



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

PEDRO DE ASSUNÇÃO NUNES DE FREITAS

DIVISÃO: UM DESAFIO NO ENSINO DA MATEMÁTICA

BELÉM – PARÁ

2021

PEDRO DE ASSUNÇÃO NUNES DE FREITAS

DIVISÃO: UM DESAFIO NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Universidade Federal do Pará como pré-requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática sob orientação do Prof. Dr. Paulo Vilhena da Silva.

BELÉM – PARÁ

2021

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

PEDRO DE ASSUNÇÃO NUNES DE FREITAS

DIVISÃO: UM DESAFIO NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Universidade Federal do Pará como pré-requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática sob orientação do Prof. Dr. Paulo Vilhena da Silva.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Paulo Vilhena da Silva
Faculdade de Ciências Exatas e Naturais / ICEN / UFPA – Orientador

Prof. Dr. Francisco Paulo Marques
Faculdade de Ciências Exatas e Naturais / ICEN / UFPA – Membro

Prof. Dr. João Batista
Faculdade de Ciências Exatas e Naturais / ICEN / UFPA – Membro

Data da Apresentação: ____ de _____ de 2021.

Conceito: _____

À minha mãe, Maria de Nazaré Nunes de Freitas,
com todo amor e carinho.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de fazer meus agradecimentos, sei que não é possível citar nomes de todos que direta ou indiretamente me ajudaram nesta árdua caminhada, mas quero que todos sintam-se abraçados.

Em primeiro lugar agradeço a Deus o autor do universo que me abriu as portas e permitiu que chegasse até aqui, sempre me dando força, energia e equilíbrio para estar firme e, mesmo nas horas de fraqueza ajudou-me a prosseguir.

Também agradeço todo apoio de minha família, pois mesmo não tendo condições financeiras, nem formação acadêmica, sempre me incentivaram a continuar, a nunca desistir!

Aqui citaria meu pai que não estará mais em vida quando passei no vestibular, mas que foi a pessoa a trazer-me do interior de Cametá para esta grande metrópole, a fim de que aqui pudesse estudar e agradeço também à minha mãe, a pessoa que idealizou isso, que em momento algum me deixou desistir deste objetivo.

Agradeço também a Universidade Federal do Pará, “essa boa amiga”, um lugar rico de conhecimento e de pessoas espetaculares que não medem esforços para servir a todos.

Aos professores pelo quais tive a honra de conhecer, homens e mulheres cheios de conhecimentos dispostos a compartilhar, pessoas curiosas que buscam sempre à excelência no que tange a educação, pessoas dispostas que a mim não faltaram com suas atenções ou obrigações.

A UFPA me apresentou grande colegas e amigos, pessoas especiais que estiveram comigo no Restaurante Universitário, na Biblioteca, pelos corredores e até mesmo nos terminais, a resiliência de alguns para compartilhar conhecimento, exercícios ou tão simplesmente, mas com imenso valor, apenas momentos de descontração, a todos os meus agradecimentos.

Ao terminar não deixaria de agradecer ao professor Dr. Paulo Vilhena da Silva pela enorme atenção, delicadeza e paciência para comigo.

Também a meu grande amigo, Henrique Maia, uma pessoa responsável por eu estar terminando o curso, sempre prestativo, me ajudando nas dificuldades, ele sempre esteve presente, meu amigo, muito obrigado!

De coração cheio de felicidades e gratidão só me resta dizer, muito obrigado!

A Matemática é o alfabeto que Deus usou para escrever o Universo.

Galileu Galilei.

RESUMO

Este Trabalho de Conclusão de Curso tem como objetivo entender a dificuldade dos alunos, seja ele ensino fundamental ou médio, em dividir um número qualquer, **uma vez que essas aplicações são fundamentais em demais áreas da matemática, assim como em outras ciências e, pude notar, em meu estágio supervisionado, que muitos discentes possuíam esse déficit.** Para tanto, buscamos diversos trabalhos, estudiosos do assunto e literaturas que pudessem nos esclarecer. Sob olhar bem abrangente tivemos grandes esclarecimentos e, por meio de uma pesquisa bibliográfica, elencamos alguns fatores no que tange a dificuldade do aluno na aplicação do Algoritmo da Divisão de Euclides, propondo também algumas metodologias como o uso do material dourado e o uso da Resolução de Problemas como metodologias auxiliares de ensino. Próspero com o resultado do estudo, espero ter contribuído para com os que buscam entender o motivo da dificuldade de grande maioria dos alunos em dividir possam usar este trabalho como um dos materiais de referência. Que todos possamos ter e provocar o interesse dos alunos em ter o olhar para divisão como temos para outras operações adição, subtração e multiplicação, tornando tal operação mais compreensível para sua aprendizagem.

Palavras-Chave: Algoritmo da Divisão de Euclides, Material Dourado, Resolução de Problemas, Aritmética Básica.

ABSTRACT

The objective of this Course Conclusion Work is to understand the difficulties of two students, according to the elementary or secondary level, and to divide a qualifying number, since these applications are fundamental in other areas of mathematics, as well as in other sciences, and I could notice, in my supervised internship, that many students had this deficit. As an assistant to Professor Dr. Paulo Vilhena da Silva, we are looking for several works, experts in the subject and literature that we can clarify. To be more comprehensive, we have great clarifications and, through a bibliographic search, we chose some factors that do not go to the difficulties of the individual in the application of the Euclid Division Algorithm, I also propose some methodologies such as the use of gold and the use of Resolution Problems as auxiliary teaching methodologies. Thriving as a result of this study, I hope I contributed to how you seek to understand or the difficulty of the vast majority, two people who know how to share, can use this work as two reference materials. May we all have the opportunity to provoke or interest two students in the division area, as we fear for additional operations, subtraction and multiplication, making this operation more comprehensive for their learning.

Keywords: Euclid Division Algorithm, Golden Bead Materials, Problem Solving, Basic Arithmetic Operations.

SUMÁRIO

CONSIDERAÇÕES INICIAIS	10
1 A DIVISÃO EUCLIDIANA	12
1.1 Conjuntos Numéricos.....	13
1.2 Critério de Divisibilidade.....	15
2 O ALGORITMO DA DIVISÃO DE EUCLIDES	17
2.1 A divisão com Números Naturais	18
2.2 A divisão com Números Inteiros	20
2.3 A divisão com Números Racionais.....	22
2.4 A divisão de Fração por Fração	23
2.5 A divisão em outros Sistemas de Numeração da antiguidade	27
2.5.1 A divisão no Sistema de Numeração Egípcio	27
2.5.2 A divisão no Sistema de Numeração Maia	28
3 A DIVISÃO COMO DESAFIO NO APRENDIZADO DA MATEMÁTICA	32
3.1 Um olhar por meio da Estatística	33
3.1.1 Dados do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA).....	33
3.1.2 Dados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB).....	33
3.2 As dificuldades das crianças com a divisão.....	34
4 PROPOSTAS DE INTERVENÇÃO	38
4.1 Material Dourado e o Ensino da divisão	38
4.1.1 Alguns estudos de caso	41
4.2 O Ensino da divisão por meio da Resolução de Problemas	44
4.2.1 Alguns estudos de caso	50
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	54
REFERÊNCIAS	57
ANEXO 1.....	60

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O presente é fruto de um estudo feito por este aluno de graduação, da Universidade Federal do Pará, em conjunto com o professor doutor Paulo Vilhena da Silva, com objetivo de entender os problemas no ensino da aritmética, em particular no estudo da divisibilidade, com a intenção de buscar a compreensão da dificuldade em dividir qualquer quantia e não somente de números naturais, mas também decimais ou racionais, bem como esse processo era feito em outros sistemas numéricos e propor um meio para amenizar tal problema.

Temos como base o estudo da aritmética e a experiência de professores em salas de aula e, a partir daí, direcionaremos ao fato de que, estatisticamente, os alunos que chegam ao ensino médio apresentam grande dificuldade no processo da divisibilidade.

Diante deste contexto buscamos literaturas que nos norteariam sobre o assunto, encontrando assim os escritos o professor Alan Gonçalves Lacerda que versava sobre *A Linguagem e o Outro* na perspectiva *Wittgensteiniana*, o qual ressalta o fato de grande parte dos alunos terem dificuldades no processo de ensino-aprendizagem da aritmética, em particular, na divisão euclidiana.

Nesse sentido, Lacerda (2016, p.3) afirma que, as dificuldades encontradas com os problemas de divisão dizem respeito ao seguir as regras matemáticas, desde da manipulação com algoritmos escritos, como também a leitura de enunciados dos problemas matemáticos.

Assim, além das habilidades matemáticas, o aluno também deve possuir uma grande capacidade para interpretar o texto o que pode auxiliá-lo na divisão, os enunciados de problemas matemáticos requerem a compreensão dos textos e uma interpretação precisa do que se quer do problema.

Portanto, até mesmo o agente que elabora um problema matemático não está fora dessa problemática, de examinar as regras matemáticas e o modo da escrita de maneira que o destinatário que irá resolver tenha a clareza em contextualizar.

Encontramos no texto de Correa que:

Embora de natureza complexa, a divisão está presente, desde cedo, em diversas atividades do cotidiano de crianças: dividir objetos com um parceiro, repartir quantidades (discretas ou contínuas) em partes iguais, colocar uma mesma quantidade de objetos em diversos recipientes. Antes mesmo de entrar na escola, as crianças apresentam um conhecimento espontâneo sobre vários conceitos matemáticos. (CORREA, 2004, apud, DE OLIVEIRA SILVA e CORREIA, 2015, p. 5)

Vale ressaltar que uma das grandes inspirações para escrevermos sobre este assunto foram às aulas do Estágio Supervisionado, onde pudemos observar grandes dificuldades desde

os alunos do ensino fundamental até o médio, em particular nas quatro operações aritméticas fundamentais, sendo a divisão o grande “terror” de boa parte dos alunos.

Também reforçamos que é importante desenvolver nos alunos o hábito da leitura, em especial, de textos matemáticos destacando as palavras-chave do enunciado, facilitando assim a compreensão do problema.

A metodologia de pesquisa deste trabalho consiste em, por meio da literatura, defender que a atual forma de ensinar aplicada nas escolas de ensino básico está defasada, pois a partir das nossas observações no supervisionado e, respaldado em dados estatísticos, percebemos que os índices de proficiência dos alunos do ensino básico são muito baixos, e que, esse déficit também ocorre pela falta de conteúdos de base, reforçando que apesar de o ensino tradicional ser importante, no que diz respeito ao ensino de regras e teoremas ele, por si só, em nosso mundo tão globalizado, torna-se ineficaz, e necessita de uma metodologia auxiliar para o complementar.

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

No primeiro capítulo abordamos os conceitos relacionados a divisão euclidiana, bem como aspectos históricos, os conjuntos numéricos e os critérios de divisibilidade, que podem ser ferramentas fundamentais para o ensino do algoritmo da divisão

O segundo capítulo traz o algoritmo da divisão e os elementos presentes nesse algoritmo, bem como sua demonstração e verificação da sua aplicação nos conjuntos numéricos abordados no capítulo 1.

No capítulo subsequente buscamos, por meio da literatura e de dados estatísticos uma fundamentação teórica para conjecturarmos o porquê desses índices estarem tão reduzidos e trazemos nossa proposta de intervenção para tentar amenizar as dificuldades encontradas no processo de ensino dos métodos de divisibilidade.

Em minhas considerações finais, faço uma breve retrospectiva de tudo que vive durante a elaboração deste trabalho, bem como uma conjectura do que espero atingir com ele e com uma tão sonhada melhora nos aprendizados de nossas crianças e jovens.

1 A DIVISÃO EUCLIDIANA

De acordo com Roque e De Carvalho (2012), a organização do conhecimento nos *Elementos*, por volta de 300 a.C., concedeu a Euclides de Alexandria (323 – 285 a.C) o título de “o pai da geometria”, talvez até mesmo “o pai da matemática”. Euclides define, em sua coleção de treze livros, conceitos de Axioma, Postulado, Proposição e Teorema; e sobre eles faz toda a construção lógica de seu trabalho.

Os *Elementos* são um marco na história da matemática, podemos considerá-los como um divisor de águas de como a forma de se pensar e organizar o conhecimento pode ser estudada, conforme destaca o pesquisador George Simmons:

Escrita em grego, a obra cobre toda a aritmética, a álgebra e a geometria conhecidas até então no mundo grego, reunindo o trabalho de predecessores de Euclides, como Hipócrates e Eudóxio. Sistematizou todo o conhecimento geométrico dos antigos, intercalando os teoremas já então conhecidos com a demonstração de muitos outros, que completavam lacunas e davam coerência e encadeamento lógico ao sistema por ele criado. Após sua primeira edição foi copiado e recopiado inúmeras vezes, tendo sido traduzido para o árabe em (774). A obra possui mais de mil edições desde o advento da imprensa, sendo a sua primeira versão impressa datada de 1482 (Veneza, Itália). Essa edição foi uma tradução do árabe para o latim. Tem sido – segundo George Simmons – “considerado como responsável por uma influência sobre a mente humana maior que qualquer outro livro, com exceção da Bíblia”. (101 GÊNIOS QUE MUDARAM A HUMANIDADE, 2017, p. 24).

Contudo, voltaremos neste trabalho, às contribuições de Euclides para os processos aritméticos, em especial, a divisão euclidiana. A saber, é no sétimo livro que Euclides trata sobre divisibilidade, números primos, e o algoritmo de Euclides para determinar o mínimo múltiplo comum e o máximo divisor comum.

A divisão euclidiana, ou divisão com resto, é uma das quatro operações aritméticas básicas que aprendemos na escola. Podemos formulá-la da seguinte forma:

Sejam a e b números inteiros, com $b \neq 0$, existem q e r , também inteiros, com $0 \leq r < |b|$ e $a = bq + r$, o método de Euclides garante que são q e r unicamente determinados e são denominados, respectivamente, *quociente* e *resto*.

Contudo, antes de começarmos a escrever sobre os principais problemas relacionados ao ensino da divisão, faremos uma breve organização acerca dos conjuntos numéricos.

1.1 Conjuntos Numéricos

Há mais de 30 mil anos surge nos seres humanos a necessidade de contar objetos, pedras ou animais, assim faz necessário, então, a existência de algo que pudesse suprir essa necessidade e então, surgem os números, que serão os protagonistas deste capítulo.

Os primeiros números que surgiram auxiliavam os homens nesse processo de contagem foram chamados de números naturais.

Definição 01 (números naturais): São os números utilizados para contar, incluindo o zero. A saber, podemos escrevê-lo como:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$

Com a expansão comercial, por volta do século XIV, torna-se necessária a existência de um número que represente quantidades negativas, para, por vezes, representar as dívidas. Nesse contexto, surgem os números inteiros.

Definição 02 (números inteiros): É representado pela letra Z, devido ao fato da palavra Zahl em alemão significar "número". O conjunto dos números inteiros é o conjunto dos números naturais acrescido dos seus opostos negativos.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Contudo, sabemos que na natureza não há apenas quantidades inteiras de objetos, como, por exemplo, o comprimento, em metro de uma árvore, assim números que possuem parte decimal são chamados números racionais.

Definição 03 (números racionais): Um número x é chamado número racional se existem inteiros a e b , com $b \neq 0$, tais que $x = \frac{a}{b}$. Ou seja,

$$\mathbb{Q} = \left\{ x : \frac{a}{b}; a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Roque e De Carvalho (2012) destacam que, por volta do século III a.C. o matemático grego Arquimedes de Siracusa, a partir do método da exaustão, notou que o quociente entre o comprimento da circunferência e o raio da mesma, independente do tamanho dessa, se aproximava sempre do mesmo número, nesse caso, 3,14, que fora chamado de "pi".

Através desse método, ele também conseguiu calcular a área do círculo delimitado por uma circunferência de raio R.

Bezerra (2015) reforça que, no século XVI o holandês Ludolph Van Ceulen encontrou 35 casas decimais para esse número. Ele começou com um polígono 7 de 15 lados e dobrando o número de lados 37 vezes, Ceulen obteve um valor para π com 20 casas decimais. Em seguida, usando um número de lados ainda maior, ele conseguiu uma aproximação com 35 casas decimais!

Tamanha deve ter sido a emoção de Van Ceulen que, na sua morte, sua esposa mandou gravar no túmulo o valor de π com as 35 casas decimais.

A saber, temos

$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230$
 $781640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223172$
 $535940811284811174502841027019385211055596446229489549303819644288109756659$
 $33446128475682337867831652712019091456485669234603486104543266482\dots$

Em 1737, o grande matemático suíço Leonhard Euler atribuiu um símbolo pra este número, o π , e demonstrou que esse número não era racional, tais números formavam um novo conjunto numérico, o Conjunto dos Irracionais.

Definição 04 (números irracionais): É todo número que não é racional.

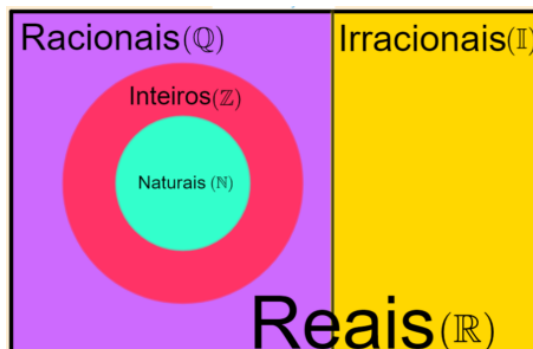
Ao organizarmos todos os números que já estudamos até aqui, podemos construir um novo conjunto numérico, o conjunto dos números reais.

Definição 05 (números reais): É todo número que é racional ou irracional.

Sabemos que existem outros conjuntos numéricos, porém como foge as necessidades deste trabalho não os abordaremos.

Podemos organizar essa estrutura numérica no chamado Diagrama de Venn-Euler, conforme a ilustração 1:

Ilustração 1: Conjuntos Numéricos



Disponível em: <https://escolaeducacao.com.br>. Acesso em 12 jul. 2020.

Assim, munidos desses números surgem as chamadas operações aritméticas e consigo vários problemas matemáticos, em particular, o problema da divisão, que nos traz a reflexão sobre a compreensão de que forma estudar o algoritmo da divisão, essa operação aritmética e o algoritmo em si são muito difíceis de compreender e aprender ao ponto que alguns professores consideram até o ensino do algoritmo desnecessário, defendendo que deve ser calculado na máquina como fazemos, por exemplo, com a raiz quadrada.

Mas essa não é a perspectiva defendida neste trabalho, a compreensão do algoritmo da divisão traz várias vantagens às crianças no estudo da matemática, as quais elencaremos no decorrer dos próximos capítulos.

No tópico a seguir veremos os principais critérios de divisibilidade que podem auxiliar no ensino da divisão.

1.2 Critério de Divisibilidade

Antes de escrevermos a cerca dos critérios é importante que relembremos o que é um número primo.

Definição 06 (números primos): Todo número natural, diferente de zero e um, que possui apenas dois divisores positivos, o um e ele mesmo, é chamado número primo. Caso contrário é chamado número composto.

A partir deste momento escreveremos as regras de divisibilidade de alguns números primos.

Divisibilidade por 2: Um número é divisível por 2 quando o algarismo da sua unidade é divisível por dois.

Exemplo 01: Os números 246, 4 678 e 14 684 são divisíveis por 2. Os números 237, 4 489 e 15 797 não são divisíveis por 2.

Divisibilidade por 3: Um número é divisível por três quando a soma dos seus algarismos for divisível por 3.

Exemplo 02: Os números 453, 2 565 e 345 312 são números divisíveis por 3. Os números 4 564, 5 632 e 45 623 não são divisíveis por 3.

Divisibilidade por 5: Um número é divisível por 5 quando o algarismo da sua unidade é igual a 0 ou 5.

Exemplo 03: Os números 355, 6 750 e 46 785 são divisíveis por 5. Os 46 578, 567 894 e 87 659 457 não são divisíveis por 5.

Divisibilidade por 7: Um número é divisível por 7 quando o módulo da subtração do número gerado a partir do original, sem o algarismo da unidade, e o dobro do algarismo da unidade for divisível por 7.

Exemplo 04: Os números 343, 2 401 e 24 255 são divisíveis por 7. Os números 573, 2 421 e 456 789 não são divisíveis por 7.

Divisibilidade por 11: Um número é divisível por 11 quando o módulo da subtração entre a soma dos seus algarismos de ordem ímpar e a soma dos seus algarismos ordem par é divisível por 11.

Os números 1 331, 444 444 e 38 115 são divisíveis por 11. Os números 205, 3 455 e 13 819 não são divisíveis por 11.

Divisibilidade por 13: Um número é divisível por 13 quando a soma entre o número gerado a partir do original, sem o algarismo da unidade, e o quádruplo do algarismo da unidade.

Exemplo 05: Os números 156, 12 805 e 7 657 são divisíveis por 13. Os números 852, 6 298 e 95 621 não são divisíveis por 13.

Assim, com essas técnicas é possível que o aluno consiga melhorar sua habilidade com o processo de divisão, uma vez que, ele sabe se é possível, ou não, efetuar a divisão exata.

No capítulo a seguir enunciaremos e demonstraremos o Algoritmo da Divisão de Euclides, que é a base para os problemas de divisão, além de estudarmos a aplicação do algoritmo nos diferentes conjuntos numéricos.

2 O ALGORITMO DA DIVISÃO DE EUCLIDES

Pautados no trabalho do professor Abramo Hefez, *Aritmética*, de 2013, utilizado como texto base para as turmas do mestrado profissional em matemática, relembremos alguns conceitos importantes a respeito do método da divisão.

Considerado um dos mais belos teoremas da matemática, o Algoritmo da Divisão de Euclides pode ser enunciado da seguinte maneira:

Teorema 01: Dados $x \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$, existem únicos inteiros q , r chamados respectivamente de quociente e resto, tais que

$$x = qy + r, 0 \leq r < |y|.$$

Demonstração 01: Antes de iniciarmos a demonstração deste teorema, vejamos um exemplo numérico. Sejam $x = 15$ e $y = 2$, então o quociente e o resto serão, respectivamente 7 e 1, tais que

$$15 = 7 \cdot 2 + 1, 0 \leq 1 < 2.$$

Com efeito, temos dois casos a considerar:

Caso 01. $y > 0$.

Da existência: Neste caso, consideremos o conjunto $B = \{x - ay; a \in \mathbb{Z}, x - ay \geq 0\}$.

Perceba que B é não vazio, pois se $a = 0$,

$$x - (-|x|y) = x + |x|y \underset{y > 0}{\geq} x + |x| \geq 0.$$

Como B é um subconjunto não-vazio de \mathbb{N} , pelo Princípio da Boa Ordenação (vide anexo 01), B possui um elemento mínimo, sem perda de generalidade, o chamaremos de r . Portanto, existe um $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$r = x - qy.$$

Suponhamos agora que $r \geq |y|$, nesse caso, podemos escrever $r = y + b$, $b \geq 0$, assim

$$\begin{aligned} y + b &= x - qy \\ b &= x - (q+1)y \end{aligned}$$

Ou seja, temos que $b \in B$ e, como $b < r$, teríamos um elemento de B que é menor que o mínimo, um absurdo. Logo, $0 \leq r < |y|$.

Da unicidade: Suponhamos que existam q_1, q_2, r_1 e r_2 , tais que

$$x = q_1y + r_1 = q_2y + r_2$$

Com $0 \leq r_1, r_2 < |y|$. Ou seja $0 \leq |r_1 - r_2| < |y|$.

Contudo, temos

$$\begin{aligned} q_1y + r_1 &= q_2y + r_2 \\ (q_1 - q_2)y &= r_2 - r_1 \\ |q_1 - q_2|y &= |r_2 - r_1| \end{aligned}$$

Se $r_1 \neq r_2$, então $|q_1 - q_2|y \geq 1$ e, portanto,

$$y \leq |q_1 - q_2|y = |r_2 - r_1| < y$$

Um absurdo. Logo, $r_1 = r_2$ e, conseqüentemente, $q_1 = q_2$.

Caso 02. $y < 0$.

Neste caso, basta trabalharmos com os inteiros x e $|y|$. Pelo caso anterior, sabemos que existem únicos inteiros q e r tais que

$$x = q|y| + r$$

Com $0 \leq r < |y|$. Fazendo $q_1 = -q$, temos

$$x = q_1y + r$$

Com $0 \leq r < |y|$, e como q_1 também é unicamente determinado, acabamos aqui a demonstração. ■

Com essa ferramenta podemos efetuar a divisão de quaisquer dois números, desde que o divisor seja diferente de zero, e, agora, iremos abordar como pode ser aplicado o Algoritmo de Euclides nos Naturais, nos Inteiros e nos Racionais.

2.1 A divisão com Números Naturais

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), na unidade temática Números, o objeto do conhecimento *Divisão Euclidiana* deve ser ensinado no 6º ano do ensino fundamental, e o documento rege que

(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora. (BNCC, 2018, p.301).

Desse modo, em relação à operação divisão dos números naturais, o algoritmo da divisão é estruturado conforme a ilustração 2:

Ilustração 2: Algoritmo da divisão

$$\begin{array}{r|l} \text{Dividendo} & \text{Divisor} \\ \hline \text{Resto} & \text{Quociente} \end{array}$$

Fonte: Próprio Autor.

A seguir, veremos dois modos que o professor pode utilizar para introduzir o conceito de divisão para os alunos do sexto ano:

Exemplo 06: Quanto é 35 dividido por 5?

Resolução 01: Pensemos na operação inversa, qual número deve ser multiplicado por 5 para obtermos como produto o número 35? Neste caso, deve ser o 7.

Resolução 02: Utilizando o algoritmo da divisão, temos

$$\begin{array}{r|l} 35 & 5 \\ \hline 0 & 7 \end{array}$$

E, conseqüentemente, o quociente 7, que será o número de grupos formados, e o resto 0.

Exemplo 07: Para uma atividade em classe, iremos dividir a turma, de 35 alunos em grupos com 5 alunos em cada. Quantos grupos serão formados?

Resolução 01: Perceba que, para resolver esse problema, podemos utilizar o algoritmo da divisão. Contudo, caso a classe tiver 35 alunos (o professor pode, ao preparar a aula contar quantos alunos a classe possui) o professor pode pedir para os alunos se dividirem em grupos com 5, e verificar quantos grupos seriam formados.

Resolução 02: Utilizando o algoritmo da divisão, temos

$$\begin{array}{r|l} 35 & 5 \\ 0 & 7 \end{array}$$

E, conseqüentemente, o quociente 7, que será o número de grupos formados, e o resto 0.

Contudo, esses dois exemplos utilizando os conceitos da chamada divisão exata, note que, caso o número de alunos da turma fosse 36, teríamos

$$\begin{array}{r|l} 36 & 5 \\ 1 & 7 \end{array}$$

E, assim, ficariam 7 grupos e 1 aluno sem grupo. Ressaltamos que, nesse conjunto numérico, a conta “acaba” neste ponto, pois, não é possível dividir 1 para 5.

Com base nisso, podemos concluir que, nem sempre, a divisão de números naturais resultará em um número natural.

A seguir, veremos a divisão com números inteiros, onde deveremos observar a regra dos sinais.

2.2 A divisão com Números Inteiros

Fedrico (2001, p.106) afirma que Bezout definiu a multiplicação algébrica, de inteiros positivos, como uma operação em que se repete uma grandeza chamada multiplicando tantas vezes quantas indica uma outra grandeza chamada multiplicador.

Neto salienta ainda que

para iniciar o estudo dos números inteiros, sugerimos aos professores fazer uma sondagem de conhecimento do conteúdo dos números naturais para, se for o caso, iniciar com uma revisão, onde se vejam as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão e os procedimentos de solução de expressões numéricas. (NETO, 2010, p. 48).

Ressaltamos também que, o conjunto dos números inteiros só é mostrado para os alunos no 7º ano do ensino fundamental e, para o estudo desses números, vamos dividir o conjunto em três conjuntos disjuntos:

$$\mathbb{Z} = (-\infty, 0) \cup \{0\} \cup (0, +\infty)$$

i) $X = (0, +\infty)$.

Neste caso, temos a divisão dos números naturais.

ii) $X = \{0\}$

Neste caso, zero dividido por qualquer número sempre será zero.

iii) $X = (-\infty, 0)$

Neste caso, precisaremos lembrar a regra dos sinais para a multiplicação, faremos os casos $x(-y)$ (para $(-x)y$ a demonstração é análoga) e $(-x)(-y)$.

Sabemos que $a \cdot 0 = 0, \forall a \in \mathbb{Z}$.

Daí, temos

$$\begin{aligned}x \cdot 0 &= 0 \\x[(-y) + y] &= 0 \\x(-y) + xy &= 0 \\x(-y) + xy - xy &= 0 - xy \\x(-y) &= -xy\end{aligned}$$

Demonstraremos agora que $(-x)(-y) = xy$. Com efeito, temos

$$\begin{aligned}(-x) \cdot 0 &= 0 \\(-x)[(-y) + y] &= 0 \\(-x)(-y) + (-x)y &= 0 \\(-x)(-y) + (-x)y - (-x)y &= 0 - (-x)y \\(-x)(-y) &= -(-x)y \\(-x)(-y) &= -(-xy) \\(-x)(-y) &= xy\end{aligned}$$

Por se tratar da operação inversa da multiplicação, a regra dos sinais da divisão deve respeitar a regra dos sinais da multiplicação. Assim, sendo x e y números inteiros, com $y \neq 0$, a regra dos sinais da divisão pode ser organizada na tabela

x	y	$\frac{x}{y} = \frac{x}{y}$
-----	-----	-----------------------------

$-x$	y	$\frac{-x}{y} = -\frac{x}{y}$
x	$-y$	$\frac{x}{-y} = -\frac{x}{y}$
$-x$	$-y$	$\frac{-x}{-y} = \frac{x}{y}$

Para facilitar a técnica de memorização dessa regra, o professor pode enuncia-la da seguinte forma:

Sinais iguais \Rightarrow Quociente positivo

Sinais diferentes \Rightarrow Quociente negativo

Assim como na divisão dentro do Conjunto dos Naturais, a divisão entre números inteiros não necessariamente será um número inteiro.

Veremos a seguir a divisão com os chamados números racionais.

2.3 A divisão com Números Racionais

Da silva e Almoloud reforçam que

Das quatro operações a divisão é, com certeza, a que mais apresenta dificuldade para a compreensão dos alunos, desde o estudo com os números naturais. No entanto, acreditamos ser possível dar algum significado para a operação de divisão com números fracionários a partir da mobilização de conhecimentos anteriores, com a idéia de “quantos cabem” e de algumas propriedades já conhecidas para os números naturais. (DA SILVA & AMOULOUD, 2008, p. 71)

Deste modo, entendemos que precisamos uma atenção maior ao se ensinar o processo de divisão do conjunto dos Números Racionais uma vez que temos elementos especiais, tais como os números decimais, as dízimas periódicas e as frações, bem como todos os números inteiros e, neste tópico, veremos a divisão desses números por números naturais.

Assim como nos conjuntos anteriores, é válido o algoritmo da divisão de Euclides, com o seguinte formato

Ilustração 3: Algoritmo da divisão

Dividendo	Divisor
Resto	Quociente

Fonte: Próprio Autor.

Contudo, para efetuarmos a divisão como números racionais, precisamos transformar o número para um decimal exato, depois, em um número natural.

Vejamos o processo para dividir 2,25 por 5, conforme a ilustração 4.

Ilustração 4: Dividindo 2,25 por 5 utilizando o algoritmo da divisão

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 2,25 \mid 5 \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \xrightarrow{\times 100} \\
 2250 \mid 500 \\
 \hline
 -2000 \\
 \hline
 2500 \\
 -2500 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \xrightarrow{\times 100} \\
 0,45
 \end{array}
 \end{array}$$

Fonte: Próprio Autor.

Note que, como 2,25 possui duas casas decimais, devemos multiplicar 2,25 e 5 por 100, assim, teremos o mesmo quociente da divisão de 225 por 500. Caso fossem três casas decimais, dividendo e divisor seriam multiplicados por 1 000; quatro casas decimais, multiplicados por 10 000, e assim sucessivamente, tal que, para n casas decimais, divisor e dividendo seriam multiplicados por 10^n .

Para estudarmos a divisão de dízimas periódicas, destinaremos o tópico a seguir, uma vez que, sentimos, seja na experiência com colegas de classe durante a graduação, seja com os professores do estágio supervisionado, que muitos não entendem a regra da divisão de fração por fração.

2.4 A divisão de Fração por Fração

Antes de enunciarmos a divisão de fração por fração vamos relembrar um método prático para transformarmos uma dízima periódica numa fração. Temos dois casos a considerar

i) Período simples: Nesse caso, após a virgula, há um período simples, como as dízimas:

$$\text{a) } 2,222\dots \quad \text{b) } 12,424242\dots \quad \text{c) } 1,213213\dots$$

Em cada caso, o período é simples e formado por um, dois e três algarismos, respectivamente. Relembremos o método prático para transformar esses três números em fração:

$$a) x = 2,222\dots$$

$$x = 2,222\dots \quad (1)$$

$$10x = 22,222\dots \quad (2)$$

Fazendo (2) – (1), temos

$$9x = 22 - 2$$

$$x = \frac{2}{9}$$

$$\text{Logo, } 2,222\dots = \frac{2}{9}.$$

$$b) x = 12,424242\dots$$

$$x = 12,4242\dots \quad (1)$$

$$100x = 1242,4242\dots \quad (2)$$

Fazendo (2) – (1), temos

$$99x = 1242 - 12$$

$$x = \frac{1230}{99}$$

$$\text{Logo, } 12,4242\dots = \frac{1230}{99}.$$

$$c) x = 1,213213\dots$$

$$x = 1,213213\dots \quad (1)$$

$$1000x = 1213,213\dots \quad (2)$$

Fazendo (2) – (1), temos

$$999x = 1213 - 1$$

$$x = \frac{1212}{999}$$

$$\text{Logo, } 1,213213\dots = \frac{1212}{999}.$$

Assim, para a transformação de uma dízima periódica simples, numa fração, basta analisarmos quantos algarismos formam o período, ou seja, se o período é composto por n algarismos, então a potência de dez que multiplicaremos o “ x ”, será 10^n .

ii) Período composto: Quando existe um grupo de um ou mais algarismos após a vírgula que não faz parte do seu período, ou seja, quando há a presença de algarismos intrusos, ou de antiperíodo, chamados a dízima de dízima periódica composta. Como as dízimas:

$$\text{a) } 1,4888\dots \quad \text{b) } 12,42111\dots \quad \text{c) } 7,42525\dots$$

Para transformarmos uma dízima periódica composta em fração, precisamos inicialmente transformar o seu período de composto para simples, assim, teríamos

$$\text{a) } 10x = 14,888\dots$$

$$\text{b) } 100x = 1242,111\dots$$

$$\text{c) } 10x = 74,2525\dots$$

Assim, basta agora transformarmos as “novas” dízimas, para frações, ou seja:

$$\text{a) } 10x = 14,888\dots$$

$$10x = 14,888\dots \quad (1)$$

$$100x = 148,888\dots \quad (2)$$

Fazendo (2) – (1), temos

$$90x = 148 - 14$$

$$x = \frac{134}{90}$$

$$\text{Logo, } 1,4888\dots = \frac{134}{90}.$$

$$\text{a) } 100x = 1242,111\dots$$

$$100x = 1242,111\dots \quad (1)$$

$$1000x = 12421,111\dots \quad (2)$$

Fazendo (2) – (1), temos

$$900x = 12421 - 1242$$

$$x = \frac{11179}{900}$$

$$\text{Logo, } 12,42111\dots = \frac{11179}{900}.$$

$$\text{c) } 10x = 74,2525\dots$$

$$10x = 74,2525... \quad (1)$$

$$1000x = 7425,2525... \quad (2)$$

Fazendo (2) – (1), temos

$$990x = 7425 - 74$$

$$x = \frac{7351}{990}$$

$$\text{Logo, } 7,42525... = \frac{7351}{990}.$$

Agora, veremos porque, na divisão de fração por fração, a regra diz que: “Conserva a primeira e multiplica pelo inverso da segunda”.

Suponhamos que você deseja fazer a seguinte operação $\frac{2}{3} \div \frac{3}{6}$, como regra, aplicamos os

seguintes passos

$$\frac{2}{3} \div \frac{3}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{3} = \frac{18}{18} = 1$$

Ou seja, de fato, conservamos a primeira e multiplicamos pelo inverso da segunda. Mas, a teoria por trás dessa operação por vezes é esquecida.

Carvalho e Gimenez (p. 182, 2009) embasam que essa regra pode ser entendida da seguinte forma, sejam as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, sendo todos os coeficientes diferentes de zero, então:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a \cdot d}{b \cdot c}}{1} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Reconhecemos que essa linguagem algébrica para o sexto ano pode ser muito complexa, contudo, acreditamos que apenas mostrarmos essa técnica para os alunos, ainda que numa única aula, irá fortalecer significativamente sua base matemática.

A seguir, veremos como alguns povos antigos procediam quanto ao cálculo da divisão.

2.5 A divisão em outros Sistemas de Numeração da antiguidade

Dividir é, nada mais, que repartir coisas, sejam objetos, sejam animais ou quaisquer outros elementos, fazendo uma viagem no tempo, assim buscamos entender como alguns povos lidavam com esses problemas e, baseados nos escritos da professora da USP Maria Galvão, em seu trabalho sobre *As origens da Matemática – dos processos de contagem aos sistemas de numeração*, 2014, destacaremos como os Egípcios e os Maias utilizavam os algoritmos para efetuar o processo de divisão.

2.5.1 A divisão no Sistema de Numeração Egípcio

Por volta de 3200 a.C, o rei do Alto Nilo, Menés, conquistou o Baixo Nilo unificando os dois reinos dando início a uma das maiores civilizações que já passaram pela terra, conhecidos por sua ciência, a civilização egípcia desenvolveu conhecimentos nas áreas de matemática e astronomia, dentre os conhecimentos matemáticos mais utilizados por eles destacam-se: raiz quadrada, frações, cálculos da área do círculo e do trapézio.

A multiplicação e a divisão feita pelos egípcios dava-se por meio do uso de duplicações sucessivas, por exemplo, multiplicar 19 por 25, temos

1*	25*
2*	50*
4	100
8	200
16*	400*
19 (1 + 8 + 16)	475 (400 + 50 + 25)

Escolhemos, na coluna da esquerda, números que somados, resultem em 19 e, na coluna da direita, seus correspondentes que, somados, resultarão no produto procurado.

Logo, $19 \times 25 = 475$.

Já o pensamento da divisão era similar, por exemplo, se quiséssemos dividir 676 por 13, temos,

1	13
2	26
4*	52*
8	104
16*	208*
32*	416*
52 (4 + 16 + 32)	676 (52 + 208 + 416)

Assim, precisamos procurar na coluna da direita números que, somados, resultem em 676 e, associar, com seus correspondentes que, somados, resultarão no quociente procurado.

$$\text{Logo, } \frac{676}{13} = 52.$$

Perceba que, esse método de dividir pode ser até mais complexo que o de Euclides, uma vez que, não é trivial enxergar que $676 = 52 + 208 + 416$.






















2.5.2 A divisão no Sistema de Numeração Maia

A Civilização Maia desenvolveu-se na região da Mesoamérica e teve seu auge entre 250 d.C. e 900 d.C., iniciando sua decadência após esse período, também conhecidos por seu conhecimento avançado em Matemática e Astronomia, os Maias tinham um complexo modo de medir o tempo, para poder controlar quando plantar e quanto colher suas hortaliças.

Para entender como funciona a operação divisão no sistema de numeração dos Maias, precisamos inicialmente conhecer seu sistema de numeração.

O Sistema de Numeração Maia é vigesimal, ou seja, é composto por 20 símbolos, formados por três “algarismos”, cuja associação pode ser feita com os números indo-arábicos conforme a ilustração 5:

Ilustração 5: Sistema de Numeração Vigesimal Maia

 0	 1	 2	 3	 4	 5	 6
 7	 8	 9	 10	 11	 12	 13
 14	 15	 16	 17	 18	 19	 20

Disponível em: <https://imaginariopuro.wordpress.com>. Acesso em: 18 dez. 2020 (adaptado).

Assim, de acordo com esse diagrama percebemos que a cada vintena utilizamos no máximo quatro pontos e três barras para escrever qualquer número no Sistema de Numeração Maia.

Para representar números maiores do que 20 os Maias escreviam seus números na vertical seguindo potências de vinte em notação posicional. Vejamos alguns exemplos:

a) $42 = 2 \cdot 20^1 + 2$, ou seja, no Sistema de Numeração Vigesimal Maia, temos

$$42 = \begin{array}{c} \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \end{array}$$

b) $225\ 412 = 1 \cdot 20^4 + 8 \cdot 20^3 + 3 \cdot 20^2 + 10 \cdot 20^1 + 12$, ou seja, no Sistema de Numeração Vigesimal Maia, temos

$$225\ 412 = \begin{array}{c} \bullet \\ \hline \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \\ \hline \hline \\ \bullet \bullet \\ \hline \hline \end{array}$$

Conhecendo como funciona o Sistema de Numeração Vigesimal Maia, podemos entender como eles operavam a divisão entre seus números. Os maias efetuavam as quatro operações fundamentais da matemática: adição, subtração, multiplicação e divisão. Essas contas eram feitas no solo ou em locais planos, e eles utilizavam pedras e galhos para representar os seus símbolos. Acredita-se que, para realizar essas operações, eles faziam uma tabela e sobre ela colocavam os pontos e as barras.

Para efetuar a divisão, eles utilizavam os seguintes procedimentos:

Considere a ilustração 6, que podemos tomar como base para o algoritmo da divisão para os Maias.

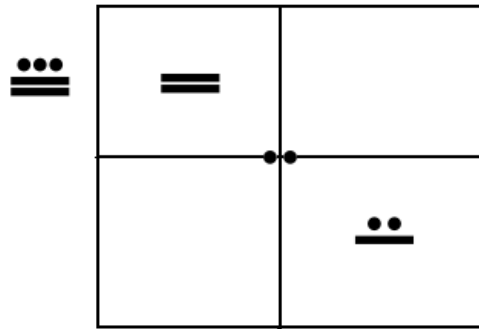
Ilustração 6: Algoritmo da divisão Maia

	Quociente	
Divisor	<i>Dividendo</i>	

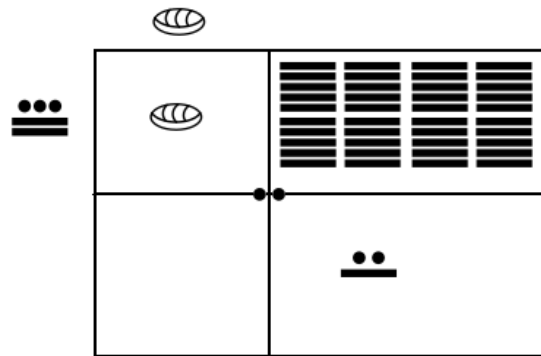
Fonte: Próprio Autor

Como exemplo, iremos dividir 247 por 13.

Assim,

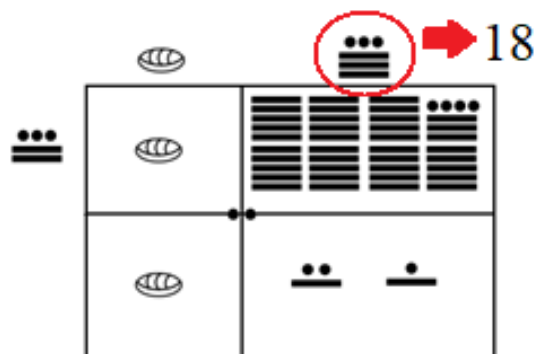


Queremos saber qual inteiro vezes treze, dá dez. Como isso não é possível, pois $13 > 10$, precisamos realocar o 10 para a coluna a direita, considerando a casa vigesimal, assim



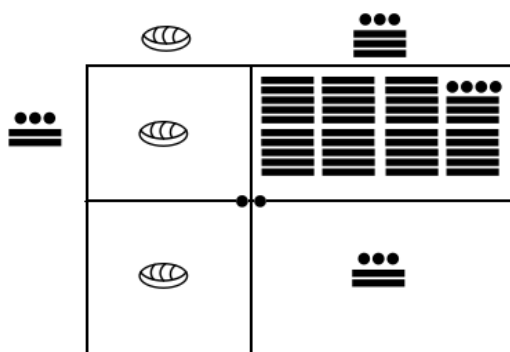
Como “baixamos” uma casa vigesimal, acrescentamos o zero.


Agora, queremos saber qual inteiro, vezes 13, resulta em 240 ($200 + 40$), como também não há esse inteiro, verificamos qual é o maior múltiplo de 13 que é menor que 240, no caso, o $234 = 13 \times 18$. Ou seja, retiramos 6 ($240 - 234$) e acrescentemos esse valor as unidades:



Como “baixamos” uma casa vigesimal, acrescentamos o zero, e como o múltiplo de 13 mais próximo é o 18, escrevemos o 18 acima da segunda coluna.

Perceba que agora temos, na posição da unidade $7 + 6 = 13$, que dividido por 13 resulta em 1.



Logo, o número procurado é o  $(18 + 1)$.

Destacamos que, o método prático desses dois sistemas pode ser bem mais complexo que o utilizado atualmente, talvez por isso, esses métodos foram deixando de ser utilizados, contudo, note que, o método Maia apresenta certa semelhança ao método prático escrito por Euclides.

No próximo capítulo iremos discutir sobre os principais problemas encontrados no processo de ensino aprendizagem da divisão, bem como, propor formas que possam amenizar essas dificuldades.

3 A DIVISÃO COMO DESAFIO NO APRENDIZADO DA MATEMÁTICA

Retornando às experiências vividas em meu Estágio Supervisionado, percebi que boa parte dos alunos possuía grande dificuldade no que diz respeito ao algoritmo da divisão, muitos deles, apesar de já estarem no ensino médio, tinham grande dificuldade ao realizar tal operação matemática.

Com base nisso, procuramos fazer este trabalho, respaldado por grandes pesquisadores da área, reforçando tal observação e, ainda mais, buscando metodologias que pudessem amenizar tal dificuldade, favorecendo o processo de ensino-aprendizagem.

Nesse sentido, Minayo (1999, p.54) diz que a abordagem qualitativa não pode prender o alcance da verdade com o que é certo ou errado; deve ter como preocupação primeira a compreensão da lógica que permeia a prática que se dá na realidade.

Soares e De Oliveira (2019, p.2) salientam ainda que, ensinar matemática através da Resolução de Problemas é adotar uma metodologia que oferece aos alunos a oportunidade de criarem e desenvolver habilidades e potencialidades ainda mais acentuadas, com o intuito de promover um aprendizado mais significativo.

Nesse contexto, acreditamos que o ensino das técnicas de divisibilidade não se dá de forma eficaz uma vez que os índices de proficiência são baixos em todos os anos do fundamental e conjecturamos que este problema está relacionado com a metodologia proposta por boa parte dos professores, à falta de estrutura nas escolas e às dificuldades socioeconômicas.

Agora iremos constatar, por meio de dados estatísticos, que no Brasil os estudantes do ensino básico têm grandes dificuldades em dominar as quatro operações aritméticas fundamentais, em particular, a divisão.

3.1 Um olhar por meio da Estatística

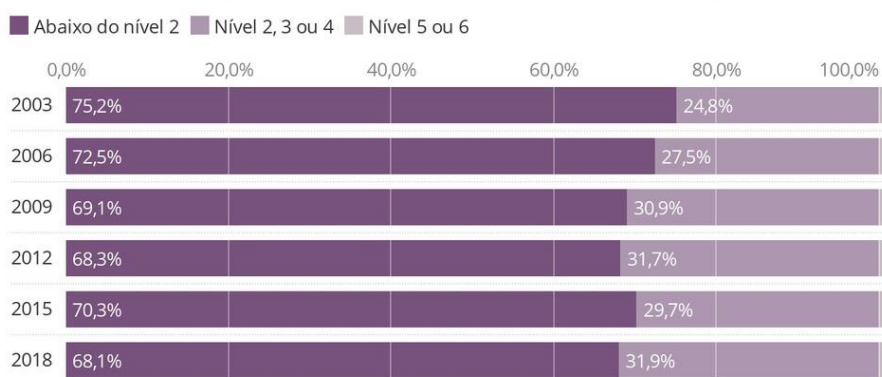
3.1.1 Dados do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA)

Segundo dados do PISA 2018 dois terços dos brasileiros de até 15 anos sabem menos que o básico da matemática, o desempenho médio na disciplina melhorou entre 2003 e 2018, sendo que, depois de 2009, o resultado em leitura e ciências manteve estagnado.

Com tudo os índices de matemática preocupam, uma vez que em 2018, 68% dos alunos estavam abaixo do nível considerado básicos, conforme a ilustração 7.

Ilustração 7: PISA 2018 – aprendizado do Brasil em Matemática

Desde o início da série histórica considerada pela OCDE, o Brasil tem mais de dois terços dos estudantes com aprendizado abaixo do **nível 2 (considerado básico)** em matemática



Fonte: OCDE/Pisa

Disponível em: g1.globo.com. Acesso em: 01 maio. 2020 (adaptado).

A Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) apontou, em sua análise específica para o Brasil, fatos que expõem uma desigualdade de condições para a aprendizagem em diferentes escolas e regiões brasileiras, além de diferenças relacionadas ao gênero e ao nível sócio econômico das famílias.

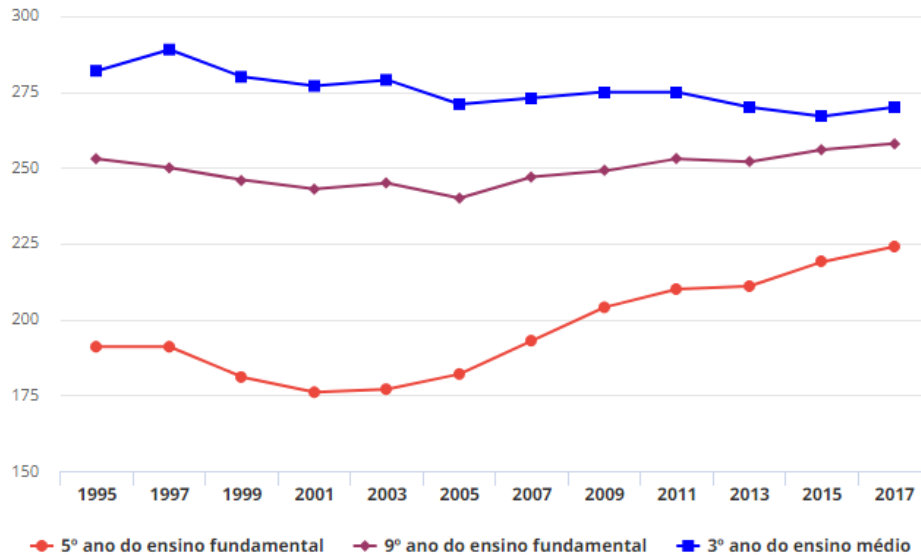
Assim, podemos notar que, apesar de haver uma melhora nos índices, o Brasil ainda se encontra muito distante da média dos países desenvolvidos, a saber, a média, em matemática, dos alunos brasileiros, no PISA 2018, foi de 384 pontos, enquanto que, dos alunos chineses (primeiros no ranking) foi de 591 pontos.

3.1.2 Dados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB)

De acordo o SAEB sete em cada dez alunos tem nível insuficiente em matemática, no do ponto de vista pedagógico a maioria dos estudantes não é capaz de resolver problemas com operações fundamentais com números naturais ou reconhecer o gráfico de uma função sendo que essas habilidades fazem parte da BNCC e são esperadas em estudantes classificados em níveis de proficiência superiores ao insuficiente.

Apesar dos alunos de quinto ano do fundamental apresentarem uma melhora no desempenho, os índices das turmas do nono ano permanecem estagnados há mais de vinte anos, conforme a ilustração 8.

Ilustração 8: Evolução das proficiências médias em matemática no SAEB (1995 – 2017)



Disponível em: g1.globo.com. Acesso em: 01 maio. 2020 (adaptado).

Ainda de acordo com o estudo, a faixa etária dos alunos do ensino médio requer mais atenção, a escola não atende a realidade, não se tem organização curricular que atenda ao jovem, nem professores com formação ideal ou um currículo com objetivo de aprendizagem.

3.2 As dificuldades das crianças com a divisão

Neste tópico, colocaremos algumas concepções encontradas na literatura sobre o que diz respeito às dificuldades encontradas no processo de ensino da divisão. Nesse sentido:

Quando do uso da calculadora por crianças na resolução de problemas matemáticos abertos puderam constatar, de um modo geral, que a sua utilização proporcionou maior agilidade nas tentativas conduzindo o estudante a colocar maior atenção na maneira utilizada na resolução do que no cálculo em si. (SELVA & BORBA, 2005, p. 51).

Dos Santos enfatiza também que,

Em geral, o ensino da operação divisão está baseado na apresentação de um método de cálculo associado a um pequeno universo de problemas que, pressupõe-se, “darão conta” do significado do conceito. Qualquer algoritmo, e em especial no caso o da divisão, isolado do contexto, converge para uma resposta de perguntas futuras que não são conhecidas previamente. O algoritmo é “aprendido” para servir na resolução de problemas, porém não se conhece de que problema trata-se. (DOS SANTOS, 2013, p.4).

Assim a divisão como operação deve ter como base de ensino um universo bem amplo de problemas, mas também que haja significado sobre os algoritmos que são apresentados aos alunos, uma vez que, sem isso, não haverá aprendizagem.

Brousseau (1986), diz que a matemática escolar, que ocorre no contexto específico da sala de aula, é **regida** por regras e expectativas que funcionam como se fossem cláusulas de um contrato.

Alcântara reforça ainda que

Talvez essa “antipatia” à matemática inicie seu crescimento a partir do 6^a ano, momentos nos quais os estudantes enfrentam as maiores dificuldades pelas quais a humanidade também passou, que são a ampliação do conjunto dos números naturais para os números inteiros e a construção da linguagem algébrica. (ALCÂNTARA, 2013, p.19).

Nesse contexto, buscar formas diferentes de conduzir o aluno a usar sua criatividade, na tentativa de resolver um problema de diversas maneiras, em que se tenha varias formas de selecionar um exercício de modo que a solução tenha a colaboração do mesmo como algo relevante, pode ser um gatilho significativo para o processo de ensino-aprendizagem.

O educador também deve estar ciente que a didática pode ser diferente e individual, então por que não usar métodos inovadores de ensino de forma que a didática seja dinâmica tornando interessante ao aluno?

Por meio de nossas experiências nos estágios supervisionados, notamos que o ensino da matemática, por vezes, dar-se-á de forma autoritária, onde o professor não busca, ou não instiga o aluno, para tentar inicialmente conhecer sua base, seu referencial teórico, que pode ser de grande valia para o ensino.

Segundo Brousseau (1986), o significado do saber matemático é fortemente influenciado pela forma didática como o conteúdo é apresentado e desenvolvido na sala de aula de matemática.

Zatti, Agranionih e Enricone salientam que

É importante refletir que dificuldades relacionadas aos primeiros estágios das operações básicas (contagem, adição e subtração) podem resultar em problemas futuros, relacionados tanto com aspectos cognitivos quanto com a motivação, já que a criança não obtém satisfatoriamente noções de habilidades básicas que serão importantes posteriormente. Além disso, ao perceber seu insatisfatório grau de êxito no desempenho de atividades matemáticas, pode se desmotivar e perder o interesse. (ZATTI, AGRANIONI e ENRICONE, 2010, p.128).

Nesse sentido, destacamos que os professores podem buscar métodos que fujam das regras que dificultam o aprendizado do aluno, seja por não acompanhar as novas tecnologias

ou meios que facilitem a compreensão do mesmo, que pode até ter muito a contribuir, mas, por medo, se omite, com receio de ferir a regra do ensino e então fica no comodismo, o que pode não ser bom pro ensino, pois isso é algo que se constrói com a participação de todos.

Lacerda enfatiza que, além disso,

Há o problema do simbolismo e das regras matemáticas, onde muitos dos equívocos são tratados em seu ensino e aprendizagem. Para muitos professores e alunos este ensino de regras direciona ao fracasso em matemática, portanto devo esclarecer que este ensino de regras que encaminha a leitura e escrita em matemática, o não seguimento de tais regras podem direcionar a múltiplos olhares e, nos distanciar de uma das principais funções de sua linguagem que é abstração. (LACERDA, 2016, p. 84).

Assim, acreditamos que o ensinar a matemática está tão defasado, pois os professores focam em mostrar simplesmente as regras e os métodos para a divisão, não ensinando a essência da matemática e o mesmo, por não enxergar o sentido naquilo que está lhe sendo ensinado, não se esforça para aprender, destinando o processo ao fracasso, uma vez que, em nossa concepção, para que haja a aprendizagem o aluno deve ser parte ativa do processo.

Nesse sentido, Pavanello (2007, p.2) salienta ainda a importância, na prática educativa, da comunicação sendo utilizada como instrumento que possibilite aos professores e alunos orientarem mutuamente sua atividade com objetivo de partilharem seus significados em relação ao tema que está sendo estudado. Ou seja, nas interações discursivas estabelecidas em sala de aula os significados não devem ser impostos, mas objetos de negociação.

Vygotski (1988) afirma que a interação social é a origem e o motor do desenvolvimento cognitivo e da aprendizagem, enfatizado em seus estudos o lugar do outro e da linguagem, evidenciando através do debate e do conflito no processo de comunicação social.

Com isso, uma forma de incentivar os alunos a estudarem é estimular o estudo em grupos, porém tomando cuidado na organização desses grupos, pois caso contrário, o professor poderia perder o controle da turma e o ensino não seria efetivo.

Sant`Ana e Laudares reforçam que

Após a conclusão do ensino fundamental I, logo no sexto ano, início do ensino fundamental II, é possível observar que os alunos apresentam inúmeras dificuldades em matemática, especialmente no domínio dos algoritmos básicos das quatro operações fundamentais. Isso acontece por inúmeros motivos, esses provenientes talvez pelo método tradicional aplicado e tão discutido, e, ainda hoje, presentes nas salas de aula. (SANT`ANA E LAUDARES, 2016, p. 3).

Os conhecimentos escolares a serem trabalhados em sala de aula se modificam com o passar do tempo, sofrem influências sociais, são regulados por instâncias administrativas, selecionados por professores, arraigados em modos de fazer e etc. Contudo, boa parte do saber

matemático está enraizado nos textos de Euclides, uma vez que a sua obra prima *Os Elementos* é a compilação de todo o conhecimento matemático de seu tempo e se tornou parte do ensino da matemática por mais de 2 000 anos.

Nesse contexto, defendemos neste trabalho que o ensino da divisão pode ser feito de forma mesclada, do método tradicional, no qual o aluno utilizará o Algoritmo da Divisão como uma ferramenta para a resolução de problemas matemáticos, com outras formas inovadoras de ensino, como, por exemplo, a Resolução de Problemas.

Nesse sentido, Araújo e Lopes Neta enfatizam que:

A junção dos métodos de ensino [método tradicional e método inovador] é necessária, pois no mundo tão globalizado como o nosso, nem um e nem o outro por si só não são capazes de formar, ensinar e evoluir o educando de forma alguma, é possível formamos seres críticos e formadores de suas próprias opiniões, que compreenda as formulas, dominem os cálculos, identifiquem as funções, frações e etc., se e somente se, os profissionais da área juntarem os dois métodos de ensino, fazendo com que as novas metodologias se completem, se engrandecem.. (ARAÚJO E LOPES NETA, 2017, p.66).

Pinheiro salienta ainda:

a importância de estimular nos alunos a capacidade de memorização por meio de jogos e atividades recreativas, ainda que o professor destine uma aula inteira para isso, por tratar-se de uma tarefa diferente do habitual, os alunos intuitivamente demonstrarão interesse pelo processo, o que, teoricamente, contribuirá em um aumento significativo na sua capacidade de aprender o conteúdo. (PINHEIRO, 2020, p. 45).

De Oliveira e Correia evidenciam que:

Nas práticas tradicionais de educação técnicas de memorização era algo muito comum, levando muitas vezes a não compreensão de conceitos e processos matemáticos, lembremos da memorização da tabuada por exemplo, é importante que haja uma apropriação do processo de multiplicar ao invés de uma simples tarefa mecânica. (DE OLIVEIRA SILVA e CORREIA, 2015, p. 4).

Reforçamos assim que o ensino do algoritmo da divisão tem grande importância pois é base para muitos outros conhecimentos que serão discutidos no decorrer da vida acadêmica dos alunos.

Para Jourdan,

o ponto central para entender a concepção de prova matemática em Wittgenstein parte de uma compreensão anterior da sua distinção entre um âmbito normativo e um âmbito empírico da linguagem. Como, para Wittgenstein, a matemática seria um âmbito completamente normativo, as demonstrações matemáticas não poderiam ser pensadas sob o ponto de vista de uma justificação externa ao que é provado. (JOURDAN, 2009, p. 299).

Outra ferramenta que pode ser utilizada durante o ensino do algoritmo da divisão, principalmente nas séries iniciais, é o Material Dourado, que falaremos no próximo tópico.

4 PROPOSTAS DE INTERVENÇÃO

4.1 Material Dourado e o Ensino da divisão

O material dourado é um dos inúmeros instrumentos que podem ser utilizados para auxiliar o ensino da matemática, idealizado pela médica e educadora italiana Maria Montessori (1870 – 1952), para o trabalho, em especial com crianças com dificuldades intelectuais, pois a mesma acreditava que todos aprendem igualmente, porém, em ritmos diferentes.

Embora pensado para o ensino da aritmética, a idealização deste material seguiu os mesmos princípios montessorianos para a criação de qualquer um dos seus materiais, a educação sensorial:

I. Desenvolver na criança a independência, confiança em si mesma, a concentração, a coordenação e a ordem;

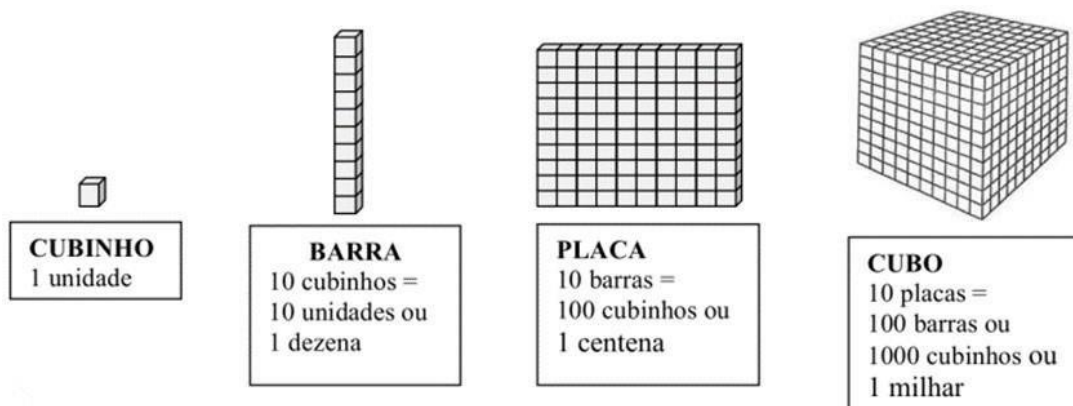
II. Gerar e desenvolver experiências concretas estruturadas para conduzir, gradualmente, a abstrações cada vez maiores;

III. Fazer a criança, por ela mesma, perceber os possíveis erros que comete ao realizar uma determinada ação com o material;

IV. Trabalhar com os sentidos da criança.

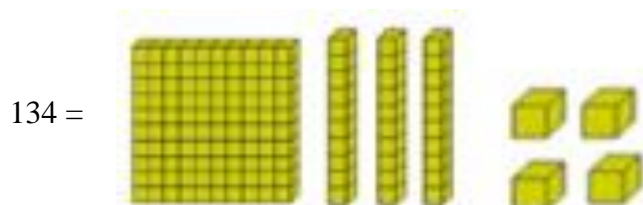
O material dourado permite que a criança compreenda a noção de unidade, dezena, centena e milhar, o primeiro contato do aluno com o material deve ocorrer de forma lúdica para que ele possa explorá-lo livremente. É nesse momento que a criança percebe a forma, a constituição e os tipos de peça do material, conforme a ilustração 09.

Ilustração 09: Composição do Material Dourado



As primeiras atividades com o material podem ser relacionadas a simples associação do número com o concreto. Conforme o exemplo na **ilustração 10**:

Ilustração 10: Número 134 representado com material dourado



Disponível em: <https://www.researchgate.net>. Acesso em: 01 maio. 2020 (adaptado).

Depois que os alunos estiverem acostumados a trabalhar com o Material Dourado, o professor pode ensinar o algoritmo da divisão, seguindo os seguintes passos:

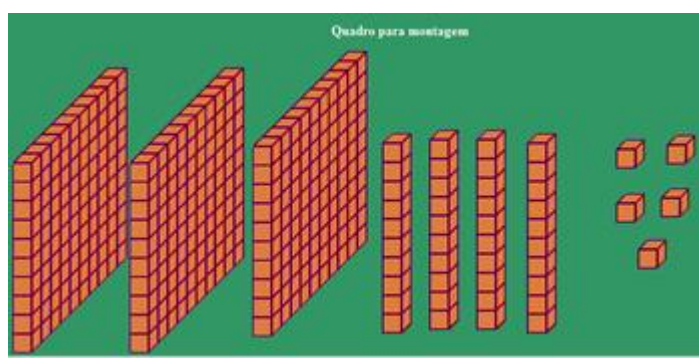
O problema (e sua resolução) a seguir foi retirado do trabalho da professora Silene Cajuella (2013).

Problema 01: A escola comprou 345 latinhas de refrigerante para vender na festa junina. Estas latinhas devem ser armazenadas em 3 refrigeradores. Para que cada refrigerador fique com a mesma quantidade de latinhas, quantas devem ser colocadas em cada um?

Resolução:

Passo 01: Solicite que os alunos representem a quantidade de latinhas com o material dourado utilizando quadrados para representar as centenas, barras para representar as dezenas e cubinhos para representar as unidades, semelhante a ilustração 11.

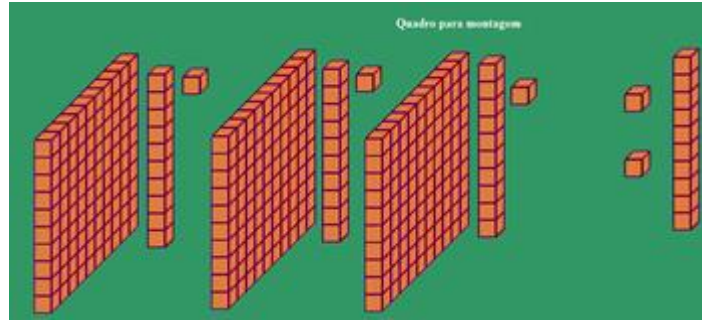
Ilustração 11: Representação do número 345



Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br>. Acesso em: 01 maio. 2020 (adaptado).

Passo 02: Agora solicite que os alunos formem 3 grupos com quantidades iguais de peças e deixem separadas as peças que por ventura sobraem, conforme a ilustração 12.

Ilustração 12: 345 dividido em 3 grupos, mais resto 12.



Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br>. Acesso em: 01 maio. 2020 (adaptado).

Passo 03: Convide-os a analisar o que foi obtido: as três centenas foram repartidas igualmente nos três grupos, uma centena para cada grupo e não sobrou nenhuma; as dezenas foram repartidas uma para cada grupo e sobrou uma, as unidades foram repartidas uma para cada grupo e sobraram duas conforme a ilustração 05.

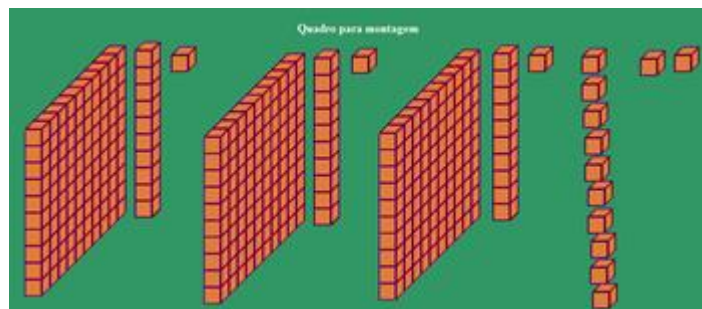
Agora questione os alunos: É possível dividir igualmente as peças que sobraram? Como fazer isso?

Comentário: Espere para ver se algum aluno sugere fazer a troca da dezena por unidades. Se isso não acontecer, apresente a possibilidade e pergunte se isso possibilita uma nova divisão.

Questione: Trocando uma dezena por 10 unidades, ficamos com um total de quantas unidades? É possível dividir 12 unidades igualmente entre os três grupos?

Passo 04: Troque a dezena (barra) por 10 unidades, conforme a ilustração 13.

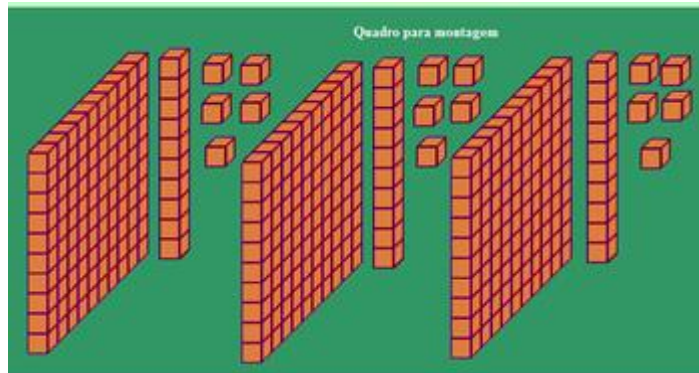
Ilustração 13: 345 dividido em 3 grupos, mais resto 12, escrito com 12 unidades.



Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br>. Acesso em: 01 maio. 2020 (adaptado).

Passo 05: Efetue a divisão distribuindo as unidades igualmente entre os grupos, encontrando a resposta conforme a ilustração 14.

Ilustração 14: 345 dividido em 3 grupos de 115.



Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br>. Acesso em: 01 maio. 2020 (adaptado).

Logo, a divisão de 345 por três é igual a 115.

Assim, como já fora discutido neste trabalho, por estarem começando a desenvolver o pensamento algébrico mais apurado, a maior parte dos alunos sente dificuldade no processo da divisão, então, o Material Dourado, poderia servir para complementar esse pensamento, pois o aluno teria algo concreto, o qual ele iria relacionar com o abstrato.

A seguir, veremos outra proposta metodológica, que pode auxiliar na compreensão do algoritmo da divisão, uma vez que, a Resolução de Problemas, instiga no aluno a pensar de forma lógica, para obter uma resposta para determinado problema.

4.1.1 Alguns estudos de caso

Para corroborar com nossa ideia a respeito de que o ensino da divisão pelo uso do material dourado diminui as dificuldades encontradas no processo, buscamos alguns trabalhos de professores que aplicaram essas metodologias de ensino em sala de aula, dos quais, destacamos: De Sousa *et al*, discorrendo sobre *Material dourado: potencialidades no ensino das operações de adição e subtração para alunos de um 3º ano do ensino fundamental*; De Oliveira *et al*, *Material dourado como recurso pedagógico para o ensino das quatro operações matemáticas* e, também, na dissertação de Oliveira, sobre o *Ensino da Matemática para surdos e cegos*.

De Sousa *et al*, para realizarem seu trabalho de conclusão de curso discorreram a respeito do uso do Material Dourado por meio do seguinte questionamento: *Quais são as contribuições de um trabalho com Material Dourado no ensino de adição e subtração com alunos de um 3º ano do Ensino Fundamental?*.

Esse trabalho foi publicado no ano de 2019, desenvolvido junto aos alunos de um 3º ano integral do Ensino Fundamental de uma escola privada da região oeste do Paraná.

De Souza *et al*, perceberam dificuldades apresentadas no processo de ensino das quatro operações aritméticas básicas e, como forma de amenizar tais dificuldades, encontrou os materiais manipuláveis, em particular, buscou verificar a eficácia do Material Dourado.

Os autores também salientam que os professores devem utilizar essa metodologia de forma mais adequada, uma vez que, durante a aplicação do trabalho, notaram que

todavia, a partir de nossa experiência no ensino, observamos que alguns professores preferem não utilizar os materiais concretos, pois acreditam que eles acabam fazendo com que os estudantes conversem mais, façam bagunça e se desconcentrem em sala de aula. (DE SOUZA *et al*, 2019, p.58)

O trabalho dos professores teve caráter quantitativo e qualitativo, uma vez que os mesmos fizeram uma análise do número de acertos nas atividades desenvolvidas pelos alunos antes e depois do trabalho com o Material Dourado e, também, analisaram todo o processo de desenvolvimento do trabalho didático com o material, verificando as potencialidades desse trabalho e em que aspectos ele se mostrou relevante para o entendimento dos conceitos de adição e subtração pelos alunos de uma turma de 3º ano integrado do Ensino Fundamental.

A partir da coleta dos dados, por meio de gravações de áudio e da produção escrita dos alunos, os autores puderam fazer uma reflexão sobre o trabalho, selecionando momentos e/ou falas dos alunos em que se evidenciavam a contribuição do Material Dourado para a compreensão dos conceitos.

De Souza *et al* concluem ainda que

o Material Dourado auxiliou nas abstrações, sendo mediador semiótico das ideias matemáticas. Isso ficou claro no último diálogo relatado, em que, no início, muitos apresentavam dificuldades e que, no decorrer da atividade, com o uso do Material Dourado, avançaram na compreensão do algoritmo da subtração com troca. (DE SOUZA *et al*, 2019, p.71).

Deste modo, os autores corroboram com nossa premissa, de que o Material Dourado pode, se aplicado corretamente, ser uma ferramenta muito poderosa para o ensino dos algoritmos e, em particular, defendemos que pode ser utilizado no ensino da Divisão.

Por outro lado, Oliveira *et al* aplicam sua pesquisa de campo com alunos da turma do 5º ano do ensino fundamental I, de uma escola da rede pública estadual de Boa Vista/RR, no ano de 2016, e, têm por objetivo analisar o uso do material dourado como recurso pedagógico para o ensino de Matemática, verificando o potencial deste recurso no ensino das quatro operações aritméticas básicas.

Os autores reforçam que

compreender que o ensino de matemática utilizando recursos materiais concretos não deve se reduzir a uma transposição meramente qualitativa. É essencial que o aluno seja capaz de estabelecer semelhanças e diferenças, de perceber regularidades e singularidades, estabelecer relações com outros conhecimentos da vida cotidiana e compreender as representações simbólicas da disciplina em questão. (OLIVEIRA et al, 2016, p.3)

Compactuando com De Souza *et al*, Oliveira et al também salientam a importância de o professor saber trabalhar com o recurso, mostrando aos alunos o significado do objeto matemático.

Eles também defendem o fato de o Material Dourado ser utilizado como recurso auxiliar no processo de ensino aprendizagem, reforçando que

Adotar uma ou mais teorias para fundamentar o trabalho em sala de aula pode ser um ponto de partida que contribuirá significativamente para o fazer pedagógico. No que se refere ao uso do material dourado, uma das possibilidades de contribuir para uma melhor assimilação dos diferentes conceitos trabalhados em sala de aula pode ser a partir dos campos aditivos e multiplicativos de Gerárd Vergnaud. (OLIVEIRA et al, 2016, p.6).

Eles realizaram aulas expositivas, dialogadas e exibição de vídeos explicativos, utilizando como principal recurso o material dourado e, também, propuseram uma atividade avaliativa que levasse os alunos a refletirem sobre as respostas, mas também considerando os caminhos percorridos para chegarem a elas, sendo estas corretas ou não.

Deste modo, os professores reservaram um espaço ao lado de cada questão para demonstração do caminho percorrido: uso de tracinhos, bolinhas, algoritmos, entre outros. Reforçando o caráter complementar da metodologia de ensino.

Eles também destacam que

No desenvolvimento das atividades avaliativas percebemos que os alunos possuem determinados conhecimentos acerca dos conteúdos apresentados, mas sentem dificuldades acentuadas na execução, principalmente daquelas que exigem níveis mais elevados de atenção, respondendo-as, muitas vezes, aleatoriamente e apressadamente. (OLIVEIRA et al, 2016, p.14).

Os autores reforçam ainda que

O interesse por parte de todos os alunos em manipular e procurar resolver situações problema com o material dourado, o que nos leva a acreditar que esse material consiste em um recurso material com grande potencial para o ensino das quatro operações fundamentais nos anos iniciais do ensino fundamental. (OLIVEIRA et al, 2016, p.16).

Deste modo, novamente salientamos o material dourado como ferramenta que pode ser utilizada para amenizar as dificuldades encontradas no processo de ensino aprendizagem do algoritmo da divisão.

Já Oliveira, traz em sua dissertação ideias de como aplicar o uso dos objetos matemáticos para o ensino da matemática para aluno cegos e surdos, o mesmo utiliza de materiais concretos, em especial, o material dourado.

Seu trabalho foi aplicado com alunos do ensino fundamental e médio, além disse, Oliveira reforça o fato de que, prejudicados também pela falta da visão, os alunos chegam ao ensino médio com déficits de aprendizagem ainda maiores e, para tentar sanar essas dificuldades, o professor inicia seu trabalho, com o uso do material dourado, mostrando aos alunos os algoritmos da adição e da subtração.

Deste modo, o autor salienta que

Para iniciar a aprendizagem da adição, serão desenvolvidas atividades que levam, primeiramente, a compreender o significado de adição, trabalhando, para isso, alguns sinônimos: juntar, somar, agrupar, ou ainda de outras línguas, como addition (inglês, alemão e francês), suma (espanhol), addizione (italiano). Essas atividades evidenciam que, para realizar a soma, devem-se somar termos semelhantes, ou seja, deve-se mostrar, com o material dourado, que se podem juntar apenas cubinhos com cubinhos, barras com barras, placas com placas, cubos maiores com cubos maiores. Esse raciocínio antecipa a inferência ao sistema decimal. (OLIVEIRA, 2014, p. 14)

Oliveira propôs uma série de atividades, envolvendo as quatro operações aritméticas fundamentais, nas quais os alunos poderiam fazer o uso do Material Dourado para resolvê-las e notou que

Depois dessas atividades, os alunos afirmaram que elas não só os ajudaram a resolver problemas do cotidiano, mas também a enxergar como a Matemática está presente no seu dia-a-dia. Várias situações foram abordadas em sala de aula, de forma que muitos alunos relataram casos em que recebiam troco errado, uma vez que a máquina não pensa, faz o que é mandado, erros de digitação levam a erros. Em todas as situações, se o indivíduo não sabe calcular nem domina as operações básicas, podem sofrer prejuízos. (OLIVEIRA, 2014, p. 61)

Para tanto, o mesmo ainda reforça o fato de, por ser um material concreto, os alunos apresentaram uma maior aptidão para fazer as atividades, uma vez que os mesmos se sentiam mais ativos no processo de ensino-aprendizagem.

Isto posto, vemos que Material Dourado pode ser uma importante ferramenta a ser utilizada para amenizar as dificuldades encontradas no processo do ensino do Algoritmo da Divisão.

4.2 O Ensino da divisão por meio da Resolução de Problemas

Concebida pelo professor George Polya (1887 – 1985), a Arte da Resolução de Problemas é uma metodologia de ensino que prepara o aluno para, de forma lógica e organizada resolver diversos tipos de problemas matemáticos.

Polya defende que

Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. **O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta.** Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter. (POLYA, 1978, p.V)

De forma resumida, temos que a Resolução de Problemas auxilia o aluno a, de forma ordenada, pensar uma solução para determinado problema seguindo quatro passos básicos. Segundo Pinheiro (2018), Polya organiza a resolução de um problema da seguinte forma:

I – Compreender o problema: Para Polya (1978) é uma tolice responder uma pergunta que não tenha sido compreendida, essa é a primeira e mais importante fase do processo de ensino-aprendizagem, é fundamental que o aluno entenda qual o problema e, principalmente, que ele queira resolvê-lo.

II – Elaborar um plano: Após entender o que está sendo pedido, o aluno deve criar uma estratégia de resolução. Os chamados problemas correlatos, aqueles que possuem técnicas de solução semelhantes, ajudam muito na elaboração de uma estratégia que irá facilitar a resolução do problema. Durante essa etapa do processo, percebemos que:

O enfoque passa a ser em procedimentos ou passos utilizados para chegar à resposta, enquanto esta perde sua importância. Nessa concepção, surge a classificação de tipos de problemas, tipos de estratégias de resolução e esquemas de passos a serem seguidos para melhor resolver problemas. Assim, o ensino centra-se em ensinar a resolver problemas o que, como consequência, resultaria em aprender matemática. (ROMERO, 2007, p.1792)

Ou seja, o ensino da matemática deixa de ser um objetivo tornando-se uma consequência e este aspecto é um dos diferenciais da metodologia defendida por Polya, ela te ensina a pensar e te dá os passos necessários para que, frente a um verdadeiro problema, você não fique paralisado.

III – Executar o plano: após compreender e elaborar uma estratégia o aluno irá aplicá-la, utilizando-se do raciocínio lógico como principal ferramenta para tal execução. Para o autor é a parte mais fácil do processo de ensino-aprendizagem, paciência é o que mais se precisa nesta fase.

IV – Fazer uma retrospectiva: até mesmo os alunos considerados razoavelmente bons podem se sentir inseguros com a resposta encontrada, revisar o que fora escrito é uma parte importante para a consolidação do conhecimento e aperfeiçoamento da resolução de problemas.

Para tanto, Bagatini (2010, p. 12) reforça que na maioria das provas das competições existentes, os problemas que as compõem não requerem do aluno altos conhecimentos matemáticos, mas sim, capacidade de interpretar, criar e improvisar o mais rápido possível.

Assim, defendemos que a Resolução de Problemas pode contribuir para o ensino da divisão de modo a melhorar o raciocínio lógico dos estudantes e, a seguir, veremos alguns problemas que envolvem o conceito do Algoritmo da Divisão, sendo resolvidos por meio da Resolução de Problemas.

Exemplo 08: Durante um sorteio em um supermercado, ganhei uma caixa com 20 pacotes de chocolate e dividi entre meus 3 primos, de modo que cada um deles ficou com a mesma quantidade. O que sobrou eu comi.

Quantos pacotes de chocolate cada primo meu ganhou?

- a) 2
- b) 3
- c) 4
- d) 5
- e) 6

Resposta: Alternativa E

Resolução: Nas concepções de Pinheiro (2020) esse problema pode ser resolvido pelo *Método Clássico*, uma vez que, o aluno precisará aplicar o Algoritmo da Divisão de Euclides para resolver o mesmo, assim:

$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ 2 & \hline & 6 \end{array}$$

Note que, além de aplicar o algoritmo, o aluno precisa interpretar se a resposta será 2 ou 6. Neste caso 6 será a quantidade de pacotes que cada primo ganhará e 2 a quantidade de pacotes que “eu comi”.

Exemplo 09: Certa escola realizou uma campanha solidária entre seus alunos do ensino fundamental, eles deveriam arrecadar alimentos, que seriam distribuídos igualmente entre 4 instituições de caridade. A tabela a seguir mostra o quanto foi arrecadado por cada turma

Turma	Quantidade arrecadada (kg)
6º ano	156
7º ano	148
8º ano	137
9º ano	163

Quantos quilogramas de alimento cada instituição ganhou?

- a) 151
- b) 153
- c) 160
- d) 171
- e) 183

Resposta: Alternativa A.

Resolução: Para a resolução deste problema, precisaremos, além do conhecimento do algoritmo de Euclides, o aluno precisa saber operar o algoritmo da adição, assim, inicialmente ele deverá encontrar o total de alimentos arrecadados pelas turmas, no caso:

$$156 + 148 + 137 + 163 = 604$$

Agora, ele precisa dividir a quantia encontrada por 4, ou seja:

$$\begin{array}{r|l} 604 & 4 \\ 0 & \hline & 151 \end{array}$$

Logo, cada instituição ganhará 151 kg de alimentos.

Exemplo 10: Uma fábrica embala seus chocolates em caixas com a mesma quantidade de chocolates em cada caixa. Durante uma promoção de natal serão embaladas 3 800 unidades de chocolates em embalagens especiais.

Dos números a seguir, qual deles pode representar uma quantidade de embalagens utilizadas?

- a) 740
- b) 760
- c) 800
- d) 920

e) 1000

Resposta: Alternativa B.

Resolução: Para Pinheiro (2020) este tipo de problema é um *problema com mais de uma solução*, uma vez que qualquer divisor de 3 800 pode ser a quantidade de embalagens. Neste caso, o aluno deve aplicar o algoritmo da divisão sendo cada uma das alternativas o divisor e, a resposta correta, será aquela na qual o resto da divisão seja zero.

Assim,

$$\begin{array}{r} \text{a)} \\ 3800 \overline{)740} \\ \underline{100} \\ 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{b)} \\ 3800 \overline{)760} \\ \underline{0} \\ 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{c)} \\ 3800 \overline{)800} \\ \underline{600} \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{d)} \\ 3800 \overline{)920} \\ \underline{120} \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{e)} \\ 3800 \overline{)1000} \\ \underline{800} \\ 3 \end{array}$$

Como a única alternativa que o resto é zero, é a b), a alternativa é a b).

Exemplo 11: Para um aniversário, as 30 mesas disponíveis em salão de festa foram distribuídas de modo que cada mesa seria para 6 convidados e, mesmo assim, ainda restariam 2 convidados para acomodar.

Sabendo disso, quantas pessoas foram convidadas para festa?

a) 172

b) 182

c) 212

d) 242

e) 280

Resposta: Alternativa B.

Resolução: Novamente, temos um problema clássico, onde o aluno precisa conhecer, ainda que intuitivamente, o Algoritmo da Divisão de Euclides, assim, sendo N o número de convidados, temos,

$$N = 30 \cdot 6 + 2$$

$$N = 182$$

Logo, na festa, há 182 convidados.

Exemplo 12: O professor de Paulo elaborou uma lista com alguns itens de matemática para que os alunos resolvessem. Paulo deseja terminar a lista em 5 dias, resolvendo sempre a mesma quantidade de itens por dia.

Quantos itens pode ter essa lista elaborada pelo professor?

- a) 44
- b) 45
- c) 48
- d) 64
- e) 72

Resposta: Alternativa B.

Resolução 01: Tal qual o exemplo 10, este problema possui mais de uma solução, uma vez que, qualquer múltiplo de 5 pode ser a resposta correta para o problema, porém, as alternativas agora serão os dividendos do algoritmo, e, aquele que possuir resto zero, será a resposta correta para o problema.

Assim,

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{a)} & \text{b)} & \text{c)} & \text{d)} & \text{e)} \\
 44 \overline{) 5} & 45 \overline{) 5} & 48 \overline{) 5} & 64 \overline{) 5} & 72 \overline{) 5} \\
 4 \overline{) 8} & 0 \overline{) 9} & 3 \overline{) 9} & 4 \overline{) 12} & 2 \overline{) 14}
 \end{array}$$

Como a única alternativa que o resto é zero, é a b), a alternativa é a b).

Resolução 02: Como neste exemplo, os números são pequenos, o professor pode instigar os alunos a resolver esse problema utilizando os critérios de divisibilidade (contudo, acreditamos que os “melhores” alunos da turma certamente farão tal resolução). Utilizando o fato de que, das alternativas, a única que possui como algarismo da unidade o 5, a resposta para esse problema seria alternativa b).

Assim, mostramos que, apesar de o professor ter que ensinar o Algoritmo da Divisão de Euclides, algo que, por muitos é considerado chato, utilizando problemas motivadores, que instiguem a curiosidade dos alunos, o processo de ensino aprendizagem pode dar-se de uma forma mais efetiva.

Nesse sentido Pinheiro reforça que

O Ensino da Matemática por meio da Resolução de Problemas destaca-se, pois, por vezes, o aluno sabe contar de 1 até 50, mas caso seja pedido para que o mesmo pegue nove lápis de cor, ele não conseguirá resolver esse problema, visto que ele aprendeu o algoritmo de contagem, entretanto não sabe interpretar o que está fazendo. (PINHEIRO, 2018, p.42).

No próximo capítulo, por meio de uma retrospectiva de tudo que fora discutido até aqui, encerraremos nosso trabalho.

4.2.1 Alguns estudos de caso

Assim como fizemos com a metodologia anterior, para a Resolução de Problemas, fomos buscar em trabalhos científicos justificativas que consolidem nossas ideias de que, também, essa metodologia de ensino tem eficácia na redução de dificuldades de aprendizagem dos alunos, em particular, no ensino do Algoritmo da Divisão.

Para tanto, recorreremos aos textos das professoras De Lima & Carvalho, sobre *Algumas estratégias de resolução de problemas de divisão*, 2014; de Provin & Agranionih, que discorrem sobre *Resolução de problemas de divisão na educação infantil*, 2008; e, também, do professor Câmara, regendo sobre *Resolução de problemas: uma proposta metodológica*, 2016.

De Lima & Carvalho organizaram seu trabalho com os alunos do 4º ano do Ensino Fundamental, na faixa etária de 8 a 13 anos, e elas buscaram fazer, por meio de uma pesquisa qualitativa, na modalidade de um estudo de caso, acerca das estratégias de resolução de problemas de divisão, um estudo sobre as dificuldades dos alunos no processo de ensino aprendizagem deste conteúdo.

Elas reforçam que

Para a análise das respostas foram criadas duas categorias: aplicação de estratégia e aplicação do algoritmo. Os resultados revelaram que os participantes resolveram as situações-problema pautando-se em seus conhecimentos acerca do campo aditivo com indicações de que utilizam o algoritmo das operações aritméticas de forma mecânica, o que não favorece a construção dos conceitos matemáticos. (DE LIMA & CARVALHO, 2014, p. 1)

De Lima & Carvalho (2014, p.2) salientam ainda que propiciar aos alunos problemas matemáticos desde os anos iniciais caracteriza uma excelente oportunidade para eles criarem diferentes estratégias de resolução, contribuindo com isso para a aprendizagem acerca dos conteúdos matemáticos.

Assim, as autoras reforçam que o problema irá instigar o aluno a buscar uma resolução, não tão somente uma resposta, faz-se necessário o desafio, a vivência de uma situação nova, construindo o conhecimento de forma mais significativa e duradoura.

Elas propuseram algumas atividades para os alunos, tais como: “Maria fez 30 brigadeiros e irá colocar 5 em cada saquinho. De quantos saquinhos ela irá precisar? Explique como chegou à resposta.”; “Se repartirmos 24 pães para 6 crianças, quantos pães receberá cada uma? Explique como você chegou à resposta.” e “Carlos vai fazer aniversário. Cada amigo que vier a sua festa vai ganhar 3 balões. Ele comprou 18 balões. Quantos amigos ele pode convidar? Explique como você chegou à resposta”.

Notemos que os problemas propostos, necessitam de uma resolução, não somente uma resposta, o aluno deve criar argumentos para poder chegar a tal resposta e, conjecturamos que é nesta etapa que o processo de aprendizagem se consolida.

Para a análise das resoluções dos mesmos, as professoras constataram que

Quanto aos problemas que os alunos resolveram utilizando desenhos e esquemas, percebemos diferenças significativas entre as estratégias utilizadas para responderem à atividade de pesquisa e as atividades presentes em seus cadernos, ou seja, os problemas são resolvidos a partir da aplicação do algoritmo. (DE LIMA & CARVALHO, 2014, p. 8)

Deste modo, ainda que o problema possa ser resolvido de modos distintos, os alunos precisarão utilizar-se de algum algoritmo para chegar à resposta correta do mesmo.

Provin e Agranionih concentram seus esforços para estudar os alunos na faixa etária de 5 e 6 anos de idade, de uma turma da Educação Infantil de escola estadual de Erechim, no mês de agosto de 2007, buscando verificar como a Resolução de Problemas pode auxiliar no ensino da divisão, tentando identificar quais as estratégias utilizadas na resolução quais as formas de registro utilizadas.

As autoras salientam que qualquer recurso didático deve servir para que os alunos aprofundem e ampliem os significados das noções matemáticas, mas o mais importante é atribuir significados às ações que realizam e refletir sobre tais ações.

Elas realizaram entrevistas individuais com os alunos, seguindo todos os princípios do método clínico. Propondo para eles, resolvem problemas como: “Mamãe comprou 9 bombons para repartir igualmente entre três crianças. Quantos bombons cada uma ganhará?”; “Dona Dedé tinha 10 carrinhos e queria guardar 5 carrinhos em cada caixa. Quantas caixas ela vai ocupar?” e “Aninha tinha 6 bolinhos de milho e queria colocá-los em 3 pratos. Quantos bolinhos de milho ela deveria colocar em cada prato?”.

Para que os mesmos realizassem essas tarefas, elas deram para os alunos folhas de ofício, palitos de picolé e lápis para o registro da representação do problema.

As mesmas reforçam ainda que

O trabalho evidencia que as crianças da Educação Infantil podem e devem ser estimuladas a trabalhar com problemas de divisão, embora não seja uma tarefa muito fácil para elas e que o papel do professor, como problematizador e orientador da tarefa é fundamental para que comecem a construir os primeiros conceitos que envolvem essa operação. (PROVIN & AGRANIONI, 2008, p.10)

Assim, novamente constatamos que o aluno, ao aprender o processo de divisão por meio da Resolução de Problemas, o mesmo se sente mais estimulado a fazer as tarefas, o que contribuiu para amenizar tais dificuldades.

Por outro lado, Câmara destaca que

Trabalhar problemas curiosos e desafiadores, nos anos iniciais de estudo, acredito ser uma estratégia fundamental para despertar, no aluno, o prazer pela Matemática e motivar, no professor, o gosto pelo estudo e pela pesquisa. Associar estes problemas a uma metodologia de resolução que promova o debate, a troca de ideias, a tomada de decisões, a análise de resultados e o trabalho em equipe, contribuirá ainda mais para uma formação matemática consistente tanto do professor quanto do aluno. (CÂMARA, 2016, p.12).

Deste modo, o professor traz em seu trabalho uma proposta concreta para ser aplicada junto aos professores do Ensino Fundamental II das Escolas Públicas de Tempo Integral de Fortaleza.

Baseado na metodologia do professor George Polya, a Resolução de Problemas, estruturada como metodologia de ensino, concebe o problema como um componente estratégico no processo de construção do conhecimento.

O professor destaca três pontos que devem ser levados em consideração durante a aplicação dessa metodologia que são Conceituação, Manipulação e Aplicação. Para ele:

a **conceituação** compreende a formulação correta e objetiva das definições matemáticas, o enunciado preciso das proposições, a prática do raciocínio dedutivo, a nítida conscientização de que conclusões sempre são provenientes de hipóteses que se admitem, a distinção entre uma afirmação e sua recíproca, o estabelecimento de conexões entre conceitos diversos, bem como a interpretação e a reformulação de ideias e 21 fatos, sob diferentes formas e termos.

a **manipulação** está para o ensino e o aprendizado da Matemática, assim como a prática dos exercícios e as escalas musicais estão para a música. A habilidade e a destreza no manuseio de equações, fórmulas e construções geométricas elementares, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas, verdadeiros reflexos condicionados, permitem ao usuário da Matemática concentrar sua atenção consciente nos pontos realmente cruciais, poupando-o da perda de tempo e de energia com detalhes secundários.

as **aplicações** são empregos das noções e teorias da Matemática para obter resultados, conclusões e previsões em situações que vão desde problemas triviais do cotidiano a questões mais sutis que surgem noutras áreas, quer científicas, tecnológicas ou mesmo sociais. As aplicações constituem a principal razão pela qual o ensino da Matemática é tão difundido e necessário, desde os primórdios da civilização até os dias de hoje e, certamente, cada vez mais no futuro. Como as entendemos, as aplicações do conhecimento matemático incluem a resolução de problemas, esta arte

intrigante que, por meio de desafios, desenvolve a criatividade, nutre a autoestima, estimula a imaginação e recompensa o esforço de aprender. (CÂMARA, 2016, p. 22)

Baseado nessas três premissas, o professor propõe uma lista de problemas motivadores que possam ser resolvidos pelos alunos, não a fim de encontrar uma resposta para o mesmo, mas sim em ter o prazer da descoberta de uma resolução.

Câmara salienta ainda que

Com este estudo, não pretendemos esgotar as possibilidades teórico- metodológicas tampouco apresentá-lo como “a forma ideal” de o professor proceder em sala de aula, intencionamos apenas expor elementos que o ajudem a construir uma prática pedagógica mais positiva para ele e mais significativa para o aluno, quanto ao processo ensino-aprendizagem. (CÂMARA, 2016, p. 94)

Assim, buscamos com este nosso trabalho, por meio dessas duas metodologias (O Material Dourado e/ou A Resolução de Problemas) buscar uma amenização para as dificuldades encontradas no processo de ensino-aprendizagem dos processos de divisão que, a nosso ver, nossa experiência em sala, acaba por ser a operação básica que possui a maior dificuldade em ser ensinada/aprendida pelos alunos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Assim, espero que este trabalho possa auxiliar professores no que diz respeito a elaboração de suas aulas, quiçá, introduzindo os conceitos da divisão euclidiana fazendo com seus alunos uma viagem no tempo, dos Gregos, dos Egípcios e, por que não dos Maias.

Desse modo, como tentativa de amenizar essas dificuldades propomos que seja realizado um trabalho inicialmente voltado para os processos de multiplicação, associando-os como operação inversa da divisão, pois acreditamos que a falta dessa associação é a grande dificuldade encontrada pelo aluno.

Reconhecemos que os desafios são muito grandes, ainda mais no ensino básico, na rede pública de Belém, algo que fora observado em nossas práticas durante o estágio supervisionado, e que se reflete para todo o Brasil, com as notas do PISA e do SAEB, contudo acreditamos em nossa proposta, de mesclar o ensino tradicional, em regras e fórmulas matemáticas, com algo inovador, que prenda a atenção do aluno, pois assim ele verá sentido naquilo que está fazendo.

Fazer o aluno entender os critérios de divisibilidade e ter o Algoritmo da Divisão de Euclides como uma ferramenta para a resolução de várias questões pode ser de grande relevância para o processo de aprendizagem, pois o mesmo, ao conseguir resolver os problemas se sentirá mais motivado a querer aprender mais.

Retomando as palavras de Alcântara, que destaca o fato de os alunos do sexto ano estarem passando pelos maiores desafios que a humanidade passou, com o desenvolvimento do pensamento geométrico, o Material Dourado, pode ter grande valia no processo de ensino aprendizagem, uma vez que o aluno irá fazer a associação do abstrato com o concreto, fato que pode melhorar a compreensão dos mesmos.

Salientamos também os professores podem, por meio de suas experiências criar metodologias inovadoras, que despertem o interesse nos alunos em aprender e, mesclando essa teoria com a metodologia tradicional, o professor, em longo prazo, poderá ter excelentes resultados nos níveis de proficiência de seus alunos.

A partir deste momento, fazendo o uso da primeira pessoa do singular, ao terminar este trabalho gostaria de fazer algumas considerações de todo o tempo que percorri nesta graduação.

Ao ser aprovado para ingressar como estudante na Universidade Federal do Pará, tinha várias expectativas, tais como o nível de dificuldade das disciplinas, o comportamento dos professores com relação aos alunos, os colegas de turma e a estrutura que encontraria para seu corpo docente.

Gostaria de começar pelo nível de dificuldade das disciplinas, fiquei contente, pois o grau de excelência nunca titubeou, gabarito digno da maior e melhor instituição de ensino superior do norte do país.

No início acreditei que seria somente um prolongamento do ensino médio, entretanto com o tempo foram aparecendo assuntos novos como os Cálculos, a Álgebra e muitos outros, assuntos que vieram bem diferentes dos que tinha visto nas séries passadas tanto no ensino fundamental como no médio, então essas novas experiências, de estudar novos assuntos e a soma de todos os conhecimentos que descobrir dentro dessa universidade, fizeram-me um conhecedor da matemática pura.

No que tange aos professores, surpreendi-me bastante, pois pensava estava enraizado em mim a ideia de que eram indelicados com os alunos, por serem mestres e doutores, muitos deles estrangeiros, contudo, diferente do pensava, todos foram delicados e procuravam ao máximo serem compreensíveis com os alunos, procurando conhecer as necessidades de cada um, o motivo pelo qual não estavam com um o bom desempenho na matéria ou o porquê das notas baixas.

Uns mais rígidos que outros, mas, cada um com sua peculiaridade, fizeram o possível para me ajudar, então, deixo meu reconhecimento e gratidão a todos indistintamente do fundo do coração.

Não tenho palavras para descrever meu amor pela Universidade Federal do Pará, o abrigo que acolhe a todos sem distinção, abraça todas etnias, não rejeita ninguém, recebe o negro, o branco, o estrangeiro, o caboclo, o indígena, a todos, oferece em sua estrutura o máximo para que a formação de seus alunos seja completa, com funcionários capacitados para o bom funcionamento e, nesse sentido, registro o carinho e respeito a todos da nossa faculdade que sempre foram atenciosos comigo.

Gostaria de agradecer em primeiro lugar a Deus por ter me permitindo chegar aqui, também a minha família principalmente aos meus pais que, mesmo sem recursos para me ajudar, sempre incentivaram a continuasse o curso, pois, por meio dele poderia mudar de vida.

Também aos colegas, alguns deles amigos, assim posso dizer, pois em vários momentos eram eles que me levaram pra frente e a todos os meus agradecimentos.

Não o bastante, quero agradecer ao um amigo que encontrei no decorrer do curso, Henrique Maia, uma pessoa do bem, que não me deixou em nenhum momento, sempre esteve no meu lado me ajudando e orientando.

Minha eterna gratidão ao professor Dr. Paulo Vilhena da Silva, meu orientador, que nunca me faltou a atenção.

Esperando que este trabalho possa contribuir para o processo de ensino de outras crianças têm dificuldades em aprender processos básicos de aritmética, assim como eu tive um dia, agradeço a todos que, de sua maneira, contribuíram para a construção deste.

REFERÊNCIAS

- ALCÂNTARA, J. B. N. **A compreensão dos conceitos da “Regra de Sinais” no Ensino Fundamental**. Universidade Estadual Do Norte Do Paraná, Santo Antônio da Platina – PR, 2013.
- ARAÚJO, C. R. de; LOPES NETA, N. de A. **As implicações do ensino tradicional e inovador para a aprendizagem de matemática na modalidade EJA**. Maceió – AL, 2017.
- BAGATINI, A. **Olimpíadas de Matemática, altas habilidades e Resolução de Problemas - RS**. 2010. 82 f. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2010.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- BROUSSEAU, G. **Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. Recherches en didactique des mathematiques**, v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.
- CAJUELLA, S. R. Aprendendo a dividir números naturais utilizando o material dourado - **Parte 1**. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br>. Acesso em: 01 maio. 2020 (adaptado).
- CÂMARA, R. de S. **Resolução de problemas: uma proposta metodológica**. Dissertação (PROFMAT) – Universidade Federal do Ceará, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2014.
- CARVALHO, N. T. B., GIMENEZ, C. S. C., **Fundamentos de Matemática I**. 2ª Edição Florianópolis: UFSC/ EAD/CED/CFM, 2009.
- DA SILVA, M. J. F.; ALMOULOUD, S. Ag. **As operações com números racionais e seus significados a partir da concepção parte-todo**. Boletim de Educação Matemática, v. 21, n. 31, p. 55-78, 2008.
- DE OLIVEIRA SILVA, F.; CORREIA, P. **Unidade Didática: Operações com números naturais: multiplicação/divisão**. 2015. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.
- DE LIMA, R. R.; CARVALHO, M. Algumas estratégias de resolução de problemas de divisão. Boletim GEPEM. 2014.
- DOS SANTOS, L. O. **Técnicas e métodos da divisão na educação básica**. Produção didático-pedagógica. 2013. Programa de Desenvolvimento Educacional, Santo Antônio da Platina – PR: UENP, 2013.
- FEDRIGO, R; JONIS, N; **Epistemologia dos Números Relativos**, Monografia em Ensino da Matemática, vol. I (2001), No 01, PP 101- 110.
- GALVÃO, M. E. E. L. **As origens da matemática–dos processos de contagem aos sistemas de numeração**. INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA-USP, 2014
- GUIA 101 GÊNIOS QUE MUDARAM A HISTÓRIA DA HUMANIDADE. Editora: On Line Editora; Edição: 01. 2016.

- HEFEZ, A. **Aritmética**. Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.
- JOURDAN, C. **Provas matemáticas em Wittgenstein**. Revista de Filosofia Aurora, v. 21, n. 29, p. 297-312, 2009.
- LACERDA, A. G. **Linguagem, comunicação e Matemática**. Pará de Minas, MG: Virtualbooks Editora, Publicação: 2016.
- MINAYO, M.C.S. (Org) **Pesquisa Social: Teoria Método e Criatividade**. 13.ed. Petrópolis – RJ: Vozes, 1999
- NETO, F. T. da R. **Dificuldades na Aprendizagem Operatória de Números Inteiros no Ensino Fundamental**. Dissertação Mestrado Profissional no Ensino de Ciências e Matemática. Fortaleza: UFC, 2010.
- OLIVEIRA, M. K. et al. **Material dourado como recurso pedagógico para o ensino das quatro operações matemáticas**. Ambiente: Gestão e Desenvolvimento, v. 9, n. 2, p. 114-130, 2016.
- OLIVEIRA, M. L. V. de. **Ensino de matemática para surdos e ou cegos**. Dissertação (PROFMAT) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2014.
- POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**, v. 2. Rio de Janeiro: interciência, 1978.
- PROVIN, S; AGRANIONI, N.T.; **Resolução De Problemas De Divisão Na Educação Infantil**. Síntese da monografia apresentada ao curso de Pós-Graduação em Matemática e Física da URI-Campus de Erechim, 2008
- ROQUE, T; DE CARVALHO, J. B.P. **Tópicos de história da matemática**. 2012.
- SANT’ANA, N. A. Dos S.; LAUDARES, J. B. **Pensamento aritmético e sua importância para o ensino da matemática**. PUC – Minas, MG. 2016.
- SELVA, A. C. V.; BORBA, R. E. S. R. **O uso de diferentes representações na resolução de problemas de divisão inexata: analisando a contribuição da calculadora**. Boletim GEPEN, Rio de Janeiro, n. 47, p. 51-72, jul/dez 2005.
- SOARES, I. S.; DE OLIVEIRA, J. S. **Leitura, compreensão e interpretação de enunciados matemáticos: conceito de divisibilidade, dificuldades, desafios e perspectivas**. 2014.
- SOUZA, S. L. F. D. de; SETTI, E. J. K.; TAMBARUSSI, C. M. **Material dourado: potencialidades no ensino das operações de adição e subtração para alunos de um 3º ano do ensino fundamental**. Periódicos UTFPR. Ensino e Tecnologia em Revista. 2019.
- PAVANELLO, R. M. **De linguagem, matemática e construção do conhecimento: algumas reflexões para a prática educativa**. Universidade do Estado de Maringá, Maringá – PR: 2007.

PINHEIRO, H. M. **A resolução de problemas das provas da OBMEP como metodologia auxiliar de ensino.** 2018. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal do Pará. Belém, 2018.

PINHEIRO, H. M. **O Xadrez nas estratégias de resoluções de problemas matemáticos : Um olhar a partir da Neurociência.** Dissertação (Mestrado Matemática) – Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Belém – PA: UFPA, 2020.

VYGOTSKY, L. S. et al. **Aprendizagem e desenvolvimento intelectual na idade escolar:**Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem. São Paulo: Ícone: EDUSP, 1988.

ZATTI, F; AGRANIONIH, N. T.; ENRICONE, J. R. B. **Aprendizagem matemática: desvendando dificuldades de cálculo dos alunos.** Perspectiva, v. 34, n. 128, 2010.

ANEXO 1

O Princípio da Boa Ordenação

Atualmente toda Teoria Axiomática dos Conjuntos está alicerçada nos escritos do alemão Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, ou, simplesmente, Georg Cantor (1874 – 1918), embora nada seja simples nessa que é uma das maiores realizações do intelecto humano. Assim, baseados nos estudos de Cantor, neste tópico faremos a formalização do Princípio da Boa Ordem ou Princípio da Boa Ordenação.

Teorema 01: Se $n \in \mathbb{N}$, então não existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n < p < n + 1$.

Demonstração 01: Desde que $n < p$ e $p < n + 1$, temos que, existem naturais $a > 0$ e $b > 0$ tais que

$$p = n + a \text{ e } n + 1 = p + b$$

Daí,

$$n + 1 = n + a + b$$

Pela lei do cancelamento, temos,

$$1 = a + b.$$

Um absurdo. Logo, não existe natural p que esteja entre um número e seu sucessor. ■

Teorema 02 (Princípio da Boa Ordenação): Todo subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{N}$ possui um elemento mínimo.

Demonstração 02: Com efeito, temos dois casos a considerar:

i) Se $0 \in A$, então 0 é o menor elemento de A .

ii) Se $0 \notin A$, sejam $I_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ e $X = \{n \in \mathbb{N}; I_n \subset \mathbb{N} - A\}$, ou seja, os elementos que são maiores do que n .

Daí, temos que $\exists n \in X$ tal que $(n + 1) \notin X$, pois se $(n + 1) \in X$ então $X = \mathbb{N}$, porém A é não vazio.

Assim, $\exists p \in A \mid p = n + 1$.

Suponhamos agora que $\exists q \in A \mid q < p$. Isso seria um absurdo, pois,

$$n < q < p = n + 1.$$

Logo, p é o menor elemento do conjunto A . ■