



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

Manoel Henrique Monteiro Ferreira

Explorando fractais do tipo Sierpinski

Fevereiro - 2024

Belém - PA



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

Manoel Henrique Monteiro Ferreira

Explorando fractais do tipo Sierpinski

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado Plano em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz.

Fevereiro - 2024

Belém - PA

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

Manoel Henrique Monteiro Ferreira

Explorando fractais do tipo Sierpinski

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado Plano em Matemática, julgado pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz - Orientadora
Faculdade de Matemática, UFPA

Prof. Dr. Paulo Vilhena da Silva
Faculdade de Matemática, UFPA

Prof. Dr. Edilson dos Passos Neri Junior
Escola de Aplicação, UFPA

Data da avaliação: 16/02/ 2024.

Conceito: Excelente

Epígrafe

*Combati o bom combate, terminei a
carreira, guardei a fé.*

Paulo de Tarso

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por ter me dado a vida e por ter me sustentado desde o meu nascimento até aqui. Agradeço a minha mãe Nilcilei Rocha Monteiro que nunca mediu esforços para fazer minha vida mais leve durante todo o meu período árduo de graduação e sempre esteve ao meu lado desde o dia do meu nascimento, Agradeço ao meu pai Rudinelson Antonio Matos Ferreira por sempre me incentivar a ser um excelente filho, profissional e ser-humano.

Agradeço aos meus irmãos Rubens Monteiro, Felipe Monteiro, Talícia Ferreira, Rudinelson Filho e Saymon Lima por todo o amor e carinho que me foi dado de forma singular e especial.

Agradeço aos meus amigos e colegas de curso que me apoiaram e tornaram essa jornada mais feliz e agradável durante todo o meu percurso como graduando, em especial meu grande amigo Lucas Carvalho dos Santos. Também agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para que eu pudesse chegar até esse tão sonhado dia.

Agradeço aos meus professores por terem me tornado um profissional capacitado, em especial à professora Cristina Lúcia Dias Vaz que esteve comigo desde o início deste projeto, que me auxiliou das mais diversas formas possíveis e que nunca me desamparou. Agradeço à Universidade Federal do Pará por ter me dado a oportunidade de cursar essa graduação mesmo em meio a tantas dificuldades que enfrentei, porém, consegui vencer todas.

Gostaria de expressar minha mais profunda gratidão a todos que contribuíram para o sucesso deste trabalho de conclusão de curso. Este projeto não teria sido possível sem o apoio, orientação e incentivo de tantas pessoas notáveis que cumpriram papéis importantes em minha jornada.

Resumo

Inspirada nos princípios da Cultura Maker (cultura do aprender fazendo) e numa abordagem “mão na massa”, esta pesquisa tem como objetivo principal explorar o potencial geométrico dos fractais Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski e Esponja de Menger para a elaboração de atividades computacionais e com materiais concretos. Trata-se de um estudo elementar destes fractais com ênfase em atividades computacionais e manuais. Para isto, foram investigadas as ideias elementares da geometria fractal e as principais características geométricas dos fractais de Sierpinski. Além disso, para as atividades “mão na massa” escolhemos como recurso computacional o aplicativo Geogebra e o papel com recurso didático para as atividades com material concreto. Como pergunta norteadora tem-se: *Qual o potencial geométrico dos fractais de Sierpinski para a elaboração de atividades computacionais e com materiais concretos?* E como método de pesquisa adotamos uma abordagem exploratória, que envolve a pesquisa e desenvolvimento de atividades específicas de ensino e aprendizagem baseadas nos fractais. Além disso, utilizaremos como método secundário de investigação, a pesquisa bibliográfica que fundamenta teoricamente os tópicos pesquisados e as atividades realizadas. Como resultado principal da pesquisa, concluímos que o processo recursivo, a autossimilaridade e a estrutura fina destes fractais são propriedades geométricas relevantes para a elaboração e a aplicação de atividades de ensino e aprendizagem, particularmente computacionais, dobraduras e origami, pois são responsáveis pela criação de padrões fractais, o que permite o desenvolvimento de várias habilidades, como o pensamento computacional e a resolução de problemas, além promover a ludicidade e o exercício da criatividade.

Palavras-chave: Fractais, Sierpinski, Geogebra, Origami.

List of Figures

| | | |
|------|--|----|
| 2.1 | Construção do conjunto de Cantor | 14 |
| 2.2 | Etapas da construção do Conjunto de Cantor | 15 |
| 2.3 | Ampliações do conjunto de Mandelbrot | 17 |
| 2.4 | Fractal folha de samambaia | 18 |
| 2.5 | Curva de Koch - nível 3 | 20 |
| 2.6 | Floco de neve de Koch - nível 3 | 20 |
| 2.7 | Curva de Koch: passo 1 | 21 |
| 2.8 | Curva de Koch: passo 2 | 21 |
| 2.9 | Curva de Koch: passo 3 | 22 |
| 2.10 | Curva de Koch: passo 4 | 22 |
| 2.11 | Curva de Koch: passo 5 | 23 |
| 2.12 | Curva de Koch: passo 6 | 23 |
| 2.13 | Curva de Koch: passo 7 | 24 |
| 2.14 | Curva de Koch: passo 8 | 24 |
| 2.15 | Curva de Koch: passo 9 | 25 |
| 2.16 | Floco de neve: Passo 1 | 26 |
| 2.17 | Floco de neve: Passo 2 | 27 |
| 2.18 | Floco de neve: passo 3 | 28 |
| 2.19 | Floco de neve: passo 4 | 28 |
| 2.20 | Iterações do Floco de neve: | 29 |

| | |
|---|----|
| 2.21 tronco da árvore fractal | 29 |
| 2.22 ângulo das ramificações | 30 |
| 2.23 Número r auxiliar | 30 |
| 2.24 Circunferência (C, r g) | 31 |
| 2.25 Segmento da primeira ramificação | 31 |
| 2.26 Encontrando o ponto D | 32 |
| 2.27 Galho da árvore pronto para ramificação | 32 |
| 2.28 Configurações de ferramentas | 33 |
| 2.29 Galho da árvore completo | 33 |
| 2.30 Primeira reflexão do galho | 34 |
| 2.31 Segunda reflexão do galho | 34 |
| 2.32 Árvore fractal completa | 34 |
| 2.33 Árvore fractal | 35 |
| 2.34 Árvore fractal personalizada | 35 |
| 2.35 Árvore fractal de cerejeira | 35 |
| 2.36 Árvore fractal com ângulo de 90° | 36 |
| 3.1 Wacław Sierpinski | 38 |
| 3.2 Karl Menger | 39 |
| 3.3 Etapas da construção do triângulo de Sierpinski | 41 |
| 3.4 Etapas da construção do Tapete de Sierpinski | 44 |
| 3.5 Etapas da construção da Esponja de Menger | 46 |
| 3.6 Triângulo de Sierpinski: passo 2 | 50 |
| 3.7 Triângulo de Sierpinski: passo 5 | 51 |
| 3.8 Triângulo de Sierpinski: passo 7 | 51 |
| 3.9 Iterações do Triângulo de Sierpinski | 52 |
| 3.10 Tapete de Sierpinski: passo 1 | 53 |

| | |
|--|----|
| 3.11 Tapete de Sierpinski: passo 2 | 53 |
| 3.12 Tapete de Sierpinski: passo 4 | 54 |
| 3.13 Tapete de Sierpinski: passo 6 | 54 |
| 3.14 Tapete de Sierpinski: passo 7 | 55 |
| 3.15 Tapete de Sierpinski: passo 8 | 55 |
| 3.16 Objetos finais | 56 |
| 3.17 Objetos iniciais | 56 |
| 3.18 Processo de construção do tapete | 56 |
| 3.19 Iterações do Tapete de Sierpinski | 57 |
| 3.20 Novo tapete fractal: passo 1 | 58 |
| 3.21 Novo tapete fractal: passo 2 | 59 |
| 3.22 Novo tapete fractal: passo 3 | 59 |
| 3.23 Novo tapete fractal: passos 4 e 5 | 60 |
| 3.24 Novo tapete fractal: passo 6 | 60 |
| 3.25 Novo tapete fractal: passo 7 | 61 |
| 3.26 Novo tapete fractal: passo 8 | 62 |
| 3.27 Objetos finais | 62 |
| 3.28 Objetos iniciais | 62 |
| 3.29 Novo tapete fractal: passo 9 | 63 |
| 3.30 Iterações do Novo Tapete de Sierpinski | 64 |
| 4.1 Cartão Sierpinski: passo 1 - folha de papel A4 | 67 |
| 4.2 Cartão Sierpinski: passo 2 - dobrar e cortar o papel | 68 |
| 4.3 Cartão Sierpinski: passo 3 - fazer o vinco | 68 |
| 4.4 Cartão Sierpinski: passo 4 - primeira iteração | 69 |
| 4.5 Cartão Sierpinski: passo 5-repetir os cortes | 69 |
| 4.6 Cartão Sierpinski: passo 6-repetir os vincos | 70 |

| | | |
|------|--|----|
| 4.7 | Cartão Sierpinski: passo 7- segunda iteração | 70 |
| 4.8 | Cartão Sierpinski: passo 8 - repetir os cortes e vincos | 71 |
| 4.9 | Cartão Sierpinski: passo 9 - terceira iteração. | 71 |
| 4.10 | Cartão Sierpinski final | 72 |
| 4.11 | Cartão fractal Triângulo Sierpinski | 72 |
| 4.12 | Cartão degrau: passo 1- folha de papel A4 | 74 |
| 4.13 | Cartão degrau: passo 2 - Dobrar a folha ao meio | 74 |
| 4.14 | Cartão degrau: folha dobrada | 75 |
| 4.15 | Cartão degrau: passo 3: Cortes na folha. | 75 |
| 4.16 | Cartão degrau: passo 4 - fazer vincos | 76 |
| 4.17 | Cartão degrau: passo 5-primeira iteração | 76 |
| 4.18 | Cartão degrau: passo 8: repetir os cortes e vinco. | 77 |
| 4.19 | Cartão degrau: passo 9: segunda iteração. | 77 |
| 4.20 | Cartão fractal com 4 iterações. | 78 |
| 4.21 | Diferentes tipos de cortes. | 78 |
| 4.22 | Cartão degrau personalizado | 78 |
| 4.23 | Esponja de Menger: folha de papel quadrada. | 80 |
| 4.24 | Origami da esponja de Menger: folha quadrada dobrada na vertical . | 81 |
| 4.25 | Origami da esponja de Menger: folha aberta. | 81 |
| 4.26 | Origami da esponja de Menger: folha quadrada dobrada na horizontal. | 82 |
| 4.27 | Origami da esponja de Menger: folha aberta. | 82 |
| 4.28 | Origami da esponja de Menger: lado direito do papel e marcação ver- tical | 82 |
| 4.29 | Origami da esponja de Menger: lado esquerdo do papel e marcação vertical. | 83 |
| 4.30 | Origami da esponja de Menger: lado inferior do papel e marcação horizontal. | 83 |

| | |
|--|----|
| 4.31 Origami da esponja de Menger: lado superior do papel e marcação horizontal. | 84 |
| 4.32 Origami da esponja de Menger: lado do cubo. | 84 |
| 4.33 Origami da esponja de Menger: as 6 faces do cubo. | 84 |
| 4.34 Origami da esponja de Menger: Cubo completo | 85 |
| 4.35 Esponja Menger de origami: Níveis 0, 1 e 2 | 85 |
| 4.36 Esponja Menger de origami | 86 |

*

Sumário

| | |
|---|-----------|
| Introdução | 8 |
| 1 Metodologia de pesquisa | 11 |
| 2 Aspectos elementares da Geometria Fractal | 13 |
| 2.1 Aspectos matemáticos elementares | 14 |
| 2.2 Construindo fractais com o Geogebra | 18 |
| 2.2.1 A curva de Koch e o Floco de neve | 19 |
| Construção da curva de Koch com o Geogebra | 20 |
| Construção do Floco de neve com o Geogebra | 25 |
| 2.2.2 Construção de uma árvore fractal com o Geogebra | 29 |
| 3 Fractais do tipo Sierpinski | 37 |
| 3.1 Triângulo de Sierpinski | 40 |
| 3.1.1 Número de triângulos | 41 |
| 3.1.2 Área do triângulo de Sierpinski | 42 |
| 3.2 Tapete de Sierpinski | 43 |
| 3.2.1 Área do Tapete de Sierpinski | 43 |
| 3.3 A esponja de Menger | 45 |
| 3.3.1 Área da Esponja de Menger | 46 |
| 3.3.2 Volume da Esponja de Menger | 48 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.4 | Construção do Triângulo de Sierpinski com o Geogebra | 49 |
| 3.5 | Construção do Tapete de Sierpinski com o Geogebra | 52 |
| 3.6 | Construção de um novo Tapete de Sierpinski com o Geogebra | 57 |
| 4 | Criando fractais com papel | 65 |
| 4.1 | Cartões Fractais | 66 |
| 4.1.1 | Cartão fractal triângulo de Sierpinski | 66 |
| 4.1.2 | Cartão Degrau Fractal | 73 |
| 4.2 | Construção da Esponja de Menger no estilo origami | 79 |
| | Considerações Finais | 87 |
| | Referências Bibliográficas | 89 |

Introdução

No cenário educacional atual, o desafio de tornar o ensino de matemática estimulante e significativo, isto tem impulsionado a busca por abordagens criativas e inovadoras. Entre as diversas propostas existente destacamos a Cultura Maker e a metodologia STEAM. Para Gonçalves (2021, p.4):

A metodologia de ensino utilizada pela cultura Maker na educação, visa uma aprendizagem ativa, em que os alunos incentivados pelos professores (no papel de mediador) buscam aprender os conteúdos escolares, por meio de atividades práticas que envolvam tentativas de acertos e erros, desenvolvendo as suas habilidades de resolução de problemas de forma colaborativa e criativa.

O movimento Maker ou Cultura Maker é um movimento global que busca promover a criatividade, a inovação e a experimentação por meio da fabricação ou construção de artefatos com as próprias mãos. Um dos pilares deste movimento é incentivar o aprendizado pela prática. O termo “Maker” vem do inglês que significa fazer, portanto ser “maker” é ser alguém que busca resolver problemas através da construção ou fabricação de artefatos, (concretos ou digitais). Ou seja, aquele que “coloca a mão na massa”.

Inspirados na Cultura Maker (cultura do aprender fazendo), nesta pesquisa pretendemos colocar a “mão na massa” com o objetivo de explorar o potencial geométrico dos fractais Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski e Esponja de Menger através de recursos computacionais e de materiais concretos (nossos artefatos). Trata-se de um estudo elementar sobre estes fractais com ênfase em atividades computacionais e

manuais. Deste modo, pretendemos realizar um estudo teórico e prático que possibilite a compreensão de conceitos matemáticos complexos de forma mais “intuitiva” e lúdica. As atividades realizadas são estratégias makers sobre geometria fractal que buscam não apenas reconstruir conhecimentos matemáticos, mas também fomentar o desenvolvimento de habilidades cognitivas e do pensamento computacional, bem como promover uma visão mais atrativa e estimulante da Matemática, pois no contexto do ensino e da aprendizagem da matemática, a abordagem tradicional muitas vezes enfatiza procedimentos e resultados, negligenciando a exploração visual e a compreensão intuitiva dos conceitos. A geometria fractal oferece uma alternativa valiosa, proporcionando um meio único de explorar padrões matemáticos e suas relações com ferramentas computacionais e materiais concretos. De fato, a autossimilaridade e a beleza estética dos fractais, observada em diferentes escalas, oferece uma rica oportunidade para a construção de atividades que estimulem a criatividade e a ludicidade.

Neste trabalho foram investigadas as ideias elementares da geometria fractal e as principais características geométricas dos fractais Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski e Esponja de Menger, que chamaremos de “fractais do tipo Sierpinski”. Além disso, para as atividades “mão na massa” escolhemos como recurso computacional o aplicativo Geogebra e o papel como recurso didático para as atividades com material concreto.

A justificativa para a escolha do tema Geometria fractal, em particular os fractais de Sierpinski, está intimamente relacionada com a empolgação inicial (que cresceu ao longo do trabalho) do autor pelos fractais e por se tratar de fractais com características visuais interessantes e curiosas. Como resultado desta motivação inicial, surgiu a seguinte pergunta de pesquisa: *Qual o potencial geométrico dos fractais de Sierpinski para a elaboração de atividades computacionais e com materiais concretos?*

Para descrever com mais precisão como esta pergunta norteia a pesquisa, detalharemos o significado de “potencial geométrico” adotado neste trabalho. Assim, entendemos como “potencial geométrico” um conjunto de características geométricas que possibilitem a elaboração de atividades “mão na massa” usando-se como recursos

o computador e o papel. Neste sentido, queremos investigar o "potencial geométrico maker" dos fractais de Sierpinski. Para isto, temos os seguintes objetivos específicos:

1. Descrever os aspectos matemáticos elementares da geometria fractal;
2. Descrever os aspectos fractais elementares do Triângulo de Sierpinski, do Tapete de Sierpinski e da Esponja de Menger;
3. Apresentar atividades computacionais que explorem os padrões geométricos dos fractais Triângulo de Sierpinski e Tapete de Sierpinski;
4. Apresentar atividades com papel que explorem os padrões geométricos do Triângulo de Sierpinski e da Esponja de Menger.

Para alcançar nossos objetivos adotamos como modalidade de pesquisa científica, a pesquisa bibliográfica de carácter prático com análise dedutiva dos dados,

Este trabalho está organizado da seguinte forma: No capítulo 1 descreveremos com mais detalhes a metodologia de pesquisa adotada no trabalho. No capítulo 2 daremos uma visão elementar e geral sobre a geometria fractal, especialmente sobre o conceito de fractal e usaremos o aplicativo Geogebra para construir os fractais curva de Koch, Floco de neve e Árvore fractal.

No capítulo 3, vamos explorar o potencial geométrico dos fractais de Sierpinski: Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski e Esponja de Menger, apresentando o processo iterativo, as propriedades matemática elementares e a construção com o aplicativo Geogebra.

No capítulo 4 vamos explorar o potencial geométrico do Triângulo de Sierpinski e da Esponja de Menger através das técnicas de dobradura e origami, respectivamente. Além disso, apenas por motivação lúdica, também construiremos um padrão fractal do tipo degrau com a técnica da dobradura.

Finalmente, nas Considerações finais revisitaremos os principais tópicos investigados com a intenção de responder a pergunta da pesquisa e descrever como os objetivos foram alcançados.

Capítulo 1

Metodologia de pesquisa

Neste trabalho, a metodologia adotada foi a pesquisa bibliográfica de carácter prático com análise dedutiva dos dados. Entende-se a pesquisa bibliográfica como uma modalidade da pesquisa científica que usa com instrumentos livros, artigos científicos, teses, dissertações, anuários, revistas, leis e outros tipos de fontes escritas que já foram publicadas. Nesta modalidade, o pesquisador reflete e analisa as teorias estudadas para se apropriar dos conhecimentos existentes com o objetivo de construir ou reconstruir saberes e aprofundar os fundamentos teóricos (Sousa,; Oliveira; Alves, 2021).

Para Silva; Oliveira e Silva (2021):

A pesquisa bibliográfica possibilita a construção de novos conhecimentos, o aprendizado sobre uma determinada área e se apresenta como um dos principais meios de atualização e desenvolvimento intelectual de um pesquisador.

O carácter prático da pesquisa foi inspirados nos princípios da cultura. Segundo Maker. Burtet e Klein (2018 apud Lima: Maldaner: Rythomwem *et.al.*, 2023) o Movimento Maker é um movimento coletivo descentralizado e de alcance global relacionado a diversas organizações emergentes, sobre o pensamento de que qualquer pessoa pode construir, consertar, modificar, adaptar e fabricar com suas próprias mãos uma variedade de artefatos na busca soluções para os mais variados problemas,

compartilhando recursos mutuamente. A cultura maker valoriza a experiência, a autonomia e a colaboração através do “aprender fazendo” e o uso de ferramentas desde um simples martelo até uma impressora 3D. Os princípios básicos da cultura Maker foram publicado por Hatch (2014) através de um manifesto intitulado *Manifesto da cultura Maker*. Neste manifesto, Hatch destaca as seguintes características da cultura maker: o fazer, o compartilhar, o dar, o aprender, o acessar ferramentas, o brincar, o apoiar, o mudar e o permitir-se errar.

Neste trabalho nos apropriamos da ideia de “aprender fazendo” ou “mão na massa” para propor um “pesquisar fazendo”, ou seja, colocar a mão na massa durante a pesquisa. Deste modo, realizamos uma pesquisa bibliográfica sobre a geometria fractal para reconstruir as propriedades geométricas elementares dos fractais e nos apropriamos das principais ideias, particularmente dos fractais do tipo Sierpinski. Além disso, colocamos a mão na massa através de atividades computacionais e com materiais concretos com objetivo de explorar as propriedades geométricas destes fractais, especialmente o processo recursivo, a autossimilaridade e a estrutura fina. Também buscamos explorar o potencial lúdico e estético dos fractais do tipo Sierpinski.

Capítulo 2

Aspectos elementares da Geometria Fractal

“Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, costas não são círculos. Uma casca não é suave, nem os relâmpagos viajam em linha reta.”^a

^aMandelbrot na introdução do livro *The Fractal Geometry of Nature*.

Neste capítulo, apresentaremos alguns aspectos elementares da Geometria Fractal que contribuirão para a melhor compreensão das atividades proposta no trabalho. Não é nosso objetivo fazer um estudo detalhado e profundo desta geometria, mas tratar, de forma elementar, as suas principais características. Para aqueles interessados em se aprofundar no tema sugerimos os livros de K. Falconer [4] e H. Peitgen [10] e as referências citadas pelos autores.

2.1 Aspectos matemáticos elementares

Ainda não existe um consenso entre os matemáticos sobre uma definição precisa de fractal. Por esta razão, não existe uma classificação matematicamente precisa para afirmarmos que um conjunto é ou não um fractal. Mandelbrot (Mandelbrot, 1991) definiu fractal como *um sistema organizado para o qual a dimensão de Hausdorff excede estritamente a dimensão topológica*, porém vários conjuntos que não satisfazem esta propriedade apresentam muitas características fractais. Assim, neste trabalho adotaremos a definição dada por Falconer (Falconer, 1990) que classifica como fractais os que apresentaram todas ou a maiorias das seguintes propriedades:

Lei de formação simples e recursiva

O processo de construção de um fractal é geralmente iterativo ou recorrente, porém relativamente simples. A simplicidade do processo significa a descrição do fractal como o lugar geométrico de pontos que satisfaçam propriedades simples ou sejam descritos por processos simples. Portanto, o detalhamento e a complexidade da estrutura de um fractal não serão obstáculos para que sejam formados por processos simples. Assim, é possível construirmos fractais através de um processo iterativo ou recursivo.

Para ilustrar, apresentaremos o processo recursivo do conjunto ternário de Cantor. Primeiro, consideramos o segmento de reta unitário $[0, 1]$. Depois, dividimos este segmento em 3 partes iguais e “retiramos” o seu terço médio, como mostra a figura 2.1:

Figure 2.1: Construção do conjunto de Cantor



Fonte:

<https://onlinestores.factorysale2023outlet.ru/category?name=conjunto%20de%20cantor>

Em seguida, repetimos o processo em cada segmentos restantes e assim sucessivamente. No limite, obteremos o conjunto ternário de Cantor. A abaixo 2.2 ilustra três níveis do processo:

Figure 2.2: Etapas da construção do Conjunto de Cantor



Fonte:

<https://onlinestores.factorysale2023outlet.ru/category?name=conjunto%20de%20cantor>

No que segue, analisaremos uma propriedade interessante do conjunto ternário de Cantor calculando o seu comprimento (C_k) e o seu comprimento total (CT_k) do conjunto. Aqui, entende-se por comprimento total a soma dos comprimentos dos intervalos de um conjunto. Para isto, vamos calcular primeiro o número de segmentos do n-ésimo nível.

Assim, no nível 0, temos apenas um segmento, ou seja, $k = 0$ e $n_0 = 2^0 = 1$. No nível 1, ficamos com dois segmentos, ou seja, $k = 1$ e $n_1 = 2^1 = 2$. No nível 2, são quatro segmentos, ou seja, $k = 2$ e $n_2 = 2^2 = 4$. Logo, podemos provar, por indução finita, que no nível N teremos $k = N$ e $n_N = 2^N$.

Agora, vamos calcular o comprimento do conjunto de Cantor. Para isto, note que no nível 0, temos que $C_0 = 1$. No nível 1, $C_1 = 1/3$. No nível 2, $C_2 = 1/3^2 = 1/9$. Novamente, podemos provar, por indução finita, que, no nível N , o comprimento de cada segmento é $C_N = \frac{1}{3^N}$. Assim, o comprimento do conjunto de Cantor é dado pelo seguinte limite:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^N = 0.$$

Logo, conjunto de Cantor tem comprimento zero, Como o número de segmentos em

cada nível é 2^N temos que o comprimento total do conjunto de Cantor é dado por:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^N = 0.$$

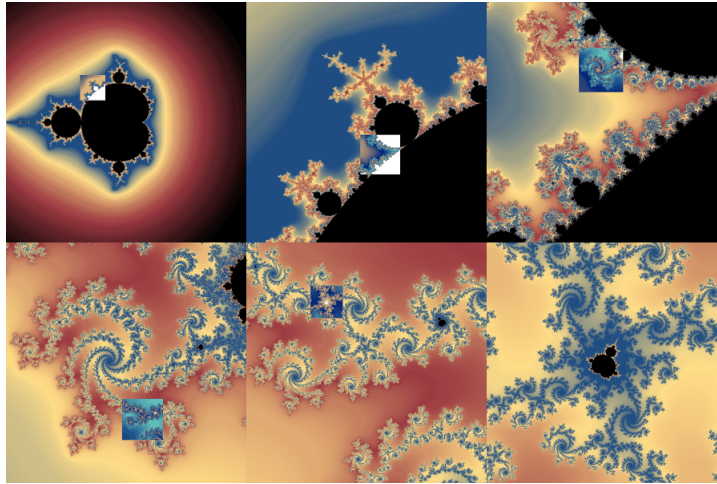
Portanto, podemos concluir que o conjunto ternário de Cantor não possui segmentos e por esta razão, também é conhecido por “poeira de Cantor”.

Estrutura fina em qualquer escala

A estrutura fina é a propriedade que diz que, se sucessivas ampliações da figura forem feitas, mais detalhes sobre a mesma serão descobertos.

As figuras geométricas clássicas não possuem esta estrutura. Por exemplo, ao examinarmos o gráfico da função $f(x) = \sin(x)$ no intervalo $[0, 2\pi]$, observaremos uma série de detalhes tais como pontos de máximo e mínimo, raízes, pontos de inflexão, curvatura, etc. Agora, se restringirmos o estudo ao intervalo $[0, 1]$, perceberemos somente uma ligeira curvatura e nada mais. Se reduzirmos ainda mais o diâmetro do intervalo, digamos a apenas alguns milésimos de radiano, observaremos que o gráfico (da senóide) se assemelha ao gráfico de uma reta, e a reta é uma “figura sem detalhes”. Portanto, à medida em que a região de investigação é reduzida, o detalhamento tende a desaparecer e então podemos concluir que a senóide não tem a propriedade de estrutura fina. Já os fractais tem, em geral, tem uma estrutura fina, Cada vez que efetuamos um aumento ou uma diminuição na figura cada vez mais veremos detalhes. O conjunto de Mandelbrot é um interessante exemplo desta propriedade, como mostram o vídeo <https://www.youtube.com/watch?v=b005iHf8Z3g> e a seguinte figura 2.3

Figure 2.3: Ampliações do conjunto de Mandelbrot



Fonte: <https://www.inkoma.com/k/4718/>

Autossimilaridade ou auto-afinidade

Autossimilaridade é a propriedade na qual uma parte própria da figura se assemelha a uma parte maior ou à figura inteira. Quando esta semelhança é exata chamamos de autossimilaridade estrita. Por exemplo, dados dois triângulos semelhantes de tamanho diferentes, o triângulo menor tem exatamente a mesma forma do maior.

A auto-afinidade é um tipo de autossimilaridade mais geral. Uma figura é auto-afim se pode ser decomposta em partes menores que são não exatamente iguais, mas apenas modificadas por transformações afins tais como: contrações, dilatações, translações, rotações, reflexões ou combinações dessas transformações. Por exemplo, se uma figura se contrair uniformemente em todas as direções formará uma réplica geometricamente semelhante à figura original. Um círculo que se contrai dessa maneira formará um círculo menor. Porém, se a contração se efetuar uniformemente em uma só direção, resultará em uma elipse. Um retângulo só será similar a outro retângulo que possua mesma razão entre o comprimento da base e sua altura, enquanto será afim a qualquer paralelogramo.

Por exemplo, observe que a folha da samambaia (figura 2.4) mantém-se sua forma sempre igual mesmo sua escala seja reduzida ou aumentada, podemos observar que a

figura é formada por diversas cópias de si mesma.

Figure 2.4: Fractal folha de samambaia



Fonte: <https://larryriddle.agnesscott.org/ifskit/gallery/gallery.htm>

Dimensão topológica menor do que a sua dimensão fractal

Para definir fractal, Mandelbrot escreveu *um fractal é, por definição, um conjunto cuja dimensão fractal é estritamente maior do que a sua dimensão topológica*. Apesar desta definição ter posteriormente se mostrado inadequada para caracterizar certos fractais, uma das principais propriedades dos fractais é sua dimensão fractal exceder a sua dimensão topológica. Portanto, para entendermos o que é um fractal precisamos entender o significado de “dimensão”. Como não é o objetivo do trabalho fazer um estudo aprofundado do tema, não trataremos deste tópico e indicamos as referências [4, 10] para mais detalhes.

2.2 Construindo fractais com o Geogebra

Nesta seção, usaremos o potencial da propriedade de construção recursiva dos fractais para construir os fractais Curva de Koch, Floco de Neve e Árvore fractal com

o aplicativo Geogebra. Para mais detalhes sobre o Geogebra, consulte o tutorial de autoria de Ruan Siqueira [14].

2.2.1 A curva de Koch e o Floco de neve

A curva de Koch é uma curva geométrica e um dos primeiros fractais a serem descritos. Apareceu pela primeira vez num artigo de 1906, intitulado *Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes*, de autoria do matemático sueco Helge von Koch. O processo de construção da curva de Koch deu origem a outro fractal conhecido como “Floco de Neve”. Apesar de terem o mesmo processo de construção, a diferença entre a curva de Koch e o Floco de neve é que a figura inicial da curva é um segmento de reta e do Floco de neve é um triângulo equilátero que é formado por três segmentos de reta.

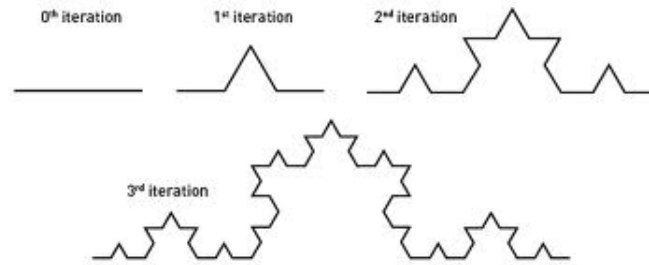
Para construirmos a curva de Koch, iniciamos com o segmento unitário $[0, 1]$ e aplicamos o seguinte processo iterativamente:

1. Dividir o segmento $[0, 1]$ em três partes iguais;
2. Construir um triângulo equilátero (fazendo um ângulo de $\pi/3$ radianos (60 graus)), cujo segmento médio é a base;
3. Retirar o segmento médio (a base ao triângulo do segundo passo);
4. Repetir os passos 1, 2 e 3 em cada segmento restante e assim sucessivamente.

A curva de Koch é o limite das figuras geradas pelo processo acima. A figura 2.5 ilustra três níveis de construção da curva de Koch.

Para construção do Floco de neve, considere inicialmente um triângulo equilátero e aplique o processo iterativo da curva de Koch em cada lado do triângulo. A figura 2.6 ilustra três níveis de construção do Floco de neve de Koch.

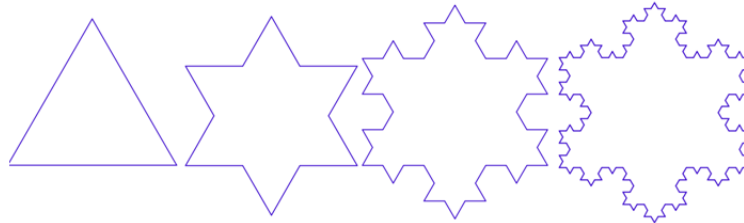
Figure 2.5: Curva de Koch - nível 3



Fonte: <https://matematicascarmelitas.blogspot.com/2012/11/perimetro-de-la-curva-de-koch.html>

[//matematicascarmelitas.blogspot.com/2012/11/perimetro-de-la-curva-de-koch.html](https://matematicascarmelitas.blogspot.com/2012/11/perimetro-de-la-curva-de-koch.html)

Figure 2.6: Floco de neve de Koch - nível 3



Fonte: [https://matematicaparatodos-fernanda.blogspot.com/2011/11/](https://matematicaparatodos-fernanda.blogspot.com/2011/11/construcao-da-curva-e-do-floco-de-neve.html)

[construcao-da-curva-e-do-floco-de-neve.html](https://matematicaparatodos-fernanda.blogspot.com/2011/11/construcao-da-curva-e-do-floco-de-neve.html)

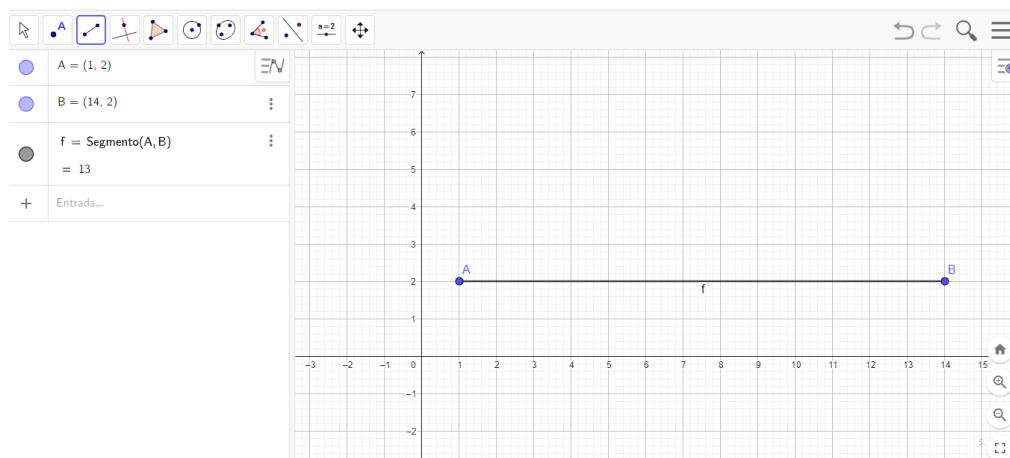
Construção da curva de Koch com o Geogebra

Vamos construir a curva de Koch com aplicativo Geogebra¹

1) Em qualquer versão do geogebra (online ou offline) procure na barra superior esquerda, a opção *segmento* para criarmos o segmento de reta em que a curva de koch estará contida, em seguida posicione este segmento em qualquer lugar:

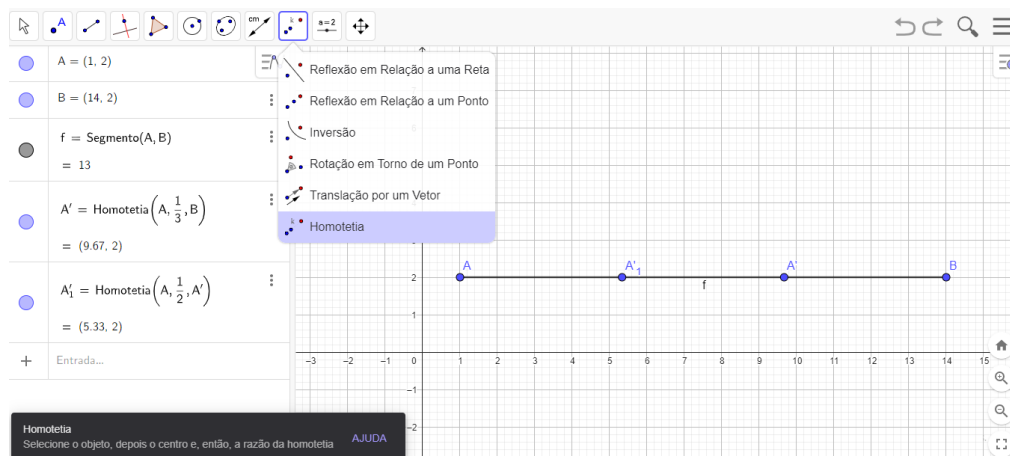
¹<https://www.geogebra.org/about?lang=pt-PT>

Figure 2.7: Curva de Koch: passo 1



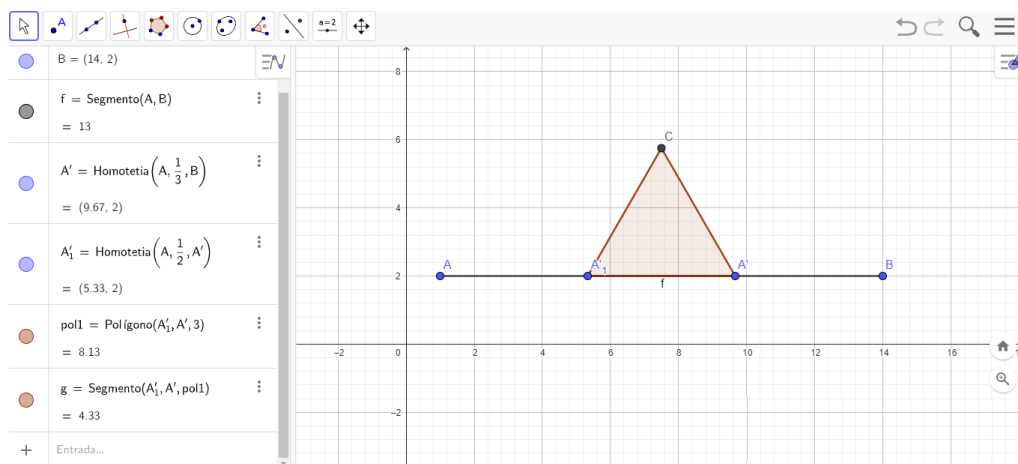
2) Agora procure pela opção homotetia e determine o fator $1/3$ ente A e B. ainda com a opção de homotetia ativa, determine mais uma vez sobre o segmento "AB" porém com o fator sendo igual a $1/2$. Isso resultará na divisão exata do segmento AB em três partes iguais:

Figure 2.8: Curva de Koch: passo 2



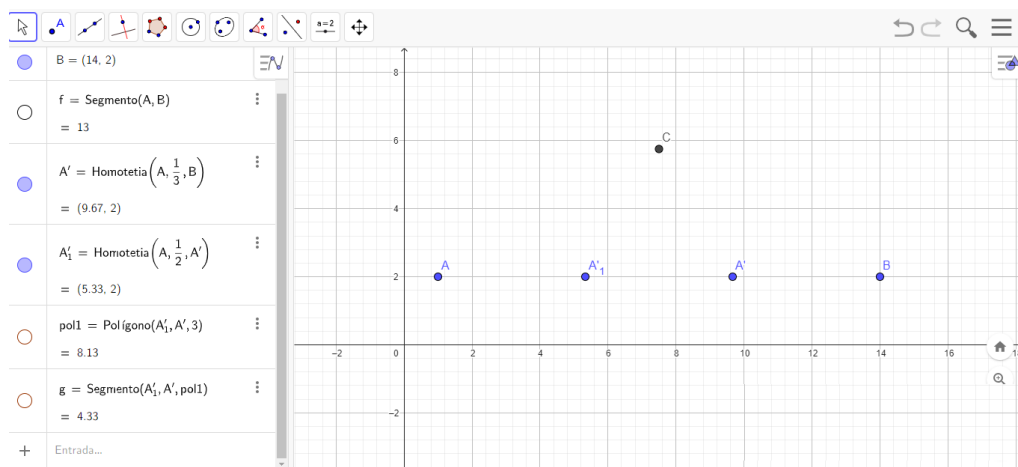
3) Selecione a ferramenta polígono regular e aperte em seguida nos pontos A'_1 e A' e digite 3 na caixa de quantidades de vértices. essa ferramenta irá gerar um triângulo regular congruente à todos os segmentos da curva obtida. Após isso, no quadro de comando do geogebra que fica a esquerda, oculte o segmento "f" e o polígono obtido e deixe somente os pontos expostos:

Figure 2.9: Curva de Koch: passo 3



4) construa os novos segmentos $A(A'_1)$, $(A'_1)A'$, $A'B$, $(A'_1)C$ e CA' . Em configurações oculte os rótulos dos objetos para uma melhor visualização. em seguida diminua a espessura da linha e aumente a opacidade do traço, também diminua o tamanho do ponto. dessa forma obteremos a primeira iteração do fractal:

Figure 2.10: Curva de Koch: passo 4



5) Com o contra botão arraste o cursor até que toda a figura esteja selecionada e escolha a opção ferramentas(criar uma nova ferramenta) que fica no menu à direita e dê continuidade em todas as etapas de criação desta ferramenta, após finalizar a criação dessa nova ferramenta, será liberada na barra superior um novo ícone no

formato de uma chave inglesa. após isso, utilize-o em todos os pares pontos adjacentes da figura formada e teremos a próxima iteração do fractal, como mostram as figuras dos passos 6 e 7:

Figure 2.11: Curva de Koch: passo 5

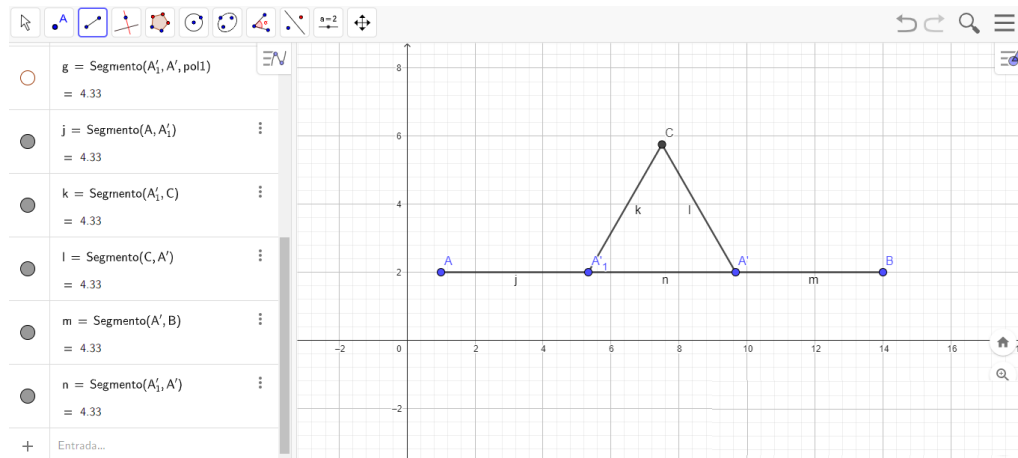


Figure 2.12: Curva de Koch: passo 6

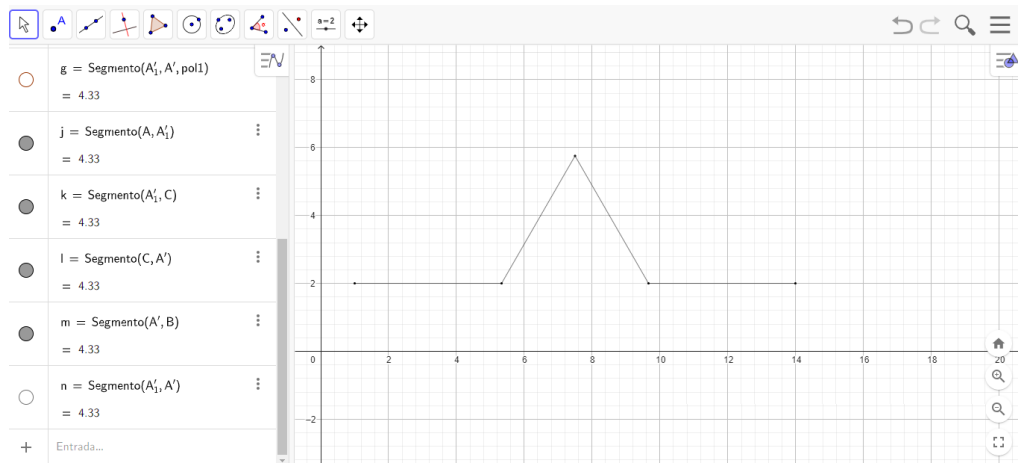
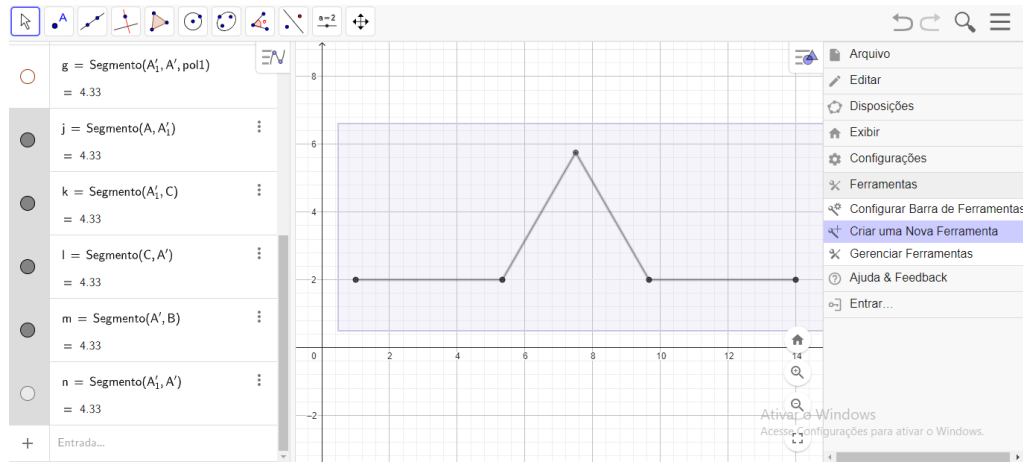
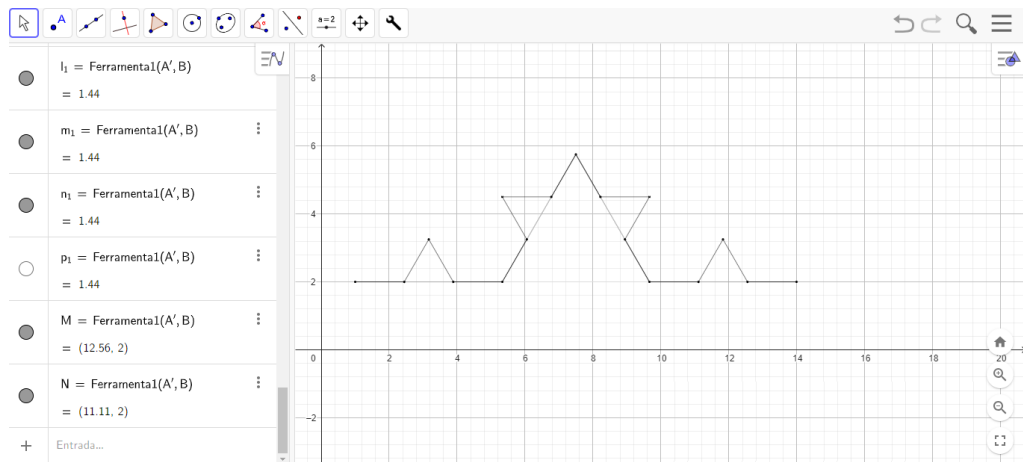


Figure 2.13: Curva de Koch: passo 7



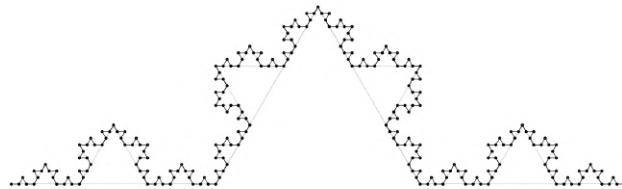
A partir desse ponto, a ferramenta criada pode ser usada automaticamente e ela nos permitirá repetir as iterações diversas vezes. Por exemplo, na próxima iteração obtemos:

Figure 2.14: Curva de Koch: passo 8



E após 4 iterações obtemos:

Figure 2.15: Curva de Koch: passo 9

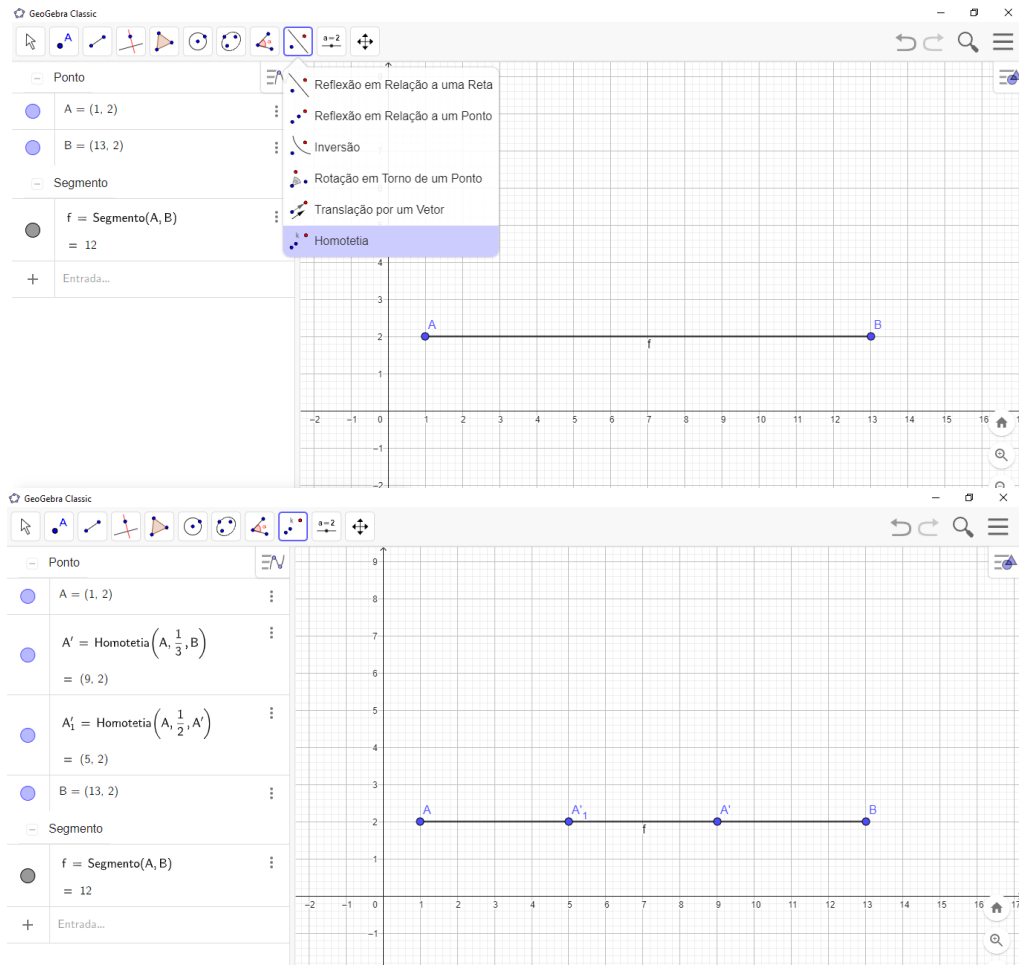


Construção do Floco de neve com o Geogebra

Vamos construir o Floco de neve com aplicativo Geogebra.

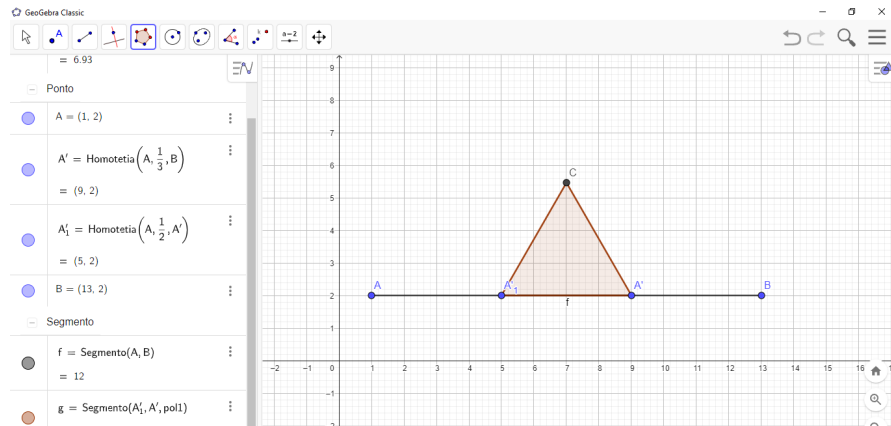
1) Com a ferramenta segmento: crie um segmento AB qualquer, em seguida selecione a opção "homotetia" e selecione ambos os pontos criados em ordem, escolha a fração $1/3$ na caixa. Repita novamente essa seleção porém ente os pontos A e AA com a próxima fração contendo o valor $1/2$, isso nos dará a base de nosso fractal:

Figure 2.16: Floco de neve: Passo 1



2) Selecione a ferramenta "Polígono regular" e na caixa de lados coloque o número 3, isso gerará a primeira iteração do fractal e será a partir dessa figura obtida que utilizaremos para todo o Floco de neve:

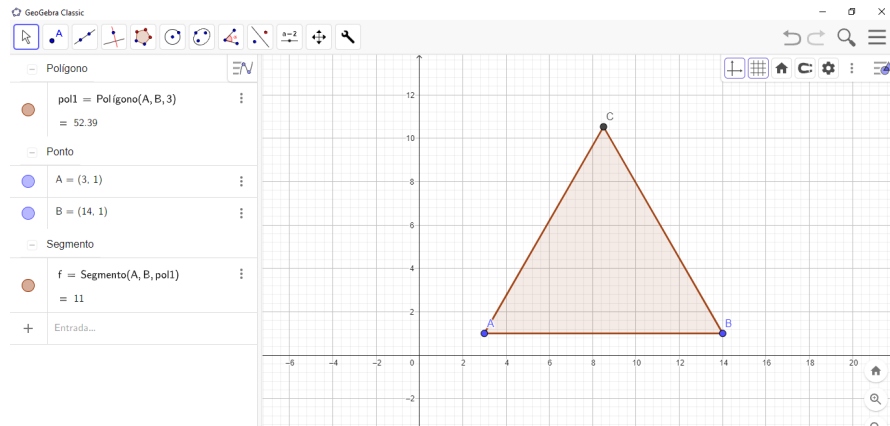
Figure 2.17: Floco de neve: Passo 2



3) Com o contra botão, selecione toda a figura obtida no passo anterior e na aba superior direita vá em "ferramentas", em seguida "criar novas ferramentas". Avance até o fim da seleção pressionando o botão "seguinte" para as notificações de criação da ferramenta e por fim escolha um nome para a nova ferramenta criada. Na barra superior esquerda no fim da fila estará a nova ferramenta criada com um ícone de chave inglesa.

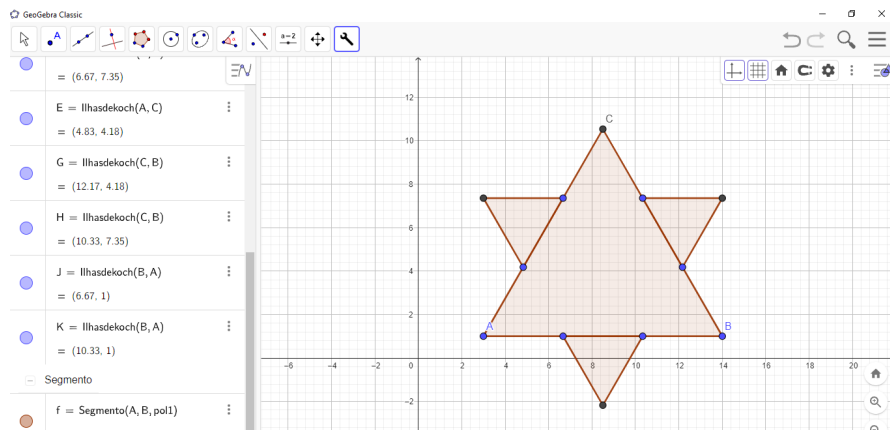
Após ter criado a nova ferramenta, apague ou oculte tudo o que foi feito para que a área esteja limpa para a finalização do fractal. Crie um polígono regular de 3 lados para que seja a base da ilha de Koch:

Figure 2.18: Floco de neve: passo 3



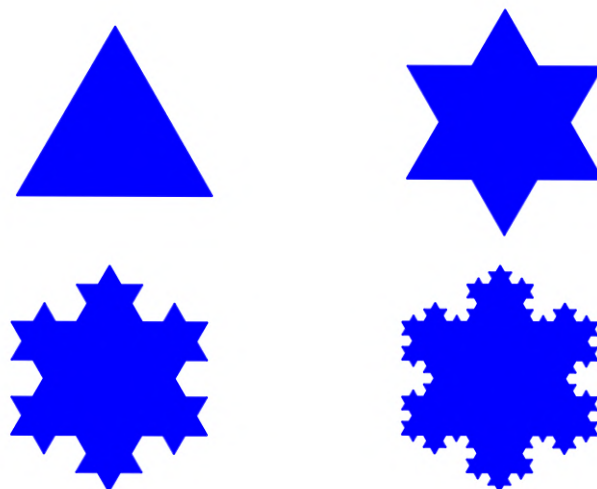
4) Selecione a ferramenta criada e selecione, de 2 em 2 todos os pontos adjacentes do polígono em sentido horário. Cada volta completa representará uma iteração. Por fim, vá nas configurações e personalize o Floco de neve.

Figure 2.19: Floco de neve: passo 4



A figura abaixo ilustra as três primeiras iterações do Floco de neve:

Figure 2.20: Iterações do Floco de neve:

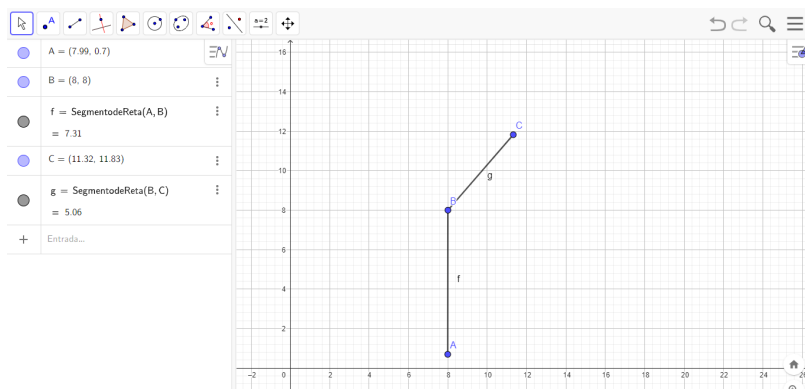


2.2.2 Construção de uma árvore fractal com o Geogebra

Vamos construir a árvore fractal com aplicativo Geogebra:

1) Com o programa do geogebra aberto, inicie sua construção criando dois segmentos de reta(g e f) em três pontos(A, B e C), eles representarão o tronco da nossa árvore fractal:

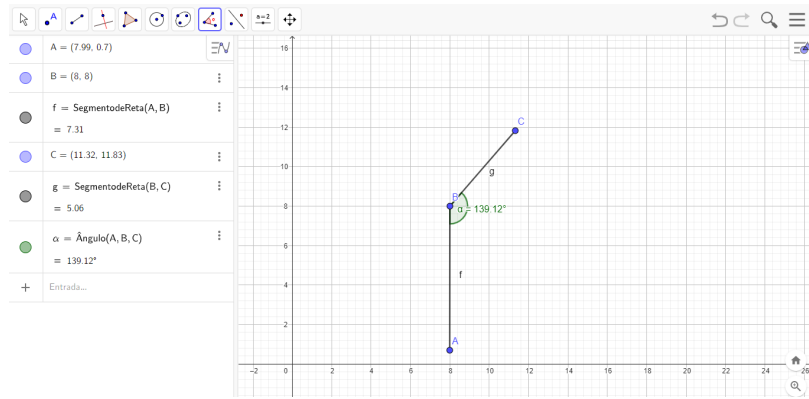
Figure 2.21: tronco da árvore fractal



2) Com a ferramenta de ângulo crie o ângulo "ABC" que será denominado como α . Dessa forma, vamos estabelecer um tamanho fixo que serão aplicados posteriormente nos galhos da planta, onde esse ângulo será usado para todas as ramificações da árvore

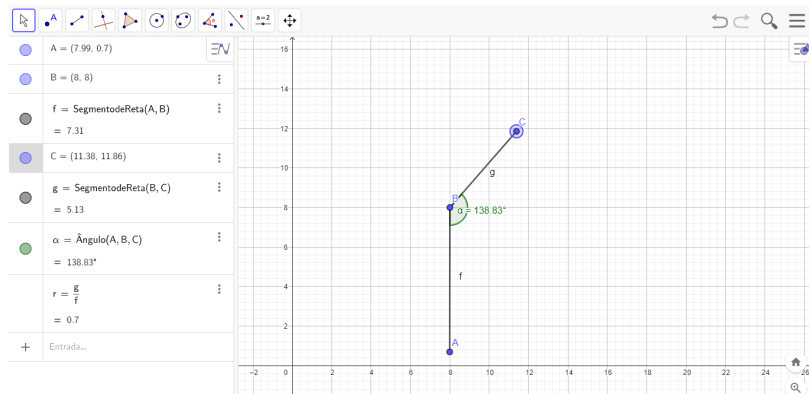
fractal:

Figure 2.22: ângulo das ramificações



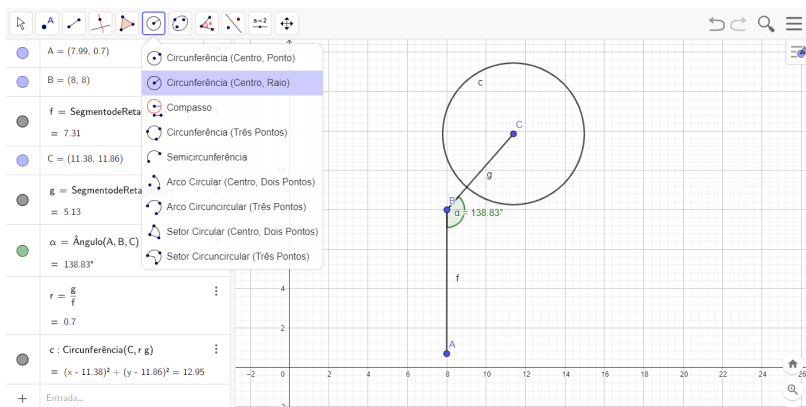
3) Na caixa de entrada, crie um número chamado "r" cuja o valor será a razão de "g" para "f", ou seja, $r = \frac{g}{f}$. Perceba que "r" varia conforme os pontos A ou B são movimentados.

Figure 2.23: Número r auxiliar



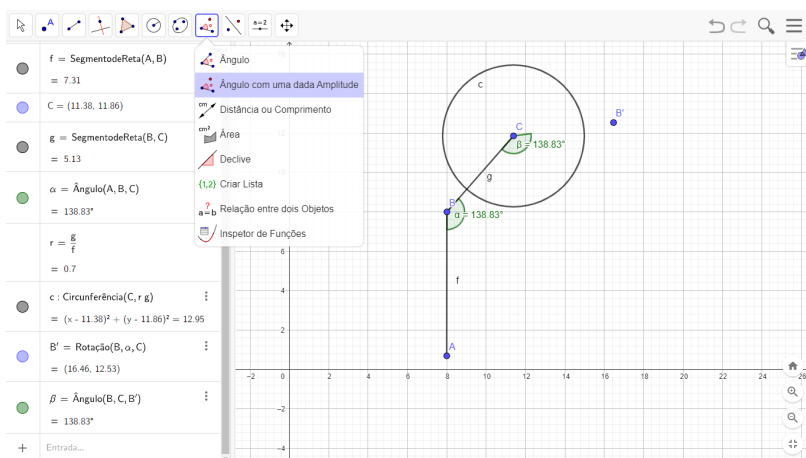
4) Usando a ferramenta "Circunferência(centro,raio)" selecione o ponto C como centro da circunferência e como raio use o produto do número r com o segmento g, ou seja, coloque na caixa de valor do raio "rg":

Figure 2.24: Circunferência (C, r g)



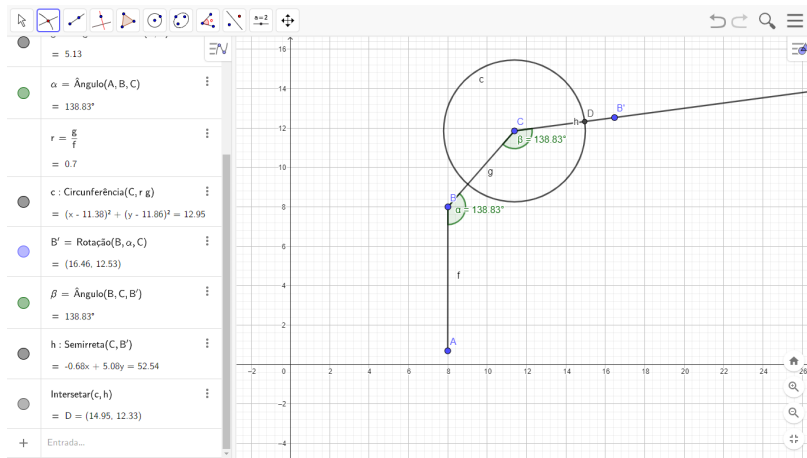
5) Com a ferramenta "Ângulo com amplitude fixa" selecione os pontos B e C respectivamente, e na caixa de valor coloque o ângulo com valor igual a α , assim o novo ângulo β terá o mesmo valor de α , ou seja $\alpha = \beta$. Isso determinará o ponto B'.

Figure 2.25: Segmento da primeira ramificação



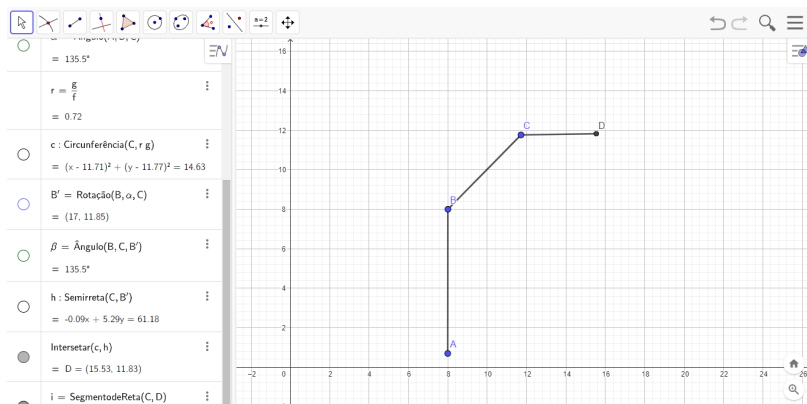
6) Após encontrado o ponto B' crie uma semirreta h que parte do ponto C e passa por B'. Vá até a função "Interseção de dois objetos" e selecione a semirreta h recém-criada e a circunferência c:(C, r g), dessa forma, obtendo o ponto D:

Figure 2.26: Encontrando o ponto D



7) Encontrado o ponto D, oculte a semirreta h e crie um novo segmento CD, assim, todos os pontos e segmentos necessários para a construção de um galho completo. Para melhorar a figura e não poluir o espaço de construção, oculte todos os objetos e rótulos deixando apenas os segmentos AB, BC e CD.

Figure 2.27: Galho da árvore pronto para ramificação



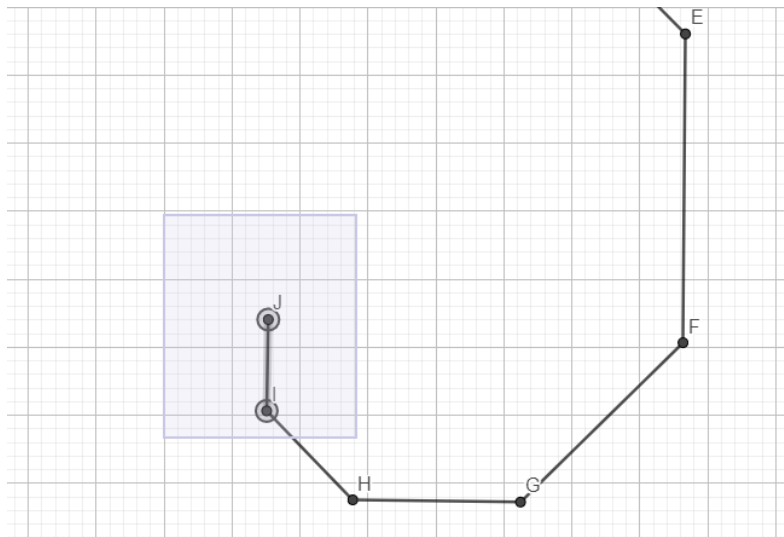
8) Na barra superior direita (\equiv), vá até "ferramentas" e escolha a opção "criar nova ferramenta". Após isso, configure conforme as imagens abaixo e escolha um nome para a sua ferramenta:

9) Determine a quantidade de sua preferência para compor as ramificações do seu galho:

Figure 2.28: Configurações de ferramentas



Figure 2.29: Galho da árvore completo



10) Por fim, com a ferramenta "Reflexão em relação a uma reta" e começando no sentido final do galho para o início do tronco do último segmento IJ, arraste o cursor até que selecione estes dois pontos (I J), depois clique em qualquer parte do segmento de reta adjacente aos pontos marcados que é o segmento HI, isso gerará a primeira reflexão:

11) Em seguida, ainda com a ferramenta ativa, repita o mesmo processo selecionando todos os pontos, incluindo os novos gerados e adicionando mais um na ordem alfabética decrescente que não havia sido adicionado anteriormente e clicamos no segmento adjacente a todos os pontos já marcados:

Figure 2.30: Primeira reflexão do galho

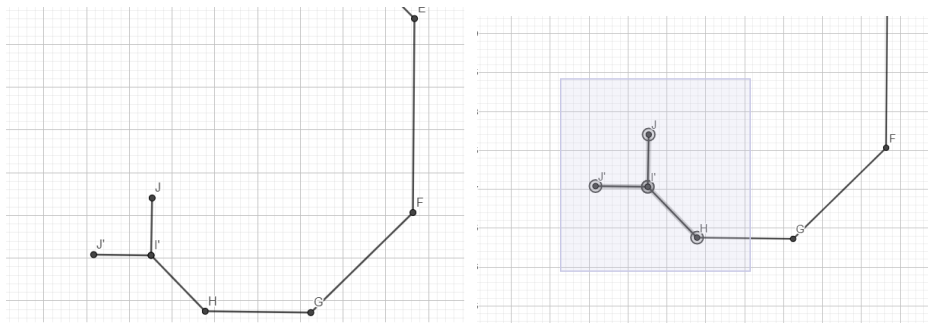
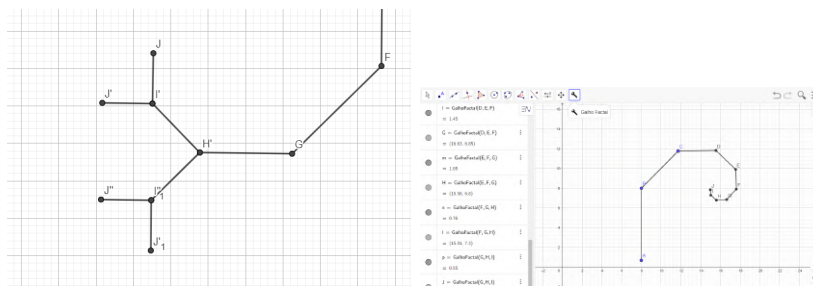
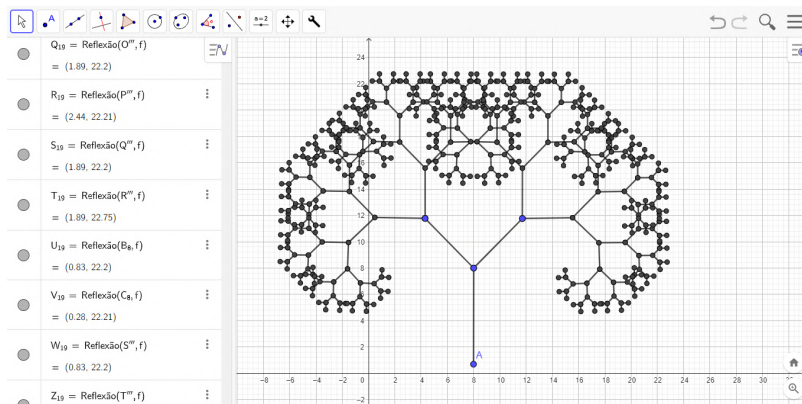


Figure 2.31: Segunda reflexão do galho



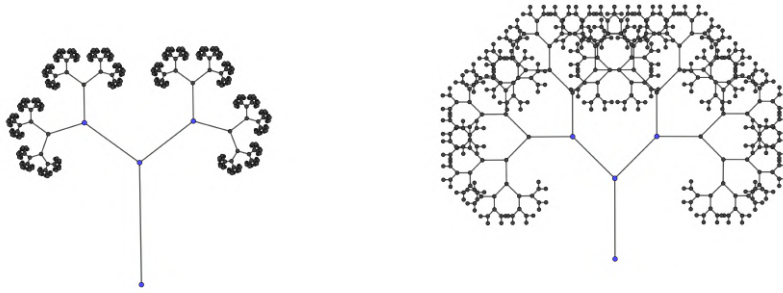
12) Após algumas aplicações dessa ferramenta, conseguiremos refletir completamente todos os galhos da árvore e assim formar nossa árvore fractal:

Figure 2.32: Árvore fractal completa



A partir desse ponto, com nossa árvore fractal já finalizada, podemos personalizá-la à nossa preferência, alterando cores, ângulos, estilos de pontos e retas, tal como espessura, opacidade e todos os recursos disponíveis no aplicativo do Geogebra para

Figure 2.33: Árvore fractal



estilizar este fractal:

Figure 2.34: Árvore fractal personalizada

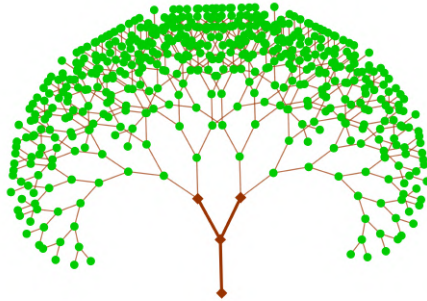


Figure 2.35: Árvore fractal de cerejeira

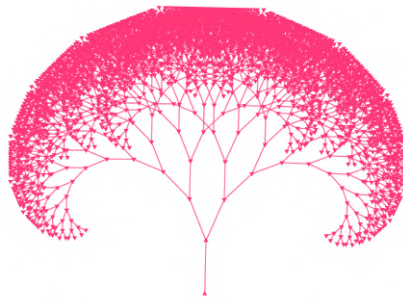
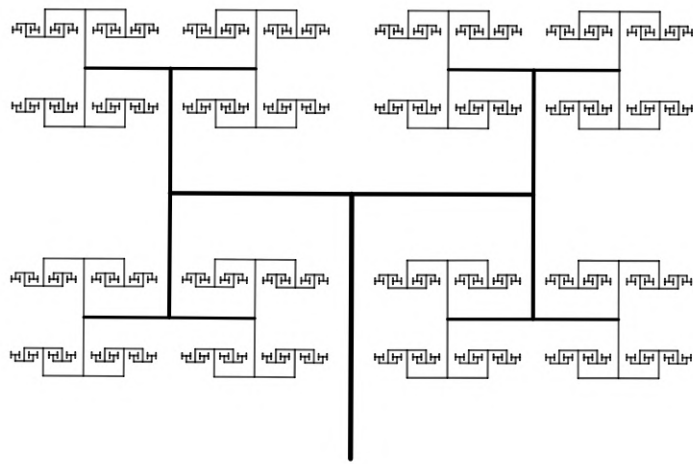


Figure 2.36: Árvore fractal com ângulo de 90°



Capítulo 3

Fractais do tipo Sierpinski

Neste capítulo, investigaremos algumas propriedades elementares dos fractais Triângulo e Tapete de Sierpinski e a Esponja de Menger. Além disso, faremos as construções destes fractais com o aplicativos Geogebra.

Os conjuntos *Curva de Sierpinski*, *Triângulo de Sierpinski* e *Tapete de Sierpinski* foram construídos pela primeira vez pelo matemático polonês Wacław Franciszek Sierpiński (1882-1969) durante sua pesquisa sobre teoria dos conjuntos, análise e topologia e hoje, em sua homenagem, levam o seu nome. Em 1912, Sierpinski investigando os trabalho de Cantor sobre a teoria dos conjuntos, construiu uma curva que preenche o espaço e provou que o triângulo de Sierpinski é uma curva de Jordan em 1915. Em 1916, mostrou que o Tapete de Sierpinski é a curva universal plana (Sagan, p. 49, 1994). Não é objetivo deste trabalho fazer um estudo detalhado sobre curvas, mas apresentar estes conjuntos no contexto da Geometria Fractal através de uma abordagem geométrica e elementar, inspirada na cultura Maker e numa postura “mão na massa”.

Para apresentar um fractal tri-dimensional e por se tratar de um fractal cujas faces são formadas pelo tapete de Sierpinski, no lugar da curva de Sierpinski escolhemos estudar alguns aspectos elementares da *Esponja de Menger*. Deste modo, os fractais que estamos chamando de “fractais do tipo Sierpinski” são o Triângulo e o Tapete de

Sierpinski e a Esponja de Menger.

A esponja de Menger foi apresentada pelo matemático Karl Menger em 1926 na sua tese de doutorado quando investigava o conceito de dimensão topológica. Em sua tese, Menger prova o seu famoso teorema (Kass, 1997): *todo espaço métrico separável n -dimensional é homeomorfo a parte de um certo espaço n -dimensional “universal”, que é dado por um conjunto compacto $(2n+1)$ -dimensional do espaço euclidiano*. Este espaço universal é hoje conhecido como “Esponja de Menger”. Este resultado é uma generalização do resultado de Sierpinski sobre a curva universal plana, por esta razão a esponja de Menger é também chamada de esponja de Sierpinski-Menger ou esponja de Sierpinski.

Figure 3.1: Waclaw Sierpinski



Fonte: Robertson e O’Conner

Sierpinski foi um matemático polonês, conhecido por contribuições notáveis em teoria dos conjuntos (pesquisas sobre o axioma da escolha e a hipótese do contínuo), teoria dos números, teoria das funções e topologia. Ele publicou mais de 700 artigos e 50 livros. Ele se formou em 1904 e trabalhou por um tempo como professor de matemática e física em uma escola em Varsóvia. No entanto, quando a escola fechou devido a uma greve, Sierpiński decidiu fazer doutorado na Cracóvia. Na Universidade Jaguelónica de Cracóvia assistia palestras do professor Zaremba sobre matemática e

também estudava astronomia e filosofia. Ele defendeu o doutorado e foi nomeado para a Universidade de Lemberg (que fica onde hoje é Lviv, na Ucrânia) em 1908.

Ao longo de sua vida, Sierpiński manteve uma produção incrível de artigos de pesquisa e livros. Durante os anos de 1908 a 1914, quando lecionou na Universidade de Lemberg, publicou três livros, além de muitos trabalhos de pesquisa. Esses livros foram *A teoria dos números irracionais* (1910), *Esboço da teoria dos conjuntos* (1912) e *A teoria dos números* (1912) (Robertson e O'Conner, 2014).

Figure 3.2: Karl Menger



Fonte: Kass, 1997

Karl Menger foi um matemático austríaco-americano que trabalhou em álgebras, geometrias, curvas e teoria de dimensões. Ele também contribuiu para a teoria dos jogos e as ciências sociais. Karl Menger frequentou o famoso *círculo de Viena* em Viena (1913 - 1920), que era composto por cientistas que, apesar de atuarem em várias áreas como física, economia, etc., buscaram resolver problemas de fundamento da ciência, problemas estes levantados a partir do descontentamento com os neokantianos (seguidores de Kant) e os fenomenólogos (seguidores de Hegel).

Menger ingressou na Universidade de Viena em 1920. para estudar física, onde assistiu palestras de física ministradas pelo físico teórico Hans Thirring (1888 - 1976), que fez contribuições significativas para a teoria da relatividade geral. No entanto,

Hans Hahn tornou-se professor em Viena em março de 1921 e Menger participou de seu curso sobre *Novidades sobre o conceito de curva*. Menger ficou tão encantado que mudou da física para matemática e começou a trabalhar com Hahn. Em 1927, Menger foi convidado por Hahn para aceitar a cátedra de geometria na Universidade de Viena e em 1928 Menger publicou o livro *Dimensionstheorie* com a teoria sobre dimensão e apresentou a Esponja de Menger (Kass, 1997; Robertson e O’Conner, 2014).

3.1 Triângulo de Sierpinski

O Triângulo de Sierpinski é um conjunto autossimilar que consiste em, dado um triângulo equilátero, dividir este triângulo em 4 outros triângulos congruentes entre si, cujos vértices são os pontos médios dos lados do triângulo original. Em seguida, retira-se o triângulo central e repete-se este processo indefinidamente nos triângulos restantes. O Triângulo de Sierpinski é o conjunto limite deste processo iterativo.

Assim, na etapa 1, obtemos um conjunto Δ_1 formado por três triângulos menores e congruentes, com lados medindo a metade do lado do triângulo inicial. Aplicando novamente o processo iterativo, nos triângulos restantes obteremos o conjunto Δ_2 formado por três cópias de Δ_1 e assim sucessivamente. A figura 3.3 ilustra cinco etapas do processo de construção do triângulo de Sierpinski.

Deste modo, obteremos uma sequência de conjuntos tais que:

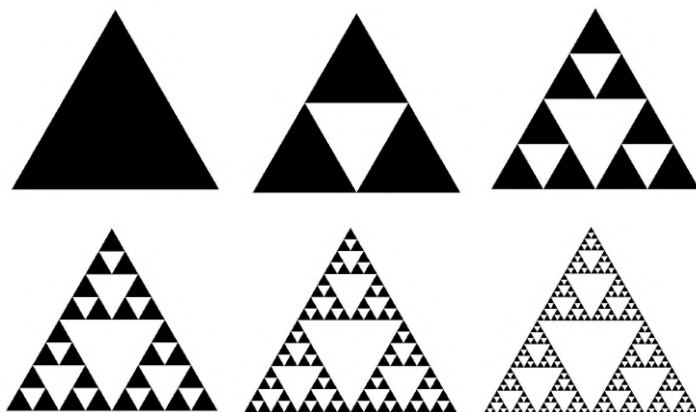
$$\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \cdots \supset \Delta_k \supset \Delta_{k+1} \cdots$$

com Δ_i é formado por 3^i triângulos, cujos lados medem $\frac{1}{2^i}$ da medida do lado do triângulo inicial.

Assim, temos que o Triângulo de Sierpinski Δ_∞ é o conjunto limite dessa sequência de conjuntos, ou seja,

$$\Delta_\infty = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \Delta_k$$

Figure 3.3: Etapas da construção do triângulo de Sierpinski



Fonte: Wikipédia

https://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo_de_Sierpinski

3.1.1 Número de triângulos

Os números de triângulos são dados a partir da de triângulos que compõem a figura em cada nível da construção. Podemos demonstrar, por indução finita, que, no nível $k \geq 1$ de construção do triângulo de Sierpinski, o número de triângulos N_k é dado por

$$N_k = 3^k.$$

De fato, nos níveis $k = 0, 1, 2, 3$ temos

$$N_0 = 3^0 = 1$$

$$N_1 = 3^1 = 3$$

$$N_2 = 3^2 = 9$$

$$N_3 = 3^3 = 27...$$

Assim, no k -ésimo nível teremos $N_k = 3^k$. Como a cada nível um triângulo dá origem a outros três triângulos então de um nível para outro o número de triângulos é triplicado, ou seja, para $k + 1$ teremos $N_{k+1} = 3N_k = 3(3^k) = 3^{k+1}$. Além disso, na construção do triângulo de Sierpinski o numero de níveis tende a infinito e logo, o numero de triângulos também tenderá a infinito, ou seja, $N = \lim_{k \rightarrow \infty} N_k = \lim_{k \rightarrow \infty} 3^k = \infty$.

3.1.2 Área do triângulo de Sierpinski

No processo iterativo da construção do triângulo de Sierpinski, em cada passo, são “retirados” triângulos equiláteros que cujas arestas têm uma relação de escala com o comprimento dos lados do triângulo original Δ_0 . Note que, a área A_0 do triângulo Δ_0 é dada por

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \ell^2$$

com ℓ o comprimento do lado de Δ_0 . De fato, como Δ_0 é equilátero, aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos que a altura de Δ_0 é dada por

$$h^2 = \ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3}{4} \ell^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} \ell.$$

Assim,

$$A_0 = \frac{1}{2} b \cdot h \Rightarrow A_0 = \frac{1}{2} \ell \frac{\sqrt{3}}{2} \ell \Rightarrow A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \ell^2.$$

Agora, note que a área que cada triângulo da primeira etapa do processo de construção do triângulo de Sierpinski é $T_1 = \frac{\Delta_0}{4}$ e, logo, a área de Δ_1 é dada por $A_1 = 3T_1 = \frac{3}{4} \Delta_0$.

Na segunda etapa temos $T_2 = \frac{T_1}{4} = \frac{\Delta_0}{4^2}$, e logo, $A_2 = 3^2 T_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Delta_0$.

Na terceira etapa temos $T_3 = \frac{T_2}{4} = \frac{\Delta_0}{4^3}$, e logo, $A_3 = 3^3 T_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \Delta_0$.

Prosseguindo este processo recursivo, podemos provar por indução finita, que a expressão da área A_k de Δ_k é dada por

$$A_k = 3^k T_k = \left(\frac{3}{4}\right)^k \Delta_0.$$

Portanto, a área do Triângulo de Sierpinski Δ_∞ é dada por

$$\Delta_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \Delta_0 = 0,$$

pois $\frac{3}{4} < 1$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} a^k = 0$ para $0 < a < 1$.

Lembrando que o Triângulo de Sierpinski é uma curva de Jordan (que não preenche o espaço), espera-se que sua área seja nula (Segan, 1994).

3.2 Tapete de Sierpinski

O Tapete de Sierpinski é um conjunto autossimilar que consiste em, dado um quadrado, dividir este quadrado em 9 outros quadrados congruentes entre si, cujos lados medem $\frac{1}{3}$ do lado do quadrado original, Em seguida, retira-se o quadrado central e repete-se este processo indefinidamente dos quadrados restantes. O Tapete de Sierpinski é o conjunto limite deste processo iterativo.

Assim, na etapa 1, obteremos o conjunto Q_1 formado por 8 quadrados cujos lados medem $\frac{1}{3}$ do lado do quadrado original Q_0 . Na etapa 2, obteremos o conjunto Q_2 formado por 8 cópias de Q_1 ou 8^2 quadrados cujos lados medem $\frac{1}{3^2}$ do lado do quadrado original Q_0 e assim sucessivamente. A figura 3.4 ilustra cinco etapas do processo de construção do Tapete de Sierpinski.

Deste modo, obteremos uma sequência de conjuntos tais que:

$$Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset \cdots \supset Q_k \supset Q_{k+1} \cdots$$

com cada Q_k formado por 8^k quadrados cujos lados medem $1/3^k$ da medida do lado do quadrado original.

Assim, temos que o Tapete de Sierpinski Q_∞ é o conjunto limite dessa sequência de conjuntos, ou seja,

$$Q_\infty = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} Q_k$$

3.2.1 Área do Tapete de Sierpinski

No processo iterativo da construção do Tapete de Sierpinski, em cada passo, são “retirados” quadrados cujos lados têm uma relação de escala com o comprimento dos lados do quadrado original Q_0 . Note que, a área A_0 do quadrado Q_0 é dada por

$$A_0 = \ell^2$$

com ℓ o comprimento do lado de Q_0 . Agora, note que a área que cada quadrado da primeira etapa do processo de construção do Tapete de Sierpinski é $\alpha_1 = \frac{A_0}{9}$ e, logo,

a área de Q_1 é dada por $A_1 = 8 \alpha_1 = \frac{8}{9} A_0$.

Na segunda etapa, temos $\alpha_2 = \frac{A_0}{9^2}$ e logo, $A_2 = 8^2 \alpha_2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 A_0$.

Na terceira etapa, temos $\alpha_3 = \frac{A_0}{9^3}$, e logo, $A_3 = 8^3 \alpha_3 = \left(\frac{8}{9}\right)^3 A_0$.

Prosseguindo este processo recursivo, podemos provar por indução finita, que a expressão da área A_k de Q_k é dada por

$$A_k = 8^k \alpha_k = \left(\frac{8}{9}\right)^k A_0.$$

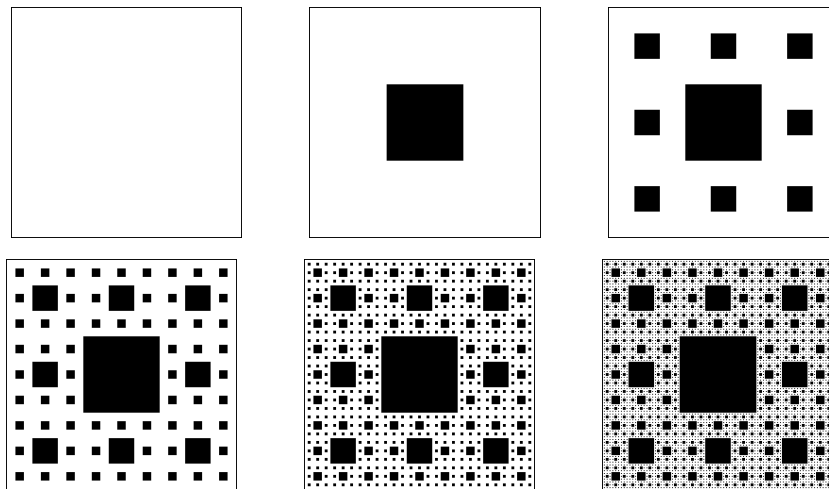
Portanto, a área do Tapete de Sierpinski Q_∞ é dada por

$$Q_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^k A_0 = 0,$$

pois $\frac{8}{9} < 1$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} a^k = 0$ para $0 < a < 1$.

Lembrando que o Tapete de Sierpinski é a curva universal plana, espera-se que sua área seja nula (Segan, 1994).

Figure 3.4: Etapas da construção do Tapete de Sierpinski



Fonte: Wikipédia https://pt.wikipedia.org/wiki/Tapete_de_Sierpinski

3.3 A esponja de Menger

A esponja Menger é um conjunto autossimilar que consiste em, dado um cubo, dividir este cubo em 27 outros cubos congruentes entre si, cujas arestas medem $\frac{1}{3}$ da aresta do cubo original, Em seguida, retira-se o cubo central de cada face e o cubo do meio e repete-se este processo indefinidamente dos cubos restantes. A esponja Menger é o conjunto limite deste processo iterativo.

Assim, na etapa 1, obteremos o conjunto \mathcal{M}_1 formado por 20 cubos cujas arestas medem $\frac{1}{3}$ da aresta do cubo original \mathcal{M}_0 . Na etapa 2, obteremos o conjunto \mathcal{M}_2 formado por 20 cópias de \mathcal{M}_1 ou 20^2 cubos cujas arestas medem $\frac{1}{3^2}$ da aresta do cubo original \mathcal{M}_0 e assim sucessivamente. A figura 3.5 ilustra três etapas do processo de construção da Esponja de Menger.

Deste modo, obteremos uma sequência de conjuntos tais que:

$$\mathcal{M}_0 \supset \mathcal{M}_1 \supset \mathcal{M}_2 \supset \mathcal{M}_3 \supset \cdots \supset \mathcal{M}_k \supset \mathcal{M}_{k+1} \cdots$$

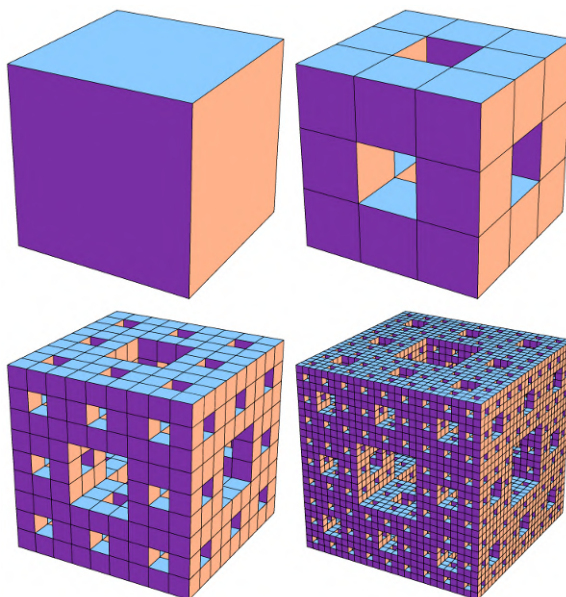
com cada \mathcal{M}_k formado por 20^k cubos cujas arestas medem $1/3^k$ da aresta do cubo original.

Assim, temos que a Esponja de Menger \mathcal{M}_∞ é o conjunto limite dessa sequência de conjuntos, ou seja,

$$\mathcal{M}_\infty = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_k$$

No que segue, calcularemos a área e o volume da Esponja de Menger. A referência usara para estes cálculos foi artigo de ARITA, A. C. P.; SILVA, F. S. M.; GAMBERA, L. R.

Figure 3.5: Etapas da construção da Esponja de Menger



Fonte: <https://matemelga.wordpress.com/2015/01/09/1a-esponja-de-menger/>

3.3.1 Área da Esponja de Menger

Consideraremos A_k a área e α_k o número de quadrados da figura obtida na k -ésima interação do processo de construção da esponja de Menger. Assim, para $k = 0$ temos um único cubo \mathcal{M}_0 formado por 6 quadrados (as faces). Logo, se ℓ é a aresta de \mathcal{M}_0 então a área A_0 de cada quadrado é $A_0 = \ell^2$ e a área Δ_0 de \mathcal{M}_0 é dada por $\Delta_0 = 6\ell^2 = 6A_0$.

Na etapa 1, temos que a aresta de \mathcal{M}_1 é $\ell_1 = \frac{\ell}{3}$ e a área Δ_1 de \mathcal{M}_1 é dada por

$$\Delta_1 = \alpha_1 \ell_1^2 = \alpha_1 \left(\frac{\ell}{3}\right)^2 = \alpha_1 \frac{\ell^2}{9} = \alpha_1 \frac{A_0}{9}. \quad (3.1)$$

Assim, temos que calcular o número de quadrados α_1 da figura da etapa 1. Para isto, note que cada face desta figura é formada por 8 quadrados, ou seja, $8\alpha_0$. Além disso, cada face tem um “buraco” com 4 quadrados, ou seja, $6 \times 8 = 24$ quadrados. Assim, $\alpha_1 = 8\alpha_0 + 24$. Por conveniência, escreveremos $\alpha_1 = 8\alpha_0 + 20^0 \times 24$. Substituindo

α_1 em 3.1, obtemos que a área Δ_1 de \mathcal{M}_1 é dada por

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \alpha_1 \frac{A_0}{9} = (8\alpha_0 + 20^0 \times 24) \frac{A_0}{9} \\ \Delta_1 &= 6 \left(\frac{8}{9}\right)^1 A_0 + \frac{24}{9} \left(\frac{20}{9}\right)^0 A_0\end{aligned}$$

Na etapa 2, temos que a aresta de \mathcal{M}_1 é $\ell_2 = \frac{\ell}{9}$ e a área Δ_2 de \mathcal{M}_2 é dada por

$$\Delta_2 = \alpha_2 \ell_2^2 = \alpha_2 \left(\frac{\ell}{9}\right)^2 = \alpha_2 \frac{\ell^2}{9^2} = \alpha_2 \frac{A_0}{9^2}. \quad (3.2)$$

Assim, temos que calcular o número de quadrados α_2 da figura da etapa 2. Para isto, note que para cada quadrado temos 8 novos quadrado, ou seja, $8\alpha_1$ mais 24 novos quadrados referentes aos buracos dos 20 cubos restantes, ou seja, $\alpha_2 = 8\alpha_1 + 20 \times 24$. Por conveniência, escreveremos $\alpha_2 = 8(6 \times 8 + 20^0 \times 24) + 24 \times 20$. Substituindo α_2 em 3.2, obtemos que a área Δ_2 de \mathcal{M}_2 é dada por

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \alpha_2 \frac{A_0}{9^2} = (8\alpha_1 + 24 \times 20) \frac{A_0}{9^2} \\ \Delta_2 &= (6 \times 8^2 + 8 \times 20^0 \times 24 + 20^1 \times 24) \frac{A_0}{9^2} \\ \Delta_2 &= 6 \left(\frac{8}{9}\right)^2 A_0 + \frac{20^0 24}{9} \left(\frac{8}{9}\right)^1 A_0 + \frac{24}{9} \left(\frac{20}{9}\right)^1 A_0\end{aligned}$$

Na etapa 3, temos que a aresta de \mathcal{M}_2 é $\ell_3 = \frac{\ell}{9^2}$ e a área Δ_3 de \mathcal{M}_3 é dada por

$$\Delta_3 = \alpha_3 \ell_3^2 = \alpha_3 \left(\frac{\ell}{9^2}\right)^2 = \alpha_3 \frac{\ell^2}{9^3} = \alpha_3 \frac{A_0}{9^3}. \quad (3.3)$$

Assim, temos que calcular o número de quadrados α_3 da figura da etapa 3. Para isto, note que para cada quadrado temos 8 novos quadrado, ou seja, $8\alpha_2$ mais 24 novos quadrados referentes aos buracos dos 20^2 cubos restantes, ou seja, $\alpha_3 = 8\alpha_2 + 24 \times 20^2$. Por conveniência, escreveremos $\alpha_3 = 8(6 \times 8^2 + 20^0 \times 24 \times 8 + 20^1 \times 24) + 24 \times 20$. Substituindo α_2 em 3.3, obtemos que a área Δ_3 de \mathcal{M}_3 é dada por

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= \alpha_3 \frac{A_0}{9^3} = 8(6 \times 8^2 + 20^0 \times 24 \times 8 + 20^1 \times 24) + 24 \times 20 \frac{A_0}{9^3} \\ \Delta_3 &= 6 \left(\frac{8}{9}\right)^3 A_0 + \frac{20^0 24}{9} \left(\frac{8}{9}\right)^2 A_0 + \frac{24}{9} \left(\frac{20}{9}\right)^2 A_0\end{aligned}$$

Prosseguindo este processo recursivo, podemos provar por indução finita, que a expressão da área Δ_k de \mathcal{M}_k é dada por

$$\Delta_k = 6 \left(\frac{8}{9}\right)^k A_0 + \frac{20^0 24}{9} \left(\frac{8}{9}\right)^{k-1} A_0 + \frac{20^1 24}{9^2} \left(\frac{8}{9}\right)^{k-2} A_0 + \dots + \frac{20^{k-2} 24}{9^{k-1}} \left(\frac{8}{9}\right)^1 A_0 + \frac{24}{9} \left(\frac{20}{9}\right)^{k-1} A_0.$$

Observe que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{24}{9} \left(\frac{20}{9}\right)^{k-1} A_0 = \infty$, pois $\frac{20}{9} > 1$. Como $\frac{24}{9} \left(\frac{20}{9}\right)^{k-1} A_0 < \Delta_k$ temos que (pelas propriedades de limite) a área da esponja de Menger é dada por

$$\Delta_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_k = \infty.$$

Portanto, a área total da esponja de Menger é infinita!

3.3.2 Volume da Esponja de Menger

No processo iterativo da construção da esponja de Menger, em cada passo, são “retirados” cubos cujas arestas têm uma relação de escala com a aresta do cubo original \mathcal{M}_0 . Note que, o volume V_0 do cubo \mathcal{M}_0 é dado por

$$V_0 = \ell^3$$

com ℓ a aresta de \mathcal{M}_0 . Agora, note que o volume que cada cubo da primeira etapa do processo de construção do esponja de Menger é $\nu_1 = \frac{V_0}{3^3} = \frac{V_0}{27}$ e, logo, o volume de \mathcal{M}_0 é dado por $V_1 = 20 \nu_1 = \frac{20}{27} V_0$.

Na segunda etapa, temos $\nu_2 = \frac{V_0}{27^2}$ e logo, $V_2 = 20^2 \nu_2 = \left(\frac{20}{27}\right)^2 V_0$.

Na terceira etapa, temos $\nu_3 = \frac{V_0}{27^3}$, e logo, $V_3 = 20^3 \nu_3 = \left(\frac{20}{27}\right)^3 V_0$.

Prosseguindo este processo recursivo, podemos provar por indução finita, que a expressão do volume V_k de \mathcal{M}_k é dada por

$$V_k = 20^k \nu_k = \left(\frac{20}{27}\right)^k V_0.$$

Portanto, o volume da esponja de Menger \mathcal{M}_∞ é dada por

$$\mathcal{M}_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{20}{27}\right)^k V_0 = 0,$$

pois $\frac{20}{27} < 1$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} a^k = 0$ para $0 < a < 1$.

Observe que, o volume dos objetos da construção da esponja aproxima-se de zero enquanto a área aumenta ilimitadamente. No entanto, em cada etapa, qualquer superfície está completamente cheia de buracos e vai ficando cada vez mais perfurada, de modo que no limite obtemos um objeto que não é um sólido nem uma superfície, ou seja, uma curva. Vale lembrar que a esponja de Menger é a curva universal (Kass, 1997).

3.4 Construção do Triângulo de Sierpinski com o Geogebra

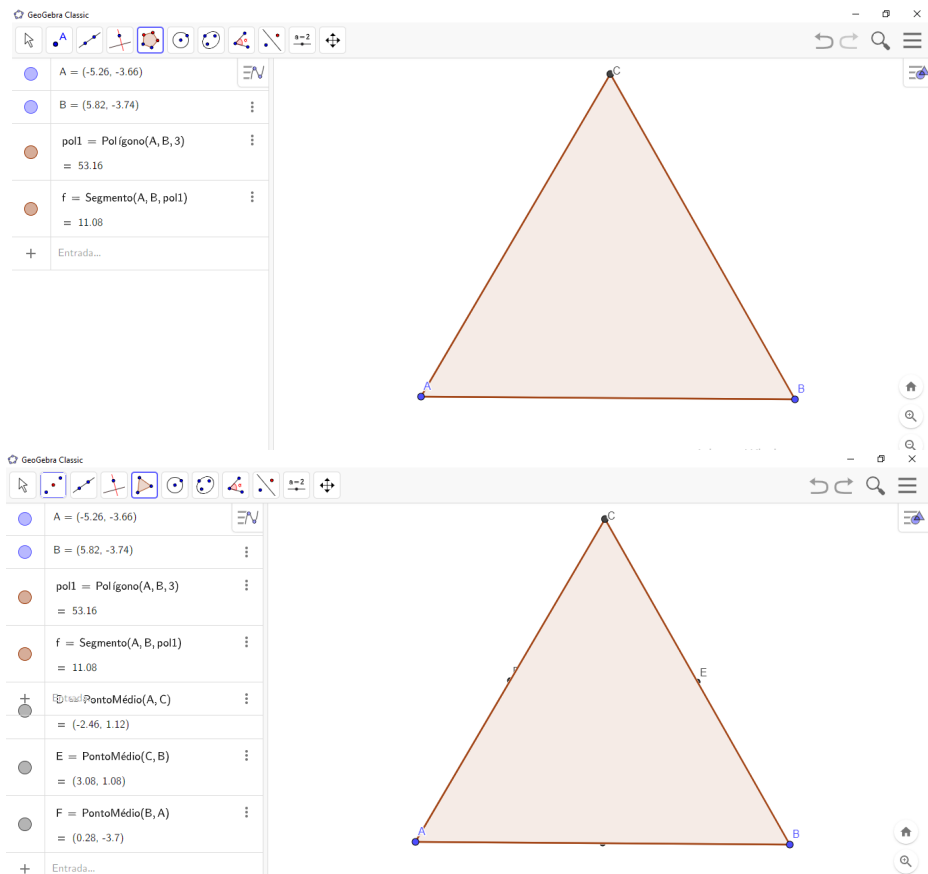
Nesta seção, utilizaremos o aplicativo Geogebra para construir o fractal Triângulo de Sierpinski com o objetivo de explorar seu processo geométrico. Para não haver problemas futuros, é recomendado que os objetos como: pontos, retas, segmentos, polígonos e afins sejam criados de maneira livre, ou seja, sem a ajuda dos eixos "x" e "y" pois algumas construções apresentam mal comportamento quando desenvolvidas sobre os eixos cartesianos. Essa recomendação é válida para todas as atividades deste capítulo.

1) Para melhor experiência da construção, aperte com o contra-botão direito em qualquer lugar da tela de visualização e oculte tanto os eixos quanto a malha. Construa um triângulo equilátero clicando na ferramenta "Polígono Regular", em seguida selecione o número de vértices igual a 3:

2) Agora iremos encontrar as vértices do triângulo central vazado, para isso selecione a opção "Ponto Médio ou Centro" e em seguida selecione de 2 em 2, todos os vértices AB, BC e AC e encontre todos os pontos médios D, E e F das 3 arestas do polígono criado anteriormente.

3) selecione a ferramenta "polígono" e a partir dos três pontos médios encontrados no passo anterior, construa um triângulo interno.

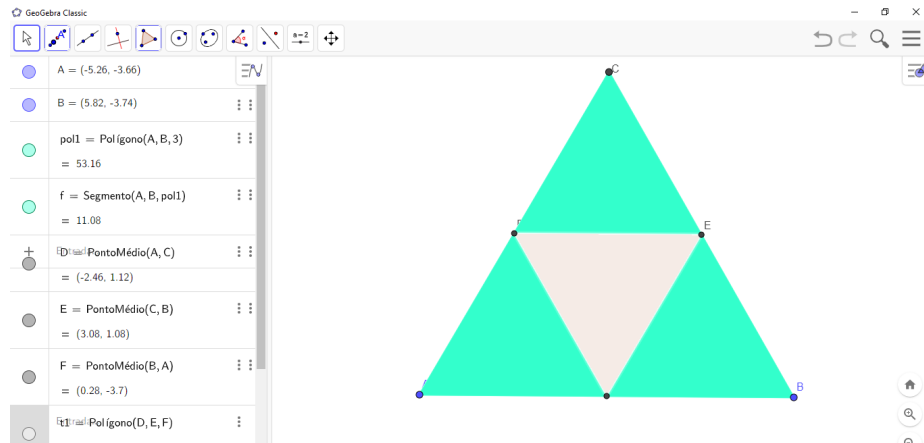
Figure 3.6: Triângulo de Sierpinski: passo 2



4) com o botão direito do mouse, desmarque a opção “Exibir Rótulo” para que todas as letras que nomeiam os objetos como retas e pontos fiquem ocultas para melhor visualização da figura.

5) Selecione o triângulo interno construído na etapa 1 e o triângulo na etapa 3 individualmente e clique com o contra botão neles. Então na opção “Propriedades”, Na aba “Cor”, mude a cor dos polígonos para a cor de sua preferência, altere a "Transparência" do objeto para ficar com melhor aspecto, também diminua os tamanhos dos pontos e mude a cor para a sua preferência e para a melhor visualização da figura. É imprescindível que a espessura da linha do polígono seja reduzida ao máximo possível para não prejudicar a construção, uma vez que as linhas se sobrepõe a cada vez que uma iteração é concluída, deixando a figura com um aspecto borrado e desproporcional:

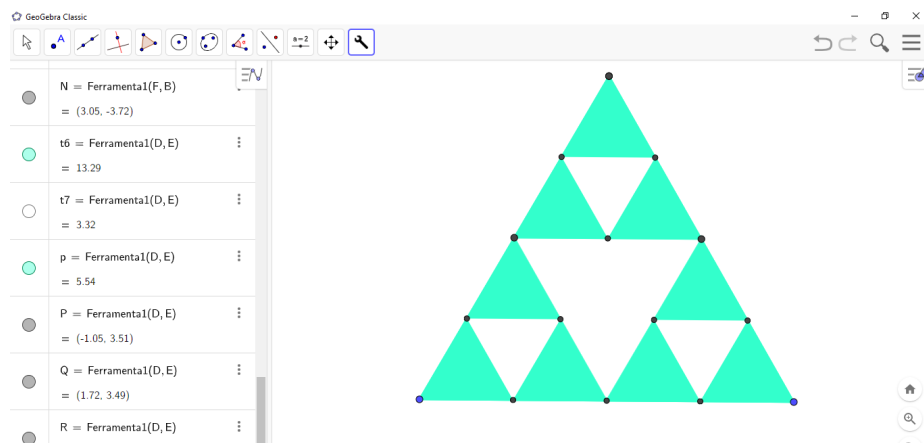
Figure 3.7: Triângulo de Sierpinski: passo 5



6) Já possuímos o necessário para a criação da ferramenta. Dessa forma, selecione toda a figura e na aba superior direita crie uma nova ferramenta.

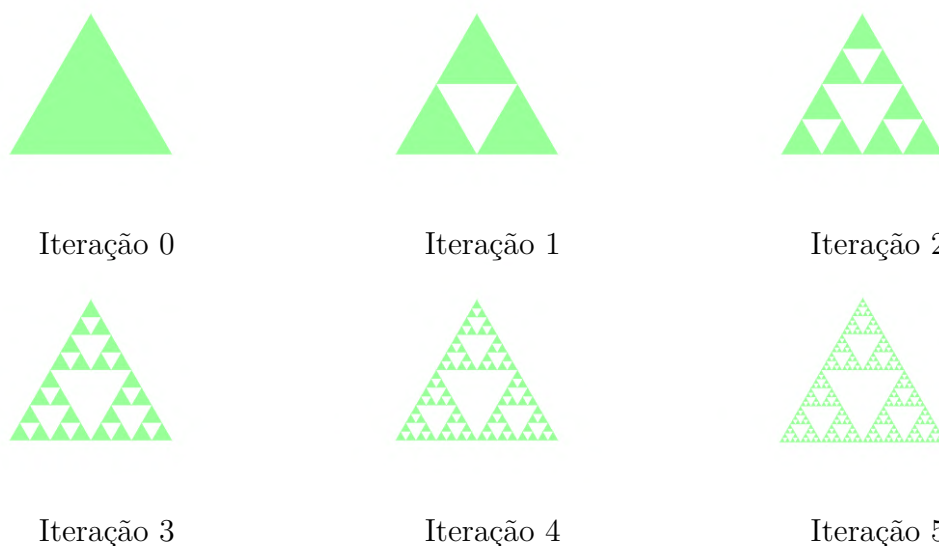
7) Após ter selecionado todas as etapas com o botão "próximo", a ferramenta está pronta para fazer suas iterações na figura, selecione os pontos adjacentes entre si que fazem parte da base de cada triângulo e obtemos assim as varias iterações do triângulo de Sierpinski:

Figure 3.8: Triângulo de Sierpinski: passo 7



Continuando o processo através da ferramenta criada até onde preferir, veremos que o fractal irá ficar cada vez mais complexo. Veja abaixo alguns níveis de iteração do triângulo de Sierpinski obtido através das instruções acima:

Figure 3.9: Iterações do Triângulo de Sierpinski



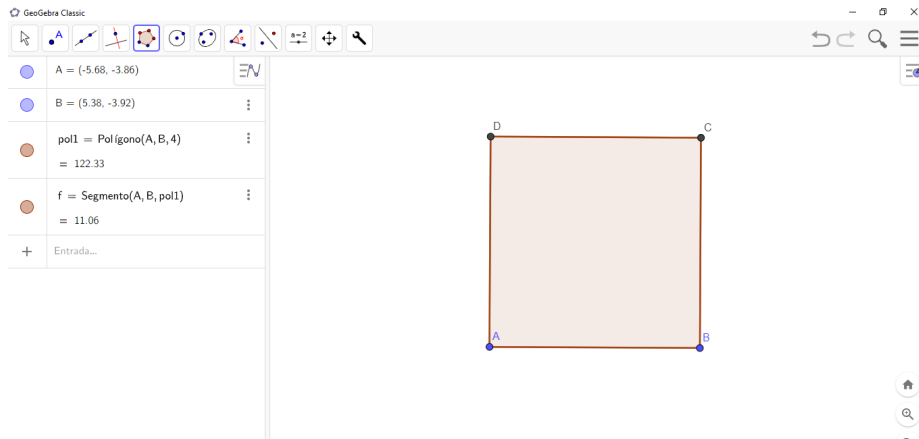
3.5 Construção do Tapete de Sierpinski com o Geogebra

Nesta seção, utilizaremos o aplicativo Geogebra para construir o fractal Triângulo de Sierpinski com o objetivo de explorar seu processo geométrico.

1) No aplicativo geogebra, na barra superior à esquerda, selecione a ferramenta "Polígono Regular", determine a primeira aresta do quadrado de sua preferência e depois selecione o número de lados(4 lados)

2) Na barra de ferramentas, escolha a opção "Homotetia" e selecione os pontos A e B respectivamente, primeiramente escreva "1/3" na caixa do fator, isso fará com que apareça um novo ponto, em seguida, ainda na ferramenta "Homotetia" selecione o novo ponto com o ponto mais distante dele na mesma linha em que ele está contido,

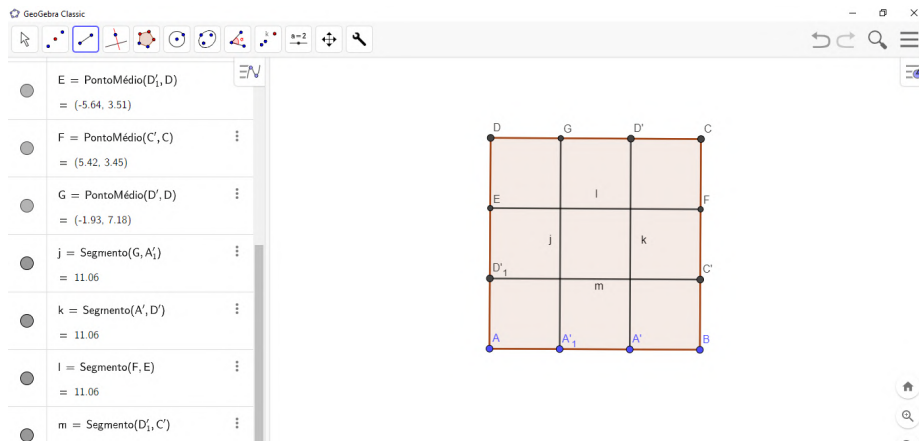
Figure 3.10: Tapete de Sierpinski: passo 1



então determine o fator "1/2". Repita esse processo em todas as faces do quadrado e obterá todos os pontos necessários para dividir o quadrado em 9 quadrados menores:

3) Em "Segmento" selecione os pontos que estão nos lados paralelos nas arestas do quadrado de tal forma que o segmento entre eles formem exatamente 9 quadrados idênticos:

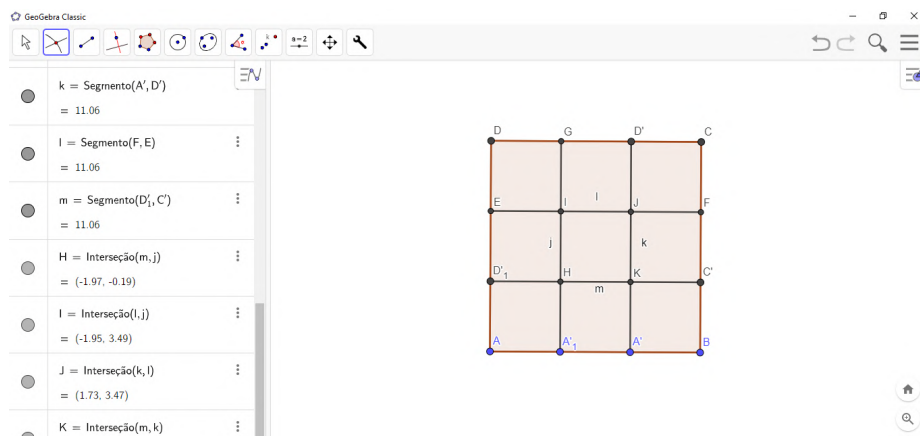
Figure 3.11: Tapete de Sierpinski: passo 2



4) Na ferramenta "intersecção de dois objetos" destaque todos os pontos de intersecção de todos os segmentos.

5) Segurando com o botão direito do mouse, arraste o cursor até que toda a figura esteja selecionada e após isso, clique com o contra botão sobre a figura e desabilite

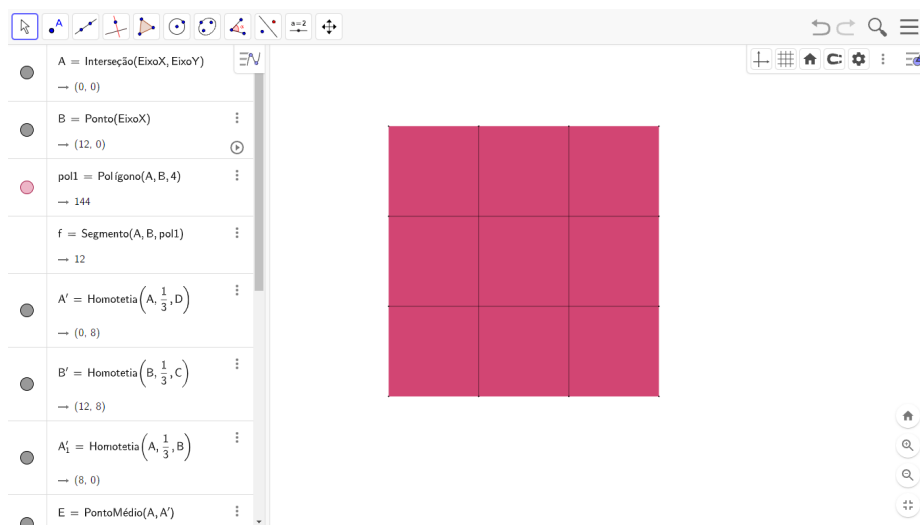
Figure 3.12: Tapete de Sierpinski: passo 4



todos os "rótulos", em seguida, escolha uma cor de sua preferência para melhorar seu aspecto:

6) Neste momento, precisamos definir a personalização do quadrado pois nos próximos passos a estética replicada será o visual definido a partir daqui. Vamos personalizar o quadrado completamente, mudando sua cor, espessura das linhas, tamanho dos pontos e vamos ocultar todos os rótulos para a melhor visualização:

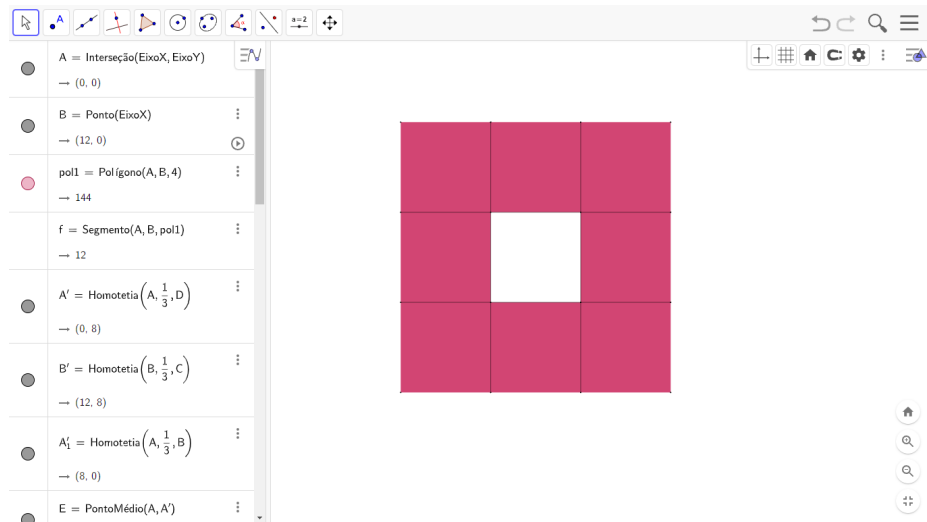
Figure 3.13: Tapete de Sierpinski: passo 6



7) Novamente com a ferramenta "Polígono Regular" crie um novo quadrado por cima do quadrado menor central e selecione uma cor de sua preferência, este passo

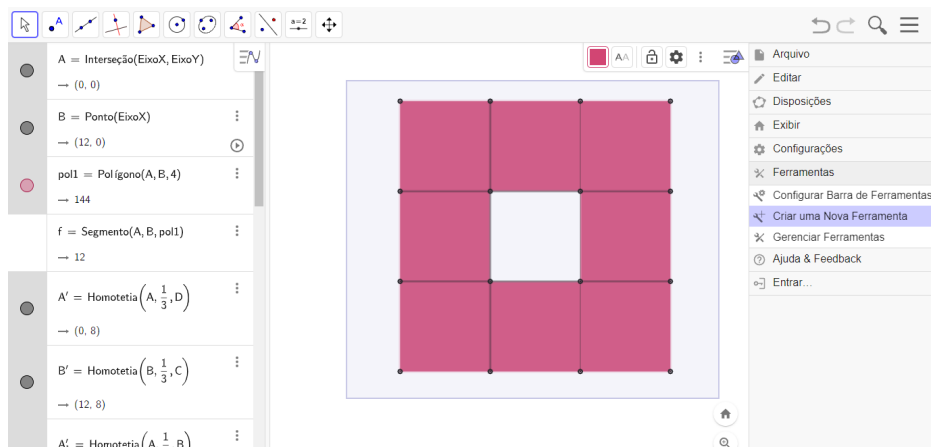
representa a primeira iteração do tapete:

Figure 3.14: Tapete de Sierpinski: passo 7



8) Selecione toda a figura e na aba superior direita vá até a opção "ferramentas", e clique em "Criar uma nova ferramenta", em seguida na aba "Objetos finais" e "Objetos iniciais" clique em "seguinte" para ambas as abas e por fim escolha um nome para a sua ferramenta:

Figure 3.15: Tapete de Sierpinski: passo 8



9) isso gerará um ícone na barra superior esquerda que representará a ferramenta criada, após isso, selecione esse ícone e marque dois pontos consecutivos que representam a base de cada quadrado menor, um por vez, isso gerará automaticamente uma

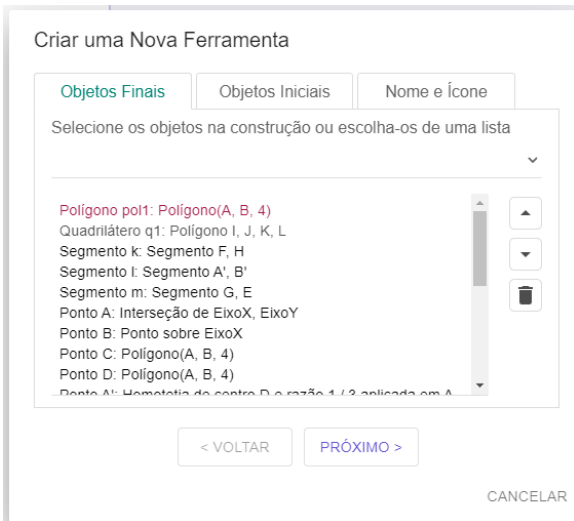


Figure 3.16: Objetos finais

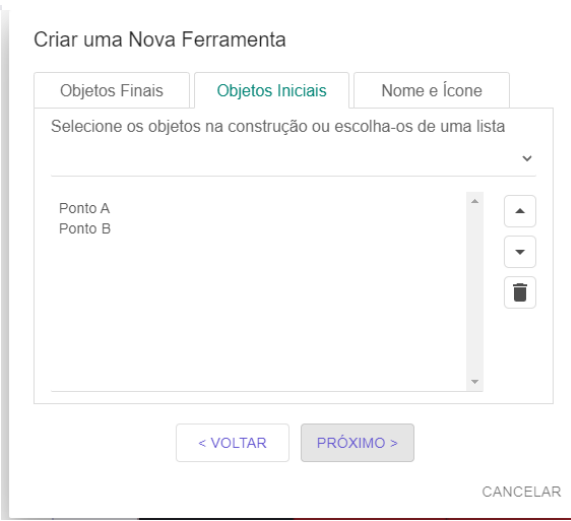
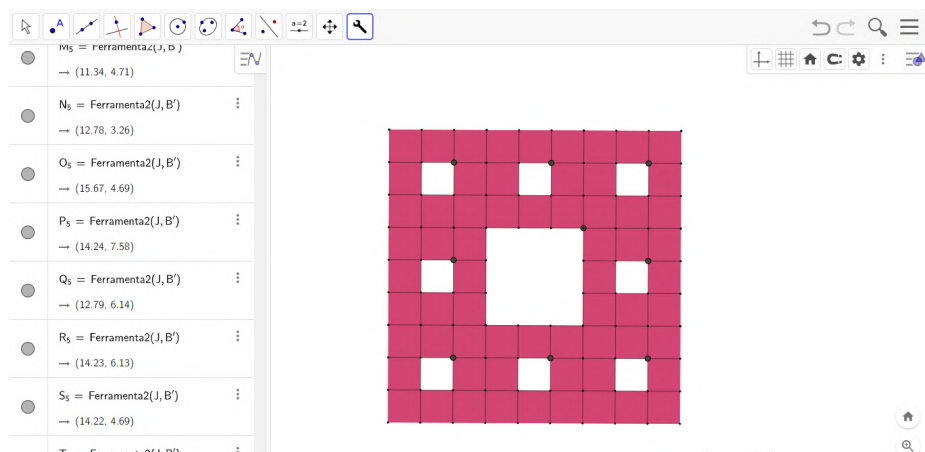


Figure 3.17: Objetos iniciais

iteração, repita esse passo com a ferramenta até que todos os quadrados da figura esteja iterada:

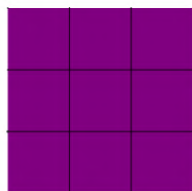
Figure 3.18: Processo de construção do tapete



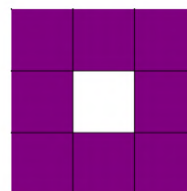
10) Use a ferramenta quantas vezes preferir, mas a medida que o processo é repetido se torna mais difícil fazer suas iterações, uma vez que é preciso selecionar todos os pontos consecutivos entre si:

Abaixo podemos ver o resultado de algumas iterações do Tapete de Sierpinski através dos passos acima:

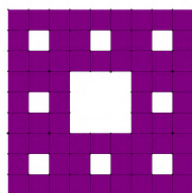
Figure 3.19: Iterações do Tapete de Sierpinski



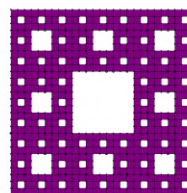
Iteração 0



Iteração 1



Iteração 2



Iteração 3

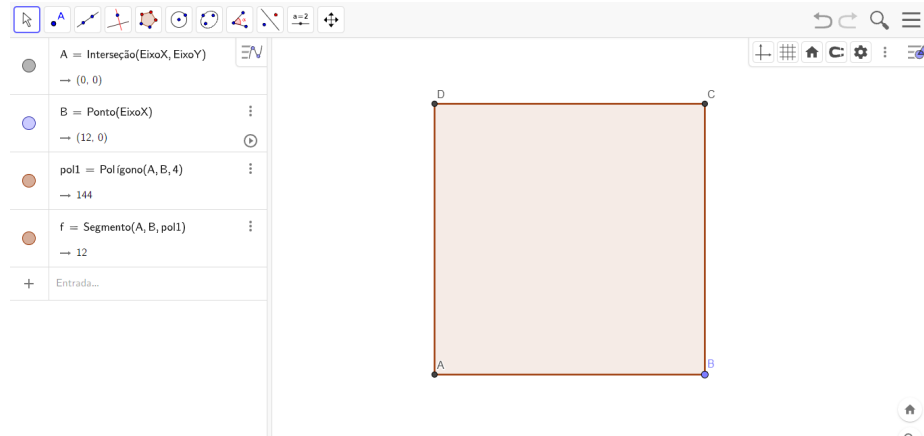
3.6 Construção de um novo Tapete de Sierpinski com o Geogebra

Nesta seção, construiremos uma variação do Tapete de Sierpinski, proposta pelos autores Rani e Kumar em [11]. O processo iterativo deste novo Tapete de Sierpinski consiste em, dado um quadrado inicial, dividir este quadrado em 9 outros quadrados congruentes entre si, cujos lados medem $\frac{1}{3}$ do lado do quadrado original, Em seguida, retira-se o primeiro quadrado inferior esquerdo e depois repete-se este processo indefinidamente nos quadrados restantes. O novo Tapete de Sierpinski é o conjunto limite deste processo iterativo. Veremos que esta simples variação permitirá criarmos um tapete visualmente interessante e com uma estampa “bem atrativa”.

Essa atividade possui os mesmos passos da atividade do Tapete de Sierpinski, sendo repetidos até o passo 6, após esse passo haverá apenas duas modificações, que serão o quadrado vazado e a direção dos pontos através da ferramenta criada, respectivamente.

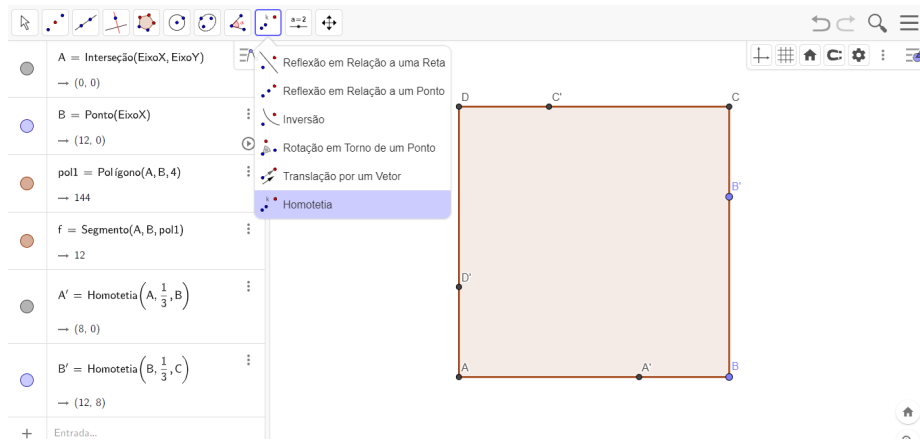
1) No aplicativo geogebra, na barra superior à esquerda, selecione a ferramenta "Polígono Regular", determine a primeira aresta do quadrado de sua preferência e depois selecione o número de lados(4 lados):

Figure 3.20: Novo tapete fractal: passo 1



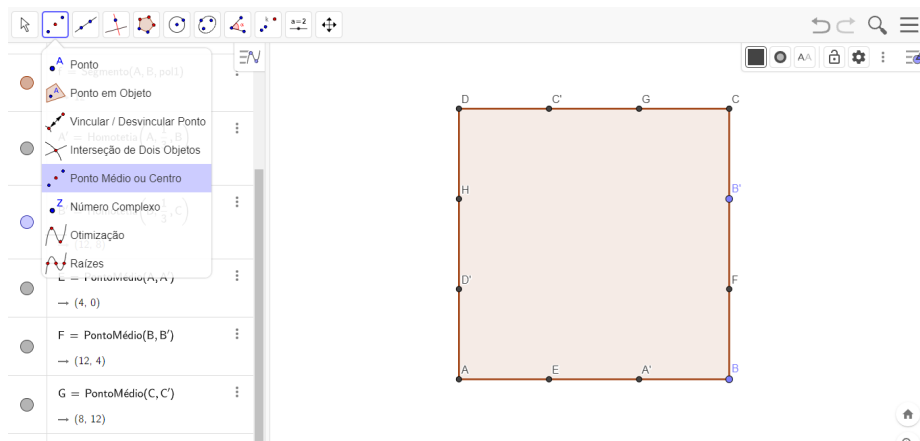
2) Na barra de ferramentas, escolha a opção "Homotetia" e selecione os pontos A e B respectivamente, primeiramente escreva "1/3" na caixa do fator, isso fará com que apareça um novo ponto A', em seguida, ainda na ferramenta "Homotetia" faça o mesmo processo com os segmentos BC, CD e DA respectivamente, isso irá gerar os pontos B', C' e D':

Figure 3.21: Novo tapete fractal: passo 2



3) Logo após, com a ferramenta "Ponto Médio" selecione o novo ponto A' e o ponto mais distante dele na mesma linha em que ele está contido, que será o ponto A, isso determinará o ponto E. Repita esse processo em todas as faces do quadrado, nos segmentos BB', CC' e DD', respectivamente, obteremos todos os pontos F, G e H necessários :

Figure 3.22: Novo tapete fractal: passo 3

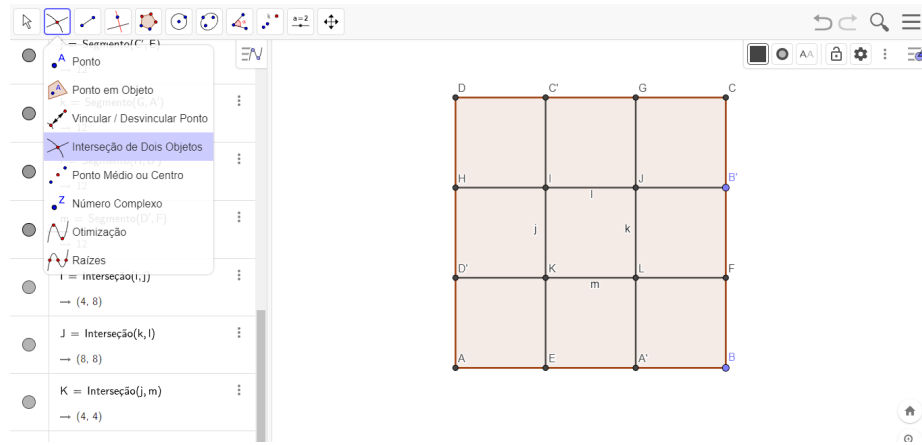


4) Em "Segmento" selecione os pontos que estão nos lados paralelos nas arestas do quadrado de tal forma que o segmento entre eles formem exatamente 9 quadrados idênticos.

5) Na ferramenta "intersecção de dois objetos" destaque todos os pontos de inter-

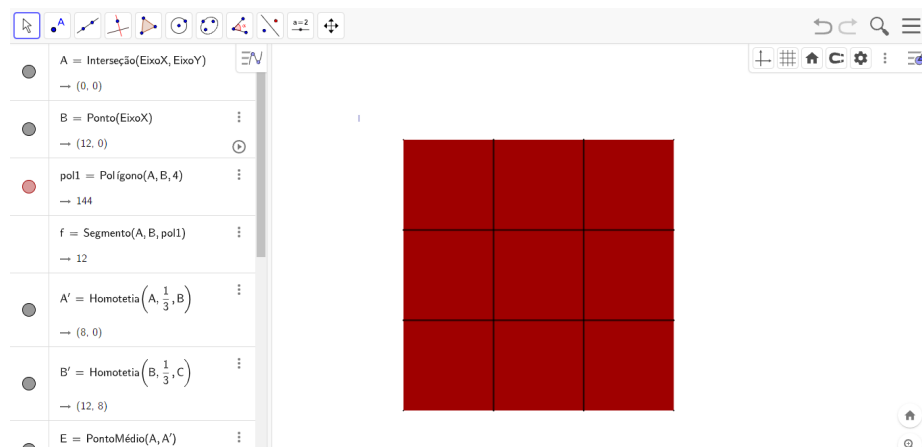
seção de todos os segmentos:

Figure 3.23: Novo tapete fractal: passos 4 e 5



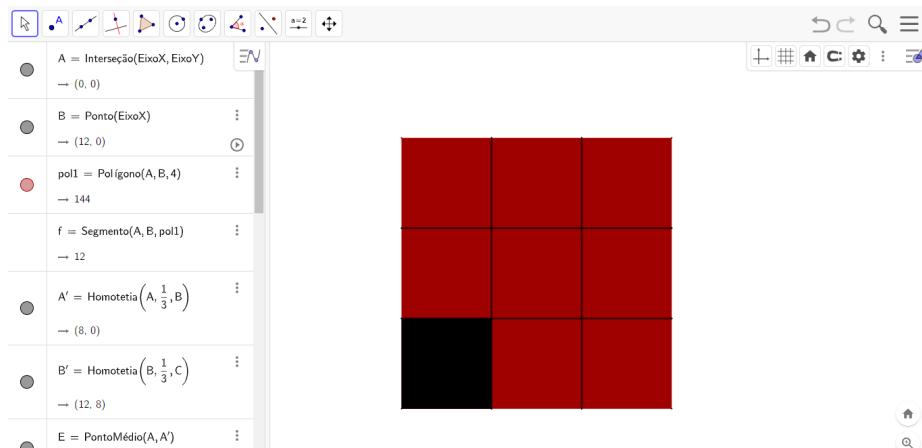
6) Neste momento, precisamos definir a personalização do quadrado pois nos próximos passos a estética replicada será o visual definido a partir daqui. Vamos personalizar o quadrado completamente, mudando sua cor, espessura das linhas, tamanho dos pontos e vamos ocultar todos os rótulos. Segurando com o botão direito do mouse, arraste o cursor até que toda a figura esteja selecionada e após isso, clique com o contra botão sobre a figura e desabilite todos os "rótulos" para a melhor visualização. Para mudar o visual restante dos demais objetos abra as configurações e clique com o botão esquerdo do mouse e selecione os objetos um por vez :

Figure 3.24: Novo tapete fractal: passo 6



7) A partir daqui removeremos um dos 9 quadrados menores obtidos, porém diferente do tapete comum onde a área central é vazada, neste fractal vazaremos a área inferior esquerda. Para isso com a ferramenta "Polígono Regular" crie um novo quadrado por cima do quadrado inferior esquerdo e selecione a cor preta, este passo representa a primeira iteração desse novo tapete:

Figure 3.25: Novo tapete fractal: passo 7



8) Selecione toda a figura e na aba superior direita vá até a opção "ferramentas", e clique em "Criar uma nova ferramenta", em seguida na aba "Objetos finais" verifique se todos objetos estão selecionados, em "Objetos iniciais" verifique se estão selecionados "Ponto A" e "Ponto B" e clique em "seguinte" para ambas as abas e por fim escolha um nome para a sua ferramenta:

Figure 3.26: Novo tapete fractal: passo 8

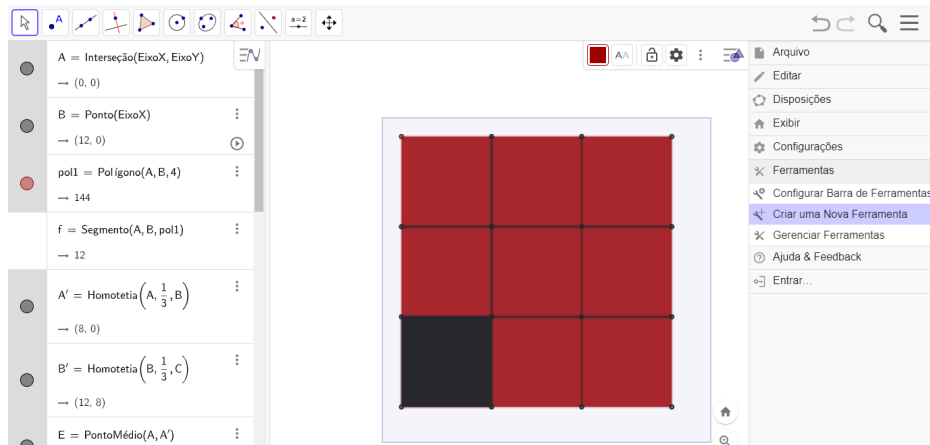


Figure 3.27: Objetos finais

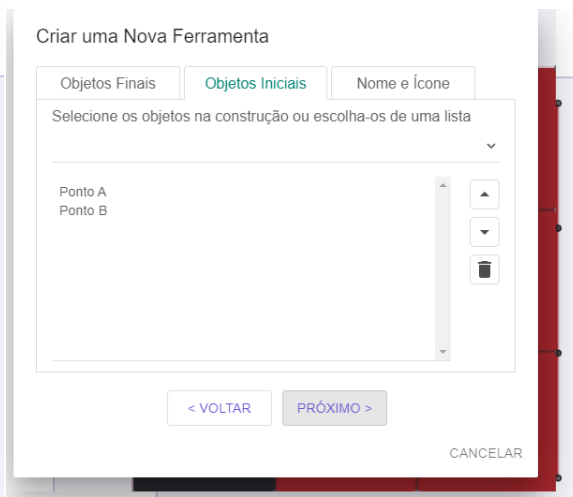
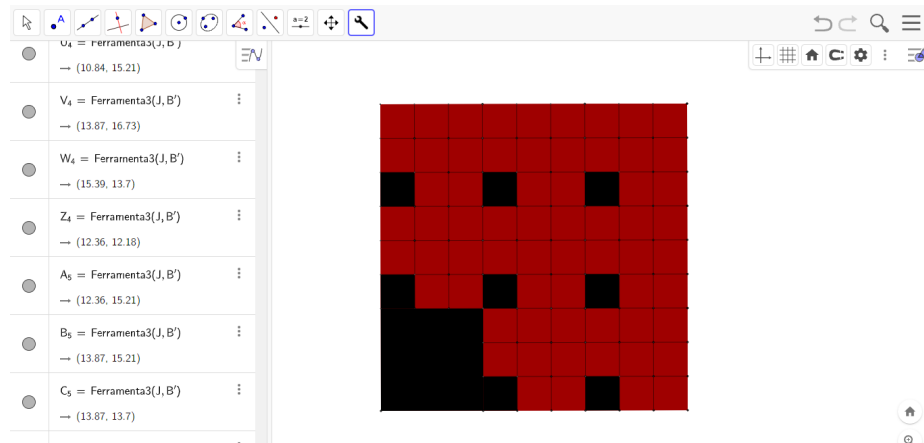


Figure 3.28: Objetos iniciais

9) isso gerará um ícone na barra superior esquerda que representará a ferramenta criada, após isso, selecione esse ícone e marque dois pontos consecutivos que representam a base de cada quadrado menor, sempre da esquerda para a direita, de par em par, isso gerará automaticamente uma iteração, repita esse passo com a ferramenta até que todos os quadrados da figura esteja iterada:

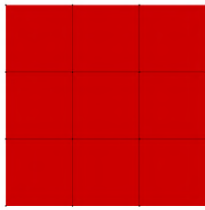
Figure 3.29: Novo tapete fractal: passo 9



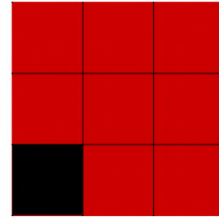
10) Use a ferramenta quantas vezes preferir, mas a medida que o processo é repetido se torna mais difícil fazer suas iterações, uma vez que é preciso selecionar todos os pontos consecutivos entre si:

Abaixo podemos ver o resultado de algumas iterações do tapete de fractal através dos passos acima.

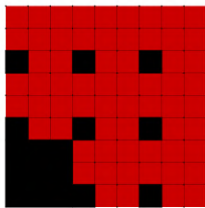
Figure 3.30: Iterações do Novo Tapete de Sierpinski



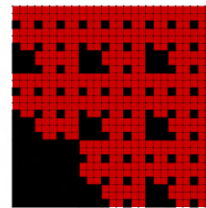
Iteração 0



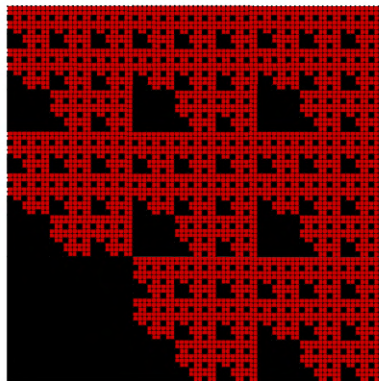
Iteração 1



Iteração 2



Iteração 3



Iteração 4

Capítulo 4

Criando fractais com papel

Neste capítulo, apresentaremos três atividades com materiais concretos usando as técnicas de dobradura e origami com o objetivo de explorar padrões fractais do tipo Sierpinski, além de promover a experimentação e exercitar a criatividade. Ao criar e manipular objetos com suas próprias mãos, o aprendiz tem a oportunidade de ilustrar e visualizar conceitos de forma ativa e lúdica.

Seja construindo sólidos geométricos, explorando a simetria através de dobraduras de papel, criando padrões ou até mesmo usando conceitos matemáticos para as práticas artísticas, as possibilidades são infinitas. Essas atividades não apenas tornam a matemática mais envolvente, mas também incentivam o pensamento crítico, a resolução de problemas e a criatividade.

Independentemente do aprendiz ser um estudante em busca de uma nova abordagem para aprender matemática ou um entusiasta curioso, as atividades manuais que envolvem a matemática oferecem uma maneira única de explorar os conceitos complexos de maneira interessante e significativa.

4.1 Cartões Fractais

Os cartões fractais são uma forma lúdica de combinar a beleza e a complexidade dos fractais com a técnica de dobradura e do desenho para estimular a aprendizagem e exercitar a criatividade. São confeccionado através de processo iterativo que geram um padrão matemático e e tem como resultado design visualmente atraente. Eles são geralmente impressos em papel de alta qualidade e podem apresentar uma variedade de formas e cores. Também podem ser gerados por meio de programas de computador especializados que utilizam algoritmos matemáticos para criar imagens complexas e detalhadas.

Os cartões fractais podem ser usados como cartões de aniversário, cartões de Natal, cartões de agradecimento e para várias outras ocasiões. Os cartões fractais combinam a precisão matemática com a expressão artística, resultando em uma forma lúdica e divertida de aprender matemática.

4.1.1 Cartão fractal triângulo de Sierpinski

O cartão fractal do triângulo de Sierpinski é uma representação visual do padrão matemático do Triângulo de Sierpinski. Como vimos no capítulo 2 Esse padrão consiste em um triângulo grande que é dividido em quatro triângulos menores, removendo-se o triângulo central. Em seguida, cada um dos triângulos menores é dividido novamente da mesma maneira, criando-se um novo conjunto de triângulos ainda menores. Esse processo é repetido infinitamente, resultando em um padrão fractal autossimilar composto por triângulos cada vez menores.

O cartão fractal do triângulo de Sierpinski é uma maneira de visualizar e criar esse padrão usando dobraduras. Começando com um quadrado ou um retângulo, fazemos dobras e cortes seguindo um padrão específico para criar uma sequência de triângulos semelhantes ao Triângulo de Sierpinski. Cada iteração de dobras e cortes adiciona mais detalhes e camadas ao padrão, criando uma representação tridimensional interessante.

O cartão fractal do triângulo de Sierpinski é uma atividade manual que pode ser realizada como uma forma prática e criativa de explorar o conceito de fractais e o padrão do Triângulo de Sierpinski.

Construção do cartão

Para realizar a atividade, é necessário o uso dos seguintes recursos: uma folha de papel tamanho A4, lápis, régua e tesoura. É necessário realizar cada etapa do processo com paciência e não ter medo de errar. Para que o resultado final seja satisfatório, pode ser necessário refazer o processo mais de uma vez.

Nesse processo, o padrão fractal é gerado através de uma sequência de cortes (linhas contínuas) e dobras (linhas pontilhadas), que gradualmente vão tomando a forma do fractal.

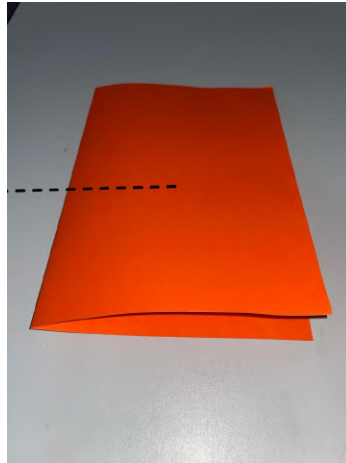
1) Comece com uma folha A4 de sua preferência (pode ser papel branco comum, mas é interessante termos um papel de boa qualidade):

Figure 4.1: Cartão Sierpinski: passo 1 - folha de papel A4



2) Pegue essa folha de papel A4 na posição horizontal e faça uma dobra ao meio, de forma a assemelhar-se a um livro. Em seguida, faça um corte ao longo da borda dobrada, seguindo a linha pontilhada acima. O corte deve começar na metade superior da dobra e ir até a metade da borda direita do papel dobrado.

Figure 4.2: Cartão Sierpinski: passo 2 - dobrar e cortar o papel



3) Em seguida, dobre o papel ao meio novamente e faça um vinco, conforme ilustrado abaixo;

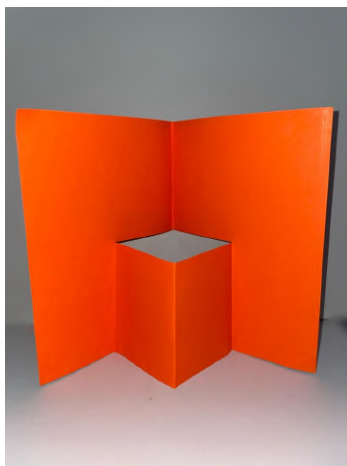
Figure 4.3: Cartão Sierpinski: passo 3 - fazer o vinco



4) O passo seguinte é um tanto complexo, porém crucial. Desdobre a aba dobrada e faça uma dobra para dentro. O resultado final deverá ser o seguinte com o seu papel:

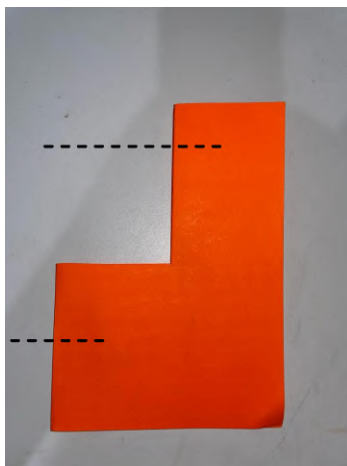
5) Agora que a etapa fundamental para criar o recorte fractal foi finalizada, tudo o que resta é repetir o mesmo processo diversas vezes. Agora, realize dois cortes, posicionados na metade de cada uma das bordas dobradas. Os cortes terão metade

Figure 4.4: Cartão Sierpinski: passo 4 - primeira iteração



do comprimento e devem estar localizados precisamente na metade de cada borda, cobrindo apenas metade da peça. Tome cuidado para não fazer cortes excessivos;

Figure 4.5: Cartão Sierpinski: passo 5-repetir os cortes



6) Após realizar esses cortes, dobre e faça vincos nas abas. Perceba que podemos identificar quais abas dobrar através da estrutura, o objetivo é obter uma estrutura semelhante a uma escada;

7) Após realizar as dobras nas abas, lembre-se de abri-las e dobrá-las para o interior;

8) Dessa forma, o papel deve apresentar essa aparência. Repita o mesmo processo

Figure 4.6: Cartão Sierpinski: passo 6-repetir os vincos

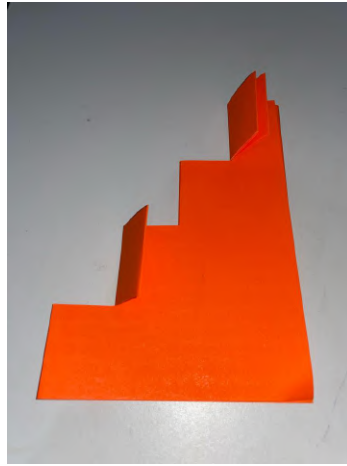
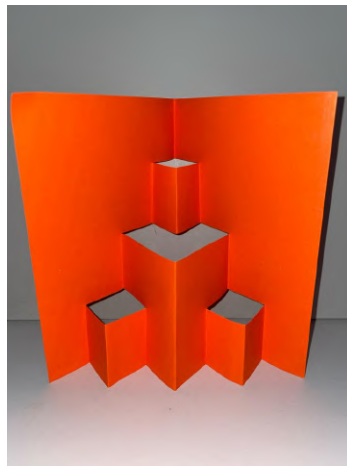
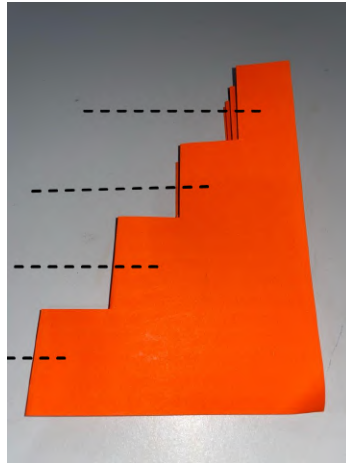


Figure 4.7: Cartão Sierpinski: passo 7- segunda iteração



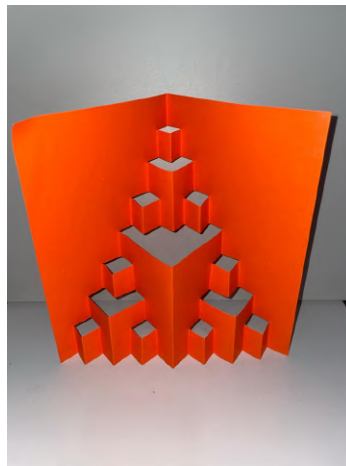
de corte, dobra e inversão, porém desta vez você deverá realizar quatro cortes:

Figure 4.8: Cartão Sierpinski: passo 8 - repetir os cortes e vincos



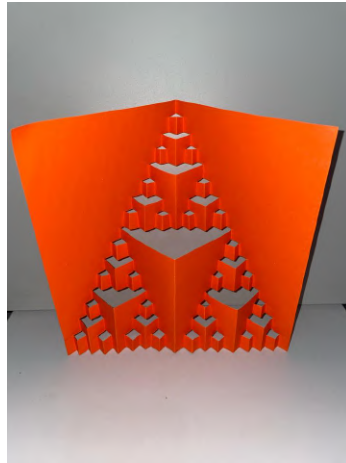
9) Após dobrar e virar as abas para o interior, o resultado final será o seguinte:

Figure 4.9: Cartão Sierpinski: passo 9 - terceira iteração.



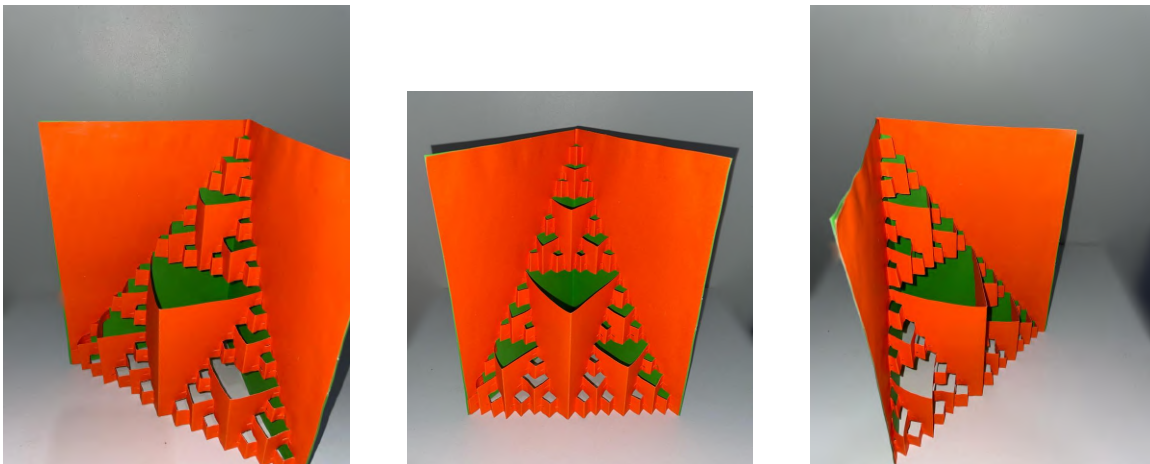
10) Ainda é possível repetir esse processo mais uma vez, realizando oito cortes, seguindo o mesmo padrão dos cortes anteriores. Após cortar, dobrar e inverter, chega-se à etapa final:

Figure 4.10: Cartão Sierpinski final



A partir desse ponto, existem várias camadas que não podem ser cortadas facilmente, caso mais cortes sejam feitos é possível danificar o papel, portanto declaramos esse nível como a última etapa da atividade. Por último, é possível personalizar esse cartão fractal como um pequeno livro. Dobre a outra peça de papel ao meio e, em seguida, aplique cola nas partes sólidas do recorte, formando assim um livro fractal.

Figure 4.11: Cartão fractal Triângulo Sierpinski



4.1.2 Cartão Degrau Fractal

Um degrau fractal, de maneira simplificada, é um padrão matemático que se repete em diferentes escalas assim como a atividade anterior. Ele é formado por segmentos de linha que são subdivididos em partes menores, seguindo um padrão específico de repetição.

Imagine um segmento de linha reta. Agora, imagine que esse segmento seja dividido em três partes iguais e o segmento do meio seja removido. O que resta são dois segmentos menores. Repetindo esse processo de subdivisão nos segmentos restantes, sempre removendo o segmento do meio, obtemos uma sequência infinita de segmentos cada vez menores.

O padrão resultante é um degrau fractal. Independentemente de quão longe você vá na subdivisão, o padrão continua o mesmo, com degraus cada vez menores. Essa característica é a autossimilaridade, uma regra fundamental dos fractais.

Os degraus fractais são um exemplo simples de um padrão repetitivo que pode ser encontrado em muitos contextos, desde a matemática até a natureza. Eles ilustram como uma regra simples de subdivisão pode gerar estruturas complexas .

Portanto, um degrau fractal é essencialmente um padrão autossimilar formado por segmentos de linha que são repetidamente subdivididos seguindo um padrão específico.

Construção do cartão

Para esta atividade, assim como na atividade anterior, os materiais necessário são: folha de papel tamanho A4, lápis, régua e tesoura. A diferença importante entre construção dos cartões é o padrão geométrico, que no cartão degrau é mais simples.

1) Comece com uma folha de papel no formato A4 de sua preferência (priorizando o aspecto artístico) :

Figure 4.12: Cartão degrau: passo 1- folha de papel A4



2) Faça uma dobra na folha ao meio, seguindo a direção vertical:

Figure 4.13: Cartão degrau: passo 2 - Dobrar a folha ao meio



3) Após o passo 2, obteremos a seguinte folha:

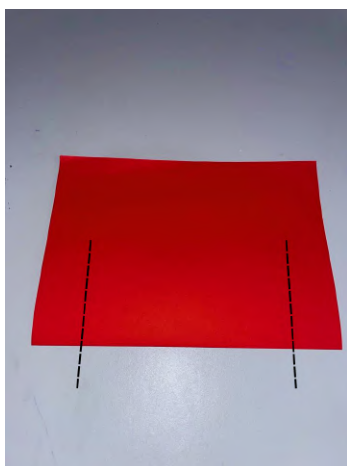
4) Com a folha dobrada ao meio, faça dois cortes verticais simétricos a uma distância de sua preferência, contanto que os lados restantes sejam de mesmo tamanho e que a dobradura seja menor ou igual que a metade:

5) Faça uma dobra para cima no retângulo formado, criando um vinco na dobra:

Figure 4.14: Cartão degrau: folha dobrada



Figure 4.15: Cartão degrau: passo 3: Cortes na folha.



6) Para obter o primeiro degrau, retorne o retângulo dobrado à sua posição original e traga o centro da figura em relevo para fora:

7) Para realizar as próximas iterações, devemos seguir o mesmo procedimento descritos nos passos 4, 5 e 6, mas em uma escala menor, pois a cada repetição o espaço da folha fica menor, apenas na região dobrada.

8) Repita o passo 5, Faça novamente uma dobra para cima no novo retângulo menor formado, criando um vinco na dobra:

9) Repita o passo 6, retorne o retângulo dobrado à sua posição original e traga o centro da figura em relevo para fora:

Figure 4.16: Cartão degrau: passo 4 - fazer vincos

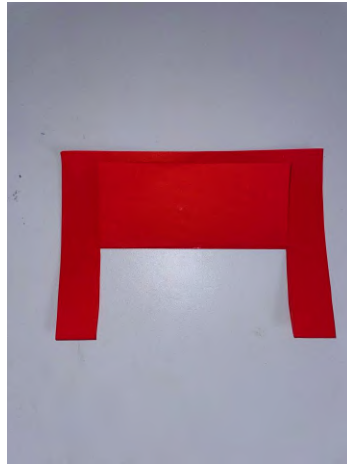


Figure 4.17: Cartão degrau: passo 5-primeira iteração



10) Para gerar mais iterações, repita esses processos enquanto a folha tiver espaço o suficiente realizar cortes e dobras no papel, seguindo sempre a regra de corte estabelecida no passo 4. A figura pode ter sua forma alterada de acordo com as iterações que o aluno fizer, Abaixo temos um cartão que passou por quatro transformações de acordo com os passos ensinados:

Assim como na atividade anterior ainda é possível fazer iterações no papel, porém é mais difícil por conta das camadas que são acumuladas, portanto fica a critério do aluno parar no passo 10 ou continuar. Também é possível customizar o degrau com um cartão colado em suas costas par deixar com um aspecto melhor.

Figure 4.18: Cartão degrau: passo 8: repetir os cortes e vinco.



Figure 4.19: Cartão degrau: passo 9: segunda iteração.



Essa atividade, diferente da atividade anterior, nos dá mais liberdade para fazer os cortes, pois no cartão de Sierpinski, precisávamos deixar o cartão o mais próximo do triângulo de Sierpinski, enquanto que a atividade do degrau fractal podemos ousar diferentes cortes como o que veremos abaixo:

Após aplicar estes diferente tipos de cortes, colocar os vincos em seus devidos lugares e colocar um cartão branco no fundo, temos o seguinte resultado:

Figure 4.20: Cartão fractal com 4 iterações.



Figure 4.21: Diferentes tipos de cortes.

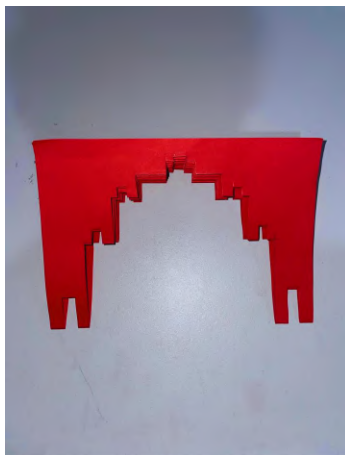
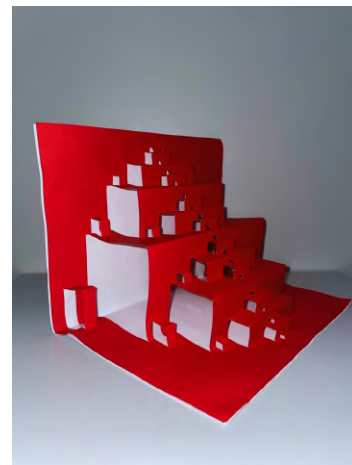
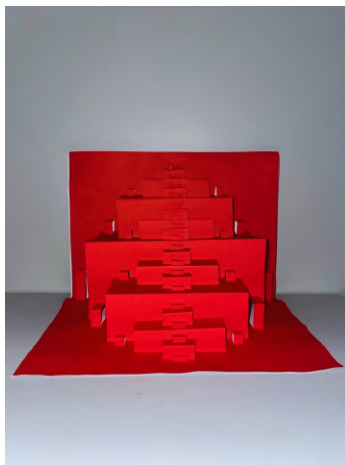
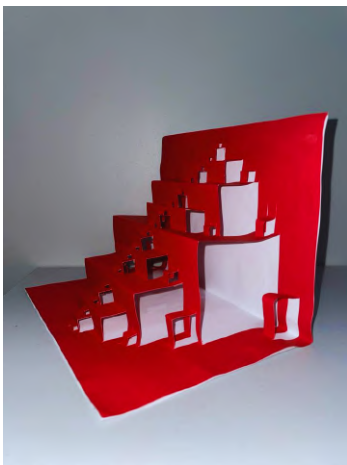


Figure 4.22: Cartão degrau personalizado



4.2 Construção da Esponja de Menger no estilo origami

O origami de esponja Menger é uma forma especial de origami que envolve a criação de um modelo tridimensional baseado no fractal esponja Menger. Vale ressaltar que esse é um origami simplificado, uma vez que, o processo de origami envolve dobrar uma folha de papel de maneiras específicas, sem cortes ou colagem. Entretanto, como este trabalho busca atividades mais simples e diretas, após terminarmos o cubo que representa nível 0 da esponja de Menger, utilizaremos recursos que fixarão todos os quadrados entre si como cola ou fitas. Portanto, não é exatamente construir a esponja de Menger com a técnica do origami (o que pode ser feito, mas com um grau maior de dificuldade).

Dessa forma, para criar esponja Menger inspirados no origami o material necessário é um pedaço de papel quadrado e cola. Usa-se para construção o processo iterativo da esponja e uma sequência de dobras específicas para formar a estrutura fractal.

A esponja Menger possui uma série de características distintas. Ela é formada por uma série de cubos menores, onde cada cubo é uma versão reduzida da estrutura original. A repetição dessa subdivisão cria um padrão autossimilar, no qual a estrutura mantém a mesma forma e propriedades em diferentes escalas.

A complexidade do origami de esponja Menger aumenta à medida suas subdivisões adicionais são criadas. Cada iteração de dobras e cortes adiciona mais detalhes e camadas à estrutura, resultando em uma representação tridimensional concreta de algumas etapas do fractal. Como vimos no capítulo 3, seção 3.3, o número de cubos em cada iteração é 20^k , e, portanto, na primeira iteração temos 20 cubos, na segunda 400 cubos, e na terceira 8000 cubos, o que torna-se inviável a construção com material concreto da terceira etapa da esponja.

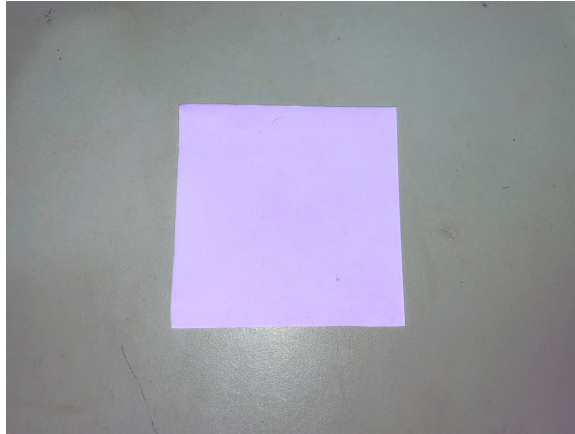
Construir a esponja de Menger usando esta técnica combina a arte do origami com os princípios fractais, proporcionando uma experiência única de criação. Além de ser visualmente interessante, o origami da esponja Menger pode servir como uma

ferramenta educacional para explorar conceitos como autossimilaridade, recursividade e ludicidade.

Construção da esponja de Menger

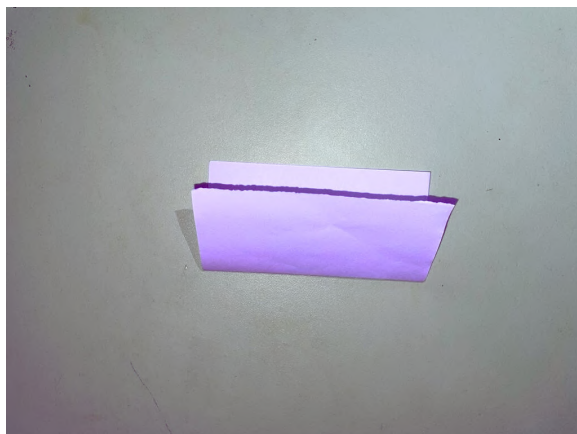
1) Comece com uma folha de papel do tamanho 10×10 :

Figure 4.23: Esponja de Menger: folha de papel quadrada.



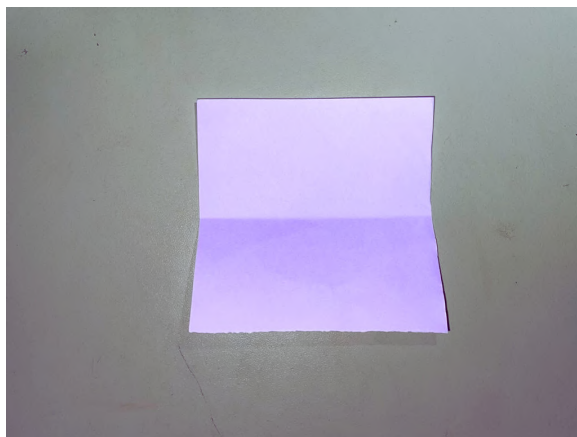
2) Dobre essa folha ao meio de cima para baixo rapidamente sem fazer muita pressão no papel e de modo que ambas as pontas do papel se encontrem:

Figure 4.24: Origami da esponja de Menger: folha quadrada dobrada na vertical



3) Logo em seguida, abra a folha e a coloque na posição do passo 1 para podermos fazer o próximo passo:

Figure 4.25: Origami da esponja de Menger: folha aberta.



4) Agora dobre o papel na horizontal, de tal forma que o as pontas se encontrem, como na figura abaixo:

5) Novamente, abra a folha e a coloque na posição do passo 1:

6) Agora dobre o lado direito da folha de tal modo que ele encontre a marcação central vertical do papel que marcamos no passo 4:

Figure 4.26: Origami da esponja de Menger: folha quadrada dobrada na horizontal.

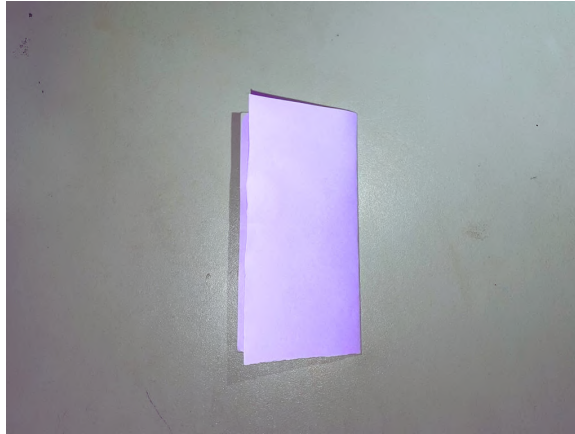


Figure 4.27: Origami da esponja de Menger: folha aberta.

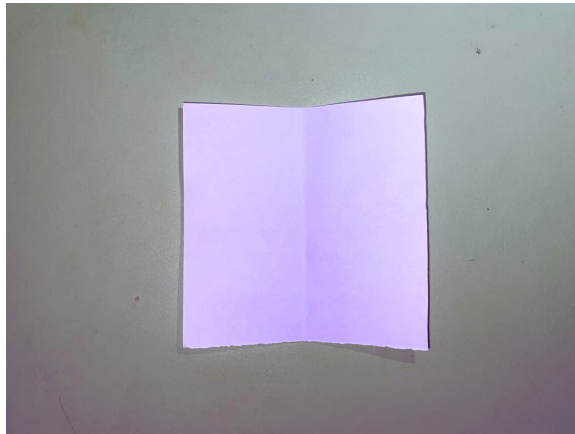
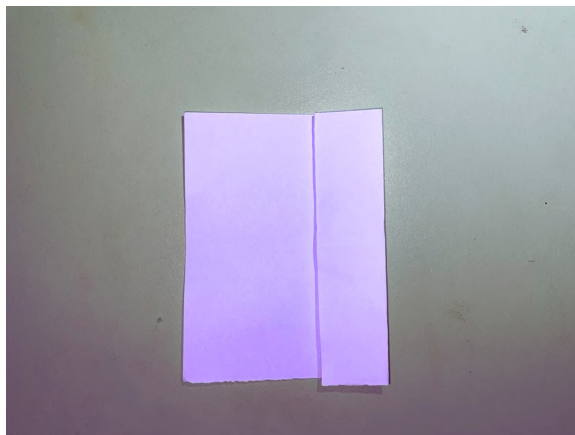
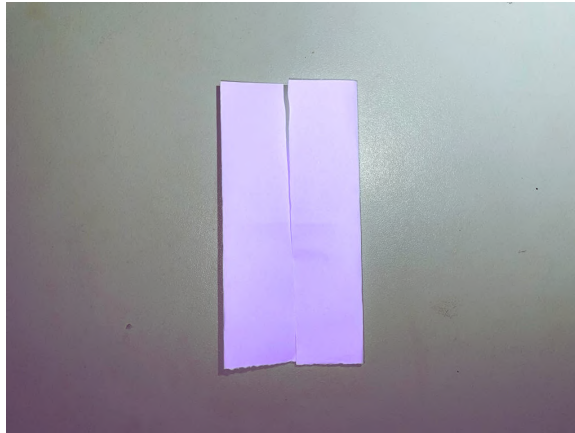


Figure 4.28: Origami da esponja de Menger: lado direito do papel e marcação vertical



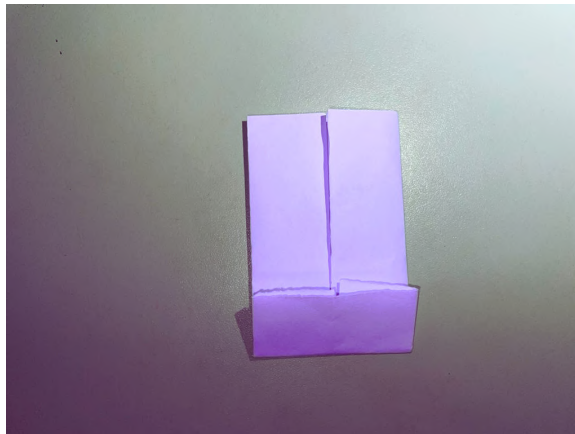
7) fazemos o mesmo passo anterior porém com o lado esquerdo agora:

Figure 4.29: Origami da esponja de Menger: lado esquerdo do papel e marcação vertical.



8) Agora dobre a parte inferior da folha de tal modo que ele encontre a marcação central horizontal do papel que marcamos no passo 2:

Figure 4.30: Origami da esponja de Menger: lado inferior do papel e marcação horizontal.



9) fazemos o mesmo passo anterior porém com o lado superior agora:

10) Dessa forma, conseguimos construir um lado do nosso cubo:

11) Basta fazer mais 5 faces para que a construção do cubo seja possível:

12) Tendo em mãos todas as 6 faces do cubo podemos finalmente montá-lo:

Figure 4.31: Origami da esponja de Menger: lado superior do papel e marcação horizontal.



Figure 4.32: Origami da esponja de Menger: lado do cubo.

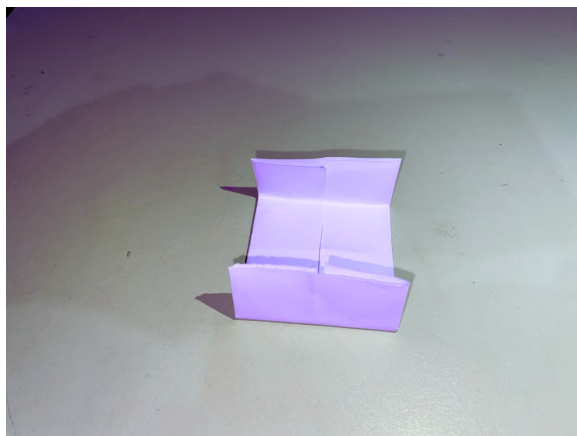
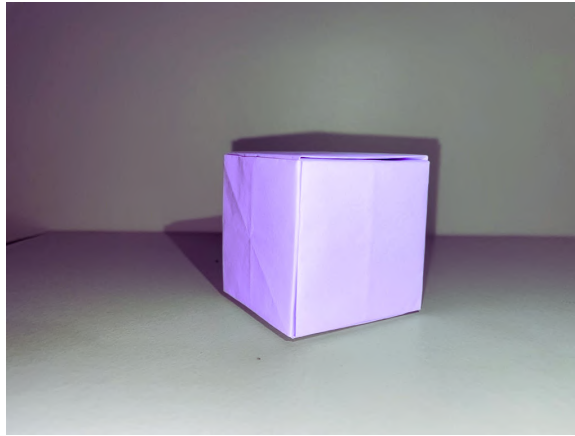


Figure 4.33: Origami da esponja de Menger: as 6 faces do cubo.

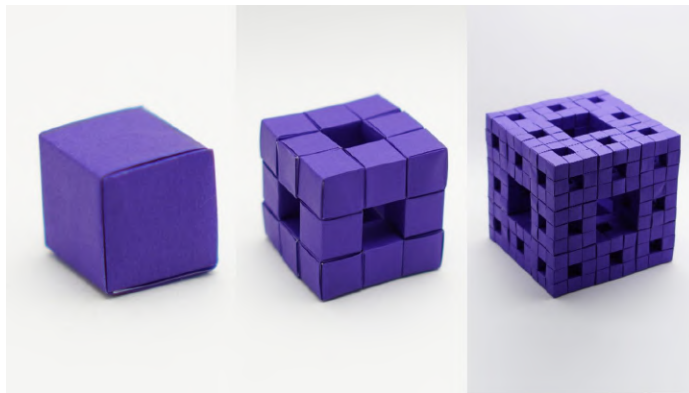


Figure 4.34: Origami da esponja de Menger: Cubo completo



A partir daqui, só precisamos repetir esse processo até encontrar todos os cubos necessários para a construção da esponja de Menger. Vimos no capítulo 2 que na primeira iteração precisamos de 20 cubos, e na segunda iteração temos 400. Obviamente, a partir da segunda iteração se torna um processo cansativo e demorado, Então fica a critério dos alunos até onde levar essa atividade. Abaixo podemos observar as 3 etapas da esponja de Menger feita do estilo origami pelo artista Jo Nakashima:

Figure 4.35: Esponja Menger de origami: Níveis 0, 1 e 2



Fonte:<https://jonakashima.com.br/2020/03/22/origami-menger-sponge/>

A figura abaixo mostra duas etapas da construção da esponja de Menger usando-se a técnica do origami:

Figure 4.36: Esponja Menger de origami



Fonte:<https://www.facebook.com/watch/?v=1025765744433723>

Considerações Finais

Nesta pesquisa, inspirados nos princípios da Cultura Maker (cultura do aprender fazendo) e numa abordagem “mão na massa”, buscamos investigar o potencial geométrico dos fractais Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski e Esponja de Menger, para a elaboração de atividades computacionais e com materiais concretos, especialmente dobraduras e origami. Durante a pesquisa, observamos, ao elaborar e realizar as atividades propostas, que o processo recursivo, a autossimilaridade e a estrutura fina destes fractais são propriedades geométricas relevantes na construção intuitiva de conceitos matemáticos tais como simetria em escala (homotetia), processo iterativo ou figuras geométricas através do aplicativo Geogebra. Por exemplo, a atividade que envolveu um novo tapete de Sierpinski estimula a criação de padrões novos e originais através da compreensão e aplicação destas propriedades. Nas atividades com papel usando-se dobradura ou origami, observamos que as propriedades relevantes são o processo recursivo e a autossimilaridade, pois são responsáveis pela criação dos padrões fractais. Por exemplo, no caso do cartão degrau percebemos a formação de vários degraus de diferentes tamanhos ao repetirmos o processo iterativo.

Além disso, como escolhemos dois fractais planos e um tridimensional, os padrões estimulam a ludicidade, a criatividade e a resolução de problemas. Por exemplo, podemos variar o processo iterativo (como fizemos na seção 3.6) e considerar o problema de gerar fractais com padrões atraentes e diversificadas através de inúmeros recursos: aplicativos computacionais, desenhos e pintura, dobradura... ou deixar a imaginação solta para que cada um faça a sua “arte fractal”. Deste modo, teremos uma abordagem inovadora e estimulante para o ensino e aprendizagem da Matemática.

Assim, a pergunta da pesquisa *Qual o potencial geométrico dos fractais de Sierpinski na realização de atividades computacionais e com materiais concretos?* pode ser respondida da seguinte maneira: o que possibilita a elaboração de atividades "mão na massa" com os fractais de Sierpinski usando-se como recursos o computador e o papel são suas propriedades fractais: processo recursivo, autossimilaridade e estrutura fina. Estas características geométricas, próprias dos fractais, são relevantes na criação de padrões e nas interessantes imagens geradas durante o processo. Isto possibilita podermos programar os padrões e, portanto, desenvolver várias habilidades, como o pensamento computacional e a resolução de problemas. Além disso, estes padrões podem ser usados para elaboração de diversas atividades "mão na massa" tais como desenhos e pinturas ou confecções de artesanatos, como por exemplo cartões, bijuterias, porta-retratos, etc. Em particular, os fractais de Sierpinski apresentam padrões simples e esteticamente interessantes.

Desta forma, verificamos também que cada objetivo específico foi alcançado, e conseqüentemente o objetivo geral também. Além disso, várias direções podem ser escolhidas para dar continuidade ao trabalho, pois a geometria fractal é um campo riquíssimo. Porém, percebemos, através da pesquisa bibliográfica realizada, que a abordagem "mão na massa" pode ser mais explorada. Por exemplo, atividades de envolvam jogos educacionais e os fractais de Sierpinski é um caminho promissor que pode ser muito inovador e criativo.

Concluimos este trabalho com a convicção de que as atividades "mão na massa" que envolvem a geometria fractal desempenham um papel importante na promoção de uma educação matemática mais envolvente e eficaz, independente de qualquer nível de escolaridade, pois o valor acadêmico, intelectual e artístico desta temática vai além de fronteiras escolares. Esperamos que este estudo incentive educadores, aprendizes e qualquer pessoas que goste de Matemática a explorar potencial geométrico e artístico da Geometria fractal, em particular dos fractais de Sierpinski, e contribua para a divulgação dos princípios da cultura maker tanto no contexto escolar quanto na pesquisa científica.

Referências Bibliográficas

- [1] ARITA, A. C. P.; SILVA, F. S. M.; GAMBERA, L. R. **A geometria da esponja de Menger**. Revista eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, v. 2, n. 2, p. 70-77, dez. 2013. Disponível em <http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/index.jsp>. Acesso em 6 de fevereiro de 2024.
- [2] BARBOSA, Ruy. **Descobrimo a Geometria Fractal - para a sala de aula**. Autêntica, 1a edição, 2005.
- [3] CARVALHO, Marcelia Luiza de Assis, **Livro- Objeto A caixa de inspiração da Phida: uma aprendizagem ativa e inovadora em Matemática**. Trabalho de conclusão de curso-TCC. UFPA, 2021.
- [4] FALCONER, K. **Fractal Geometry - Mathematical Foundations and Applications**. Chichester, UK, 1990.
- [5] GONÇALVES, Diângelo. **Práticas Maker: seu manual de atividades inovadoras**. Dissertação de Mestrado. Profmat. Mestrado profissional em ensino de Ciências. UEGO. 2021. Disponível em <https://www.btdtd.ueg.br/bitstream/tede/799/3/PRODUTO%20EDUCACIONAL%20-%20PRA%CC%81TICA%20MAKER.pdf>. Acesso em 7 de fevereiro de 2024.
- [6] HATCH, Mark. **Manifesto Maker**. Disponível em <https://raumschiff.org/wp-content/uploads/2017/08/0071821139-Maker-Movement-Manifesto-Sample-Chapter.pdf>. Acesso em 19 de fevereiro de 2021.

- [7] KASS, Seymour. **A Tribute to Karl Menger**. Humanistic Mathematics Network Journal. Issue 16. Article 3. 1997. Disponível em <https://scholarship.claremont.edu/cgi/viewcontent.cgi?referer=&httpsredir=1&article=1224&context=hmj>. Acesso em 6 de fevereiro de 2024.
- bibitemlima LIMA, Hugo, MALDANER, Jair, RYTHOWEN, Marcelo e CAVALCANTE, Rivadávia. **O movimento Maker e a formação profissional no contexto da rede federal de educação tecnológica**. revista Humanidades & Inovação. vol 10, No 10, 2023. Disponível em <https://revista.unitins.br/index.php/humanidadeseinovacao/article/view/7968>. Acesso em 19 de fevereiro de 2021.
- [8] ROBERTSON, Edmund e O'CONNOR, John. **McTutor**. EUA. Março 2014. Disponível em <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/>. Acesso em 6 de fevereiro de 2024.
- [9] MANDELROT, Benoit B. | **Objectos Fractais**. Gradiva, 1a edição. 1991.
- [10] PELITGEN, Heinz-Otto, JURGENS, Hartmut and SAUPE, Dietmar. **Chaos and Fractals: New Frontiers of Science**. Springer-Verlag New York, Inc., 2004.
- [11] RANI, Mamta e KUMAR, Vinod. **New fractal carpets**. The Arabian Journal for Science and Engineering, Volume 29, Number 2C. 2004. Disponível em <https://www.yumpu.com/en/document/view/18729796/new-fractal-carpets-arabian-journal-for-science-and-engineering>. Acesso em 7 de fevereiro de 2024.
- [12] SAGAN, Hans. **Space-Filling Curves**. Springer-Verlag. 1994.
- [13] SILVA, Marcus V. O. da. **Geometria Fractal e Atividades para o ensino da matemática: degraus fractais e esponja de Menger**. Dissertação de

Mestrado. Mestrado profissional em ensino de matemática - Profmat. UFBA. 2020. Disponível em <https://repositorio.ufba.br/handle/ri/33387>. Acesso em 6 de fevereiro de 2024.

- [14] SIQUEIRA, Ruan. **Tutorial para o Geogebra**. UFF. 2017. Disponível em https://www.telecom.uff.br/pet/petws/downloads/tutoriais/geogebra/Tutorial_GeoGebra.pdf. Acesso em fevereiro de 2024.
- [15] DA SILVA, Michele, DE OLIVEIRA, Guilherme e DA SILVA, Glênio **A pesquisa bibliográfica no estudos científicos de natureza qualitativa**. Revista Prisma v. 2, n. 1, p. 91-109, 2021. Disponível em <https://revistaprisma.emnuvens.com.br/prisma/article/view/45/37>. Acesso em 19 de fevereiro de 2021.
- [16] DE SOUSA, Angélica, DE OLIVEIRA, Guilherme e ALVES, Laís **A pesquisa bibliográfica: princípios e fundamentos**. Cadernos da Fucamp, v.20, n.43, p.64-83/2021. Disponível em <https://revistas.fucamp.edu.br/index.php/cadernos/article/view/2336>. Acesso em 19 de fevereiro de 2021.