UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ABAETETUBA
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ÂNGELO FELIPE MACHADO SILVA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: um estudo sobre problemas de autovalores

ABAETETUBA - PA
2022

ÂNGELO FELIPE MACHADO SILVA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: um estudo sobre problemas de autovalores

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, do Campus Universitário de Abaetetuba, da Universidade Federal do Pará, como requisito obrigatório para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Suellen Cristina Queiroz Arruda

ABAETETUBA - PA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586e Silva, Ângelo Felipe Machado.
Equações diferenciais ordinárias : um estudo sobre problemas de autovalores / Ângelo Felipe Machado Silva. — 2022.
vi, 20 f.

Orientador(a): Profª. Dra. Suellen Cristina Queiroz Arruda
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Pará, , , Abaetetuba, 2022.

1. Equações diferenciais. 2. Problemas de Sturm-Liouville. 3. Autovalores e autofunções. I. Título.

CDD 515.352

ÂNGELO FELIPE MACHADO SILVA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: um estudo sobre problemas de autovalores

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, do Campus Universitário de Abaetetuba, da Universidade Federal do Pará, como requisito obrigatório para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Data de Aprovação:

BANCA EXAMINADORA:

Prof.ª Dr.ª Suellen Cristina Queiroz Arruda

Orientadora - FACET/CUBT/UFPA

Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro

Membro Interno - FACET/CUBT/UFPA

Prof.ª Dr.ª Rúbia Gonçalves Nascimento

Membro Externo - ICEN/FACMAT/UFPA

Dedico este trabalho ao Eterno que me concedeu capacidade e ânimo para desenvolver este trabalho, à minha família que me apoiou durante todo o processo, à minha namorada pelo apoio e incentivo e à minha orientadora pela incrível dedicação.

Agradecimentos

Agradeço a Deus que ao longo do curso me concedeu sua graça para eu não desistir em meio as dificuldades e por me atribuir habilidades para desenvolver o que precisava ser feito de maneira eficaz.

À minha família pela compreensão nos momentos que precisava me ausentar para estudar, em especial, à minha mãe pelo apoio e fé que colocou em minha formação.

À minha orientadora, Dr.ª Suellen Cristina Queiroz Arruda, pela oportunidade de "trabalhar" com ela como bolsista de Iniciação Científica, pelas suas inúmeras contribuições para minha formação profissional e pessoal, pelos conselhos e pela incrível dedicação e paciência que demonstrou ao longo desse percurso.

À minha namorada, que esteve comigo nos momentos bons e ruins incentivando e apoiando durante todo o curso.

A todos os professores que contribuíram para o meu aprendizado e conhecimento, despertando o interesse por esta ciência fantástica que é a Matemática.

Aos meus colegas de curso com os quais fiz essa caminhada, levarei em minha lembrança todos os momentos bons vividos.

A todos que direta ou indiretamente se constituíram indispensáveis para minha permanência e meu desenvolvimento na universidade.

"Paciência e perseverança tem o efeito mágico de fazer as dificuldades desaparecerem e os obstáculos sumirem."

(John Quincy Adams)

Equações Diferenciais Ordinárias: um estudo sobre problemas de autovalores

Ângelo Felipe Machado Silva[1]
Suellen Cristina Queiroz Arruda[2]

Resumo: As Equações Diferenciais é um importante ramo de pesquisas na Matemática, tanto pelo seu rigor matemático, quanto por sua multiplicidade de aplicações em diversos campos científicos, tais como, Física, Biologia e Engenharias. Em todas essas áreas do conhecimento nos deparamos com fenômenos modelados a partir de equações diferenciais, tal fato justifica a importância do seu estudo ao longo dos últimos três séculos. No presente trabalho, investigaremos a existência de solução para um problema de autovalores na reta envolvendo uma equação diferencial com valores de contorno. A ideia consiste em encontrar todos os valores para os quais a solução do problema é não-trivial, chamados de autovalores, e as autofunções associadas a esses autovalores. Tal problema relaciona as equações diferenciais com conceitos da Álgebra Linear e do Cálculo Diferencial e Integral, bem como está incluso em uma grande classe de problemas de valores de contorno, chamada Problemas de Sturm-Liouville, a qual possui propriedades relevantes para o seu estudo.

Palavras-chave: Equações Diferenciais; Problemas de Sturm-Liouville; Autovalores e Autofunções.

Abstract: Differential Equations is an important field of research in Mathematics, both for its mathematical rigor and for its multiplicity of applications in various scientific fields, such as Physics, Biology and Engineering. In all these areas of knowledge we are faced with phenomena modeled from differential equations, this fact justifies the importance of its study over the last three centuries. In the present work, we will investigate the existence of a solution to a eigenvalue problem on the line involving a differential equation with boundary values. The idea is to find all the values for which the solution to the problem is non-trivial, called eigenvalues, and the eigenfunctions associated with these eigenvalues. This problem relates differential equations with concepts of Linear Algebra and Differential and Integral Calculus, in addition, it is included in a large class of boundary value problems, called Sturm-Liouville Problems, which has properties relevant to its study.

Keywords: Differential Equations; Sturm-Liouville problems; Eigenvalues and Eigenfunctions.

[1]Discente do Curso de Licenciatura em Matemática/CUBT/UFPA - a.felipesilva712@gmail.com
[2]Docente Orientadora. Doutora em Matemática - scqarruda@ufpa.br

Introdução

Problemas envolvendo curvas atraíram interesse de diversos matemáticos durante o século XVII, seja para encontrar retas tangentes ou estipular área delimitada por curvas. Questões dessa natureza eram importantes na resolução de problemas físicos, como por exemplo, explicar a trajetória de um projétil. Essa inquietação por partes dos matemáticos da época resultaram no surgimento do Cálculo Diferencial e Integral, segundo Eves (2004, p. 462): "o cálculo, apoiado pela geometria analítica, foi o maior instrumento matemático descoberto no século XVII". O desenvolvimento deste ramo da Matemática, atribuído aos célebres matemáticos Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716), desdobrou-se em estudos ainda mais avançados originando um novo ramo da Matemática, as Equações Diferenciais.

Os estudos das Equações Diferenciais, a princípio, se reduziam à necessidade de solucionar problemas práticos da Física, mas, logo o avanço da teoria expressou sua relevância por dois motivos extremamente cruciais: as equações diferenciais apresentaram uma matemática rigorosa, que foi importante para o avanço de outros ramos da Matemática, e uma multiplicidade de aplicações tanto para a própria matemática quanto para as outras áreas do conhecimento, tais como, Biologia, Economia, Química e Engenharias. Zill e Cullen (2001, p. 1) relatam que "as equações diferenciais são o suporte matemático para muitas áreas tanto da ciência, quanto da engenharia" e, salientam que por esse motivo o estudante de ciências exatas deve estudá-las.

De acordo com Eves (2004), grandes matemáticos se dedicaram ao desenvolvimento da Matemática, em especial, ao estudo das equações diferenciais, dentre eles podemos citar: Jakob Bernoulli (1654 – 1705) que propôs e discutiu o problema das figuras isoperimétricas e, com isso foi um dos primeiros matemáticos a trabalhar no cálculo das variações; Johann Bernoulli (1667 – 1748), irmão de Jakob, que teve diversas contribuições como, por exemplo, o notório problema da Braquistócrona; Leonhard Euler (1707 – 1783), um matemático proeminente com contribuições nos mais variados campos da matemática, que empregou a ideia de fator integrante na resolução de equações diferenciais e desenvolveu o método sistemático usado até hoje para resolver equações diferenciais lineares com coeficientes constantes.

Nas diferentes áreas do conhecimento foi perceptível a necessidade de modelar seus problemas por meio de uma equação que contenha uma função e suas taxas de variação, o que constitui as equações diferenciais. Por este motivo, o estudo das equações diferenciais despertaram a atenção de respeitados matemáticos do mundo no passado e, ainda tem estimulado a curiosidade de muitos outros atualmente. Segundo Boyce e DiPrima (2017, p. 1) as equações diferenciais "continua sendo uma área de pesquisa dinâmica hoje em dia, com muitas questões em aberto", e ressaltam que os modelos mais simples podem ser usados para modelar fenômenos físicos importantes.

Para muitos a beleza das equações diferenciais está na sua rica variedade de aplicações, no entanto, Boyce e DiPrima (2017) explicam que enquanto para grande parte dos estudantes a percepção das aplicações em outros ramos da ciência é imprescindível para motivá-los a estudarem o assunto, existe as exceções de estudantes que o assunto propriamente dito é motivação suficiente. Diante disso, este trabalho nos coloca no segundo grupo, tratamos as equações diferencias sem aplicá-las em algum contexto da vida real, estamos interessados na elegância de resultados necessários para solucionar um tipo especifíco de problemas em seu estudo.

Dentre os problemas encontrados na teoria das equações diferenciais, destacamos o bastante conhecido *Problemas de valores de contorno de Sturm-Liouville*, que trata de uma grande e importante classe de problemas da Matemática, a qual possui resultados úteis para o estudo de equações diferenciais aplicados a valores de contorno. Sendo assim, abordamos no presente trabalho um problema incluído na referida classe, conhecido como *Problema dos autovalores na reta* cuja ideia é apresentar sua solução e explicitar as características herdadas pela classe.

Ao longo do trabalho, utilizamos como livro-texto a obra de Boyce e DiPrima (2017), que nos guiou em todas as seções, no entanto, nos fundamentamos também nas obras de Zill e Cullen (2001), Coelho e Lourenço (2018), entre outras.

O trabalho está dividido em três partes. Na Seção 1, apresentamos as definições necessárias para a compreensão do problema em questão. Em especial, por estarmos tratando de uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes, explanamos o conceito de equação característica ou equação auxiliar.

Na Seção 2, abordamos os conceitos e a classe de equações diferenciais com valores de contorno, introduzindo a classe de Problemas de Sturm-Liouville. Por fim, na Seção 3, tratamos o ponto principal deste trabalho, o problema dos autovalores na reta, sua resolução e as caraterísticas que o faz pertencer à classe de Problemas de Sturm-Liouville.

1 Fundamentos Teóricos

Nesta seção, veremos as definições e alguns resultados, estudados nas disciplinas de Álgebra Linear e Equações Diferenciais Ordinárias, necessários para compreender a resolução do problema de autovalores.

1.1 Equações Diferenciais Ordinárias

Dos cursos de Cálculo aprendemos o conceito de derivada de uma função, onde conhecendo a função é possível determinar se existem ou não as suas derivadas. Ao contrário disto, as equações diferenciais se interessam em realizar o processo inverso. Dada uma equação que contêm derivadas de uma função, busca-se uma função que possa satisfazer a

equação. Portanto, "uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de equação diferencial." (ZILL e CULLEN, 2001, p. 2).

As Equações Diferenciais (EDs) se distinguem entre si a partir de características que as classificam em três aspectos: em relação ao tipo, à linearidade e à ordem. Quando na equação a função desconhecida depende apenas de uma variável independente, tem-se uma Equação Diferencial Ordinária (EDO), mas, se a função depende de duas ou mais variáveis independentes, chama-se Equação Diferencial Parcial (EDP). Assim, em uma EDO aparecem apenas derivadas simples, enquanto que em uma EDP temos derivadas parciais.

Um exemplo de EDO é a equação que descreve o movimento harmônico simples

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

onde $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$. Por outro lado, um exemplo de EDP é a equação do calor

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x},$$

em que α^2 é uma constante física, essa equação descreve a condução do calor em corpo sólido.

Embora o estudo sobre EDPs seja de extrema importância, o nosso trabalho requer somente o conhecimento prévio de EDO, logo, a partir deste momento, nos limitamos à discussão apenas para EDO.

Uma classificação importante de equações diferenciais é se elas são lineares ou não. Uma EDO é dita linear se seus coeficientes dependem somente da variável independente e se a função desconhecida e todas as suas derivadas são do primeiro grau. Isto é, uma EDO será linear se pode ser escrita da seguinte forma

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = g(t).$$

Caso contrário, a EDO é dita não linear.

É interessante destacar que ao longo dos últimos trezentos anos a teoria matemática para equações diferenciais lineares se desenvolveu bastante, em contrapartida, o estudo de equações diferenciais não lineares, além de ser mais complicado, possui métodos de resolução menos satisfatórios, conforme é exposto por Boyce e DiPrima (2017).

Outra classificação essencial de uma EDO depende das derivadas que aparecem na equação. Semelhante ao processo de determinar o grau de um polinômio, a ordem de uma EDO é definida, segundo Boyce e DiPrima (2017) identificando a derivada de maior ordem presente na equação. Por exemplo, uma EDO linear de segunda ordem é escrita

na forma

$$s(t)y'' + p(t)y' + q(t)y = r(t). \tag{1.1}$$

Caso $r(t) = 0$ diremos que a equação é homogênea.

Para solucionarmos um problema como do tipo (1.1), busca-se encontrar uma função $\phi(t)$ que satisfaça a equação para todo t em algum intervalo I. Em muitos casos, o esforço se resume em apenas mostrar a existência de tal função sem a preocupação de expressá-la. Isto se deve ao fato de que a maioria das equações diferenciais, caso possua solução, não é possível expressá-la em termos de funções elementares usuais (funções polinomiais, trigonométricas, exponenciais, logarítmicas e hiperbólicas).

Normalmente, busca-se resolver a equação diferencial impondo condições num ponto que precisam ser satisfeitas pela solução da equação, esse tipo de problema é denominado de Problema de Valor Inicial (PVI), o qual consiste em uma equação diferencial do tipo (1.1) com um par de condições iniciais

$$y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(t_0) = y'_0,$$

em que y_0 e y'_0 são números dados que descrevem os valores de y e y' no ponto inicial t_0.

A solução para o PVI é uma função que satisfaça a equação diferencial (1.1) em I cujo gráfico passa pelo ponto (t_0, y_0) e com o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico igual a y'_0 nesse ponto.

No entanto, será que sempre existirá uma função que além de ser solução da equação, cumpra essas condições? A resposta desssa pergunta está no próximo teorema que esclarece que, em um contexto apropriado, tal função não só existe, como também é única. Sua demonstração pode ser consultada em [7].

Teorema 1.1 (Existência e unicidade de solução)**.** *Sejam $s(t)$, $p(t)$, $q(t)$ e $r(t)$ contínuas em um intervalo I com $s(t) \neq 0$ para todo t nesse intervalo. Se $t = t_0$ é um ponto deste intervalo, então existe uma única solução $y(t)$ para o problema de valor inicial*

$$\begin{aligned} s(t)y'' + p(t)y' + q(t)y &= r(t), \\ y(t_0) = y_0 \quad e \quad y'(t_0) &= y'_0, \end{aligned}$$

neste intervalo.

Em nosso estudo, nos interessamos em equações lineares homogêneas de segunda ordem e, ainda, no caso em que $s(t) = a$, $p(t) = b$ e $q(t) = c$ são constantes na equação (1.1), o que nos dá

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

A seguir, apresentaremos algumas definições e resultados de existência de solução para a EDO homogênea acima.

1.2 Equações lineares homogêneas com coeficientes constantes

Nesta seção, vamos explorar o conceito de *equação característica*, também chamada de equação auxiliar, o que nos permitirá analisar a estrutura das soluções para EDOs do tipo

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{1.2}$$

onde a, b e c são constantes reais quaisquer.

Do Cálculo Diferencial, sabemos que a função exponencial e^t goza da propriedade de que a sua derivada segunda é igual a ela própria. Portanto, é razoável iniciarmos procurando soluções para (1.2) da forma $y(t) = e^{rt}$, onde r é um parâmetro a ser determinado. Com isto, teremos

$$y(t) = e^{rt} \quad ; \quad y'(t) = re^{rt} \quad \text{e} \quad y''(t) = r^2e^{rt}.$$

Substituindo as expressões acima em (1.2), obtemos

$$e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0.$$

Sabendo que $e^{rt} \neq 0$, a condição acima é satisfeita quando

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{1.3}$$

A equação (1.3) é chamada de *equação característica* ou *equação auxiliar* da equação diferencial (1.2). Note que (1.3) é uma equação polinomial do segundo grau na variável r, daí segue sua importância, pois se r for raiz desta equação significa que de fato $y(t) = e^{rt}$ é uma solução para a equação (1.2).

Uma vez que a equação característica (1.3) é do segundo grau, tem-se três casos para análise: quando as raízes forem reais e distintas, quando forem reais e iguais e quando forem complexas conjugadas.

Antes de proseguirmos para os casos a serem considerados, precisamos estabelecer algumas definições e teoremas. Para isto, vamos utilizar a notação de operador diferencial.

Teorema 1.2 (Princípio da Superposição)**.** *Se y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial homogêncea*

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \tag{1.4}$$

então a combinação linear $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução, quaisquer que sejam os valores das constantes c_1 e c_2.

Demonstração. Devemos mostrar que $L[c_1y_1 + c_2y_2] = 0$. Fazendo $y = c_1y_1 + c_2y_2$ e

substituindo suas derivadas primeira e segunda na equação (1.4), obtemos

$$\begin{aligned}
L[c_1y_1 + c_2y_2] &= [c_1y_1 + c_2y_2]'' + p[c_1y_1 + c_2y_2]' + q[c_1y_1 + c_2y_2] \\
&= c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_1py_1' + c_2py_2' + c_1qy_1 + c_2qy_2 \\
&= c_1[y_1'' + py_1' + qy_1] + c_2[y_2'' + py_2' + qy_2] \\
&= c_1L[y_1] + c_2L[y_2].
\end{aligned}$$

Como y_1 e y_2 são soluções de (1.4) segue que $c_1L[y_1] + c_2L[y_2] = 0$. ■

Um caso particular do teorema acima ocorre quando c_1 ou c_2 for zero. Desta forma, qualquer múltiplo constante de uma solução da equação (1.4) também é solução.

Uma equação diferencial pode possuir uma infinidade de soluções ao que chamamos de *familia de soluções*. O Teorema 1.2 nos diz que basta termos duas funções que satisfaçam a equação (1.4) para ser possível contruir uma familia de soluções.

Veremos a seguir a definição do wronskiano de funções que nos será muito útil para determinarmos uma função que represente tal infinidade de soluções.

Definição 1.1. *Sejam $y_1, y_2, \cdots, y_n$ funções diferenciáveis pelo menos $n-1$ vezes. O determinante dado por*

$$W(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

é chamado **wronskiano** *das funções $y_1, y_2, \cdots, y_n$.*

O wronskiano recebeu esse nome devido a Jósef Maria Hoene-Wronski (1776 - 1853). Segundo Zill e Cullen (2001), Hoene-Wronski foi mais um filósofo do que um matemático e sua única contribuição notável para a matemática foi o determinante usado no estudo de linearidade de funções.

Estamos interessados em encontrar as soluções da equação diferencial com coeficientes constantes (1.2), mais precisamente, pretendemos expresar a família de soluções que contém todas as soluções de (1.2), chamada *solução geral*. Isto será feito para cada um dos casos da equação característica (1.3).

Para isto, é essencial compreender alguns conceitos de indepêndencia linear, a priori, o que são funções linearmente independentes e conjunto fundamental de soluções.

Definição 1.2 (Conjunto Linearmente Independente)**.** *Dizemos que um conjunto de funções y_1 e y_2 é* **linearmente independente** *ou* **LI** *em um intervalo I se a equação*

$$c_1y_1 + c_2y_2 = 0,$$

com c_1 e c_2 contantes, implicam em $c_1 = c_2 = 0$.

É fácil de compreender o conceito de indepedência linear no caso de duas funções. Duas funções são linearmente independentes se nenhuma delas é múltipla da outra no intervalo considerado.

Definição 1.3 (Conjunto Fundamental de Soluções)**.** *Um conjunto y_1 e y_2 de soluções linearmente independentes para uma equação diferencial homogênea em um intervalo I é chamado de* **conjunto fundamental de soluções** *no intervalo.*

O próximo teorema estabelece um resultado crucial ao garantir que o wronskiano não nulo de um conjunto de duas soluções para uma equação diferencial homogênea em um intervalo I é condição necessária e suficiente para termos a independência linear das funções.

Teorema 1.3. *Sejam y_1 e y_2 soluções para a equação diferencial linear homogênea*

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

em um intervalo I. Então, o conjunto de soluções é linearmente independente em I se, e somente se,

$$W(y_1, y_2) \neq 0,$$

para todo t no intervalo.

Demonstração. Primeiramente, provemos que se $W(y_1, y_2) \neq 0$ então y_1 e y_2 são LI. Sejam duas constantes c_1 e c_2 tais que

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0.$$

Precisamos mostrar que c_1 e c_2 são ambas iguais a zero. De fato, calculando a derivada da combinação linear acima, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0 \\ c_1 y_1' + c_2 y_2' = 0 \end{cases}.$$

Desde que o determinante dos coeficientes do sistema, dado pelo wronskiano

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix},$$

é diferente de zero, segue que a única solução para o sistema é $c_1 = c_2 = 0$. Portanto, y_1 e y_2 são linearmente independentes.

Agora, vamos mostrar que se y_1 e y_2 são LI então $W(y_1, y_2) \neq 0$ para todo t em I. Suponha, por contradição, que y_1 e y_2 são LI e que exista t_0 em I tal que $W(y_1(t_0), y_2(t_0)) = 0$.

Logo, existem constantes c_1 e c_2 não nulas tais que

$$\begin{cases} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = 0 \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = 0 \end{cases}.$$

A função $y(t)$ definida como

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t),$$

satisfaz as condições

$$y(t_0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(t_0) = 0. \tag{1.5}$$

Como a função identicamente nula satisfaz a equação diferencial e as condições (1.5) segue do Teorema 1.1 que é a única solução, isto é,

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = 0,$$

para todo t no intervalo. Isto contradiz a hipótese de que y_1 e y_2 são linearmente independentes no intervalo. ■

Decorre do Teorema 1.3 e da Definição 1.3 que duas soluções y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental se, e somente se, $W(y_1, y_2) \neq 0, \ \forall\, t \in I$.

O nosso próximo passo é determinar a *solução geral* para a equação diferencial (1.4). Até aqui sabemos que duas soluções podem constituir uma infinidade de soluções e que o wronskiano é condição necessária e suficiente para sabermos se essas funções formam um conjunto fundamental de soluções para a equação. O próximo teorema utiliza esses resultados para caracterizar a família que representa todas as soluções da equação, introduzindo um significado para o termo "solução geral".

Teorema 1.4. *Sejam y_1 e y_2 soluções para a equação diferencial*

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

com

$$W(y_1, y_2) \neq 0,$$

então a família de soluções

$$y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

quaisquer que sejam c_1 e c_2 inclui todas as soluções da equação.

Demonstração. Sejam y uma solução qualquer para a equação e t_0 um ponto em que $W(y_1(t_0), y_2(t_0)) \neq 0$. Suponha ainda que os valores de y e y' no ponto t_0 são dados por

$$y(t_0) = y_0 \ \text{ e } \ y'(t_0) = y_0'.$$

Desse modo, temos o seguinte problema de valor inicial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad y(t_0) = y_0 \ \text{ e } \ y'(t_0) = y'_0.$$

A função y satisfaz tanto a equação diferencial quanto as condições iniciais. Agora, se examinarmos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = y_0, \\ c_1 y'_1(t_0) + c_2 y'_2(t_0) = y'_0, \end{cases} \tag{1.6}$$

temos que as constantes c_1 e c_2 são determinadas de maneira única uma vez que o determinante dos coeficiente, que é o wronskiano das funções y_1 e y_2 calculado no ponto t_0, é diferente de zero, por hipótese.

Decorre do Teorema 1.2 que a função $\phi(t)$ definida por

$$\phi(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

satisfaz a equação diferencial já que é uma superposição das soluções y_1 e y_2. Além disso, note que ϕ satisfaz as condições iniciais. Portanto, concluímos que ϕ também é uma solução do PVI.

Por outro lado, como o Teorema 1.1 garante a unicidade de solução para o PVI temos que $y(t) = \phi(t)$, ou seja,

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

Desde que y é uma solução arbitrária segue que y inclui todas as soluções da equação diferencial. ■

De forma geral, podemos sintetizar os resultados apresentados na seguinte definição:

Definição 1.4 (Solução Geral)**.** *Sejam y_1 e y_2 soluções linearmente independentes para uma equação diferencial homogênea em um intervalo I. A* **solução geral** *para a equação no intervalo é dada por*

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t),$$

onde c_1 e c_2 são constantes quaisquer.

Observação. *Apesar das definições e dos teoremas acima considerarem apenas duas soluções, é importante mencionar que valem para n soluções.*

Empossados da teoria até aqui abordada passamos à análise dos três casos possíveis para a equação característica (1.3).

Raízes Reais e Distintas: Se o discriminante $b^2 - 4ac$ for positivo, então $y_1(t) = e^{r_1 t}$ e $y_2(t) = e^{r_2 t}$ são duas soluções para a equação (1.2), sendo r_1 e r_2 raízes da equação

característica (1.3) com $r_1 \neq r_2$. Como o wronskiano das funções y_1 e y_2 dado por

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= y_1 y_2' - y_2 y_1' = e^{r_1 t} r_2 e^{r_2 t} - e^{r_2 t} r_1 e^{r_1 t} \\ &= (r_2 - r_1) e^{r_1 t + r_2 t} \end{aligned}$$

não se anula, então as soluções y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental. Segue do Teorema 1.4 que a solução geral da equação diferencial (1.2) é dada por

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}. \tag{1.7}$$

Raízes Reais e Iguais: Se o discriminante $b^2 - 4ac$ é igual a zero, temos r_1 e r_2 duas raízes da equação característica (1.3) com $r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}$ e, portanto, a equação (1.2) possui apenas a solução

$$y_1(t) = e^{\frac{-bt}{2a}}.$$

Nesse caso, a dificuldade está no fato das raízes resultarem na mesma solução. Decorre do Teorema 1.2 que se y_1 é solução de (1.2) então $c_1 y_1$ também é solução de (1.2) basta fazer $c_2 = 0$. Porém, y_1 e $c_1 y_1$ não formam um conjunto LI de soluções. Portanto, precisamos então encontrar uma segunda solução para (1.2) que não seja múltiplo de y_1.

O método que utilizaremos para acharmos essa segunda solução é conhecido como *Método de redução de ordem*, cuja ideia é reduzir uma ED de segunda ordem para uma ED de primeira ordem, facilitando o processo de resolução. Esse método foi desenvolvido pelo matemático francês Jean d'Alembert[3] no século XVIII e, consiste em uma interessante e importante ferramenta no estudo de equações lineares de segunda ordem, uma vez que permite construir uma segunda solução a partir de uma solução conhecida.

Sabendo que $y_1(t) = e^{\frac{-bt}{2a}}$ é uma solução não trivial da equação (1.2), o método possibilita determinar uma função $u(t)$ de modo que

$$y(t) = u(t) y_1(t) = u(t) e^{\frac{-bt}{2a}} \tag{1.8}$$

seja também solução de (1.2). De fato, ao derivar y, obtemos

$$y'(t) = u'(t) e^{\frac{-bt}{2a}} - \frac{b}{2a} u(t) e^{\frac{-bt}{2a}}$$

e

$$y''(t) = u''(t) e^{\frac{-bt}{2a}} - \frac{b}{a} u'(t) e^{\frac{-bt}{2a}} + \frac{b^2}{4a^2} u(t) e^{\frac{-bt}{2a}}.$$

[3] D'Alembert (1717 - 1783) foi contênporâneo de Euler e Daniel Bernoulli, e é conhecido, principalmente, por seu trabalho em mecânica e equações diferenciais. Contribuiu também na algebra com um resultado que tomou seu nome (Teorema de D'Alembert). Também se dedicou ao lado de Diderot como editor de ciência da obra *Enciclopédia*.

Substituindo as expressões acima na equação diferencial (1.2) temos que

$$e^{\frac{-bt}{2a}}\left(au''(t)+\frac{b^2}{4a}u(t)-\frac{b^2}{2a}u(t)+cu(t)\right)=0.$$

Como $e^{\frac{-bt}{2a}}\neq 0$ segue que

$$au''(t)+u(t)\left(\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c\right)=0,$$

ou seja,

$$au''(t)-u(t)\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)=0.$$

Desde que, por hipótese, $b^2-4ac=0$, concluímos que $u''(t)=0$. Assim, por integração,

$$u'(t)=c_1 \text{ e } u(t)=c_1t+c_2,$$

onde c_1 e c_2 são constantes quaisquer.

Por fim, substituindo $u(t)$ em (1.8), obtemos

$$y(t)=c_1te^{\frac{-bt}{2a}}+c_2e^{\frac{-bt}{2a}}, \tag{1.9}$$

que é uma combinação linear das duas soluções $y_1(t)=c_1te^{\frac{-bt}{2a}}$ e $y_2(t)=c_2e^{\frac{-bt}{2a}}$. Como o wronskiano das soluções y_1 e y_2 dado por

$$W(c_1te^{\frac{-bt}{2a}},c_2e^{\frac{-bt}{2a}})=\begin{vmatrix} te^{\frac{-bt}{2a}} & e^{\frac{-bt}{2a}} \\ \left(1-\frac{bt}{2a}\right)e^{\frac{-bt}{2a}} & -\frac{b}{2a}e^{\frac{-bt}{2a}} \end{vmatrix}=-e^{\frac{-bt}{a}}$$

é diferente de zero, então as soluções y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental. Além disso, a equação (1.9) é a solução geral da equação diferencial (1.2).

Note que neste caso existe uma solução exponencial correspondente à raiz repetida, enquanto uma segunda solução é obtida multiplicando-se a solução exponencial por t.

Raízes Complexas Conjugadas: Nesse caso, suponhamos que b^2-4ac seja negativo. Então, as raízes da equação característica (1.3) são dadas por $r_1=\lambda+i\mu$ e $r_2=\lambda-i\mu$, com λ e μ números reais posistivos e $i^2=-1$, o que resultam nas seguintes soluções para a equação (1.2)

$$y_1(t)=e^{(\lambda+i\mu)t} \text{ e } y_2(t)=e^{(\lambda-i\mu)t}.$$

Note que $W(e^{(\lambda+i\mu)t},e^{(\lambda-i\mu)t})\neq 0$, o que nos possibilita dizer que a solução geral é dada por

$$y(t)=c_1e^{(\lambda+i\mu)t}+c_2e^{(\lambda-i\mu)t},$$

no entanto, se torna pouco satisfatório trabalharmos com uma função exponencial com

expoente complexo. Para contornarmos essa dificuldade utilizamos a fórmula de Euler[4]

$$e^{it} = \cos t + i\text{sen } t. \tag{1.10}$$

Uma dedução da fórmula de Euler pode ser consultada em [2, 12], onde utilizam série de Taylor para a exponencial e^t em torno de $t = 0$:

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Fazendo substituições adequadas em (1.10) obtemos as seguintes variações para a fórmula de Euler:

$$e^{i\mu t} = \cos(\mu t) + i\text{sen } (\mu t) \tag{1.11}$$

e

$$e^{-i\mu t} = \cos(\mu t) - i\text{sen } (\mu t). \tag{1.12}$$

Somando e subtraindo (1.11) e (1.12), obtemos, respectivamente,

$$e^{i\mu t} + e^{-i\mu t} = 2\cos(\mu t) \quad \text{e} \quad e^{i\mu t} - e^{-i\mu t} = 2i\text{sen } (\mu t).$$

Desde que c_1 e c_2 são constantes quaisquer, podemos obter y_1 e y_2 da seguinte forma

$$y_1(t) = e^{\lambda + i\mu t} + e^{\lambda - i\mu t} = e^{\lambda t}(e^{i\mu t} + e^{-i\mu t}) = 2e^{\lambda t}\cos(\mu t)$$

e

$$y_2(t) = e^{\lambda + i\mu t} - e^{\lambda - i\mu t} = e^{\lambda t}(e^{i\mu t} - e^{-i\mu t}) = 2e^{\lambda t} i\text{sen } (\mu t).$$

O Princípio da Superposição nos garante que $e^{\lambda t}\cos(\mu t)$ e $e^{\lambda t}\text{sen } (\mu t)$ são soluções para a equação (1.2). Calculando o wronskiano dessas soluções, temos

$$W(e^{\lambda t}\cos(\mu t), e^{\lambda t}\text{sen } (\mu t)) = \mu e^{2\lambda t} \neq 0,$$

pois $\mu > 0$, implicando que as funções $e^{\lambda t}\cos(\mu t)$ e $e^{\lambda t}\text{sen } (\mu t)$ formam um conjunto fundamental. Portanto, novamente, pelo Princípio da Superposição, a solução geral da equação (1.2) é dada por

$$y = c_1 e^{\lambda t}\cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t}\text{sen } (\mu t). \tag{1.13}$$

[4]Leonhard Euler (1707 - 1783) além de matemático, foi teólogo, físico, astrônomo, linguista, psicólogo. Fez diversas contribuições na matemática para a álgebra, trigonometria, geometria analítica, cálculo, equações diferenciais, entre outros. Suas produções ultrapassram os 700 trabalhos, além de livros e inserção de simbolos utilizados até hoje como π e $i = \sqrt{-1}$.

2 Problemas de Valores de Contorno e Teoria de Sturm-Liouville

Nesta seção, vamos apresentar algumas das propriedades de soluções de uma classe de problemas para equações diferencias lineares de segunda ordem.

2.1 Problemas de valores de contorno

Os Problemas de Valores de Contorno (PVC) surgem quando na equação diferencial é estabelecido pontos diferentes para a variável dependente ou para suas derivadas, estes pontos pré-definidos são chamados de condições de contorno ou de fronteira.

Considere um PVC de segunda ordem representado da seguinte forma

$$\begin{cases} a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t), \\ y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1. \end{cases}$$

Uma solução para um problema desse tipo é uma função que satisfaz a equação diferencial em algum intervaldo I, contendo a e b, cujo gráfico passa pelos pontos (a, y_0) e (b, y_1).

Segundo Fontana [8], para que um PVC seja homogêneo não basta ter $g(t) = 0$, é necessário também que $y_0 = y_1 = 0$, ou seja, as condições de fronteira devem ser nulas, de modo que se o PVC é homogêneo então ele admite pelo menos a solução trivial ($y = 0$).

Um PVC possui uma semelhança, no que diz respeito às suas soluções, com as equações algébricas lineares podendo ter uma única solução, não ter soluções ou ainda, ter uma infinidade de soluções.

2.2 Problemas de Sturm-Liouville

Dentre os problemas de equações diferenciais com valores de contorno está uma classe de problemas importantes em Matemática Aplicada, conhecidos como *Problemas de Sturm-Liouville*[5], na qual o nosso problema de autovalores na reta está incluso. Eles consistem em uma equação diferencial com condições de fronteira da forma

$$\begin{cases} [p(t)y']' - q(t)y + \lambda r(t)y = 0, \quad \text{com} \quad a < t < b \\ a_1y(a) + a_2y'(a) = 0, \quad b_1y(b) + b_2y'(b) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Supomos que $p(t) \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ e $q(t), r(t) \in C([a, b], \mathbb{R})$ e que, além disso, $p(t) > 0$ e $r(t) > 0$, para todo $t \in [a, b]$. Com estas especificações, o problema de Sturm-Liouville (2.1) é dito *regular*. De acordo com Boyce e Diprima [2], essas hipóteses são necessárias

[5] Charles-François Sturm (1803-1855) nasceu em Genebra, na Suíça, mas viveu em paris durante toda sua vida adulta. Joseph Liouville (1809-1882), foi um matemático francês que fez pesquisas importantes em análise, álgebra e teoria dos números. Os dois estabeleceram muitas propriedades da classe de problemas de valores de contorno associados a seus nomes em uma série de artigos entre o período de 1836 e 1837.

para tornar a teoria o mais simples possível e, ao mesmo tempo, manter uma generalidade razoável. Essas condições são satisfeitas em muitos problemas importantes da Física-Matemática.

Os valores de λ para os quais existem soluções não triviais para o problema (2.1) são chamados de *autovalores* e, as soluções associadas a esses autovalores são chamadas de *autofunções*.

Os teoremas a seguir estabelecem algumas propriedades importantes para os problemas de Sturm-Liouville, cujas demonstrações podem ser conferidas em [2].

Teorema 2.1. *Todos os autovalores do problema de Sturm-Liouville (2.1) são reais*

Uma consequência essencial do Teorema 2.1 é que, para encontrar autovalores e autofunções de um problema de valores de contorno de Sturm-Liouville, basta procurar os autovalores reais.

O próximo teorema nos diz que as autofunções do problema de valores de contorno de Sturm-Liouville associadas a autovalores diferentes são ortogonais em relação à função peso r.

Teorema 2.2. *Se y_1 e y_2 são soluções para o problema de Sturm-Liouville (2.1) associadas aos autovalores λ_1 e λ_2, respectivamente, e, se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então*

$$\int_a^b r(t)y_1(t)y_2(t)dt = 0,$$

onde r é uma função peso.

Teorema 2.3. *Os autovalores do problema de Sturm-Liouville (2.1) são todos simples, ou seja, cada autovalor está associado a somente uma autofunção linearmente independente. Além disso, os autovalores formam uma sequência infinita e podem ser ordenados crescentemente, de modo que*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots .$$

Além diso, $\lambda_n \to \infty$ quando $n \to \infty$.

3 Problema dos Autovalores na Reta

Considere o seguinte problema de valores de contorno

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Observe que o problema é do tipo Sturm-Liouville definido no intervalo $[0, \pi]$, onde $p(t) = 1, q(t) = 0, r(t) = 1$, $a_1 = b_1 = 1$ e $a_2 = b_2 = 0$. Por ser um problema incluso na

classe de Sturm-Liouville, ele herda características fundamentais dessa classe estabelecidas nos Teoremas 2.1, 2.2 e 2.3.

A ideia central é resolver o referido problema encontrando todos os seus autovalores e as autofunções associadas a esses autovalores. Para isto, vamos analisar os valores possíveis para λ, separando em três casos: quando λ for negativo ($\lambda < 0$); quando λ for nulo ($\lambda = 0$) e quando λ for positivo ($\lambda > 0$).

Caso 1 ($\lambda < 0$): Vamos começar avaliando a existência de autovalores negativos. Considerando $\lambda = -\mu^2$, com $\mu \neq 0$, a equação do problema (3.1) é reescrita da seguinte forma

$$y'' - \mu^2 y = 0.$$

De (1.3) extraímos que a equação característica é $r^2 - \mu^2 = 0$, sendo $r = \pm\mu$ suas raízes reais. Assim, por (1.7) a solução geral é dada por

$$y(t) = c_1 e^{\mu t} + c_2 e^{-\mu t}. \tag{3.2}$$

Sabendo que

$$\cosh(\mu t) = \frac{e^{\mu t} + e^{-\mu t}}{2} \quad \text{e} \quad \text{senh}\,(\mu t) = \frac{e^{\mu t} - e^{-\mu t}}{2},$$

podemos obter

$$\begin{aligned} k_1 \cosh(\mu t) + k_2 \text{senh}\,(\mu t) &= \frac{k_1}{2}(e^{(\mu t)} + e^{-\mu t}) + \frac{k_2}{2}(e^{(\mu t)} - e^{-\mu t}) \\ &= k_1'(e^{\mu t} + e^{-\mu t}) + k_2'(e^{\mu t} - e^{-\mu t}) \\ &= (k_1' + k_2')e^{\mu t} + (k_1' - k_2')e^{i\mu t} \\ &= c_1 e^{\mu t} + c_2 e^{-\mu t}. \end{aligned}$$

Assim, ao escolher as funções hiperbólicas como um conjunto fundamental de soluções, em vez das funções exponenciais, por conveniência na aplicação das condições de contorno, a solução geral (3.2) pode ser reescrita como

$$y(t) = c_1 \cosh(\mu t) + c_2 \text{senh}\,(\mu t).$$

Note que a primeira condição de contorno nos dá que $c_1 = 0$, uma vez que $\cosh(0) = 1$ e $\text{senh}\,(0) = 0$, então a segunda condição de contorno requer que $c_2 \text{senh}\,(\mu\pi) = 0$. Desde que $\text{senh}\,(\mu\pi) = 0$ se, e somente se, $\mu\pi = 0$, concluímos que $\text{senh}\,(\mu\pi)$ não se anula, pois estamos trabalhando com $\mu \neq 0$ e, portanto, $c_2 = 0$. Logo, o problema (3.1) não possui soluções não triviais quando $\lambda < 0$, ou seja, o problema não possui autovalores negativos.

Caso 2 ($\lambda = 0$): Neste caso, a equação diferencial do problema (3.1) é reduzida à

$$y''(t) = 0,$$

cujas raízes r_1 e r_2 são reais e iguais, logo, a solução geral, obtida através da equação (1.9), é

$$y(t) = c_1 t + c_2.$$

Aplicando as condições de contorno, tem-se: $y(0) = c_2 = 0$ e $y(\pi) = c_1\pi = 0 \Rightarrow c_1 = 0$. Assim, para $\lambda = 0$, o problema (3.1) não possui soluções não triviais, isto é, o problema não possui autovalor nulo.

Caso 3 ($\lambda > 0$): Para este caso, vamos considerar $\lambda = \mu^2$, com $\mu \neq 0$. Então, a equação do problema (3.1) se torna

$$y'' + \mu^2 y = 0,$$

cuja equação característica é $r^2 + \mu^2 = 0$, com as raízes sendo complexas conjugadas dadas por $r = \pm i\mu$. Decorre de (1.13) que a solução geral é

$$y(t) = c_1 \cos(\mu t) + c_2 \text{sen}\,(\mu t). \tag{3.3}$$

Pelas condições de contorno, obtemos $c_1 = 0$ e, portanto, $c_2 \text{sen}\,(\mu\pi) = 0$. Como estamos interessados em encontrar soluções não-triviais, precisamos ter $c_2 \neq 0$ e daí, consequentemente, sen $(\mu\pi)$ tem que ser igual a zero.

Sem perda de generalidade, suponha que μ é positivo. Deste modo,

$$\text{sen}\,(\mu\pi) = 0 \Rightarrow \mu = k \Rightarrow \lambda = k^2, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

Portanto, os autovalores do problema (3.1) são os quadrados dos inteiros positivos, isto é,

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 9, \cdots, \lambda_n = n^2, \cdots.$$

As autofunções correspondentes a estes autovalores são dadas pela equação (3.3) com $c_1 = 0$, logo, são exatamente os múltiplos da função sen (nt) para $n = 1, 2, \cdots$, ou seja,

$$y_1(t) = c_2 \text{sen}\, t, y_2(t) = c_2 \text{sen}\,(2t), \cdots, y_n(t) = c_2 \text{sen}\,(nt), \cdots,$$

onde c_2 pode assumir qualquer valor real.

Concluímos que o problema dos autovalores na reta (3.1) só admite solução não trivial no caso em que $\lambda > 0$, tendo uma sequência infinita crescente de autovalores positivos $\lambda_n = n^2$, com $n = 1, 2, \cdots$, e as autofunções correspondentes sendo múltiplos de sen (nt),

característica enunciada no Teorema 2.3. Além disso, não existem outros autovalores reais.

Sabe-se ainda, pelo Teorema 2.1, que não faz sentido procurar autovalores complexos para o problema, portanto, infere-se que o problema (3.1) só admite autovalores reais positivos. E ainda, podemos exemplificar a propriedade decorrente do Teorema 2.2 tomando os autovalores $\lambda_{n_1} = n_1^2$ e $\lambda_{n_2} = n_2^2$, com $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_+$ e $n_1 \neq n_2$, cujas autofunções correspondentes são $y_1(t) = \text{sen}\ (n_1 t)$ e $y_2(t) = \text{sen}\ (n_2 t)$. De fato, sabendo que a função peso, neste caso, é igual a 1, temos

$$\int_0^\pi r(t) y_1(t) y_2(t)\, dt = \int_0^\pi \text{sen}\ (n_1 t) \cdot \text{sen}\ (n_2 t) dt.$$

Usando a relação trigonométrica $\text{sen}\ (x) \cdot \text{sen}\ (y) = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \text{sen}\ (n_1 t) \text{sen}\ (n_2 t) dt &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[\cos((n_1 - n_2)t) - \cos((n_1 + n_2)t)\right] dt \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n_1 - n_2} \text{sen}\ ((n_1 - n_2)t) - \frac{1}{n_1 + n_2} \text{sen}\ ((n_1 + n_2)t) \right]_0^\pi \\
&= 0,
\end{aligned}$$

implicando que as autofunções são ortogonais em relação á função peso r.

4 Considerações Finais

É notório que as equações diferenciais se tornaram uma área extremamente importante para o estudo em diversos ramos da Matemática. Consequentemente, para o estudante desejoso ou que estar inclinado a seguir seus estudos em Matemática Aplicada ou Pura, torna-se imprescindível o conhecimento dos assuntos abordados nesse trabalho. Nisto está a relevância de trabalhos como este, visto que esses assuntos serão introduzidos para o discente, que na maioria das vezes não teve acesso em sua graduação. Esse contato com o conteúdo de EDs tanto para o leitor quanto para o autor, possibilita a familiarização com assuntos mais avançados da Matemática ou de outras áreas das ciências exatas.

Neste trabalho tivemos a oportunidade de compreender de maneira introdutória a origem das equações diferenciais, assim como conhecer alguns dos muitos matemáticos que contribuíram para o seu progresso. Este artigo correlacionou o estudo e revisão de conteúdos de diferentes disciplinas como a Álgebra Linear e o Cálculo Diferencial e Integral, exibindo a relação entre essas áreas com as equações diferenciais, e também preenchendo lacunas originadas, de forma inconsciente, durante a graduação. Este trabalho também promoveu o primeiro contato com as equações diferenciais ordinárias e com alguns métodos usados para encontrar sua solução.

Vimos que os autovalores do problema proposto formam uma sequência infinita crescente de valores reais e distintos, característica herdada de uma classe maior e que contêm o problema, e, que a solução do problema são múltiplos da função $y(t) = \text{sen}\ (nt)$. Verificamos também que a existência de soluções não triviais ocorre somente para autovalores positivos ($\lambda > 0$) e que eles mantém uma relação biunívoca com as autofunções linearmente independentes.

É importante apontar a possibilidade de avanço da pesquisa em questão, uma vez que, o problema pode ser trabalhado em $\mathbb{R}^N$, o que exigirá uma maior fundamentação teórica envolvendo o laplaciano, algo que pretende-se estudar posteriormente.

Cabe informar que, o desenvolvimento desse trabalho é resultado de Iniciação Científica sob orientação da Prof.ª Dr.ª Suellen Cristina Queiroz Arruda, possibilitando aprofundamento teórico em equações diferenciais de modo a realizar pesquisas nas áreas da Matemática Pura e Aplicada, além de preparar os discentes para um possível ingresso em cursos de pós-graduação. Além disso, o presente trabalho foi apresentado na X Bienal de Matemática, um evento que ocorreu na Universidade Federal do Pará, Campus Belém, no período de 20 a 24 de junho de 2022.

Referências

[1] ÁVILA, Geraldo. **Cálculo das funções de uma variável**. v .1. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

[2] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 10 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

[3] BRAUN, Martin. **Differential Equations and Their Applications**. 4. ed. Springer, 1941.

[4] CAVALHEIRO, Albo Carlos. **Minicurso: O Problema de Sturm-Liouville**. Londrina, Universidade Estadual de Londrina, 2012.

[5] COELHO, Flávio Ulhoa; LOURENÇO, Mary Lilian. **Um Curso de Álgebra Linear**. 2. ed. São Paulo: Edusp, 2018.

[6] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. São Paulo: Editora UNICAMP, 2004.

[7] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de; NEVES, Aloisio Freiria. **Equações Diferenciais Aplicadas**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

[8] FONTANA, Éliton. **Métodos Matemáticos Aplicados à Engenharia Química I**. Paraná, UFPR, 2020.

[9] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. v. 1. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

[10] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. v. 2. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

[11] LIPSCHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc. **Álgebra Linear**. 4. ed. Porto Alegre: Bookman (Coleçaõ Schaum), 2011.

[12] ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais**, volume 1. 3. Ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.