (x, y)dx}$ seja máxima ou mínima.

Diante de tantos nomes apresentados, que trouxeram importantes e expressivas contribuições para a ideia e conceituação de funções e para a própria história de evolução da matemática como ciência, podemos afirmar que Leonhard Euler foi o que mais contribuiu para essa evolução, onde nessa altura da história da matemática, a ideia de função não era mais representada por expressões mecânicas e geométricas, trazidas da idade média, e passou a ser representada de forma analítica, principal característica dessa fase moderna da história. Leonhard Euler foi quem fez a distinção entre as funções algébricas e transcendente, e apresentou a notação $f(x)$ para representar uma função de x, e foi o primeiro a representar os logaritmos utilizando da forma exponencial e a trazer as notações de cosseno (cos), tangente (tang), cotangente (cot), secante (sec) e cossecante (cossec), utilizadas dessa mesma forma até os dias atuais (CORREIA, 1999).

2.2. A ORIGEM DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

É possível compreender ao logo do que já foi apresentado até aqui, que a matemática evoluiu ao longo do tempo, principalmente nas suas relações de dependência desde a antiguidade até a Idade Média. É importante também que com a chegada da era moderna, houve uma grande expansão do conhecimento científico e tecnológico em diversas outras áreas de estudo, e isso contribuiu significativamente para que a matemática saísse do âmbito do cálculo, para que surgissem os conceitos e teorias como conhecemos nos dias atuais. Assim surgiu o conceito de funções, funções exponenciais e dentre outros ramos e campos de estudo dentro da matemática.

É importante salientar que esse processo conceitual passou por diversas reformulações e refinamentos, por diversos nomes importantes da matemática, já apresentados. É de compreensão que foi a necessidade de estabelecer relações entre quantidades variáveis e grandezas por volta do século XVII, que o conceito de funções teve seu início, e que foi lapidado durante séculos, passando assim a habitar o âmbito da Teoria dos Conjuntos, no século XX.

Compreende-se hoje, que se dá por função toda relação de dependência, em que uma incógnita é dependente do valor de outra. A função exponencial possui relação de dependência, e sua principal característica é que a incógnita (denominada por "$\boldsymbol{x}$"), encontra-se no expoente: $\boldsymbol{f(x) = a^x}$. Daí sua denominação "função exponencial", lembrando que a base $\boldsymbol{a}$ é um valor real constante, isto é, um número real.

Todavia, entendemos que o conceito de função exponencial, está intimamente ligado ao conceito de logaritmos, já que se trata de representações inversas. Em verdade, a abordagem sobre o conceito de logaritmos e funções logarítmicas ainda não foram abordados até o momento, e que a ideia de logaritmo antecede o conceito aqui exposto será apresentado mais a frente, contextualizando assim a própria origem da função exponencial. Em contrapartida também é importante salientar que o conceito de função exponencial é dependente do conceito de potenciação, e que também está correlacionado a ideia de logaritmos. Sendo assim, podemos dizer que foi entre os séculos XVI e XVII, a partir dos estudos de John Napier (1550-1617), que o conceito de logaritmo passou a fazer parte do universo de estudos dos cientistas da época. Também consta ser o período ao qual os trabalhos de Napier, foram introduzidos na construção dos estudos de Johannes Kepler (1571-1630), para compreender os cálculos das órbitas planetárias (BOYER; MERZBACH, 2012).

Com a chega do desenvolvimento científico e tecnológico na época, surgiram problemáticas relacionadas a quantidade de dados numéricos, e com elas, a necessidade de desenvolver metodologias que facilitassem a manipulação e atividade com tais situações. Foi a

partir daí, que Napier iniciou suas pesquisas e estudos sobre os logaritmos e suas aplicações. Logicamente que Napier teve embasamento em trabalhos anteriores, como nas tabelas desenvolvidas pelos babilônicos e gregos, como também nos trabalhos de Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.) e Stifel (1487-1567). Ambos utilizaram em seus estudos potências sucessivas de um número e Stifel estabeleceu uma relação entre progressão geométrica e os expoentes dos respectivos termos. O que Napier fez, foi justamente apropriar-se dessas ideias e transformá-las em operações mais simples. É compreensível que após os avanços dos estudos de Napier, diversos matemáticos e estudiosos da área, resolveram imergir nos trabalhos desenvolvidos até então. Mas pelo pioneirismo de Napier, o mesmo acabou se tornando o mais notável e importante nome que tange a origem dos logaritmos. Em paralelo ao conceito abordado, a própria evolução das construções teóricas de funções, fez com que chegássemos ao que chamamos de funções exponenciais.

2.3. A ORIGEM DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Nesse capítulo, aborda-se sobre a origem dos logaritmos, sua importância para a evolução da matemática como ciência e também a evolução de outros campos científicos, como a física (aplicação nas escalas de decibéis) e química (cálculo de pH). A palavra logaritmo vem de “logos” que na língua grega significa “razão”, e “aritmo”, que quer dizer número. O conceito de logaritmo foi abordado pela primeira vez pelo matemático escocês John Napier (1550-1617), como já foi abordado aqui no capítulo anterior; e foi aperfeiçoado pelo inglês Henry Briggs (1561-1630).

Naquela época, multiplicar, dividir, realizar operações de potenciação e radiciação, eram tarefas árduas. Diante dessas necessidades, os logaritmos surgiram como um instrumento de cálculo facilitador, uma vez que transformar operações de multiplicação e divisão, em soma e subtração, era bem mais rápido e prático. Napier foi o pioneiro nesse impulsionamento dos logaritmos. Hoje ele é considerado o inventor dos logaritmos, embora muitos outros matemáticos, até mesmo antes de Napier, tenham trabalhado intuitivamente com a ideia de logaritmos, através das conhecidas relações de trigonometria, aos quais relacionavam-se produtos com soma e subtração.

A metodologia de Napier baseou-se na associação aos termos de uma Progressão Geométrica[1] $(a, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots)$ com os termos de uma Progressão Aritmética[2] $(1,2,3, \dots, n, \dots)$, onde o produto de dois termos da primeira progressão, $(a^m . a^p)$, está associado a soma de $m + p$ dos termos correspondentes na segunda progressão. Enquanto John Napier estava trabalhando com uma P.G., onde o primeiro termo era $10^7 . b$ e a razão de b, ao que parece de forma independente, o matemático suíço Jost Bürgi (1552-1632), também trabalhava com problemas dos logaritmos. Ambos, posteriormente elaboraram juntos tábuas logarítmicas que mais à frente denominara de "Tábuas dos Logaritmo**s"**, mais úteis, de forma que o logaritmo de 1 fosse 0, e o de 10 fosse uma potência conveniente de 10, nascendo assim os logaritmos *briggsianos* ou comuns, utilizados nos dias atuais.

É verdade que a influência de Napier no desenvolvimento dos logaritmos foi a mais difundida, tornando o mais conhecido, mas o fato é que Jost Bürgi teve participação fundamental para a consolidação e conceituação do termo logaritmo. Cabe mencionar que a invenção dos logaritmos teve um grande impacto para o desenvolvimento científico e tecnológico da época, sendo utilizado por grandes nomes como o astrônomo Johannes Kepler, pois os logaritmos auxiliariam na expansão da sua capacidade de computação, fato determinante para a descoberta da 3ª lei planetária por Kepler. Por fim, é importante salientar que a notação utilizada hoje para os logaritmos, foi estabelecida por Leonhard Euler, responsável também por notar a relação de logaritmos com a função exponencial.

[1] Progressão geométrica é uma sequência numérica que possui uma razão fixa q e, a partir do primeiro termo, os termos são cálculos pela razão ***q*** vezes o seu antecessor.

[2] Progressão aritmética é uma sequência de números onde a diferença entre dois termos consecutivos é sempre a mesma.

3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO DAS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

Nessa seção, serão abordados os conceitos básicos e definições de propriedades das funções, utilizando como base o livro “Fundamentos da Matemática Elementar” de Gelson Iezzi, o livro “Matemática: Contexto e Aplicações” de Luiz Roberto Dante e o livro “Conexões com a Matemática” de Fábio Martins de Leonardo.

3.1. POTÊNCIA DE UM EXPOENTE NATURAL

Observe o seguinte enunciado:

Em uma fazenda, há 5 árvores. Em cada árvore, há 5 grandes galhos e em cada galho há 5 laranjas. Quantas laranjas existem no total?

Solução:

Ao analisar o problema, percebe-se a presença de um produto entre os valores mencionados, nesse caso as quantidades de árvores, galhos e laranjas. Dessa maneira:

$$5^3 = 5.5.5 = 125 \text{ Laranjas.}$$

Definição:

Sejam a e n números naturais. Pode-se dizer que a potência a^n, a qual tem base a e expoente n, tal que (IEZZI, 1997, p. 1-B, vol. 2)

$$a^n = a^{n-1}.a, \forall\, n, n \geq 1 \tag{1}$$

e...

$$a^0 = 1, a \neq 0 \tag{2}$$

Sendo assim, a partir da definição:

$$a^1 = a^0.a = a \tag{3}$$

$$a^2 = a^1.a = a.a = a^2 \tag{4}$$

$$a^3 = a^2.a = a.a.a = a^3 \tag{5}$$

Logo, a compreensão sobre a resolução da situação-problema fica mais clara e coesa, haja visto que foi aplicado a definição de Potência para encontrar a quantidade exata de laranjas na fazenda. Além disso, a definição de potência a^n, com relação a sua base, pode-se analisar:

1ª Situação:

$$a = 0 \rightarrow 0^n = 0, \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

Logo, uma base $a = 0$ possui uma potência de valor equivalente a 0 somente se o expoente n for maior ou igual a 1.

2ª Situação:

$$a > 0 \rightarrow a^n > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Dessa forma, toda potência de base a positiva e expoente $n \in \mathbb{N}$ é um número real positivo.

3ª Situação:

$$a < 0 \rightarrow \begin{cases} a^{2n} > 0, \forall\, n \in \mathbb{N} \\ a^{2n+1} < 0, \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Isto é, se o expoente for par, o número real será positivo, se for ímpar, o número real será negativo.

3.1.1. POTÊNCIA DE EXPOENTE INTEIRO NEGATIVO

Definição:

Dado um número real a, onde $a \neq 0$, e um número n natural, define-se a potência a^{-n} pela relação

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{6}$$

Assim, a potência de base real, com $a \neq 0$, e expoente inteiro negativo é definida como o inverso da correspondente potência de inteiro positivo. (IEZZI, 1997, p. 5-B, vol. 2)

Exemplos:

a) $4^{-1} = \frac{1}{4}$

b) $(-2)^{-1} = -\frac{1}{2}$

c) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

3.1.2. POTÊNCIA DE EXPOENTE RACIONAL

Definição:

Dados $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ($p \in \mathbb{Z}\ e\ q \in \mathbb{N}^*$), define-se a potência (IEZZI, 1997, p. 15-B, vol. 2)

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \tag{7}$$

Se o expoente for positivo e a base igual a 0, então:

$$0^{\frac{p}{q}} = 0 \tag{8}$$

Exemplo:

a) $3^{1/2} = \sqrt[2]{3}$

b) $8^{1/3=}\sqrt[3]{8} = 2$

c) $7^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{7^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{49}}$

3.1.3. PROPRIEDADES DA POTÊNCIA

Se $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{N}$ e $d \in \mathbb{N}$, então as propriedades seguintes têm validade:

$$a^m . a^n = a^{m+n} \tag{9}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\ , m \geq n \tag{10}$$

$$(a.b)^m = a^m . b^m \tag{11}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}\ ,\ b \neq 0 \tag{12}$$

$$(a^m)^n = a^{m.n} \tag{13}$$

OBS: Estas propriedades serão demonstradas na seção 3.4.1, as quais serão apresentadas e demonstradas também as propriedades de logaritmo.

3.2. FUNÇÃO EXPONENCIAL

Veja essa situação que envolve o tópico proposto: Uma pessoa fez um empréstimo em um banco no valor de $R\$10.000{,}00$, com o intuito de pagar depois de 6 meses à taxa de juros de 2% ao mês no regime de **juros compostos**. Qual será o montante a pagar após o período de 6 meses?

Solução: A fórmula de Juros Compostos é dada pela expressão:

$$M = C.(1+i)^t \tag{14}$$

Onde:

M: Montante

C: Capital

i: Taxa de juros

t: Tempo

Assim, ao aplicar os dados da situação-problema na fórmula:

$$M = 10000\,.\,(1+0{,}02)^6$$

$$M = 10000\,.\,(1{,}02)^6$$

$$M = 10000\,.\,1{,}1261$$

$$M = 11261$$

Dessa forma, o montante obtido será de $R\$11.261{,}00$.

Definição: Dado um número real a $(a > 0\ e\ a \neq 1)$, denomina-se **função exponencial** de base a a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ representada por $f(x) = a^x$ para todo x real. (DANTE, 2016, p. 159)

Exemplo:

a) $f(x) = 2^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

c) $f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$

3.2.1. GRÁFICO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Analisando o gráfico da função

$$f(x) = 2^x, \tag{15}$$

Tem-se $a > 1$, o gráfico da função é crescente (**Quadro 1 e Gráfico 1**), logo:

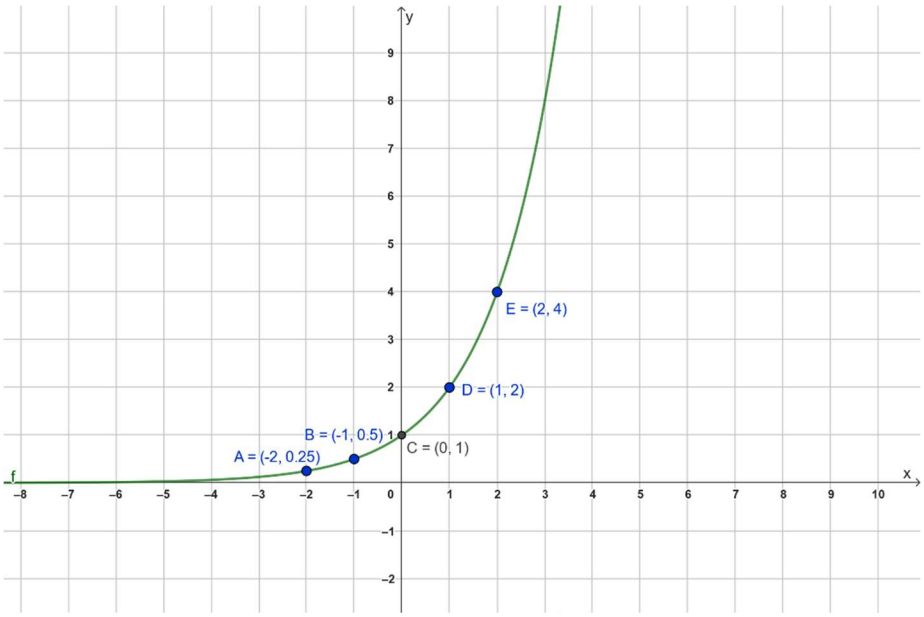
$$x_1 > x_2 \to a^{x_1} > a^{x_2} \tag{16}$$

Quadro 1 – Dados para a construção do gráfico

x	-2	-1	0	1	2
2^x	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2
$f(x)$	¼	½	1	2	4

Fonte: (Autoria própria)

Gráfico 1 – Gráfico da Função $f(x) = 2^x$



Fonte: Geogebra (Autoria própria)

Analisando a função

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \tag{17}$$

Tem-se: $0 < a < 1$, a função é decrescente (**Quadro 2 e Gráfico 2**), logo

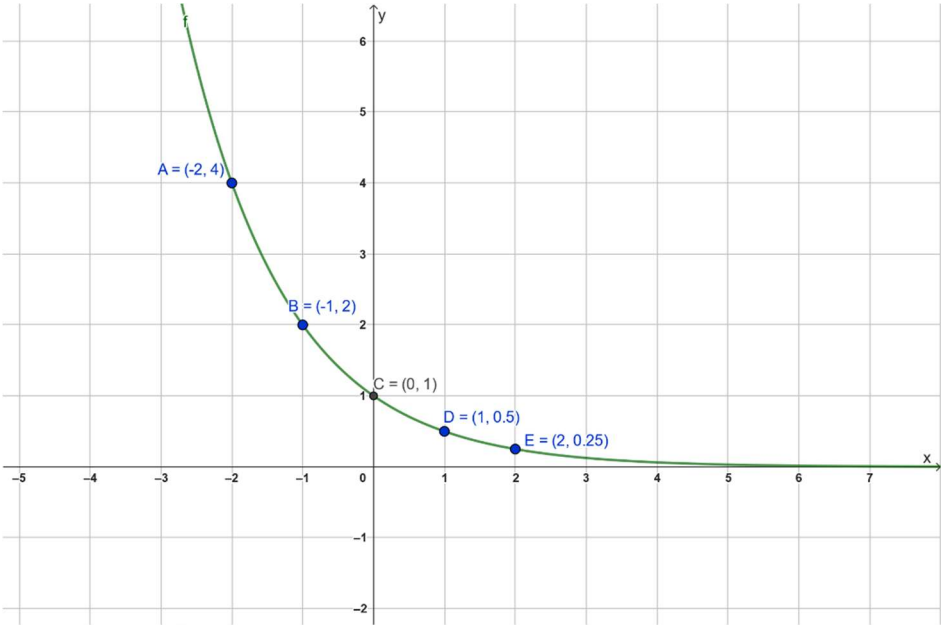
$$x_1 > x_2 \rightarrow a^{x_1} < a^{x_2} \tag{18}$$

Quadro 2 – Dados para a construção do gráfico

x	-2	-1	0	1	2
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^0$	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$
$f(x)$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Fonte: Autoria Própria

Gráfico 2 – Gráfico da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

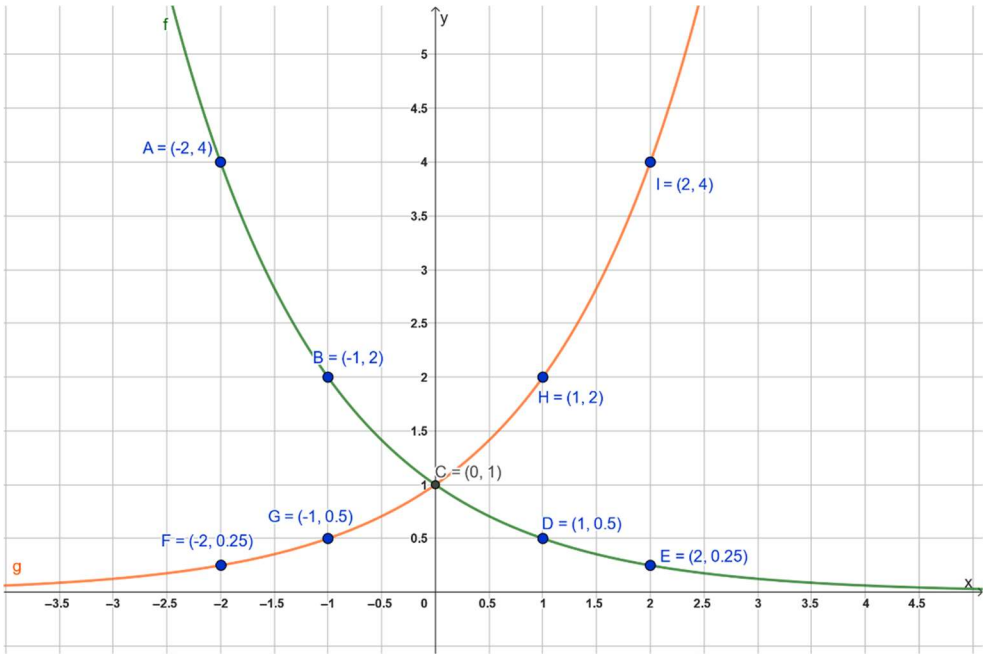


Fonte: Geogebra (Autoria própria)

Ao observar os dois gráficos, pode-se identificar as seguintes propriedades:

- O gráfico da função exponencial não corta o eixo x, ou seja, $y = a^x$ não assume o valor zero (isto é, não existe x real, tal que $y = 0$) e intersecta o eixo das ordenadas no par ordenado (0, 1);
- A função exponencial é definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_*^+$, logo o seu domínio é $\mathbb{R}$ e o seu contradomínio é $\mathbb{R}_+^*$. Como o conjunto imagem também é $\mathbb{R}_+^*$, a função exponencial é sobrejetora $[CD(f) = Im(f)]$. Em resumo, $D(f) = \mathbb{R}, CD(f) = \mathbb{R}_+^*$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$.
- Elementos diferentes do domínio de f têm imagens diferentes no contradomínio de f. Assim, $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ e, com isso, percebe-se que a função é injetora.
- Por ser injetora e sobrejetora, a função exponencial é bijetora (**Gráfico 3).**

Gráfico 3 – Gráfico das Funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Fonte: Geogebra (Autoria própria)

3.3. EQUAÇÃO EXPONENCIAL

Antes de tratar a definição, observe a questão: O montante de determinado capital em um fundo de investimento, após o tempo t em anos, é dado pela fórmula $M(t) = C.1{,}5^t$. Nessas condições, o tempo necessário para que um capital de $R\$800{,}00$ investido gere um montante de $R\$4050{,}00$ é de:

Solução: Se $C = 800$ e $M = 4050$, aplicando na equação:

Tem-se que o valor para t, será após o desenvolvimento,

$$4050 = 800.1{,}5^t$$

$$\frac{4050}{800} = 1{,}5^t$$

$$5{,}0625 = 1{,}5^t$$

$$1{,}5^5 = 1{,}5^t$$

$$t = 5\ anos.$$

Assim, o tempo necessário será de 5 anos.

Definição: As Equações Exponenciais são aquelas que possuem uma incógnita no expoente (IEZZI, 1997).

Exemplos:

a) $2^x = 16$

b) $4^x = \sqrt{256}$

Como método de resolução, pode-se utilizar o Método de Redução a uma Base Comum, a partir das propriedades de potência, reduzindo a mesma base. Assim, se as bases forem iguais, então os expoentes são iguais. Diante disso, podemos concluir:

$$a^b = a^c \rightarrow b = c, \text{ onde } 0 < a \neq 1 \quad (19)$$

Aplicando o método nos exemplos acima:

a) $2^x = 16$

$2^x = 2^4$

$x = 4$

b) $4^x = \sqrt{256}$

$4^x = 16$

$4^x = 4^2$

$x = 2$

3.4. LOGARITMO

Antes de definir o conceito de logaritmo, acompanhe o seguinte questionamento: A que número x se deve elevar o número 3 para obter 27?

Pelo enunciado, entende-se que:

$$3^x = 27$$

$$3^x = 3^3$$

$$x = 3$$

Sendo assim, o valor 3 é o **logaritmo** de 27 na **base** 3 e pode ser representado da seguinte forma:

$$log_3 27 = 3$$

Definição: Dados os números reais a e b, com $a \neq 1$, se $b = a^c$, então o expoente c chama-se logaritmo de b na base a. Onde a representação se dá por: $log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$, com a e b positivos. (DANTE, 2016, p. 177, vol. 1)

$$log_a b = c \tag{20}$$

Onde,

a: Base do logaritmo

b: Logaritmando

c: Logaritmo

Exemplos:

a) $log_4 16 = 4^2 = 4^x \rightarrow x = 2$

b) $log_{\frac{1}{3}} 9 = \left(\frac{1}{3}\right)^x = 9 \rightarrow 3^{-x} = 3^2 \rightarrow x = -2$

c) $log 1000 = 10^x = 1000 \rightarrow 10^x = 3 \rightarrow x = 3$

Consequências da definição:

$$log_a 1 = 0, \tag{21}$$

pois $a^0 = 1$, desde que $a > 0$ *e* $a \neq 1$

$$log_b b = 1, \tag{22}$$

pois $b^1 = b$, para todo $0 < b \neq 1$

$$log_a a^n = n, \tag{23}$$

pois $a^n = a^n$

$$c^{log_c b} = b, \tag{24}$$

com $b > 0$, $c > 0$ e $c \neq 1$

$$log_a b = log_a c \leftrightarrow b = c, \tag{25}$$

pois, a partir da definição de logaritmo:

$$a^b = a^c \rightarrow b = c \tag{26}$$

3.4.1. PROPRIEDADES OPERATÓRIAS

Nesta seção serão abordadas as propriedades operatórias de logaritmo e a demonstração das propriedades da potenciação (seção 3.1.3) por meio do uso de logaritmo.

a) Logaritmo do Produto: *"O logaritmo do produto de dois fatores reais positivos é igual à soma dos logaritmos dos fatores"* (IEZZI, 1997, p. 56-B)

$$log_a(b.c) = log_a b + log_a c \tag{27}$$

Demonstração: Seja $log_a b = x$, $log_a c = y$ e $log_a(b.c) = z$, então

$$a^z = a^x * a^y$$

$$a^z = a^{x+y}$$

$$z = x + y$$

Exemplo:

$$log_5(25.625) = log_5 25 \times log_5 625 = log_5 5^2 \times log_5 5^4 = 2 + 4 = 6$$

b) Logaritmo do Quociente: *"Em uma mesma base, o logaritmo do quociente de dois números positivos é a diferença entre os logaritmos desses números"* (DANTE, 2016, p. 177, vol. 1)

$$log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a b \div log_a c \tag{30}$$

Demonstração: Seja $log_a b = x$, $log_a c = y$ e $log_a\left(\frac{b}{c}\right) = z$, observe:

$$a^z = \frac{a^x}{a^y}$$

$$a^z = a^{x-y}$$

$$z = x - y$$

Exemplo:

$$log_2\left(\frac{1}{8}\right) = log_2 1 \div log_2 8 = 0 - log_2 2^3 = -3$$

c) Logaritmo da Potência: *"O logaritmo da potência é o produto do expoente da potência pelo logaritmo da base"* (LEONARDO, 2016, p. 173)

$$log_a b^c = c.log_a b \quad (33)$$

Demonstração:

Seja $log_a b = x$ e $log_a b^c = y$, então

$$a^x = b$$

e

$$a^y = b^c$$

então

$$a^y = b^c \rightarrow a^y = (a^x)^c \rightarrow a^y = a^{x.c} \rightarrow y = x.c \rightarrow log_a b^c = c.log_a b$$

Exemplo:

$$log_5 625 = log_5 25^2 = 2.log_5 25 = 2.log_5 5^2 = 2.2.log_5 5 = 2.2.1 = 4$$

d) Mudança de Base: Se $a, b\ e\ c$ são números reais positivos e $a \neq 1$ e $c \neq 1$, então tem-se (IEZZI, 1997, p. 64-B)

$$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a} \quad (36)$$

Demonstração:

Considere $log_a b = x$, $log_c b = y$ e $log_c a = z$, assim demonstra-se que $x = \frac{y}{z}$

Sendo assim,

$$a^x = b$$

$$c^y = b$$

$$c^z = a$$

$$a^x = c^y \rightarrow (c^z)^x = c^y \rightarrow c^{zx} = c^y \rightarrow zx = y \rightarrow x = \frac{y}{z}$$

Exemplo: Escrever $log_2 7$ na base 10:

$$log_2 7 = \frac{log 7}{log 2}$$

Sobre as propriedades operatórias da potenciação:

Demonstração: Seja

$$a^m . a^n = a^{m+n},$$

a justificativa:

$$a^m . a^n = z$$

Aplicando o logaritmo de base 10 na igualdade, tem-se:

$$log(a^m . a^n) = log\, z$$

Ao aplicar a propriedade do Logaritmo do Produto (27),

$$log(a^m) + log(a^n) = log\, z$$

Utilizando a propriedade do Logaritmo da Potência (33),

$$m . log(a) + n . log(a) = log\, z$$

Isolando o fator comum,

$$(m + n) . log(a) = log\, z$$

Percebe-se que a recíproca é verdadeira, então, utilizando a propriedade do Logaritmo da Potência (33),

$$log(a)^{m+n} = log\, z$$

Conclui-se:

$$z = a^{m+n}$$

Demonstração:

Seja

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

Então,

$$\frac{a^m}{a^n} = x$$

Aplicando o logaritmo de base 10 na igualdade, tem-se:

$$log\left(\frac{a^m}{a^n}\right) = log\, x$$

Ao aplicar a propriedade do Logaritmo do Quociente (30),

$$loga^m - loga^n = log\, x$$

Utilizando a propriedade do Logaritmo da Potência (33),

$$m.loga - n.loga = log\, x$$

Isolando o fator comum,

$$(m-n).loga = log\, x$$

Percebe-se que a recíproca é verdadeira, então, utilizando a propriedade do Logaritmo da Potência (33),

$$loga^{m-n} = log\, x$$

Sendo assim:

$$x = a^{m-n}$$

Demonstração:

Seja

$$(a.b)^m = a^m.b^m,$$

Logo:

$$(a.b)^m = y$$

Aplicando o logaritmo de base 10 na igualdade, tem-se:

$$log(a.b)^m = log\, y$$

Utilizando a propriedade do Logaritmo da Potência (33),

$$m.log(a.b) = log\, y$$

Após a aplicação do Logaritmo do Produto (27),

$$m.loga + m.logb = log\, y$$

Utilizando novamente a propriedade do Logaritmo da Potência (33),

$$loga^m + logb^m = log\, y$$

Novamente aplicando o Logaritmo do Produto (27),

$$log(a^m . b^m) = log\, y$$

Portanto,

$$y = a^m . b^m$$

Demonstração:

Seja

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m},$$

Assim

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = u$$

Aplicando o Logaritmo,

$$log\left(\frac{a}{b}\right)^m = log\, u$$

Empregando o Logaritmo da Potência (33),

$$m. log\left(\frac{a}{b}\right) = log\, u$$

Após a aplicação do Logaritmo do Quociente (30),

$$m. loga - m. logb = log\, u$$

Retornando o expoente, a partir do Logaritmo da Potência (33),

$$loga^m - logb^m = log\, u$$

Aplicando o Logaritmo do Quociente (30) para a formação de apenas um logaritmando,

$$log\left(\frac{a^m}{b^m}\right) = log\, u$$

Assim,

$$u = \frac{a^m}{b^m}$$

Demonstração:

Seja

$$(a^m)^n = a^{m.n},$$

dessa maneira

$$(a^m)^n = t$$

Usando o Logaritmo,

$$log(a^m)^n = log\, t$$

Ao utilizar a propriedade do Logaritmo da Potência (33),

$$n.log(a^m) = log\, t$$

$$n.m.loga = log\, t$$

Manipulando os fatores,

$$(m.n).loga = log\, t$$

Aplicando novamente a propriedade do Logaritmo da Potência (33),

$$loga^{(m.n)} = log\, t$$

Dessa forma,

$$t = a^{m.n}$$

3.5. FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Antes da abordagem teórica sobre o assunto, observe o seguinte enunciado Durante os estudos sobre o conhecimento de uma determinada árvore, foi possível modelar o crescimento dela no decorrer do tempo por meio da função $C(t) = 1 + log_2(4 + t)$,onde t é o tempo em anos e $C(t)$ é a altura em metros. Dessa forma, podemos afirmar que a altura da árvore, após 12 anos, será de:

Solução:

Ao analisar a função dada, basta substituir os valores e descobrir a altura da árvore após o período dado, assim:

$$C(t) = 1 + log_2(4 + 12)$$

$$C(t) = 1 + log_2 16$$

$$C(t) = 1 + log_2 2^4$$

$$C(t) = 1 + 4.1$$

$$C(t) = 5 \text{ metros}$$

Definição: Uma função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ chama-se função logarítmica quando existe um número real a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, tal que $f(x) = log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$. (LEONARDO, 2016, p. 176)

Exemplos:

a) $f(x) = log_2 x$
b) $g(x) = log\, x$
c) $t(x) = log_{\frac{1}{4}} x$

3.5.1. GRÁFICO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Observe as seguintes funções:

$$f(x) = log_3 x$$

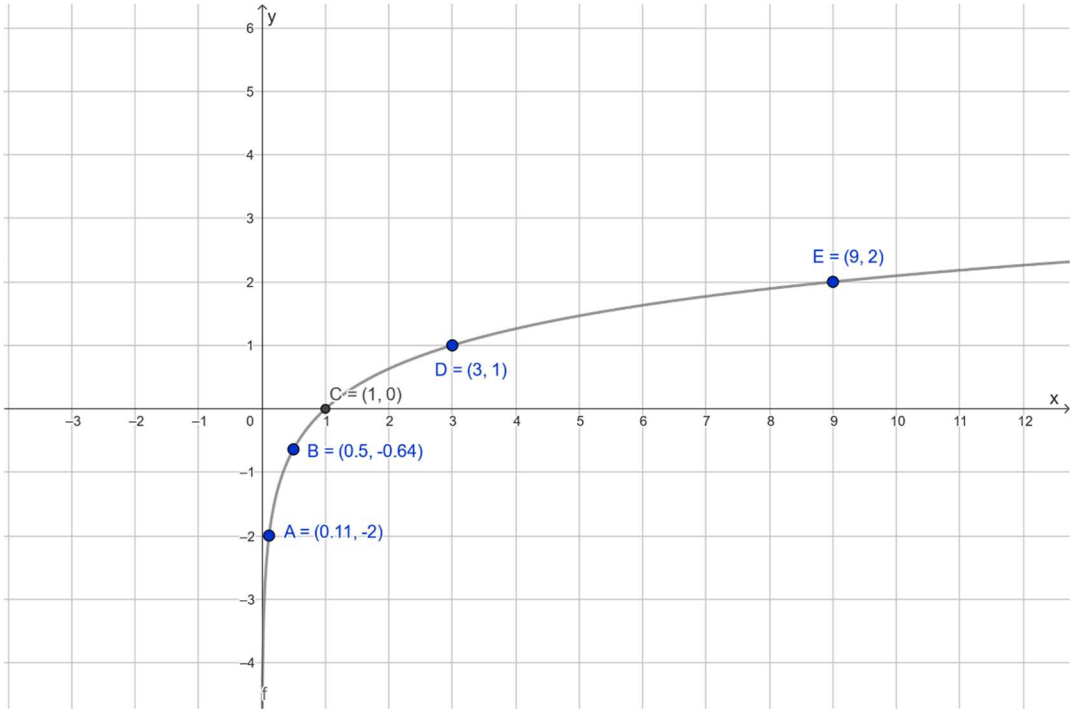
Cujos valores estão descritos no quadro (**Quadro 3 e Gráfico 4**)

Quadro 3 – Dados para a construção do gráfico

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$log_3 x$	$log_3\left(\frac{1}{9}\right)$	$log_3\left(\frac{1}{3}\right)$	$log_3 1$	$log_3 3$	$log_3 9$
$f(x)$	-2	-1	0	1	2

Fonte: Autoria própria

Gráfico 4 – Gráfico da Função $f(x) = log_3 x$



Fonte: Geogebra (Autoria própria)

Seja agora a função dada a seguir,

$$f(x) = log_{\frac{1}{2}} x$$

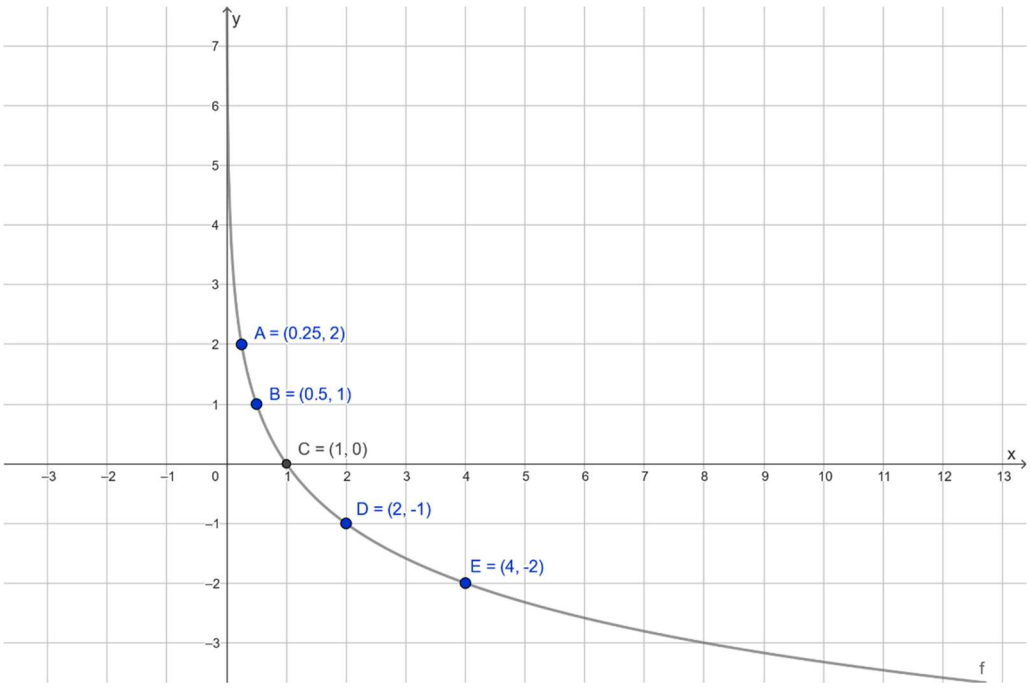
Com valores dados no quadro e gráfico expostos a seguir (**Quadro 4 e Gráfico 5**)

Quadro 4 – Dados para a construção do gráfico

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$log_{\frac{1}{2}} x$	$log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right)$	$log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)$	$log_{\frac{1}{2}} 1$	$log_{\frac{1}{2}} 2$	$log_{\frac{1}{2}} 4$
$f(x)$	2	1	0	-1	-2

Fonte: Autoria própria

Gráfico 5 – Gráfico da Função $f(x) = log_{\frac{1}{2}}x$



Fonte: Geogebra (Autoria própria)

Ao analisar os gráficos, pode-se destacar as seguintes características:

- O gráfico da função nunca toca o eixo das ordenadas
- Somente números positivos possuem logaritmos reais, pois a função a^x admite somente valores positivos.
- Se $a > 1$, então a função é crescente. Se $0 < a < 1$, então a função é decrescente
- No caso da função crescente, percebe-se que $x_1 < x_2 \leftrightarrow log_a x_1 < log_a x_2$
- Sendo uma função decrescente, então vale a afirmação $x_1 < x_2 \Leftrightarrow log_a x_1 > log_a x_2$

3.5.2. A RELAÇÃO ENTRE A FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

Segundo Dante (2016), a função exponencial $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, g(x) = a^x$ é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_+^*$ e tem a seguinte propriedade:

$$g(x + y) = a^{x+y} = a^x . a^y = g(x).g(y)$$

Observe que a função logarítmica é $h: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, dada por $h(x) = log_a x$ e possui a propriedade

$$log_a(x.y) = log_a x + log_a y$$

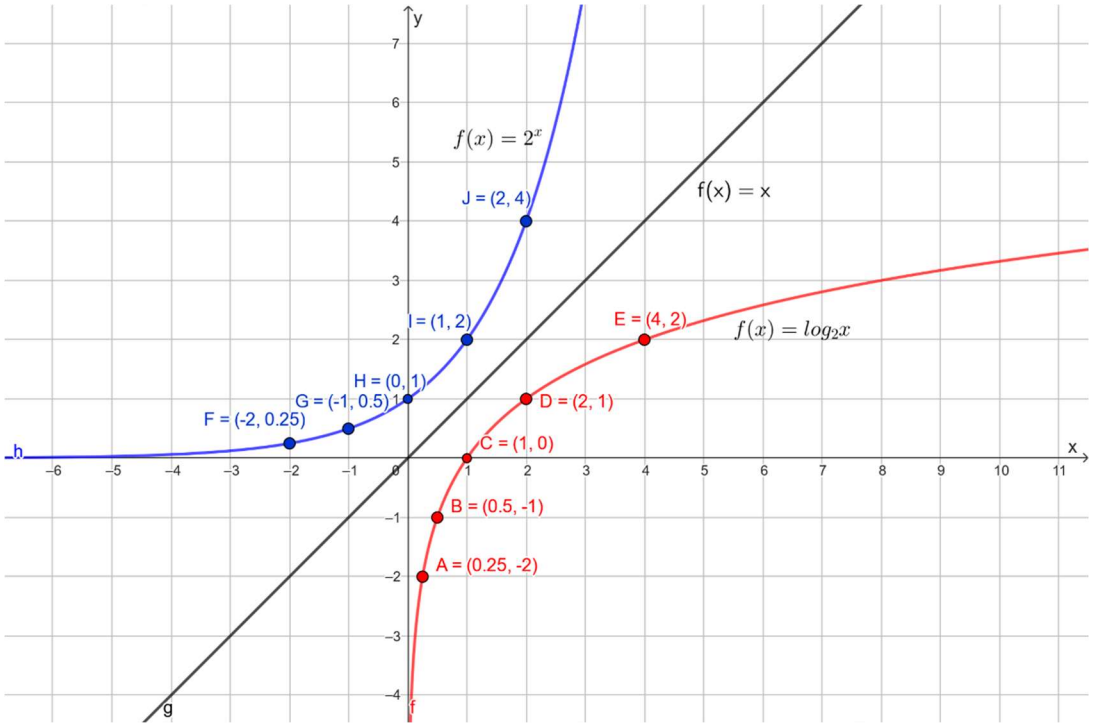
Além disso, ambas as funções são bijetivas, logo admitem terem funções inversas. Sendo assim, pode-se perceber que as funções $g(x) = a^x$ e $h(x) = log_a x$ (**Gráfico 6**) são inversas, pois:

$$g\big(h(x)\big) = a^{h(x)} = a^{log_a x} = x$$

$$h\big(g(x)\big) = log_a a^x = x.log_a a = x$$

Graficamente:

Gráfico 6 – Gráfico das funções $y = 2^x$ e $y = log_2 x$



Fonte: Geogebra (Autoria Própria)

Na figura 6, a função exponencial cresce rapidamente, diferente da função logarítmica que cresce lentamente. Além disso, ambas as funções são simétricas a reta $y = x$, a qual recebe a denominação de bissetriz dos quadrantes ímpares.

4. INTERDISCIPLINARIDADE E APLICAÇÃO DAS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

Nessa seção serão abordados: O conceito de Interdisciplinaridade e situações-problemas, envolvendo as funções estudadas neste trabalho e questões contextualizadas sobre função exponencial e função logarítmica com resoluções algébricas para melhor compreensão do conteúdo. Além disso, algumas questões foram baseadas no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), pois o mesmo busca a inserção da interdisciplinaridade em exercícios, como desenvolvimento do conhecimento nas diversas áreas de estudo.

4.1. INTERDISCIPLINARIDADE

Michaelis (1998) afirma que "Interdisciplinaridade (Substantivo Feminino) – qualidade de interdisciplinar". Além disso, Michaelis (1998) afirma também: "Interdisciplinar (Adjetivo Masculino e Feminino) – Comum a duas ou mais disciplinas, que envolve duas ou mais áreas de conhecimento." A partir do conceito etimológico da palavra "interdisciplinaridade", entende-se que a interdisciplinaridade é a forma de interação entre as disciplinas, de modo a alcançar a universalidade do conhecimento.

Segundo Veiga-Neto (1994, p. 145), sobre as várias colaborações do ensino a partir da interdisciplinaridade, pode-se evidenciar:

> a) um maior diálogo entre professores, alunos, pesquisadores etc., de diversas áreas de conhecimento; b) um melhor preparo profissional e uma formação mais integrada do cidadão; c) a criação de novos conhecimentos, graças a fecundação mútua de áreas que até então se mantinham estanques.

Diante disso, a interdisciplinaridade é o enfoque do descobrimento de novos conhecimentos para a compreensão da própria realidade. Além disso, pode-se notar que a partir da obtenção de conhecimento do indivíduo, o mesmo ultrapassa as barreiras de limite da sabedoria, buscando assim novos saberes em outras disciplinas. Após esse contato, surge a interdisciplinaridade.

Ao falar da matemática, a maior conexão com as outras disciplinas estão no emprego do uso de conhecimento algébricos, geométricos e aritméticos, principalmente na área das ciências naturais, a qual é composta pela Física, Química e Biologia. Onde, por exemplo, na Física a ligação está presente nas fórmulas e nas metodologias aplicadas como solução de situações-problemas, envolvendo Nível Sonoro e Intensidade Sonora; na Química, há a presença da função logarítmica na classificação das substâncias na Escala de pH^+; na Biologia,

a proliferação de doenças que pode ser abordada e demonstrada através de funções e equações exponenciais.

4.2. APLICAÇÃO INTERDISCIPLINAR DAS FUNÇÕES

Como abordado no tópico anterior, a interdisciplinaridade é a união de conhecimentos de áreas de saberes diversos. Sendo assim, a aplicação na matemática é feita de diversas maneiras. Neste trabalho, a apresentação dessa aplicabilidade será feita a partir de questões contextualizadas, envolvendo diferentes áreas de conhecimento. Portanto, observe as situações-problemas a seguir:

1. **O carbono-14 (Adaptada)**

O carbono-14 é um isótopo raro do carbono presente em todos os seres vivos. Com a morte, o nível de C-14 no corpo começa a decair. Como é um isótopo radioativo de meia-vida de 5730 anos, e como é relativamente fácil saber o nível original de C-14 no corpo dos seres vivos, a medição da atividade de C-14 em um fóssil é uma técnica muito utilizada para datações arqueológicas. A atividade radioativa do C-14 decai com o tempo pós-morte segundo a função exponencial:

$$A(t) = A_0 * \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

Em que A_0 é a atividade natural do C-14 no organismo vivo e t é o tempo decorrido em anos após a morte. Suponha que um fóssil encontrado em uma caverna foi levado ao laboratório para ter sua idade estimada. Verificou-se que emitia 5 radiações de C-14 por grama/hora. Sabendo que o animal vivo emite 3125 radiações por grama por hora, então a idade aproximada desse fóssil, em anos, seria:

Solução:

De acordo com a questão, a atividade natural (A_0) do C-14 corresponde a 3125 radiações g/h e a atividade radioativa $\big(A(t)\big)$ equivale a 5 radiações, temos:

$$A(t) = A_0 * \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

$$5 = 3125 * \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

$$\frac{5}{3125} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

Simplificando a fração $\frac{5}{3125}$, tem-se:

$$\frac{1}{625} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{4} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

Após aplicar o Método de Redução a Base Comum percebe-se que os expoentes são iguais, de acordo com a propriedade da potência.

$$4 = \frac{t}{5730}$$

$$t = 5730 * 4$$

$$t = 22.920\ anos$$

2. A escala de um aparelho de medir ruídos (Adaptada)

A escala de um aparelho de medir ruídos é definida como

$$R(I) = 120 + 10\log(I)$$

Em que R é a medida do ruído, em decibéis, e I é a intensidade sonora, em W/m^2. O ruído dos motores de um avião a jato equivale a $180\ d\beta$, enquanto o tráfego em uma esquina movimentada de uma grande cidade atinge $100\ d\beta$, que é o limite a partir do qual o ruído passa a ser nocivo ao ouvido humano. Diante disso, determine:

a) Determine as intensidades sonoras do motor de um avião a jato e do tráfego em uma esquina movimentada de uma grande cidade.
b) Calcule a razão entre as intensidades do item anterior e indique quantas vezes o ruído do avião é maior que o do tráfego.

Solução:

a) Dada a função matemática

$$R(I) = 120 + 10\log(I)$$

e os valores dos ruídos

Avião a jato: $180\ d\beta$

Tráfego: $90\ d\beta$

Primeiro, para encontrar o valor da Intensidade Sonora do avião a jato, deve-se:

$$180 = 120 + 10\log(I)$$

$$180 - 120 = 10\log(I)$$

$$60 = 10\log(I)$$

$$\frac{60}{10} = \log(I)$$

$$6 = \log(I)$$

Aplicando a definição de Logaritmo, onde $log_a b = x \leftrightarrow b = a^x$

$$I = 10^6$$

Assim, a Intensidade sonora do avião a jato é de $10^6\ W/m^2$.

Agora, para calcular a Intensidade Sonora do tráfego em esquina movimentada, deve-se:

$$90 = 120 + 10\log(I)$$

$$90 - 120 = 10\log(I)$$

$$-30 = 10\log(I)$$

$$-\frac{30}{10} = \log(I)$$

$$-3 = \log(I)$$

Aplicando novamente a definição de Logaritmo, tem-se

$$I = 10^{-3}$$

Portanto, a Intensidade Sonora de um tráfego em uma esquina movimentada é igual a $10^{-3}\ W/m^2$.

b) Para calcular a razão entre as intensidades encontradas basta:

$$\frac{10^6}{10^{-3}}$$

$$10^{6-(-3)}$$

$$10^9$$

Assim, o ruído do Avião a Jato é maior que o ruído do tráfego em uma esquina movimentada.

3. O sistema de ar condicionado (Adaptada)

O sistema de ar condicionado de um ônibus quebrou durante uma viagem. A função que descreve a temperatura (em graus Celsius) no interior do ônibus em função de t, o tempo transcorrido, em horas, desde a quebra do ar condicionado é $T(t) = (T_0 - T_{ext}).10^{-\frac{t}{4}} + T_{ext}$, onde T_0 é a temperatura interna do ônibus enquanto a refrigeração funcionava, e T_{ext} é a temperatura externa (que supomos constante durante toda a viagem). Sabendo que a temperatura interna é de $24°C$ e a temperatura externa é de $35°C$, determine:

a) A temperatura no interior do ônibus transcorridas 4 horas desde a quebra do sistema de ar condicionado

b) Esboce o gráfico da função $T(t)$

Solução:

a) Para calcular a temperatura, deve-se substituir os valores dados na função. Diante disso,

$$T(t) = (24 - 35).10^{-\frac{4}{4}} + 35$$

$$T(t) = (-11).10^{-1} + 35$$

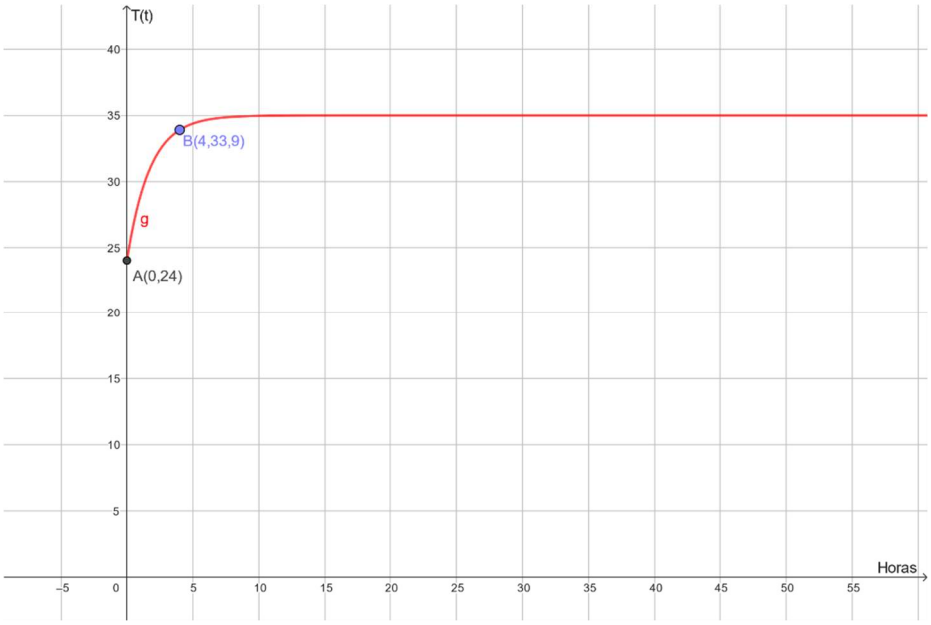
$$T(t) = -1{,}1 + 35$$

$$T(t) = 33{,}9$$

Assim, a temperatura interna do ônibus depois de 4 horas é de $33{,}9°C$

b) O gráfico:

Gráfico 7 – Gráfico da Questão 3



Fonte: Geogebra (Autoria própria)

4. Bactérias de uma cultura (Adaptada)

Uma pesquisa foi desenvolvida a partir de 250 bactérias de uma cultura. Estimou-se então, de maneira aproximada, que durante certo tempo, o aumento percentual do número de bactérias na cultura poderia ser obtido pela expressão $B(t) = -30.log_3(t+3) + 180$, em que t é o tempo decorrido, em minutos, após o início da pesquisa. Nessas condições, ao fim de 4 horas de pesquisa, quantas bactérias haviam em tal cultura?

Solução:

Ao analisar a lei matemática e a situação proposta, tem-se que o tempo a ser calculado é:

$$t = 4\ horas = 4.60 = 240\ minutos$$

$$B(240) = -30.log_3(240+3) + 180$$

$$B(240) = -30.log_3(243) + 180$$

$$B(240) = -30.log_3 3^5 + 180$$

Ao notar a igualdade entre a base do log e a base da potência do logaritmando, pode-se aplicar a seguinte propriedade:

$$log_a a^m = m$$

Assim,

$$B(240) = -30.5 + 180$$

$$B(240) = -150 + 180$$

$$B(240) = 30$$

Dessa maneira, percebe-se que o aumento percentual é de 30%. Logo,

$$\frac{30}{100}.250 = \frac{7500}{100} = 75$$

$$250 + 75 = 325$$

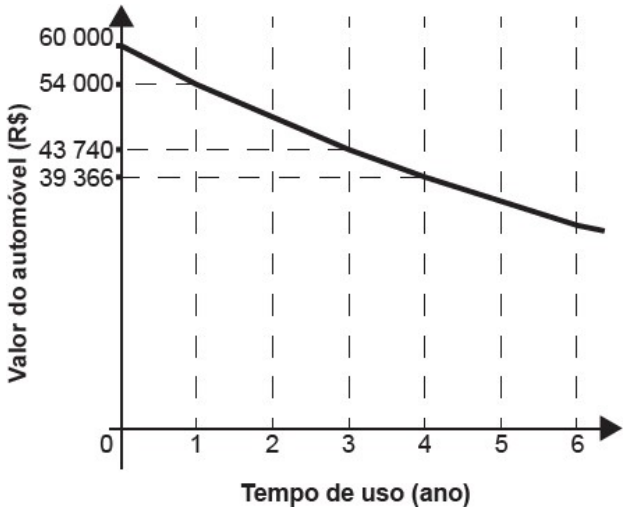
A quantidade era de 325 bactérias.

Algumas questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM):

5. Um modelo de automóvel (ENEM 2017)

Um modelo de automóvel tem seu valor depreciado em função do tempo de uso segundo a função $f(t) = b.a^t$, com t em ano. Essa função está representada no gráfico.

Gráfico 8 – Gráfico da Questão 5



Fonte: ENEM (2017)

Qual será o valor desse automóvel, em real, ao completar cinco anos de uso?

Solução:

Ao analisar o gráfico, percebe-se que $f(0) = 60000 \rightarrow b.a^0 = 60000 \rightarrow b = 60000$

Além disso,

$$f(3) = 60000.a^3$$

$$43740 = 60000.a^3$$

$$\frac{43740}{60000} = a^3$$

$$a^3 = 0{,}729$$

Ao aplicar a raíz cúbica nos dois membros da equação, tem-se:

$$\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{0{,}729}$$

$$a = 0{,}9$$

Depois de obter os valores de a e b, o valor do automóvel ao completar cinco anos de uso será de:

$$f(5) = 60000.(0{,}9)^5$$

$$f(5) = 60000.0{,}59049$$

$$f(5) = R\$\ 35429{,}40$$

6. Terremoto de magnitude 9,0 na escala Richter (ENEM 2016)

Em 2011, um terremoto de magnitude 9,0 na escala Richter causou um devastador tsunami no Japão, provocando um alerta na usina nuclear de Fukushima. Em 2013, outro terremoto, de magnitude 7,0 na mesma escala, sacudiu Sichuan (sudoeste da China), deixando centenas de mortos e milhares de feridos. A magnitude de um terremoto na escala Richter pode ser calculada por $M = \frac{2}{3}\left[\log\left(\frac{E}{E_0}\right)\right]$, sendo E a energia, em kWh, liberada pelo terremoto e E_0 uma constante real positiva. Considere que E_1 e E_2 representam as energias liberadas nos terremotos ocorridos no Japão e na China, respectivamente.

Diante disso, qual a relação entre as energias liberadas?

Solução:

A partir da função da magnitude de um terremoto na escala Richter e os dados fornecidos, percebe-se que a energia liberada no Japão

$$9 = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E_1}{E_0}\right)$$

$$\frac{27}{2} = \log\left(\frac{E_1}{E_0}\right)$$

Sobre a energia liberada na China,

$$7 = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E_2}{E_0}\right)$$

$$\frac{21}{2} = \log\left(\frac{E_2}{E_0}\right)$$

Assim, ao subtrair as igualdades e a aplicação da propriedade do Logaritmo do Quociente, tem-se:

$$\frac{27}{2} - \frac{21}{2} = logE_1 - logE_0 - (logE_2 - logE_0)$$

$$3 = logE_1 - logE_2$$

$$3 = \log\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$$

Aplicando a definição de logaritmo:

$$10^3 = \frac{E_1}{E_2}$$

Sendo assim, a relação entre as energias liberadas é dada por $E_1 = 10^3.E_2$

7. A Alometria (ENEM 2012)

Dentre outros objetos de pesquisa, a Alometria estuda a relação entre medidas de diferentes partes do corpo humano. Por exemplo, segundo a Alometria, a área A da superfície corporal de uma pessoa relaciona-se com a sua massa m pela fórmula $A = k.m^{\frac{2}{3}}$, em que k é uma constante positiva.

Se no período que vai da infância até a maioridade de um indivíduo sua massa é multiplicada por 8, por quanto será multiplicada a área da superfície corporal?

Solução:

Sendo A a superfície corporal de uma pessoa no período infantil e S a superfície corporal no período da maioridade, pode-se entender que:

$$A = k.m^{\frac{2}{3}}$$

$$S = k.(8m)^{\frac{2}{3}}$$

Dessa maneira,

$$\frac{S}{A} = \frac{k.(8m)^{\frac{2}{3}}}{k.m^{\frac{2}{3}}} = \frac{8^{\frac{2}{3}}.m^{\frac{2}{3}}}{m^{\frac{2}{3}}} = 8^{\frac{2}{3}}$$

Aplicando a propriedade da potência com os radicais, tem-se:

$$\sqrt[3]{8^2}$$

$$\sqrt[3]{2^3.2^3}$$

$$2.2 = 4$$

Logo, a área da superfície corporal será multiplicada por 4.

8. Valores de PH (ENEM 2012)

Uma dona de casa acidentalmente deixou cair na geladeira a água proveniente do degelo de um peixe, o que deixou um cheiro forte e desagradável dentro do eletrodoméstico. Sabe-se que o odor característico de peixe se deve as aminas e que esses compostos se comportam como bases. Na tabela são listadas as concentrações hidrogeniônicas de alguns materiais encontrados na cozinha, que a dona de casa pensa em utilizar na limpeza da geladeira.

Quadro 5 – Concentração de H_3O^+ de acordo com o seu material.

Material	Concentração de $H_3O^+(mol/L)$
Suco de Limão	10^{-2}
Leite	10^{-6}
Vinagre	10^{-3}
Álcool	10^{-8}
Sabão	10^{-12}
Carbonato de Sódio/Barrilha	10^{-12}

Fonte: ENEM (2012)

Dentre os materiais listados, quais são apropriados para amenizar esse odor?

Solução:

De acordo com o enunciado, o odor característico se deve as aminas e essa substância é tida como base. Assim, para amenizar e ter o equilíbrio deve-se utilizar soluções com caráter ácido. Diante disso, a partir da tabela, percebe-se algumas substâncias que podem combater com esse odor.

A partir da Escala de pH, a qual vai de 0 a 14, uma solução que possui $pH > 7$ é considerada básica; $pH \leq 7$ é considerada ácida e neutra quando o $pH = 7$. Para determinar isso, deve-se realizar o cálculo da concentração de íons H^+ pela fórmula:

$$pH = -\log[H^+]$$

Por meio dessa fórmula e usando os dados da tabela, tem-se:

Suco de Laranja:

$$pH = -\log[10^{-2}]$$

$$pH = -(-2)$$

$$pH = 2$$

Leite:

$$pH = -\log[10^{-6}]$$

$$pH = -(-6)$$

$$pH = 6$$

Vinagre:

$$pH = -\log[10^{-3}]$$

$$pH = -(-3)$$

$$pH = 3$$

Álcool:

$$pH = -\log[10^{-8}]$$

$$pH = -(-8)$$

$$pH = 8$$

Sabão:

$$pH = -\log[10^{-1}\ ]$$

$$pH = -(-12)$$

$$pH = 12$$

Carbonato de Sódio/Barrilha:

$$pH = -\log[10^{-1}\ ]$$

$$pH = -(-12)$$

$$pH = 12$$

Assim, as substâncias mais ácidas são Suco de Laranja e Vinagre, pois estão mais próximas do 0 na escala de pH.

5. CONCLUSÃO

Como visto nesse trabalho, realizamos uma abordagem sobre o desenvolvimento do estudo de funções, funções logarítmicas e funções exponenciais, devido a necessidade de termos um material ao qual auxiliasse não só a compreensão desse desenvolvimento, mas que abordasse de uma forma mais clara os conceitos, definições e aplicações, considerando a sua abordagem em diferentes temas e contextos.

Ao desenvolver este trabalho, percebemos que o estudo das funções logarítmicas e exponenciais possibilitou o acesso a mais conhecimentos de diversas situações as quais podemos aplicar, seja em cálculos de juros, datação de carbono, pH de soluções, cálculo de índice de terremotos, etc.

Por fim, compreendemos ao longo do trabalho, sobre a importância dos logaritmos e exponenciais, no desenvolvimento científico e tecnológico, bem como a necessidade do ser humano de se aprimorar, no que diz respeito aos conceitos aplicados, teorias e a forma como eram realizados os cálculos em séculos passados. É verdade que isso foi um resultado mútuo, de esforços de diversos nomes importantes durante a trajetória do desenvolvimento da Matemática como uma Ciência presente e necessária na sociedade.

6. REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B. **História da Matemática**, revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide – 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

YOUSSEF, Antônio Nicolau; SOARES, Elizabeth; FERNANDEZ, Vicente Paz. **Matemática de olho no mundo do trabalho.** São Paulo: Scipione, 2005.

CORREIA, J. M. T. **A Evolução do Conceito da Função na Segunda Metade do Século XVIII**.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP: UNICAMP, 2004.

IEZZI, G; DOLCE, O; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 3. ed. São Paulo: Atual, 1977. Vol. 2

DANTE, L.R. **Matemática: Contexto & Aplicações**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016. Vol. 1.

LEONARDO, F.M. **Conexões com a Matemática**. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016. Vol. 1.

MICHAELIS, Interdisciplinar – Significado. UOL, 2022. **Dicionário Online.** Disponível em: https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/interdisciplinar. Acesso em: 03 de dezembro de 2022

MICHAELIS, Interdisciplinaridade – Significado. UOL, 2022. **Dicionário Online**. Disponível em: https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/interdisciplinaridade/. Acesso em: 03 de dezembro de 2022

VEIGA-NETO, Alfredo José da. Produção e construção do conhecimento nas diferentes disciplinas – **A problemática da interdisciplinaridade**. In: *Anais do VII ENDIPE*, Goiânia-60, 5 a 9 de junho de 1994, Vol. 2.

CODAP/UFS – Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Sergipe. **Função Exponencial.** São Cristóvão, SE. Disponível em: https://codap.ufs.br/uploads/page_attach/path/8507/Fun__o_Exponencial.pdf. Acesso em: 28 de novembro de 2022.

IME/UNICAMP – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas. **Undécima Lista de Exercícios de Função Exponencial e Função Logarítmica**. Campinas, SP. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/~chico/ma091verao/ma091_ex11.pdf. Acesso em: 28 de novembro de 2022.

INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Caderno Verde (Libras) - ENEM/2017**. Brasília, DF. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2017/2017_PV_impresso_D2_CD12.pdf. Acesso em: 01 de Dezembro de 2022.

INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Caderno Azul – ENEM/2016**. Brasília, DF. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/2016_PV_impresso_D2_CD7.pdf. Acesso em: 01 de Dezembro de 2022.

INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Caderno Azul – ENEM/2012**. Brasília, DF. Disponível em:

https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2012/dia1_caderno1_azul.pdf. Acesso em: 02 de Dezembro de 2022.

INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Caderno Azul – ENEM/2012**. Brasília, DF. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2012/dia2_caderno7_azul.pdf. Acesso em: 02 de Dezembro de 2022.