



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

EDIVAN DA SILVA RIBEIRO

MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

BELÉM
2023



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

EDIVAN DA SILVA RIBEIRO

MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Trabalho de conclusão de curso apresentado para obtenção do título de Licenciado em Matemática da Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof. Dr. Juaci Picanço da Silva.

BELÉM
2023

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

EDIVAN DA SILVA RIBEIRO

MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática da Universidade Federal do Pará, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Juaci Picanço da Silva

Departamento de Matemática, UFPA - Orientador

Prof. Dr. Jean Carlos de Aguiar Lelis

Departamento de Matemática, UFPA - Membro

Prof. Dr. Rogelio Daniel Benavides Guzman

Departamento de Matemática, UFPA - Membro

DATA DA AVALIAÇÃO: ____/____/____

CONCEITO: _____

Aos Meus Pais, à minha noiva e
aos meus irmãos pelo apoio de
cada dia.

EM MEMÓRIA DE ALAN FELIPE, MEU PRIMO, AMIGO E IRMÃO. † 28/01/2023 †.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a Deus, que me concedeu o dom de aprender, analisar e concluir, além de me dá saúde para poder vencer a pior pandemia do século.

À minha família, principalmente aos meus pais, Edmilson Ribeiro e Marlucci da Silva, minha noiva, Aline Tavares, meus irmãos, Shirley Ribeiro e Edson Ribeiro, aos meu sobrinhos (que são os amores da minha vida) Alessandro Ribeiro, Bruna Ribeiro e Samuel Ribeiro.

À Universidade Federal do Pará, que me acolheu e proporcionou o meu desenvolvimento intelectual e pessoal.

Aos meus professores pelo empenho na difícil arte de ensinar. Em especial ao meu orientador, Prof. Juaci Picanço da Silva, pelo esforço durante a elaboração trabalho, a profa. Dra. Rubia do Nascimento que me deu a oportunidade de fazer iniciação científica. E a equipe do projeto Newton pela oportunidade de aprendizagem.

Aos irmãos que a vida me deu: Jefferson Barbosa, Guido Guedes e Letícia Ferreira.

Aos meus colegas de graduação pelo companheirismo ao longo do curso, especialmente, ao Ricardo Augusto e a Paula Rocha, pela amizade que levarei por toda a vida.

”O homem não é nada além daquilo que a educação faz dele.”

Immanuel Kant.

RESUMO

Este trabalho apresenta um dos resultados mais importantes no que diz respeito ao estudo do Cálculo Diferencial de Funções de Duas Variáveis Reais. Dessa forma, é apresentada uma demonstração simples e didática do Teorema do teste da segunda derivada de funções de duas variáveis reais, a qual dá condições suficientes para que um ponto crítico seja máximo local, mínimo local ou ponto de sela. Além disso, o trabalho apresenta diversos resultados sobre tópicos que são estudados no Cálculo de Funções de Várias Variáveis Reais a Valores Reais, tais como derivadas parciais, funções diferenciáveis, função hessiana, dentre outras.

Palavras-Chave: Máximo Local, Mínimo Local, Ponto de Sela, Ponto Crítico, Cálculo Diferencial.

ABSTRACT

This work presents one of the most important results regarding the study of Differential Calculus of Functions of two Real Variables. Thus, a simple and didactic demonstration of the second derivative test theorem of functions of two real variables is presented, which provides sufficient conditions for an critical point to be local maximum, local minimum or saddle point. In addition, the work shows several results on Calculus topics of Functions of Several Real Variables at Real Values, such as partial derivatives, differentiable functions, hessian function among others.

Keywords: Local Maximum, Local Minimum, Saddle Point, Critical Point, Differential Calculus.

Sumário

Introdução	3
1 Máximos e mínimos de funções de uma variável	4
1.1 Teorema do valor médio	4
1.2 Intervalos de crescimento e de decrescimento	7
1.2.1 Critério da derivada para crescimento e decrescimento	7
1.3 Concavidade	8
1.4 Máximos e mínimos	10
1.4.1 Condições necessárias e condições suficientes para máximos e mínimos locais	10
2 Derivadas parciais e derivadas parciais de ordens superiores	13
2.1 Derivadas Parciais	13
2.2 Gradiente da função	14
2.3 Derivadas parciais de ordens superiores	15
3 Funções diferenciáveis	17
3.1 Funções diferenciáveis de duas variáveis	18
3.2 Condição suficiente para diferenciabilidade	23
3.3 Plano tangente	23
3.4 Regra da cadeia	25
3.5 Derivada direcional	25

4	Máximos e mínimos de funções de duas variáveis	28
4.1	Pontos de máximo e pontos de mínimo	28
4.2	Condições necessárias para que um ponto interior ao domínio de f seja um extremante local de f	34
4.3	Uma condição para um ponto crítico ser extremante local	36
4.4	Condições suficientes para que extremantes sejam pontos de mínimo local, máximo local ou ponto de sela	37
5	Considerações finais	47
	Bibliografia	48

Introdução

A busca pela compreensão de como o conhecimento matemático se desenvolveu e se institucionalizou em diferentes épocas e locais é um dos objetivos ao se estudar problemas e fatos que geraram conceitos e teorias que são estudados nos dias atuais. Nesse sentido, em relação ao Cálculo Diferencial, os livros didáticos, em sua maioria, atribuem a sua criação a Isaac Newton (1643-1727) e a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Porém, segundo Courant e Robbins (2000, p. 453), "o Cálculo é produto de uma longa evolução que não foi iniciada nem concluída por Newton e Leibniz". Muitos outros matemáticos contribuíram de maneira decisiva para que se formulasse um conjunto compreensivo de teorias e regras para a solução de diversos problemas (BARON; BOS, 1985). Desse modo, Newton e Leibniz demonstraram que os dois problemas centrais estudados no século XVII, o das tangentes - problema fundamental do Cálculo Diferencial e o das quadraturas - problema fundamental do Cálculo Integral, apresentavam entre si uma relação inversa, que constitui o teorema fundamental do Cálculo e, por isso, a invenção do Cálculo é, tradicionalmente, atribuída a ambos. Muitos destes problemas foram estudados separadamente, durante séculos, por diferentes cientistas que passaram por várias tentativas de soluções.

Por conseguinte, "a determinação de valores extremos foi reconhecida como uma aplicação útil e importante" (BARON; BOS, 1985, p. 3). Assim, para encontrar máximos e mínimos, Pierre de Fermat (1607-1665) desenvolveu um método em que encontrava geometricamente os pontos onde a reta tangente ao gráfico tinha inclinação nula, método este, utilizado ainda hoje. Dessa maneira, suas ideias constituíram o embrião do conceito de derivada, o qual só foi estabelecido, mais tarde, por Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) em seu livro *Résumé des leçons données a l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal*, publicado em 1823 (BARON; BOS, 1985).

Então, a técnica da determinação de valores extremos foi formulada por volta de 1690 e apresentada no primeiro livro didático sobre o Cálculo Diferencial, *Analyse*, de Marquês de L'Hôpital (1661-1704). Conforme L'Hôpital, em um valor máximo ou mínimo, "se certas quantidades mudam continuamente de positivo para negativo, elas devem passar por zero ou por infinito" (BARON; BOS, 1985, p. 5). Este argumento diz respeito aos casos que são tratados na linguagem moderna, considerando-se pontos nos quais a derivada é zero ou a função não é diferenciável.

À vista disso, atualmente, os problemas de máximos e mínimos aparecem em diferentes contextos e, em geral, associados à análise do comportamento do gráfico de uma função e a problemas de otimização em que se busca maximizar ou minimizar uma função em um determinado domínio. Destarte, a compreensão dos conceitos envolvidos na solução destes problemas é imprescindível aos estudantes de diferentes áreas de conhecimento, especialmente das ciências naturais, exatas e tecnológicas, entre outras, em que as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral estão presentes. Além do mais, a compreensão das ideias que contribuíram para a evolução de conceitos chaves do Cálculo é essencial na formação de futuros professores de matemática que irão atuar no ensino superior.

Nesse sentido, o nosso trabalho parte do pressuposto que nos cursos de cálculo de múltiplas variáveis, para todas as áreas de exatas, em nível superior, sempre é apresentado o teorema que qualifica se um ponto crítico de uma função de duas variáveis reais a valores reais é ponto de mínimo local ou ponto de máximo local ou, ainda, se é ponto de sela, contudo, poucas vezes é demonstrado esse teorema. Assim, apresentamos, no nosso trabalho, uma demonstração simples e didática desse teorema com a finalidade de proporcionar uma melhor compreensão dessa parte do Cálculo de múltiplas variáveis.

Diante disso, o trabalho tem como objetivo demonstrar o Teorema do teste da segunda derivada para funções de duas variáveis reais a valores reais. E além disso, tem como objetivos específicos a exposição de conteúdos de Cálculo de várias variáveis, com ênfase em máximos e mínimos, gráficos de funções de duas variáveis, bem como a função hessiano (usando o software CAS Maple). Ademais, apresentar de forma apropriada o uso das tecnologias no ensino de Cálculo como aspecto didático eficiente.

Utilizamos dados de bibliografias na área de Cálculo, a qual foi de caráter exploratório e deu-se em consonância à fundamentação teórica de livros dos autores Hamilton Guidorizzi e James Stewart, os quais foram a base para o meu trabalho, bem como as notas de aula do meu orientador, Prof. Juaci Picanço da Silva. Além disso, serviram como bases complementares os livros de Análise Real do autor Elon Lages Lima e o livro de História do Cálculo de Carl Boyer, o livro "O que é a Matemática?" do autor Richard Courant, além das biografias de Margaret Baron e Henk Bos, assim como a tese de doutorado da pesquisadora Adriana Richit.

Assim, a pesquisa será realizada com base em dados de bibliografias na área da Matemática Pura, como livros, resenhas, artigos, monografias, dissertações e teses. Nesse sentido, será uma pesquisa teórica, sobre máximos e mínimos tanto para função de uma variável, como para funções de várias variáveis.

O trabalho foi então dividido da seguinte forma: na primeira seção apresentamos uma revisão de resultados sobre máximos e mínimos de funções de uma variável real, os quais serão usados na demonstração do teorema principal do trabalho. Na segunda seção são apresentados os seguintes tópicos: derivadas parciais, gradiente da função e regra da cadeia. Na terceira seção temos as definições de funções diferenciáveis, bem como os teoremas que

dão condições suficientes e necessárias para que haja diferenciabilidade, plano tangente e derivada direcional. Na quarta seção apresentamos a demonstração do teorema principal do trabalho, no qual são vistas as definições de extremantes globais e locais, pontos críticos e função hessiana. Por fim, na quinta seção, fazemos as considerações finais do trabalho.

Capítulo 1

Máximos e mínimos de funções de uma variável

Neste capítulo, assim como nos demais, alguns resultados são apresentados sem a demonstração. A prova de tais resultados pode ser encontrada em [5].

Para iniciarmos nossa revisão iremos mostrar alguns teoremas importantes para a determinação de extremantes no cálculo de funções de uma variável. Começamos com o teorema do valor médio.

1.1 Teorema do valor médio

O teorema do valor médio, que apresentamos abaixo, é utilizado na demonstração de muitos resultados do Cálculo Diferencial e Integral. Aqui, o utilizaremos na determinação dos extremantes de uma função.

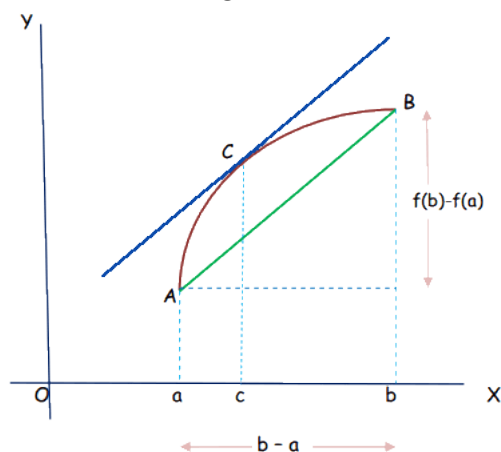
Teorema 1.1 (Teorema do Valor médio). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz as seguintes hipóteses:*

- (a) *f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$;*
- (b) *f é derivável no intervalo aberto $]a, b[$.*

Então, existe um número c em $]a, b[$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Figura 1.1:



Fonte: Elaborada pelo autor.

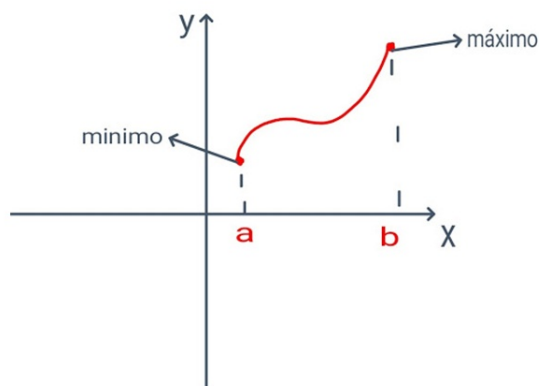
Para fazer a demonstração deste teorema, vamos usar o resultado dos seguintes teoremas: teorema de Weierstrass, teorema de Fermat, teorema de Rolle.

Teorema 1.2 (Teorema de Weierstrass). *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$, existem $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2),$$

para todo $x \in [a, b]$.

Figura 1.2:



Fonte: Elaborada pelo autor.

Esse teorema nos diz que toda função contínua f , definida em um intervalo fechado e limitado $[a, b]$, assume pelo menos um valor mínimo ($f(x_1)$) e pelo menos um valor máximo ($f(x_2)$), como ilustramos na Figura 2.2.

Teorema 1.3 (Teorema de Fermat). *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tiver um máximo ou mínimo local em $c \in]a, b[$ e $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.*

Teorema 1.4 (Teorema de Rolle). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:*

- (a) *f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$;*
- (b) *f é derivável no intervalo aberto $]a, b[$;*
- (c) *$f(a) = f(b)$.*

Então, existe um número c em $]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração.

Se f for a função constante, isto é, $f(x) = k$, para todo $x \in [a, b]$, com k constante, então $f'(x) = 0$, e assim existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Suponhamos então que f não é constante no intervalo $[a, b]$, e f sendo contínua em $[a, b]$, existem x_1 e $x_2 \in [a, b]$ tais que:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2);$$

para todo $x \in [a, b]$.

Sendo $f(x_1) \neq f(x_2)$ (pois f não é constante), temos em particular que x_1 (ou x_2) pertence ao intervalo $]a, b[$, já que pela hipótese $f(a) = f(b)$.

Então $f'(x_1) = 0$ ou $f'(x_2) = 0$, logo, em qualquer caso existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

□

Façamos agora a demonstração do teorema do valor médio, consideremos primeiramente, a reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, isto é:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Essa reta é o gráfico da função

$$T(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Seja g a função que é a diferença entre f e T , isto é $g(x) = f(x) - T(x)$. Assim,

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right].$$

Então, quando $x = a$, temos:

$$g(a) = f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} (a - a) + f(a) \right] = 0.$$

E quando $x = b$, temos:

$$g(b) = f(b) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} (b - a) + f(a) \right] = 0.$$

Além disso, como g é a diferença entre duas funções contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em $]a, b[$, ela própria é contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Logo podemos usar o Teorema de Rolle (Teorema 1.4) para g , concluindo que existe um número c no intervalo $]a, b[$, tal que

$$g'(c) = 0$$

e como, $g'(x) = f'(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right]$, temos $g'(c) = f'(c) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right]$. Assim, $0 = f'(c) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right]$. De onde segue que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Portanto,

$$f'(c)(b - a) = f(b) - f(a).$$

O que conclui a demonstração do teorema do valor médio.

1.2 Intervalos de crescimento e de decrescimento

Agora vejamos alguns resultados sobre crescimento e decrescimento de funções, além de revisarmos alguns teoremas que serão importantes para a demonstração do teorema principal do nosso trabalho.

1.2.1 Critério da derivada para crescimento e decrescimento

Como consequência do teorema do valor médio temos o seguinte teorema.

Teorema 1.5 (Teste da derivada primeira). *Seja f definida em um intervalo I .*

- (a) *Se $f'(x) > 0$ para todo x interior a I , então f será estritamente crescente em I .*
- (b) *Se $f'(x) < 0$ para todo x interior a I , então f será estritamente decrescente em I .*

Demonstração.

Para mostrar a parte (a) precisamos provar que, quaisquer que sejam s e t em I , $s < t$ implica que $f(s) < f(t)$. Sejam, então, s e t em I , com $s < t$. Da hipótese, segue que f é contínua em $[s, t]$ e derivável em $]s, t[$. Então, pelo teorema do valor médio, existe $\bar{x} \in]s, t[$, tal que

$$f(t) - f(s) = f'(\bar{x})(s - t)$$

Como, por hipótese, $f'(\bar{x}) > 0$ e $s - t > 0$, temos que $f'(\bar{x})(s - t) > 0$. Logo, $f(t) - f(s) > 0$, ou seja $f(t) > f(s)$. O que conclui a demonstração da parte (a) do teorema. A demonstração da parte (b) é análoga.

□

1.3 Concavidade

Nesta seção estudaremos a concavidade de funções de uma variável. O conceito e os resultados sobre esse tema serão cruciais para o estudo dos extremantes de uma função de duas variáveis.

Seja f uma função derivável no intervalo aberto I e seja p um ponto de I . A equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ é dada por

$$y = f(p) + f'(p)(x - p).$$

Deste modo, essa reta tangente é o gráfico da função T dada por

$$T(x) = f(p) + f'(p)(x - p).$$

Definição 1.1. Dizemos que f tem a concavidade para cima no intervalo aberto I se

$$f(x) > T(x),$$

quaisquer que sejam x e p em I , com $x \neq p$.

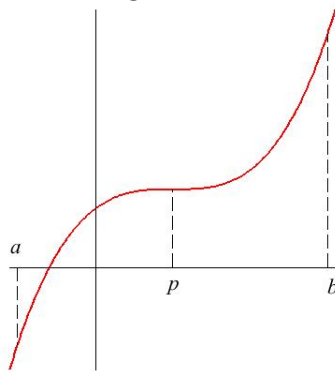
Dizemos que f tem a concavidade para baixo no intervalo aberto I se

$$f(x) < T(x)$$

quaisquer que sejam x e p em I , com $x \neq p$.

Chamamos de *ponto de inflexão* de uma função f a um ponto do domínio de f no qual ocorre uma mudança de concavidade de f , mais precisamente, temos a seguinte definição.

Figura 1.3:



Definição 1.2. *Sejam f uma função e $p \in D_f$, com f contínua em p . Dizemos que p é ponto de inflexão de f se existirem números reais a e b , com $p \in]a, b[\subset D_f$, tal que f tenha concavidades de nomes contrários em $]a, p[$ e em $]p, b[$.*

Na figura 1.3 temos o gráfico de uma função, que no intervalo $]a, p[$ tem concavidade para baixo e no intervalo $]p, b[$ tem concavidade para cima.

O seguinte teorema, cuja a demonstração pode ser encontrada em [5], utiliza a segunda derivada da função para nos fornecer uma condição suficiente para que a função tenha determinada concavidade em um intervalo.

Teorema 1.6. *Seja f uma função que admite derivada até a 2ª ordem no intervalo aberto I .*

- (a) *Se $f''(x) > 0$ em I , então f terá a concavidade para cima em I .*
- (b) *Se $f''(x) < 0$ em I , então f terá a concavidade para baixo em I .*

1.4 Máximos e mínimos

Apresentaremos agora os conceitos de ponto de máximo de de mínimo locais para uma função de uma variável. Tais conceitos serão posteriormente generalizados para funções de duas variáveis e o estudo destes é o principal objetivo deste trabalho.

Definição 1.3. *Sejam f uma função e p um ponto do domínio D_f da função f . O ponto p é chamado de ponto de máximo local de f se existir $r > 0$ tal que*

$$f(x) \leq f(p),$$

para todo x pertencente a $]p - r, p + r[\cap D_f$. O ponto p é chamado de ponto de mínimo local de f se existir $r > 0$ tal que

$$f(p) \leq f(x),$$

para todo x pertencente a $]p - r, p + r[\cap D_f$.

1.4.1 Condições necessárias e condições suficientes para máximos e mínimos locais

Dizemos que um ponto p é *ponto interior* de um subconjunto A de $\mathbb{R}$ se existir um intervalo aberto I tal que $p \in I$ e $I \subset A$.

O teorema a seguir que nos dá condições necessárias para que um ponto p , que é interior do domínio de uma função f , seja ponto de máximo ou de mínimo local de f .

Teorema 1.7. *Seja f uma função derivável em p , em que p é um ponto interior de D_f . Uma condição necessária para que p seja ponto de máximo ou de mínimo local é que $f'(p) = 0$.*

Demonstração.

Suponhamos que p seja ponto de máximo local (procedemos de maneira análoga para o caso em que p é um ponto de mínimo). Assim, existe $r > 0$ tal que

$$f(x) \leq f(p) \text{ em }]p - r, p + r[\cap D_f.$$

Como, por hipótese, p é interior a D_f , podemos escolher r de modo que $]p - r, p + r[\subset D_f$. Logo

$$f(x) \leq f(p) \text{ para todo } x \text{ em }]p - r, p + r[.$$

Como f é derivável em p , os limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \text{ e } \lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

existem e são iguais a $f'(p)$, ou seja,

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Para $p < x < p + r$ temos que $\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \leq 0$, logo, pela conservação do sinal,

$$\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \leq 0.$$

Portanto, $f'(p) \leq 0$. Para $p - r < x < p$ temos que $\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \geq 0$. Segue daí que

$$\lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \geq 0.$$

Logo, $f'(p) \geq 0$. Como $f'(p) \geq 0$ e $f'(p) \leq 0$ resulta $f'(p) = 0$.

□

Um ponto p do domínio de uma função f é chamado de *ponto crítico* de f se $f'(p) = 0$. Assim, se p for interior a D_f e f for derivável em p , então, uma condição necessária para que p seja ponto de máximo ou de mínimo local de f , é que p seja ponto crítico de f .

Com o objetivo de termos um método para encontrar os pontos de máximo e os pontos de mínimo local de f , vamos agora estabelecer condições suficientes para que um ponto p seja ponto de máximo local ou mínimo local.

Teorema 1.8. *Sejam f uma função que admite derivada de 2ª ordem contínua no intervalo aberto I e $p \in I$.*

(a) *Se $f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0$, então p é ponto de mínimo local.*

(b) Se $f'(p) = 0$ e $f''(p) < 0$, então é ponto de máximo local.

Demonstração.

Provemos a parte (a). Como f'' é contínua em I e $f''(p) > 0$, pelo teorema da conservação do sinal, existe $r > 0$ tal que

$$f''(x) > 0 \text{ em }]p - r, p + r[.$$

Segue que f' é estritamente crescente neste intervalo. Como $f'(p) = 0$, resulta que $f'(x) < 0$ em $]p - r, p[$ e $f'(x) > 0$ em $]p, p + r[$. Logo f é estritamente decrescente em $]p - r, p[$ e estritamente crescente em $]p, p + r[$. Portanto, p é ponto de mínimo local de f .

A parte (b) é demonstrada de maneira análoga.

□

Capítulo 2

Derivadas parciais e derivadas parciais de ordens superiores

A partir deste capítulo passaremos a considerar funções de várias variáveis reais a valores reais. Mesmo quando, sobre uma dada função isso não for dito por completo, ela será assim considerada. Começaremos a revisar alguns conceitos e resultados sobre tais funções. Daremos enfoque às funções de duas variáveis, pois nosso objetivo é o estudo de máximos e mínimos dessas funções. Iniciaremos com as noções derivadas parciais.

2.1 Derivadas Parciais

Quando temos uma função $f(x, y)$ e um ponto (a, b) do domínio de f , podemos, na expressão de f , fixar uma das variáveis. Por exemplo, podemos fazer $y = b$ para obtermos a função de uma variável $f(x, b)$. É possível então para a função $f(x, b)$ aplicar todo o conhecimento que temos a respeito de funções de uma variável. Essa é a idéia que está por trás da noção de derivadas parciais de funções de duas variáveis apresentada a seguir.

Definição 2.1. *Seja $f(x, y)$ uma função de duas variáveis reais a valores reais e $(a, b) \in D_f$. Consideremos a função G de uma variável dada por $G(x) = f(x, b)$. A derivada da função G em a , quando existe, é chamada de derivada parcial de f , em relação a x no ponto (a, b) e é denotada por $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$.*

Temos então que $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = G'(a)$. Logo $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{G(x) - G(a)}{x - a}$. De onde segue que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}.$$

Como também temos que $G'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(a+h) - G(a)}{h}$. Segue que a derivada parcial de f em relação a x em (a, b) pode também ser dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}.$$

Do mesmo modo definimos a derivada parcial de $f(x, y)$ em relação a y no ponto (a, b) .

Definição 2.2. *Seja $f(x, y)$ uma função de duas variáveis reais a valores reais e $(a, b) \in D_f$. Consideremos a função H de uma variável dada por $H(y) = f(a, y)$. A derivada da função H em b , quando existe, é chamada de derivada parcial de f , em relação a y no ponto (a, b) e é denotada por $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.*

Assim sendo, $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = H'(b)$. Logo $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{H(y) - H(b)}{y - b}$. Logo

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}.$$

Visto que $H'(b)$ também é dada pela fórmula $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{H(b+h) - H(b)}{h}$. Temos que a derivada parcial de f em relação a y no ponto (a, b) também é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}.$$

2.2 Gradiente da função

Definição 2.3. *Sejam $f(x, y)$ uma função de duas variáveis e (a, b) um ponto no domínio de f . Se as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ existem, definimos o gradiente de f no ponto (a, b) , denotado por $\nabla f(a, b)$, como sendo o vetor bidimensional dado por*

$$\nabla f(a, b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right). \quad (2.1)$$

Usaremos esta definição mais adiante para detectar pontos críticos.

2.3 Derivadas parciais de ordens superiores

Seja $f(x, y)$ uma função de duas variáveis. As suas derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y),$$

calculadas em um ponto genérico (x, y) , são também funções de duas variáveis e, portanto, podemos calcular as derivadas parciais dessas funções. Se essas derivadas existem, elas são chamadas *derivadas parciais de segunda ordem de f* .

Tomando a função $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e derivando-a em relação a cada uma das variáveis x e y temos:

(i) a derivada de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ em relação à variável x é denotada por $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$. Assim

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

(ii) a derivada de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ em relação à variável y é denotada por $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Assim

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

Considerando agora a função $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Temos que

(iii) a derivada de $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ em relação à variável y é denotada por $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$. Assim

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right). \quad (2.2)$$

(iv) a derivada de $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ em relação à variável x é denotada por $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Assim

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right). \quad (2.3)$$

As derivadas dadas nos itens (ii) e (iv) são chamadas de *derivadas parciais mistas*.

Dados um ponto p do $\mathbb{R}^n$ e um número inteiro positivo r , a *bola aberta* de centro em p e raio r é o conjunto dos pontos do $\mathbb{R}^n$ cuja distância a p é menor que r , ou seja, é o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n ; \|x - p\| < r\}$. Sejam agora A um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ e $p \in A$. Dizemos que p é um *ponto interior* de A se existir uma bola aberta de centro em p e contida em A . O conjunto dos pontos interiores de A é denotado por $\mathring{A}$. Um subconjunto A do $\mathbb{R}^n$ é chamado de *conjunto aberto* se para todo $p \in A$, existir uma bola aberta de centro em p e contida em A . Em outras palavras, um subconjunto A do $\mathbb{R}^n$ é aberto se todos os seus pontos são pontos interiores, ou ainda, se $A = \mathring{A}$.

Teorema 2.1 (de Schwarz). *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, com A aberto. Se f tem todas as derivadas parciais de segunda ordem e essas são funções contínuas em A , então*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$$

para todo $(x, y) \in A$.

Capítulo 3

Funções diferenciáveis

Antes de definirmos a diferenciabilidade de funções com mais de uma variável, vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 3.1. Consideremos a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Calculemos $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$. Temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x \cdot 0}{x^2 + 0} - 0}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Analogamente, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Portanto, as derivadas parciais de $f(x, y)$ em $(0, 0)$ existem e ambas são iguais a zero.

Calculamos agora o limite $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$. Temos que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Consideremos as curvas $\alpha(t) = (t, 0)$ e $\gamma(t) = (t, t)$, temos que $\alpha(0) = (0, 0)$ e $\gamma(0) = (0, 0)$ e que

$$f(\alpha(t)) = f(t, 0) = \frac{t \cdot 0}{t^2 + 0} = \frac{0}{t^2} = 0,$$

$$f(\gamma(t)) = f(t, t) = \frac{t \cdot t}{t^2 + t^2} = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}.$$

Dessa maneira, concluímos que $\lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha(t)) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = \frac{1}{2}$. Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha(t)) \neq \lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)).$$

De onde segue que o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ não existe. Concluímos que a função $f(x, y)$ não é contínua em $(0, 0)$.

Assim, quando existem as derivadas parciais de $f(x, y)$ em (x_0, y_0) não implica que f é contínua em (x_0, y_0) . Entretanto, para funções de uma variável real sabemos que, quando $f(x)$ tem derivada em x_0 , isso implica que $f(x)$ é contínua em x_0 . Desse jeito, observamos que derivadas parciais não é uma boa generalização do conceito de diferenciabilidade de função de uma variável real.

3.1 Funções diferenciáveis de duas variáveis

Queremos agora dar um conceito de diferenciabilidade para funções de várias variáveis reais que seja uma boa generalização da noção de diferenciabilidade para funções de uma variável.

No que segue, usaremos as seguintes propriedades de limite de funções de uma variável.

Proposição 3.1. *Seja $f(x)$ uma função definida em um intervalo ou em uma reunião de intervalos e x_0 um ponto do domínio de $f(x)$ ou extremidade de um dos intervalos que compõem D_f .*

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ se, e somente se, } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - L] = 0;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ se, e somente se, } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{|x|} = 0.$$

Uma função $f(x)$ de uma variável é diferenciável em um ponto x_0 do interior do seu domínio se existir o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Observemos que tal limite é justamente a derivada de $f(x)$ em x_0 , isto é,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Uma primeira tentativa para generalizar o conceito de diferenciabilidade para funções de duas variáveis seria dizer que $f(x, y)$ é diferenciável em $(x_0, y_0) \in \mathring{D}_f$ se existir o limite

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f((x_0, y_0) + (h, k)) - f(x_0, y_0)}{(h, k)}.$$

Mas esse limite não faz sentido porque não existe divisão por (h, k) .

Daremos então uma versão equivalente de diferenciabilidade para $f(x)$ que possa ser generalizada para $f(x, y)$. Desse modo, podemos dizer que $f(x)$ é diferenciável em x_0 se existir $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a.$$

Observemos que $a = f'(x_0)$. Assim, segue da parte (1) da proposição 3.1, que isso equivale a dizer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - a \right] = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{h} = 0$$

o que é, pela parte (2) da proposição 3.1, equivalente a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{|h|} = 0.$$

Assim, diremos que $f(x)$ é *diferenciável* em x_0 se existir uma constante a tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{|h|} = 0.$$

Essa noção pode ser estendida para funções de duas variáveis da seguinte maneira.

Definição 3.1. Uma função $f(x, y)$ é diferenciável em $(x_0, y_0) \in \mathring{D}_f$ se existirem duas constantes a e b tais que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f((x_0, y_0) + (h, k)) - f(x_0, y_0) - ah - bk}{\|(h, k)\|} = 0.$$

Chamaremos de *função erro* da função f no ponto (x_0, y_0) e relativa às constantes a e b a função $E(h, k)$ dada por

$$E(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - [f(x_0, y_0) + ah + bk]$$

Assim, $f(x, y)$ é diferenciável em (x_0, y_0) se, e somente se,

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0. \quad (3.1)$$

Temos que (3.1) implica que $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} E(h, k) = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} E(h, k) &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} E(h, k) \cdot \frac{\|(h, k)\|}{\|(h, k)\|} \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} \cdot \sqrt{h^2 + k^2} \\ &= 0 \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $E(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - [f(x_0, y_0) + ah + bk]$ podemos entender o conceito da função erro em (h, k) como sendo o erro cometido ao aproximarmos $f(x_0 + h, y_0 + k)$ por $f(x_0, y_0) + ah + bk$. Portanto, se $f(x, y)$ é diferenciável em (x_0, y_0) , então

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \cong f(x_0, y_0) + ah + bk$$

em que o erro cometido nessa aproximação é $E(h, k)$ e tal erro é, tanto menor, quanto maior for a proximidade de $(x_0 + h, y_0 + k)$ e (x_0, y_0) , pois o

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} E(h, k) = 0.$$

Em vista disso, concluímos que se $f(x, y)$ é diferenciável em (x_0, y_0) , então o valor de f no entorno desse ponto pode ser aproximando por $f(x_0, y_0) + ah + bk$ e o erro cometido nessa aproximação tende a zero mais rápido que $\|(h, k)\|$, pois

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0.$$

Mostremos agora o resultado que esperávamos e que motivou a definição de diferenciabilidade de $f(x, y)$.

Proposição 3.2. *Se $f(x, y)$ é diferenciável em $(x_0, y_0) \in \mathring{D}_f$, então f é contínua em (x_0, y_0) .*

Demonstração.

Seja $f(x, y)$ diferenciável em (x_0, y_0) . Portanto, existem constantes a e b tais que se

$$E(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bk,$$

então

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0.$$

Temos que $f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + ah + bk + E(h, k)$. Logo

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(x_0 + h, y_0 + k) &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} [f(x_0, y_0) + ah + bk + E(h, k)] \\ &= f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Agora, façamos a seguinte mudança de variável nesse limite

$$\begin{cases} x = x_0 + h \\ y = y_0 + k \\ (h, k) \rightarrow (0, 0) \implies (x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \end{cases}$$

Assim,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Portanto, $f(x, y)$ é contínua em (x_0, y_0) .

□

Adiante daremos um contra-exemplo que mostrará que a recíproca da proposição anterior não é verdadeira.

Vejamos agora que se f é diferenciável em (x_0, y_0) , então $f(x, y)$ não é somente contínua nesse ponto, mas também possui as derivadas parciais em (x_0, y_0) .

Proposição 3.3. *Se f é diferenciável em $(x_0, y_0) \in \mathring{D}_f$, então existem as derivadas parciais de $f(x, y)$ em (x_0, y_0) .*

Demonstração.

Como $f(x, y)$ é diferenciável em (x_0, y_0) , existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bk}{\|(h, k)\|} = 0$$

Sejam

$$\begin{aligned} E(h, k) &= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bk, \\ G(h, k) &= \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|}. \end{aligned}$$

Temos que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} G(h,k) = 0. \quad (3.2)$$

Como (x_0, y_0) pertence ao interior de D_f , existe um intervalo aberto I contendo zero e tal que $(x_0 + t, y_0) \in D_f$, para todo $t \in I$. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t, 0)$. Segue de (3.2) que

$$\lim_{t \rightarrow 0} G(\alpha(t)) = 0.$$

Mas,

$$\begin{aligned} G(\alpha(t)) &= G(t, 0) \\ &= \frac{E(t, 0)}{\|(t, 0)\|} \\ &= \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0) - at}{\sqrt{t^2 + 0^2}} \\ &= \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0) - at}{|t|} \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0) - at}{|t|} = 0$. Segue daí e da parte (2) da proposição

3.1 que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0) - at}{t} = 0$, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} - a \right] = 0.$$

Agora, usando a parte (1) da proposição 3.1, obtemos $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = a$. Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = a.$$

O que prova a existência da derivada parcial em f em relação a x no ponto (x_0, y_0) . Mostra-se de maneira análoga que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = b$ e, assim, concluímos que a derivada parcial de f em relação a y no ponto (x_0, y_0) também existe.

□

Exemplo 3.2. Como pode ser facilmente verificado, a função, definida em todo o conjunto $\mathbb{R}^2$ por,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

é contínua em $(0,0)$, possui derivadas parciais em $(0,0)$, mas não é diferenciável em $(0,0)$. Assim sendo, essa função é um contra-exemplo para a recíproca tanto da proposição 3.2 quanto da proposição 3.3.

Mostramos que se uma função $f(x,y)$ é diferenciável em (x_0, y_0) , então f admite as derivadas parciais em (x_0, y_0) e tais derivadas parciais são justamente as constantes a e b que aparecem na função erro. Dessa forma, segue o seguinte corolário.

Corolário 3.1. *A função $f(x,y)$ é diferenciável em (x_0, y_0) se, e somente se, $f(x,y)$ tem derivadas parciais em (x_0, y_0) e $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$, em que*

$$E(h,k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k.$$

3.2 Condição suficiente para diferenciabilidade

O próximo teorema nos diz que a existência e continuidade das derivadas parciais de uma função f é uma condição suficiente para diferenciabilidade de f .

Teorema 3.1. *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, com A aberto e $(x_0, y_0) \in A$. Se as derivadas parciais de f existem em A e são contínuas em (x_0, y_0) , então f é diferenciável em (x_0, y_0) .*

Diremos que uma função $f(x,y)$ é diferenciável em $B \subset D_f$ se $f(x,y)$ é diferenciável em todos os pontos de B . Se $f(x,y)$ for diferenciável em D_f , diremos, simplesmente, que f é diferenciável.

Sejam $f(x,y)$ uma função e A um subconjunto aberto de D_f . Diremos que $f(x,y)$ é de classe C^1 em A se as derivadas parciais de f são contínuas em A . Nesse sentido, o seguinte corolário é uma consequência do teorema anterior.

Corolário 3.2. *Sejam $f(x,y)$ uma função e $A \subset D_f$, com A aberto. Se f é de classe C^1 em A , então f é diferenciável em A .*

3.3 Plano tangente

Sejam $f(x,y)$ uma função diferenciável em $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{D}_f$, I e J intervalos abertos com $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$ e tais que $(x, y_0), (x_0, y) \in D_f$, para quaisquer $x \in I$ e $y \in J$ e $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ curvas definidas por

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= (x, y_0, f(x, y_0)), \\ \gamma(y) &= (x_0, y, f(x_0, y)).\end{aligned}$$

A imagem de cada uma dessas curvas pertence ao gráfico de f . Logo $\alpha'(x_0)$ e $\gamma'(y_0)$ são vetores tangentes ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Temos que

$$\begin{aligned}\alpha'(x_0) &= \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right), \\ \beta'(y_0) &= \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right).\end{aligned}$$

O vetor $\vec{n} = \gamma'(y_0) \times \alpha'(x_0)$ é um vetor perpendicular a ambos os vetores $\gamma'(y_0)$ e $\alpha'(x_0)$. Temos que

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right).\end{aligned}$$

O plano que passa por $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e é perpendicular ao vetor $\vec{n}$ é chamado de *plano tangente* ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Podemos obter uma equação para esse plano observando que, se (x, y, z) é um ponto genérico desse plano, então o vetor $(x, y, z) - (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é perpendicular ao vetor $\vec{n}$. Portanto, o produto escalar desses vetores é nulo, ou seja,

$$(x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right) = 0.$$

Logo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - z + f(x_0, y_0) = 0.$$

Assim, a equação do plano tangente é dada por

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0). \quad (3.3)$$

Uma função que tem derivadas parciais em um ponto (x_0, y_0) , mas não é diferenciável nesse ponto, tem uma equação tal como (3.3), mas o plano descrito por essa equação não é geometricamente tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Conforme pode ser visto em [5], mostra-se que, por $f(x, y)$ ser diferenciável em (x_0, y_0) , o plano tangente ao gráfico de $f(x, y)$ no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ contém a reta tangente a qualquer curva nesse ponto, desde que a curva seja diferenciável e esteja contida no gráfico de f .

3.4 Regra da cadeia

O próximo teorema trata do cálculo da derivada de uma função de uma variável obtida pela composição de uma função de várias variáveis com uma curva.

Teorema 3.2. *Sejam $\alpha : D_\alpha \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, com $\text{Im}(\alpha) \subset D_f$. Se α é diferenciável em t_0 e f é diferenciável em $\alpha(t_0)$, então a composta $F(t) = f(\alpha(t))$ é diferenciável em t_0 e sua derivada é dada por*

$$F'(t_0) = \nabla f(\alpha(t_0)) \cdot \alpha'(t_0). \quad (3.4)$$

No caso em que $n = 2$ no enunciado do teorema anterior, temos $z = f(x, y)$ e $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Assim, se $F(t) = f(\alpha(t))$ a identidade (3.4) fica da seguinte forma

$$\frac{dz}{dt} = F'(t) = \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt},$$

com as derivadas parciais calculadas em $\alpha(t)$.

3.5 Derivada direcional

Primeiramente vamos considerar a definição de taxa média da variação de uma função. Dado um ponto $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e um vetor $\vec{u} = (a, b)$, sabemos que a equação vetorial da reta r que passa por P e tem $\vec{u}$ como vetor diretor é

$$r(t) = (x_0 + at, y_0 + bt).$$

Consideremos $z = f(x, y)$ uma função diferenciável, de modo que exista um intervalo $I = [-s, s]$ com $r(t) \in D_f$, para todo $t \in I$. Então, $f(r(t))$ representa a imagem dessa parte da reta $r(t)$ pela função f , sendo uma função somente da variável t . Denotaremos por $G(t)$ essa função, isto é, $G : [-s, s] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$G(t) = f(r(t)) = f(x_0 + at, y_0 + bt).$$

Se estamos interessados em analisar o comportamento da função f apenas para pontos do domínio de f que pertencem à reta $r(t)$, podemos usar a função $G(t)$, a qual é função de uma só variável.

Se há uma variação para pontos no domínio de f que estão sobre a reta, isto é, pontos na intersecção $D_f \cap r(t)$, com (x, y) passando do ponto $P = (x_0, y_0)$ para um ponto $Q = P + t\vec{u} = (x_0 + at, y_0 + bt)$, então z sofre uma variação correspondente por meio da função f , a qual também pode ser medida pela função G e é dada por

$$\Delta f = f(Q) - f(P) = f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0) = G(t) - G(0) = \Delta G.$$

A taxa média de variação de z entre os pontos P e Q é dada por

$$\frac{\Delta f}{\|\vec{PQ}\|} = \frac{\Delta f}{|t|\|\vec{u}\|} = \frac{\Delta G}{|t|\|\vec{u}\|}.$$

Se $\vec{u}$ é um vetor unitário, isto é, $\|\vec{u}\| = 1$, obtemos:

$$\frac{\Delta f}{\|\vec{PQ}\|} = \frac{\Delta G}{|t|}.$$

Portanto, se o vetor $\vec{u}$ é unitário, a taxa média de variação de f entre os pontos (x_0, y_0) e $(x_0 + at, y_0 + bt)$ coincide com a taxa média de variação de G no intervalo $[0, t]$. O limite dessa taxa média, quando $t \rightarrow 0$, que é $G'(0)$, é o que definimos como sendo a derivada direcional da função f , conforme definido abaixo.

Definição 3.2. *Sejam $f(x, y)$ uma função definida em um conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^2$. Chamamos de derivada direcional de f no ponto (x_0, y_0) e na direção do vetor unitário $\vec{u} = (a, b)$, denotada por $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$, ao limite*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t}$$

se esse limite existir.

A derivada direcional da f no ponto (x_0, y_0) e na direção do vetor unitário $\vec{u}$ é vista como sendo a taxa de variação instantânea da função f no ponto (x_0, y_0) e na direção e sentido do vetor $\vec{u}$.

Segunda a definição anterior, a função f não precisa ser diferenciável no ponto (x_0, y_0) para calcularmos a derivada direcional de f nesse ponto e na direção de um dado vetor unitário $\vec{u}$. Aliás, conforme é frisado na definição, a derivada direcional pode não existir em um determinado ponto e em uma dada direção. Mas, se f for diferenciável em (x_0, y_0) , então f tem derivada direcional nesse ponto e em todas as direções, além de haver uma fórmula mais simples que a da definição para o cálculo da derivada direcional. Isso é o que afirmo o próximo teorema.

Teorema 3.3. *Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto. Se f for diferenciável em $(x_0, y_0) \in A$, então f admite derivada direcional neste ponto e na direção de qualquer vetor unitário $\vec{u} = (a, b)$ e*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}. \quad (3.5)$$

Demonstração.

Sejam $\vec{u} = (a, b)$ um vetor unitário e $r(t) = (x_0 + at, y_0 + bt)$ a equação vetorial da reta que passa por (x_0, y_0) e tem a direção do vetor $\vec{u}$. Como visto acima, definindo

$$G(t) = f(r(t)) = f(x_0 + at, y_0 + bt).$$

Então

$$G'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(0+t) - G(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0).$$

Por outro lado, como $G(t) = f(r(t))$, então pela regra da cadeia, a derivada da composta $f(r(t))$ é dada por

$$G'(t) = \nabla f(r(t)) \cdot r'(t) = \nabla f(x_0 + at, y_0 + bt) \cdot (a, b).$$

Em particular para $t = 0$ temos

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = G'(0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (a, b).$$

□

De (3.5) segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) &= \nabla f(x_0, y_0) \cdot \langle a, b \rangle \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot b. \end{aligned}$$

Capítulo 4

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

Neste capítulo vamos inicialmente definir os diversos tipos de pontos de máximo e de mínimo de uma função de duas variáveis reais a valores reais. Dentre esses tipos de pontos de máximo e de mínimo, estaremos particularmente interessados nos pontos de máximo e mínimo locais. Para esse apresentaremos um método de como encontrá-los.

4.1 Pontos de máximo e pontos de mínimo

Sejam $f(x, y)$ uma função a valores reais, A um subconjunto do domínio de $f(x, y)$ e $(x_0, y_0) \in A$. Então dizemos que (x_0, y_0) é um *ponto de máximo* de $f(x, y)$ em A se

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \text{ para todo } (x, y) \in A.$$

Neste caso, dizemos que $f(x_0, y_0)$ é o *valor máximo* de f em A . Dizemos que (x_0, y_0) é um *ponto de mínimo* de $f(x, y)$ em A se

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y), \text{ para todo } (x, y) \in A.$$

Neste caso, dizemos que $f(x_0, y_0)$ é o *valor mínimo* de f em A .

Seja $f(x, y)$ uma função de duas variáveis e $(x_0, y_0) \in D_f$. Dizemos que (x_0, y_0) é um *ponto de máximo global* de $f(x, y)$ se

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \text{ para todo } (x, y) \in D_f.$$

Neste caso, dizemos que $f(x_0, y_0)$ é o *valor máximo* de f . Dizemos que (x_0, y_0) é um *ponto de mínimo global* de $f(x, y)$ se

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y), \text{ para todo } (x, y) \in D_f.$$

Neste caso, dizemos que $f(x_0, y_0)$ é o *valor mínimo* de f .

Dizemos que (x_0, y_0) é *ponto de máximo local* de f se existir uma bola aberta B de centro em (x_0, y_0) tal que $B \subset D_f$ e

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \text{ para todo } (x, y) \in B.$$

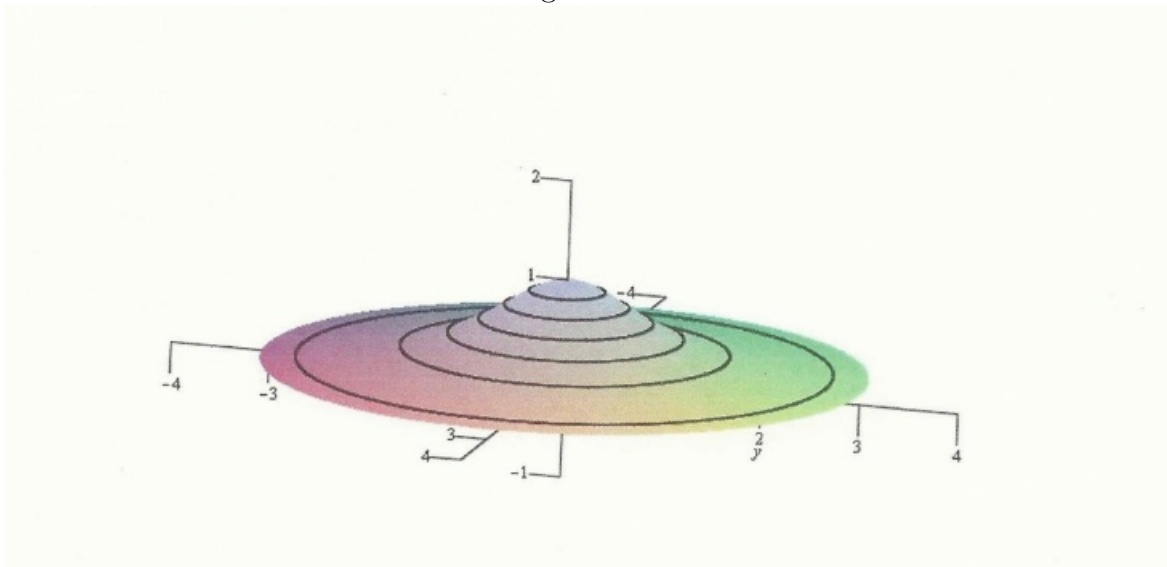
Dizemos que (x_0, y_0) é *ponto de mínimo local* de f se existir uma bola aberta $B \subset D_f$ tal que

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y), \text{ para todo } (x, y) \in B.$$

Os pontos de máximos e mínimos (globais ou locais) da função são chamados *extremos* ou *extremantes* da função.

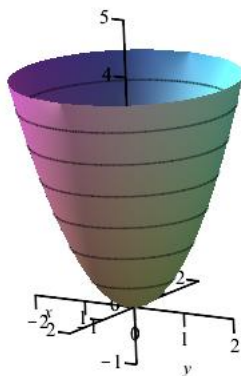
Exemplo 4.1. O ponto $(0, 0)$ é ponto de máximo global da função $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$. O valor máximo dessa função é igual a 1. Observemos no gráfico (4.1) que essa função não tem ponto de mínimo global.

Figura 4.1:



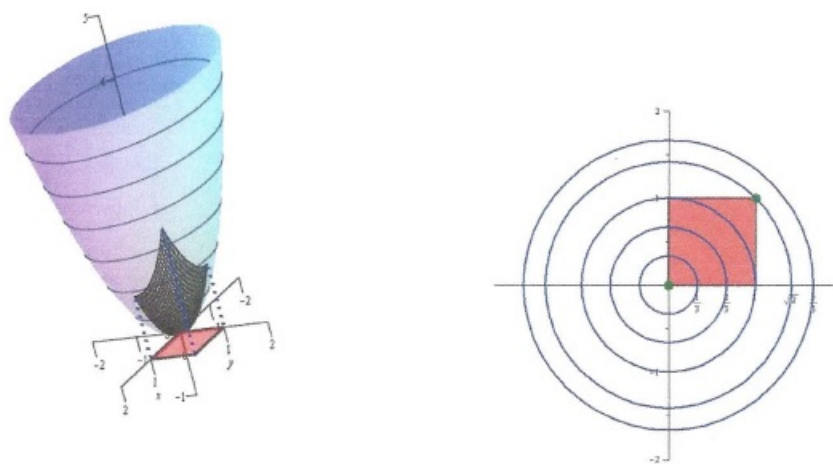
Exemplo 4.2. O ponto $(0, 0)$ é ponto de mínimo global da função $f(x, y) = x^2 + y^2$. O valor mínimo dessa função é 0. Observemos no gráfico (Figura 4.2) que essa função não tem ponto de máximo global.

Figura 4.2:



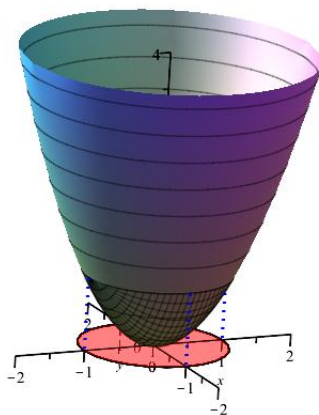
Exemplo 4.3. O ponto $(1, 1)$ é ponto de máximo da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ no quadrado $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$. O valor máximo de $f(x, y)$ em A é 2. O ponto $(0, 0)$ é ponto de mínimo de $f(x, y)$ em A e o valor mínimo de $f(x, y)$ em A é zero. (ver a Figura 4.3).

Figura 4.3:



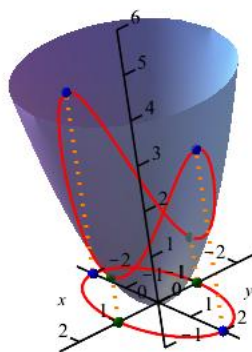
Exemplo 4.4. Todos os pontos da circunferência de centro na origem e raio 1 são pontos de máximo da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ no disco $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$. O valor máximo de $f(x, y)$ em A é 1. O ponto $(0, 0)$ é o ponto de mínimo de $f(x, y)$ em A e o valor mínimo de $f(x, y)$ em A é zero.

Figura 4.4:



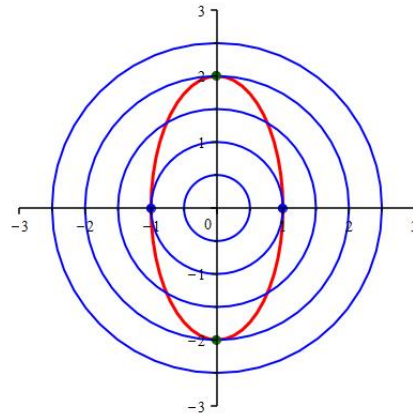
Exemplo 4.5. Os pontos de máximo e mínimo da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre a elipse $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\}$ são os pontos $(0, 2)$ e $(0, -2)$. Tais pontos correspondem aos pontos que estão mais acima da curva contida no gráfico de f (ver a Figura 4.5). O valor de máximo de f em A é, portanto, 4. Os pontos de mínimo de f em A são $(1, 0)$ e $(-1, 0)$. Esses pontos correspondem aos pontos que estão mais abaixo da curva contida no gráfico de f (ver a Figura 4.5). O valor de mínimo de f em A é 1.

Figura 4.5:



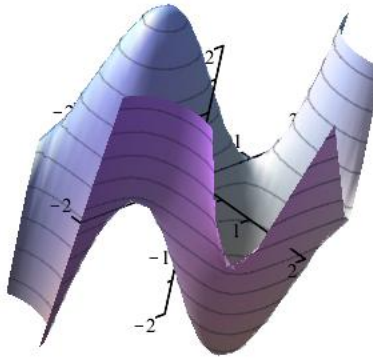
Observando as curvas de nível de f (veja a Figura 4.6) fica evidente que os pontos $(0, 2)$ e $(0, -2)$ da elipse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ são pontos de máximo de f em A e que os pontos $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ dessa elipse são pontos de mínimo de f em A . Pode-se observar também que a reta tangente à elipse no ponto $(0, 2)$ coincide com a reta tangente à curva de nível em f em $(0, 2)$. Acontece o mesmo com os demais extremantes de f em A .

Figura 4.6:



Exemplo 4.6. A função $f(x, y) = (-x^3 + 3x)(y^2 - 1)$ possui ponto de máximo local em $(-1, 0)$ (ver a Figura 4.7). Entretanto este ponto não é ponto de máximo global de f . Por sua vez, o ponto $(1, 0)$ é ponto de mínimo local e também este ponto não é ponto de mínimo global de f .

Figura 4.7:



4.2 Condições necessárias para que um ponto interior ao domínio de f seja um extremante local de f

Sejam $z = f(x, y)$ uma função e (x_0, y_0) um ponto interior de D_f . Suponhamos que (x_0, y_0) seja um extremante local de f e que f tenha derivadas parciais nesse ponto. Por exemplo, suponhamos que (x_0, y_0) seja um ponto de máximo local de f . Como $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{D}_f$, existe um intervalo aberto I , com $x_0 \in I$. Consideremos a função $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x, y_0)$. Observamos que $g'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Logo, g é derivável em x_0 . Como (x_0, y_0) é ponto de máximo local de $f(x, y)$, temos que x_0 é ponto de máximo de g . Logo, $g'(x_0) = 0$, assim $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$. Analogamente, mostra-se que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Dessa forma, temos o seguinte teorema.

Teorema 4.1. *Seja $z = f(x, y)$ uma função diferenciável em um conjunto aberto. Se um ponto (x_0, y_0) desse conjunto é um ponto extremante local (ponto de máximo ou de mínimo*

local), então $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Nas hipóteses desse teorema, o gradiente de f em (x_0, y_0) é o vetor nulo, ou seja, $\nabla f(x_0, y_0) = \langle 0, 0 \rangle$.

Como o plano tangente ao gráfico de $f(x, y)$ no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é dado por

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0).$$

Segue que se $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{D}_f$ é extremante local de f , então uma equação do plano tangente é dada por $z = f(x_0, y_0)$. Logo, tal plano tangente é paralelo ao plano xy . Se (x_0, y_0) é ponto de máximo local de $f(x, y)$, então o mencionado plano tangente, em uma vizinhança do ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ está acima do gráfico de $f(x, y)$. Mas, se (x_0, y_0) é ponto de mínimo local de $f(x, y)$, então, em uma vizinhança do ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, o plano tangente está abaixo do gráfico de $f(x, y)$.

O teorema anterior nos diz que, para encontrarmos os pontos interiores de D_f que são extremantes locais de f , devemos procurar dentre aqueles pontos (x_0, y_0) que satisfazem $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Definição 4.1. *Seja função $z = f(x, y)$ definida num conjunto aberto. Um ponto (x_0, y_0) desse conjunto é um ponto crítico de f se as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ são iguais a zero.*

Geometricamente, podemos pensar nos pontos críticos de uma função $z = f(x, y)$ como os pontos do domínio de f que correspondem a pontos do gráfico da função nos quais o plano tangente é horizontal.

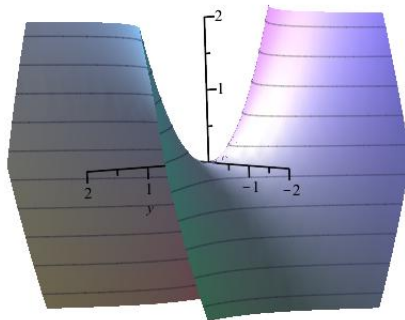
É importante lembrar que o fato de um ponto (x_0, y_0) ser um ponto crítico de f é uma condição necessária, mas não suficientes, para que (x_0, y_0) seja um extremante local, pois há casos nos quais um ponto crítico não é nem pontos de máximos local, nem pontos de mínimos local da função. Um tal ponto é recebe a denominação dada na seguinte definição.

Definição 4.2. *Um ponto crítico de uma função $f(x, y)$ que não ponto de máximo local e nem ponto de mínimo local de f é chamado de ponto de sela de f .*

Exemplo 4.7. O ponto $(0, 0)$ é ponto de sela da função $f(x, y) = y^2 - x^2$ (ver figura 4.8).

O gráfico de $f(x, y) = y^2 - x^2$ na vizinhança de $(0, 0, 0)$ tem o aspecto de uma sela de cavalo (veja a figura 4.8). Nesse sentido, esta aparência serve de inspiração para a definição supracitada.

Figura 4.8:



Se (x_0, y_0) é um ponto de sela de $f(x, y)$, então o plano tangente ao gráfico de $f(x, y)$ em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é paralelo ao plano xy , mas em toda a vizinhança de $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, há pontos do gráfico de $f(x, y)$ que estão acima do plano tangente e há pontos do gráfico de $f(x, y)$ que estão abaixo desse plano tangente.

4.3 Uma condição para um ponto crítico ser extremante local

Seja agora $f(x, y)$ uma função tal que D_f é aberto e seja (x_0, y_0) um ponto de máximo local de $f(x, y)$. Suponhamos que $f(x, y)$ seja de classe de C^2 e consideremos a função $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x, y_0)$, em que I é um intervalo aberto com $x_0 \in I$. Temos que

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \\ g''(x) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Sendo (x_0, y_0) um ponto de máximo local de $f(x, y)$, segue que x_0 é ponto de máximo local de g . Logo x_0 é um ponto crítico de g e, pelo teorema 1.8, não podemos ter $g''(x_0) > 0$, pois se assim fosse, x_0 seria ponto de mínimo local de g . Portanto, temos que

$$\begin{aligned} g'(x_0) &= 0, \\ g''(x_0) &\leq 0. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) &\leq 0.\end{aligned}$$

Se tivéssemos tomado a função $h(y) = f(x_0, y)$, teríamos concluído que

$$\begin{aligned}g'(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= 0, \\ g''(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) &\leq 0.\end{aligned}$$

Se (x_0, y_0) fosse ponto de mínimo local de $f(x, y)$, então teríamos obtido

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \geq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \geq 0.$$

Assim, temos o seguinte teorema.

Teorema 4.2. *Sejam $f(x, y)$ uma função de classe C^2 em um aberto A e $(x_0, y_0) \in A$.*

- (a) *Se (x_0, y_0) é um ponto de máximo local de $f(x, y)$, então (x_0, y_0) é um ponto crítico de $f(x, y)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leq 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0$.*
- (b) *Se (x_0, y_0) é um ponto de mínimo local de $f(x, y)$, então (x_0, y_0) é um ponto crítico de $f(x, y)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \geq 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \geq 0$.*

4.4 Condições suficientes para que extremantes sejam pontos de mínimo local, máximo local ou ponto de sela

Sejam $f(x, y)$ uma função de classe C^2 definida num aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ e (x_0, y_0) um ponto crítico de f . Nosso objetivo, agora, é estabelecer condições suficientes sobre as derivadas parciais de 2ª ordem de f para que (x_0, y_0) seja um ponto de máximo local f , um ponto de mínimo local de f ou um ponto de sela de f .

Sendo (x_0, y_0) um ponto crítico de f , sabemos que o plano tangente ao gráfico de f em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é paralelo ao plano xy . Para todo o vetor $\vec{v} = (h, k) \neq (0, 0)$, consideremos a função

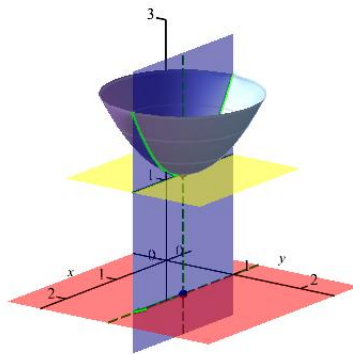
$$g_{\vec{v}}(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$$

Observemos que $g_{\vec{v}}(0) = f(x_0, y_0)$ (ver a figura 4.9) e que o gráfico da $g_{\vec{v}}$ pode ser visto como sendo a intersecção do gráfico de $f(x, y)$ com o plano perpendicular ao plano xy e que contém a reta

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, 0) + t(h, k, 0)$$

Figura 4.9:

$\theta = 6.2832$



Como $(x_0, y_0) \in A$ e A é aberto, a função $g_{\vec{v}}(t)$ está definida num intervalo I aberto com $0 \in I$. Além disso, $g_{\vec{v}}(t)$ possui derivadas até 2ª ordem contínuas em I , pois, pela regra da cadeia, temos

$$g'_{\vec{v}}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + th, y_0 + tk)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + th, y_0 + tk)k$$

e

$$g''_{\vec{v}}(t) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + th, y_0 + tk)h + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + th, y_0 + tk)k \right] h + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + th, y_0 + tk)h + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + th, y_0 + tk)k \right] k.$$

Usando o teorema de Schwars obtemos

$$g''_{\vec{v}}(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + th, y_0 + tk)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + th, y_0 + tk)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + th, y_0 + tk)k^2.$$

Como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ são contínuas e a curva $\alpha(t) = (x_0 + th, y_0 + tk)$ é contínua, temos que $g''_{\vec{v}}(t)$ é contínua em I . Assim, uma condição suficiente para que (x_0, y_0) seja um ponto de mínimo local de $f(x, y)$ é que $t = 0$ seja ponto de mínimo de $g_{\vec{v}}(t)$, para todo vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$. É uma condição suficiente para que isso aconteça é que

$$g'_{\vec{v}}(0) = 0 \text{ e } g''_{\vec{v}}(0) > 0, \text{ para todo } \vec{v} \neq \vec{0}.$$

Como (x_0, y_0) é ponto crítico de f e $g'_{\vec{v}}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$, temos que $g'_{\vec{v}}(0) = 0$. Portanto, apenas a condição

$$g''_{\vec{v}}(0) > 0, \text{ para todo } \vec{v} \neq \vec{0}$$

é suficiente para que o ponto crítico (x_0, y_0) seja ponto de mínimo local de f . Como $g''_{\vec{v}}$ é contínua, segue do teorema da conservação do sinal que existe um intervalo aberto J para o qual $g''_{\vec{v}}(t) > 0$, para todo $t \in J$. Logo a concavidade de $g''(t)$ é para cima, para todo o vetor não nulo $\vec{v}$ e, assim, o gráfico de $f(x, y)$ está acima do plano tangente a esse gráfico no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Portanto, (x_0, y_0) é ponto de mínimo local de f .

De modo análogo, uma condição suficiente para que (x_0, y_0) seja ponto de máximo local de f é que

$$g'_{\vec{v}}(0) = 0 \text{ e } g''_{\vec{v}}(0) < 0, \text{ para todo } \vec{v} \neq \vec{0}.$$

Nesse sentido, uma condição suficiente para que o ponto (x_0, y_0) seja um ponto de sela de f é que existam vetores não nulos $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ tais que

$$g''_{\vec{v}_1}(0) < 0 \text{ e } g''_{\vec{v}_2}(0) > 0,$$

pois assim $g_{\vec{v}_1}$ terá concavidade para baixo e $g_{\vec{v}_2}$ terá concavidade para cima, de modo que o gráfico de f , em toda vizinhança do ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, terá pontos acima e pontos abaixo do plano tangente a esse gráfico e, portanto, (x_0, y_0) não será ponto de máximo local de f nem ponto de mínimo local de f . Assim, temos

$$g''_{\vec{v}}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2.$$

Para facilitar a notação vamos escrever $a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ e $c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$. Então

$$g''_{\vec{v}}(0) = ah^2 + 2bhk + ck^2$$

Supondo $a \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} g''_{\vec{v}}(0) &= a \left[h^2 + 2h\frac{bk}{a} + \frac{c}{a}k^2 \right] \\ &= a \left[\left(h + \frac{bk}{a} \right)^2 + \frac{c}{a}k^2 - \left(\frac{b}{a}k \right)^2 \right] \\ &= a \left[\left(h + \frac{bk}{a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2} \right) k^2 \right] \\ &= a \left[\left(h + \frac{bk}{a} \right)^2 + \left(\frac{ac - b^2}{a^2} \right) k^2 \right] \end{aligned}$$

Observamos que o número $ac - b^2$ pode ser escrito na forma de determinante de uma matriz 2×2 , ou seja,

$$ac - b^2 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}.$$

Vamos usar a notação

$$H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}.$$

Logo

$$g''(0) = a \left[\left(h + \frac{bk}{a} \right)^2 + \frac{H(x_0, y_0)}{a^2} k^2 \right].$$

De onde segue que

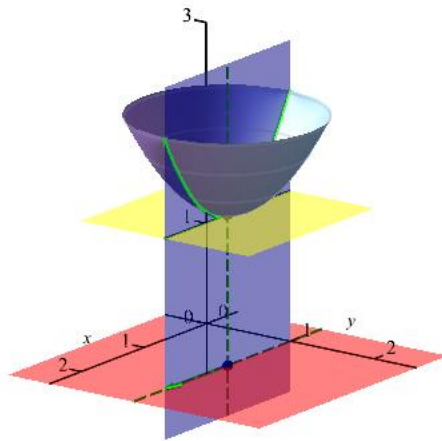
$$g''(0) = a \left(h + \frac{bk}{a} \right)^2 + \frac{1}{a} H(x_0, y_0) k^2.$$

Portanto, se $H(x_0, y_0) > 0$ e $a > 0$, então $g''(0) > 0$. E se $H(x_0, y_0) > 0$ e $a < 0$, então $g''(0) < 0$. Dessa forma, temos

- (i) Se $H(x_0, y_0) > 0$ e $a > 0$, então (x_0, y_0) é ponto de mínimo local de f ;

Figura 4.10:

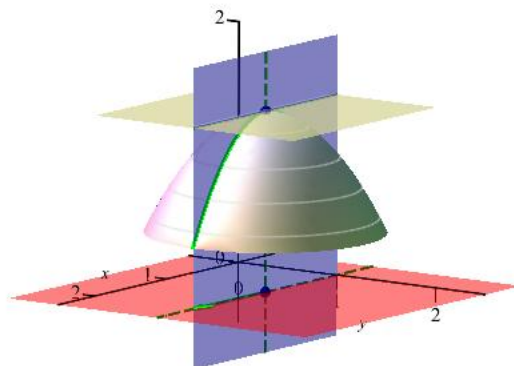
$\theta = 6.2832$



(ii) Se $H(x_0, y_0) > 0$ e $a < 0$, então (x_0, y_0) é ponto de máximo local de f .

Figura 4.11:

$\theta = 6.2832$

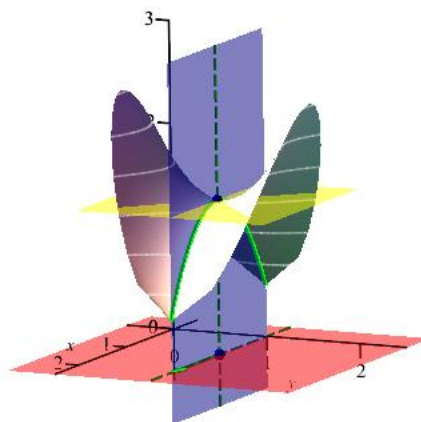


Suponhamos agora $H(x_0, y_0) < 0$. Desse modo, consideremos os vetores $\vec{v}_1 = (1, 0)$ e $\vec{v}_2 = (-b, a)$. Temos, $g''_{\vec{v}_1}(0) = a$ e $g''_{\vec{v}_2}(0) = H(x_0, y_0)a$. Portanto, $g''_{\vec{v}_1}(0) = a$ e $g''_{\vec{v}_2}(0) = H(x_0, y_0)a$ tem sinais contrários. Logo (x_0, y_0) é ponto de sela de f . Assim, provamos que

(iii) Se $H(x_0, y_0) < 0$, então (x_0, y_0) é ponto de sela de f .

Figura 4.12:

$\theta = 6.2832$



Lembramos que

$$a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \text{ e } H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

A função $H(x, y)$ definida em A por

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix}$$

é chamada de o *hessiano* da função f . Assim, segue a seguinte definição Temos então o seguinte teorema que fornece condições suficientes para que (x_0, y_0) seja um extremante local ou ponto de sela de $f(x, y)$.

Teorema 4.3. *Sejam $f(x, y)$ uma função de classe C^2 em um aberto A e $(x_0, y_0) \in A$ um ponto crítico de f , então:*

- (a) *Se $H(x_0, y_0) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, então (x_0, y_0) é ponto de mínimo local de f .*
- (b) *Se $H(x_0, y_0) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, então (x_0, y_0) é ponto de máximo local de f .*
- (c) *Se $H(x_0, y_0) < 0$, então (x_0, y_0) é ponto de sela de f .*

Se $H(x_0, y_0) = 0$, não podemos afirmar nada.

Exemplo 4.8. Vamos usar o teorema anterior para determinar os extremantes locais e os pontos de sela da função

$$f(x, y) = x^3 + 2xy + y^2 - 5x.$$

Temos que $\nabla f(x, y) = (3x^2 + 2y - 5, 2x + 2y)$. Para termos um ponto crítico temos que ter $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. Portanto,

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y - 5 = 0, \\ 2x + 2y = 0. \end{cases}$$

Da segunda equação segue que $y = -x$, então, substituindo na primeira equação, obtemos

$$3x^2 - 2x - 5 = 0$$

As raízes dessa equação são $\frac{5}{3}$ e $-\frac{2}{3}$. Quando $x = \frac{5}{3}$, temos que $y = -\frac{5}{3}$ e quando $x = -\frac{2}{3}$, temos que $y = \frac{2}{3}$. Logo, $(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3})$ e $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ são pontos críticos de f . Agora determinaremos o hessiano de f . Temos $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2$. Logo

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12x - 4$$

Para o ponto $(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3})$ temos

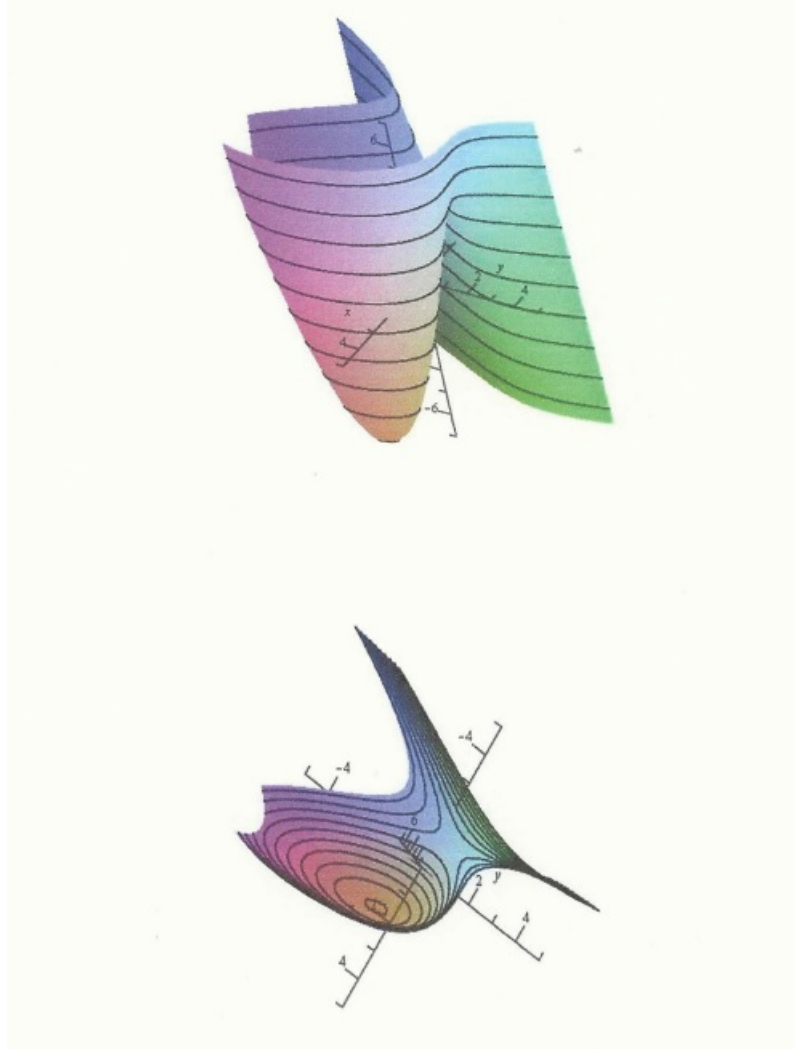
$$\begin{aligned} H\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right) &= 16 > 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right) &= 10 > 0. \end{aligned}$$

Concluimos que o ponto $(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3})$ é um ponto de mínimo local de f . Quanto ao ponto $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ temos

$$H\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = -12 < 0,$$

logo o ponto $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ é ponto de sela de f . Observando o gráfico da função $f(x, y) = x^3 + 2xy + y^2 - 5x$ nas duas posições mostradas abaixo (ver Figura 4.13), fica claro que f tem um ponto de mínimo local e um ponto de sela.

Figura 4.13: Gráfico da função $f(x, y) = x^3 + 2xy + y^2 - 5x$.



Capítulo 5

Considerações finais

Neste Trabalho apresentamos um estudo sobre máximos e mínimos de funções de duas variáveis. Para tanto, exploramos alguns resultados importantes aprendidos em Cálculo I, II e III, os quais foram bases para a conclusão deste trabalho. Dessa forma, acreditamos que os problemas aqui tratados podem ser estudados em cursos de Cálculo como forma de mostrar aos estudantes a noção de que, na maioria das vezes, o que é abordado em poucos parágrafos nos livros didáticos, representa um resumo de uma longa discussão repleta de experimentos e debates que perpassam décadas.

Entretanto, é importante também levarmos em consideração dificuldades ou obstáculos que se colocam quando da utilização das variadas metodologias aplicadas durante as aulas. Diante disso, tratar as diversas metodologias e didáticas como algo motivador, poderá levar o estudante a enxergar a Matemática como algo que exigisse o pensamento e a seriedade necessária, não somente para "resolver" um problema de cálculo, mas como entender que usando as técnicas que foram desenvolvidas em Cálculo de uma variável real, podem-se generalizar em cálculo de várias variáveis, além de tentar imaginar como os matemáticos tiveram que trilhar uma estrutura considerável até chegar ao conhecimento que é ensinado atualmente.

Portanto, tendo isto em vista, vislumbramos, com este estudo, a possibilidade de desenvolver o conteúdo e usar a softwares para plotar gráficos como uma estratégia para favorecer o ensino e a aprendizagem do Cálculo.

Referências Bibliográficas

- [1] ARON, Margaret E.; BOS, H. J. M. Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do cálculo. Tradução de J. R. B. Coelho, R. Maier e M. J. M. M. Mendes. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.
- [2] BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Edgard Blucher Ltda., 1974.
- [3] BOYER, Carl B. Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula - Cálculo. Tradução de H. H. Domingues. São Paulo: Atual, 1993.
- [4] COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. O que é Matemática? Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2000.
- [5] GUIDORIZZI, Hamilton. **Um curso de cálculo, volume 1, 2 e 3**. Edição 5. São Paulo: Editora LTC, 9 de março de 2001.
- [6] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise, Vol. 1 e 2**. Projeto Euclides - IMPA, 1976.
- [7] LOPEZ, Robert. **Sistemas de álgebra computacional: O que acontece quando o software matemático é realmente fácil de usar?** <https://www.maplesoft.com>. Disponível em: <https://www.maplesoft.com/ns/maple/cas/computer-algebra-systems-math-education.aspx>. Acesso em: 2022.
- [8] RICHIT, Adriana. **Projetos em Geometria Analítica usando Software de Geometria Dinâmica: repensando a Formação Inicial Docente em Matemática**. Disponível em: <https://www.escavador.com/sobre/2045416/adriana-richit>. Acesso em 2022.
- [9] STEWART, James. **Cálculo : volume 1 e 2 / James Stewart** ; tradução técnica: Antônio Carlos Moretti, Antônio Carlos Gilli Martins; revisão técnica Helena Maria Ávila de Castro. – São Paulo Cengage Learning, 2009