



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE FÍSICA
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA**

BRUNO CÉSAR DA SILVA MATOS

**O EFEITO FARADAY: DA ATIVIDADE ÓPTICA NATURAL AO
ELÉTRON**

**Belém
2022**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE FÍSICA
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA**

BRUNO CÉSAR DA SILVA MATOS

**O EFEITO FARADAY: DA ATIVIDADE ÓPTICA NATURAL AO
ELÉTRON**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
para obtenção do grau de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Costa de Lima

**Belém
2022**

Matos, B.C.S.

O EFEITO FARADAY: DA ATIVIDADE ÓPTICA NATURAL AO ELÉTRON/
BRUNO CÉSAR DA SILVA MATOS. – Belém, 2022.

77 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Costa de Lima

Monografia – UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA, 2022.

1. História da Ciência. 2. Efeito Faraday. 3. Atividade Óptica. 4. Hipótese Iônica.
Título.



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE FÍSICA

ATA DA APRESENTAÇÃO E DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE
CURSO – TCC

Ata da sessão de apresentação e defesa de Trabalho de Conclusão de Curso para concessão de grau de Bacharelado em Física, realizado às 14:00h do dia 08 de Fevereiro de 2022, de forma virtual por meio da Plataforma Google Meet (meet.google.com/ytf-nspz-ysk), cuja orientação teve início em 02 de março de 2020 sendo intitulada: “**O EFEITO FARADAY: DA ATIVIDADE ÓPTICA NATURAL AO ELÉTRON**”, contendo 76 páginas, que foi apresentado durante 30 minutos pelo discente **BRUNO CESAR DA SILVA MATOS**, matrícula Nº **201608140008** diante da banca examinadora aprovada pela Faculdade de Física do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará, assim constituída: **Prof. Dr. Marcelo Costa de Lima (Orientador - UFPA)**, **Prof. Dr. Danilo Teixeira Alves (Examinador 1 - UFPA)** e **Prof. Dr. Jorge Castiñeiras Rodriguez (Examinador 2 - UFPA)**. Em seguida o mesmo foi submetido à arguição, tendo demonstrado conhecimentos no tema objeto da proposta de TCC, favorecendo à banca examinadora apresentar contribuições para melhoras no desenvolvimento e decidir pelo conceito **EXCELENTE** do mesmo, bem como conceder o prazo máximo de 15 dias para serem efetuadas as modificações sugeridas pela banca, se for o caso, e em seguida a mesma será assinada por todos os membros. Para constar foram lavrados os termos da presente ata que lida e aprovada recebe a assinatura dos integrantes da banca examinadora e do DISCENTE.

ORIENTADOR: Marcelo Costa de Lima

EXAMINADOR 1: Daniilo D. Alves

EXAMINADOR 2: Jorge Castiñeiras

DISCENTE: Bruno César da Silva Matos

BRUNO CESAR DA SILVA MATOS

“O EFEITO FARADAY: DA ATIVIDADE ÓPTICA NATURAL AO ELÉTRON”

Monografia apresentada como requisito para obtenção do título de bacharel em Física pela Faculdade de Física do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal Pará, submetida à apreciação da banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Orientador:



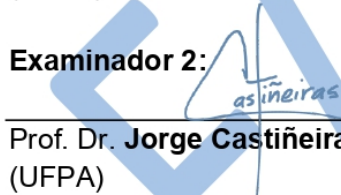
Prof. Dr. **Marcelo Costa de Lima**
(UFPA)

Examinador 1:



Prof. Dr. **Danilo Teixeira Alves**
(UFPA)

Examinador 2:



Prof. Dr. **Jorge Castiñeiras Rodriguez**
(UFPA)

Belém, 08 de fevereiro de 2022.

AGRADECIMENTOS

A minha mãe, Rosilene, gratidão por todo amor incondicional. Também, a cada pessoa da minha família que me apoiou de alguma forma nestes anos de graduação.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marcelo Lima, por todo apoio pedagógico, paciência e orientações dignas de um verdadeiro mestre.

Aos meus colegas de graduação pelas incontáveis situações construtivas e compartilhamentos. Em especial: Brendo, Gabriel, Jhonatan, Lucas, Leonardo, Ruan e Willian.

As Professoras e Professores da Faculdade de Física que, sob essa nobre missão de ensinar, nos inspiram.

A Valentine.

*“Nada é tão maravilhoso que não possa existir,
se admitido pelas leis da natureza.”
(Michael Faraday)*

RESUMO

Neste trabalho analisamos os mecanismos que concorreram para descrição teórica do efeito rotatório magnético sobre a luz, descoberto por Michael Faraday. Indicamos a origem e inspiração destes mecanismos a partir da teoria da birrefringência e da atividade óptica natural, no contexto da teoria elastodinâmica da luz, iniciada por Fresnel, na primeira metade do século XIX. A seguir, a incorporação imprópria deles no programa de unificação óptico-eletromagnético, na obra de Maxwell, a gradual transição para o contexto da teoria eletromagnética da luz e, por fim, sua depuração pela teoria do elétron às vésperas do nascimento do átomo de Bohr.

Palavras-chave: Efeito Faraday. Atividade Óptica. Hipótese Iônica. Eletromagnetismo.

ABSTRACT

In this paper we analyze the mechanisms that contributed to the theoretical description of the magnetic rotatory effect on light, discovered by Michael Faraday. We indicate the origin and inspiration of these mechanisms from the theory of birefringence and natural optical activity, in the context of the elastodynamic theory of light, started by Fresnel in the first half of the nineteenth century. Then, their improper incorporation in the optical-electromagnetic unification program, in the work of Maxwell, the gradual transition to the context of the electromagnetic theory of light and, finally, its purification by the electron theory on the eve of the birth of Bohr's atom.

Keywords: Faraday effect. Optical Activity. Ionic Hypothesis. Electromagnetism.

SUMÁRIO

Introdução	17
1 A ATIVIDADE ÓPTICA NATURAL	19
1.1 A revelação de Arago	19
1.2 Biot e a Lei de rotação da luz polarizada	19
1.3 Fresnel e uma nova interpretação da atividade óptica	21
1.4 A Dinâmica da birrefringência	24
2 O EFEITO MAGNETO-ÓPTICO DE FARADAY	35
2.1 Motivações e as primeiras descobertas científicas	35
2.2 A relação entre magnetismo e luz	36
2.3 O impacto da descoberta na comunidade científica	39
3 PRIMEIRAS ABORDAGENS TEÓRICAS DO EFEITO FARADAY	43
3.1 Equações de Airy e as análises de Verdet	43
3.2 A construção de Maxwell	46
3.3 Novo efeito magneto-óptico	52
3.4 Descrição eletromagnética do efeito Faraday	53
4 ÍONS E ELÉTRONS	57
4.1 Breve histórico sobre a teoria da dispersão	57
4.1.1 Dispersão e ondas eletromagnéticas	58
4.2 Os modelos de Drude	59
4.2.1 Hipótese Hall	59
4.2.2 Os circuitos moleculares	62
4.3 A afirmação do elétron	68
4.4 O declínio do modelo das correntes moleculares	69
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	71
REFERÊNCIAS	73
Referências	73

INTRODUÇÃO

Em 1845, Michael Faraday constatou que o plano polarização da luz sofreu rotação ao atravessar um meio quando havia presença de um campo magnético externo no mesmo sentido do raio luminoso, revelando, assim, o efeito magneto-óptico ^[1]. A descoberta desencadeou uma série de análises com intuito de modelar tal fenômeno, já que se tratava da primeira evidência da interação entre luz e magnetismo, intermediada pela matéria. Algumas ideias importantes, entretanto, para tentar compreender essa relação surgiram um pouco antes, sobretudo com a evidência de uma relação entre a luz polarizada e meios cristalinos, a **atividade óptica natural**, descoberta por Arago no cristal de quartzo e elucidada por Biot, fatos que abordaremos no capítulo 1. Ainda no contexto anterior a Faraday, discutiremos o papel de Fresnel em reinterpretar a atividade óptica às bases da teoria ondulatória da luz e reforçando uma hipótese da **transversalidade da luz**. Mostraremos a importância das formulações matemáticas dessas ideias e como elas serviram de base para descrições dinâmicas dos fenômenos luminosos, sobretudo com a equação postulada por MacCullagh, a partir da formulação sobre a teoria da birrefringência de Fresnel.

No capítulo 2, contextualizaremos os eventos que culminaram com a descoberta do efeito Faraday, desde os primeiros experimentos e descobertas do cientista Inglês até os desdobramentos decorrentes desta nova interação. Com uma análise descritiva, tentaremos elucidar alguns procedimentos da revelação de Faraday.

No Capítulo 3, abordaremos propostas para embasar dinamicamente o efeito Faraday. Discorreremos sobre essas construções, as quais inciamos pela abordagem fenomenológica de Airy. Ainda nesse contexto, analisamos as tentativas de Maxwell em justificar essa manifestação rotatória magnética, culminando no enorme avanço científico que foi a formulação da teoria eletromagnética da luz ^[2]. Mais tarde, discutiremos um mecanismo adotado por Rowland que elucidou o *efeito Hall*, baseada na teoria de Maxwell, assim como sua tentativa de tratar o efeito Faraday pelas mesmas vias.

No capítulo 4, apresentaremos a construção feita por Drude, no início dos anos de 1890, o qual apresentou dois mecanismos baseados na hipótese iônica da matéria para a descrição da descoberta de Faraday. Após a construção da teoria eletromagnética da dispersão (que ainda hoje sobrevive nos cursos e livros didáticos do eletromagnetismo clássico ^[3, 4]), Lorentz ^[5] trouxe uma formalização que, com exceção dos ferromagnéticos, explicou satisfatoriamente o efeito Faraday, descartando um dos modelos de Drude, a saber *a hipótese dos circuitos moleculares de Ampère-Weber*.

Com as evidências, no fim do século XIX, do papel central do elétron entre os íons constituintes da matéria, o modelo das correntes moleculares de Drude perdeu espaço, muito embora o advento daquela partícula fundamental não tenha esclarecido todos os nuances do efeito Faraday.

Apesar das histórias aqui discutidas respeitarem a cronologia dos fatos, utilizamos uma linguagem matemática anacrônica em relação ao tempo em que eles foram produzidos. Isso provavelmente deixará o texto mais acessível e didático ao leitor.

1 A ATIVIDADE ÓPTICA NATURAL

1.1 A revelação de Arago

Em 1810, François Arago (1786-1853), utilizou uma placa fina de mica, colocada entre a luz proveniente do sol e um cristal de calcita, observando que os raios ordinários e extraordinários¹ após a atravessarem possuíam diferenças suaves em suas colorações. Em seguida, fez a luz branca, polarizada após reflexão, atravessar a mica e a analisou através da calcita. Conseguiu com isso obter as mesmas cores que havia observado da primeira vez, só que agora com mais intensidade. Onde os dois feixes estavam sobrepostos ele viu apenas a cor natural da mica, ao passo que girando-a notou que as cores do espectro cromático eram percorridas de forma complementar^[6]. Além da lâmina de mica, também obteve as mesmas observações para uma lâmina de moscovita. Associou a complementaridade das cores às que ocorriam nos anéis de Newton produzidos com luz branca, os quais também são coloridos, sendo as cores dos anéis gerados por reflexão complementares às dos anéis gerados por transmissão, para o mesmo feixe de luz incidente. Experimentos adicionais mostraram que as cores também dependiam da espessura da lâmina, a qual era, no caso da mica ou do gesso, da ordem de uma fração de milímetros. Lâminas com espessuras maiores que $0,45\text{mm}$ não produziam cores. Ao considerar, por outro lado, uma placa de cristal de quartzo com 6mm de espessura, cortado perpendicularmente ao seu eixo óptico², e fazer a luz branca polarizada atravessá-la, notou a formação, como antes, dos raios com cores complementares. Entretanto, o giro completo do analisador, em torno do seu eixo de visada, fazia com que as cores percorressem o espectro cromático, enquanto que o giro do cristal, em seu eixo, em nada alterava as cores, uma assimetria não presente no caso das lâminas cristalinas finas. A estas manifestações denominou, genericamente, de *polarização cromática*. Havia assim observado o primeiro indício de uma propriedade que certas matérias tem em alterar o plano de polarização da luz, hoje chamada **atividade óptica natural**.

1.2 Biot e a Lei de rotação da luz polarizada

Após tomar ciência da manifestação descoberta por Arago, Jean-Baptiste Biot (1774-1862) tratou de analisar exhaustivamente como a polarização cromática se apresentava^[7]. Mostrou uma relação de dependência desse fenômeno com a espessura da lâmina do cristal, do ângulo entre o plano de polarização da luz incidente e o eixo do cristal, e também do ângulo entre a orientação do analisador e do polarizador. Obteve vários dados experimentais e expressões que

¹ o raio ordinário é aquele cujo índice de refração do meio é constante para qualquer direção que a onda luminosa atravesse (obedece a Lei da refração de Snell-Descartes). Já para o raio extraordinário, o índice de refração depende da direção. Ambos são plano polarizados, viajando no cristal em modos perpendiculares entre si.

² Direção no cristal na qual o raio incidente dá origem a um só raio refratado

tentaram explicá-los. Ao invés da mica tomou inicialmente a gipsita, a qual era mais manuseável que as finas lascas daquela, podendo a lâmina ser cortada em diversas espessuras. Construiu tal lâmina de modo que o eixo óptico do cristal se situava na face da mesma. Biot estabeleceu uma correspondência das cores produzidas nos anéis de Newton com as da polarização cromática, relacionou a espessura de sua lâmina com os dados do físico Inglês. Mesmo não chegando a uma justificativa de princípios fundamentais acerca disso, pois só gerou dados experimentais, Biot não demorou a relacionar tal fenômeno a uma mecânica sobre o movimento das “moléculas” luminais [8]. Dentro de um cristal, ele imaginou que as partículas luminosas sofriam “forças polarizantes”. Nos cristais uniaxiais haveriam “forças polarizantes ordinárias” que produziam o alinhamento das “moléculas” luminais com o plano de polarização e “forças polarizantes extraordinárias”, que produziam o alinhamento ortogonal ao mesmo plano. Abstraiu, também, que essas forças promoviam oscilações nas partículas luminais em cada lado do eixo óptico cristalino e que isso, juntamente com as forças acima citadas, seriam responsáveis pelas matizes da polarização cromática, levando-o a nomear tal hipótese de “teoria das polarizações móveis” [9]. Analisou, ainda, os resultados associados aos cristais de quartzo, cortados perpendicularmente ao eixo óptico, os quais podiam ser explicados pelo movimento de rotação contínua das “moléculas”, em torno do seu centro de gravidade, enquanto o feixe de luz atravessa o cristal, ao que Biot chamou *polarização rotatória* (atualmente conhecida como luz circularmente polarizada); sendo a frequência de rotação, novamente, dependente da cor. Biot demonstrou assim que os fenômenos de “polarização cromática” do quartzo consistiam na rotação do plano de polarização do feixe incidente, ao longo da direção de propagação, a qual podia ser à direita ou à esquerda, dependendo do material.

Em 1815, Biot analisou se a atividade óptica rotatória do quartzo se apresentava, também, em meios não cristalinos [10]. Mostrou que o óleo de terebintina puro possuía propriedade rotatória natural, da “direita para a esquerda” do observador e, na sequência, que o óleo essencial de louro também. Já o óleo essencial de limão, assim como a dissolução de cânfora em álcool, apresentava atividade óptica contrária, da “esquerda para a direita”. Também misturou fluidos que possuíam atividade óptica contrárias e, com as devidas proporções, verificou que ambas se neutralizavam. O fato dele ter notado que a atividade óptica na terebintina (líquida) era a mesma do quartzo, percebida ao longo do eixo, o fez conjecturar a ideia do evento não estar atrelado a estrutura cristalina, mas de algo mais fundamental que a compunha a matéria, talvez as “moléculas” do meio. Em setembro de 1818, apresentou a lei experimental para rotação do plano de polarização da luz ao percorrer o eixo do cristal de quartzo (**polarização rotatória**). Conforme Biot, o ângulo de rotação $\delta\theta$ é proporcional a espessura da placa d e inversamente proporcional ao quadrado do comprimento de onda λ , da luz *monocromática* usada, para as sete cores espectrais definidas por Newton. Embora Biot não nos apresente a fórmula, poderíamos sintetizar suas palavras na expressão matemática:

$$\delta\theta \propto \frac{d}{\lambda^2}. \quad (1.1)$$

Em seguida, analisou o poder rotatório para várias cores do espectro usando a terebentina e pode confirmar que o fenômeno obedece a mesma norma tanto nela, quanto no cristal de quartzo. Mostrou, ademais, que soluções de açúcar exercem atividade óptica natural, donde inferiu que provinha da estrutura molecular^[11]. Além disso, verificou experimentalmente que o poder rotatório da terebentina era preservado, mesmo quando era tomada na forma de vapor. Como o entendimento de Biot baseava-se numa argumentação na linha de Malus-Laplace³, sendo a luz tratada como partícula, justificou sua lei levando em conta essas ideias, além de reforçá-la com a hipótese newtoniana dos acessos, segundo ele “*reciprocamente proporcional ao quadrado dos comprimentos de acesso ou o quadrado de seus comprimentos de vibração dentro do sistema das ondas*”. O “*comprimento de acesso*” é a quarta parte do comprimento de onda.

1.3 Fresnel e uma nova interpretação da atividade óptica

A figura de Augustin Jean Fresnel (1788-1827) foi essencial para o estabelecimento da teoria ondulatória, como modelo explicativo para os fenômenos ópticos. Já, em 1814, mostrara grande aptidão por esse campo de pesquisa^[12], onde, por intermédio de seu tio materno Léonor Mérimée, teve seus ensaios entregues a Àmpere e Arago, sendo que este último se comprometeu em examiná-los. Arago, se tornaria, mais tarde um grande colaborador da curta, embora prolífera, carreira de Fresnel. No ano seguinte, ele elabora e inicia uma série de experimentos com intuito de atacar o problema da polarização cromática porém, com uma visão diferente de Biot, tratou a luz como onda e a relacionou com o princípio da interferência. Os indícios de que dispomos indicam que Fresnel não o herdou de Young, mas que desde o início o concebeu de forma independente e com um importante avanço que se mostrará decisivo: o de considerar os pulsos de luz como um sucessão regular no tempo, isto é, uma oscilação contínua, diferentemente de seus predecessores^[9].

Em 1816, Fresnel produziu experimentos que sugeriram a ausência de interferência entre dois raios polarizados em planos perpendiculares entre si^[13]. Além disso, tentou iniciar uma abordagem teórica acerca da polarização cromática. Como prova experimental, usou lâminas finas de calcita com a expectativa de observar as colorações advindas da interferência dos raios ordinários e extraordinário. Não obteve êxito. Conquanto, isto ironicamente, reforçou uma ideia já imaginada pelo francês: raios polarizados que possuem plano de polarização ortogonal um ao outro não interferem! Quando analisou a luz branca através da lâmina, os raios ordinário e

³ A abordagem laplaciana imaginava todo fenômeno em termos de forças centrais entre partículas por analogia com a força gravitacional de Newton, muito embora a interação poderia ter caráter atrativo ou repulsivo. Adotava dessa forma o conceito de luz como um fluxo de corpúsculos emitidos por uma fonte, influenciando alguns físicos franceses, como Etienne Louis Malus e o próprio Biot^[12].

extraordinário não promoviam as cores, e sim permaneciam com a cor branca do raio incidente. No entanto, se um segundo material cristalino como a calcita é posicionado como analisador, com a direção do eixo óptico não comum ao da lâmina, os novos raios advindos da dupla refração originam superposições que, não necessariamente, perpendiculares uns com os outros poderiam sofrer interferência e gerar as cores. Com uma versatilidade aguçada, ainda realizou outros experimentos de dupla fenda. Utilizando luz polarizada, analisou feixes provindos de franjas de interferência e verificou, na calcita, que era promovida uma intensidade maior nos padrões delas se as polarizações fossem paralelas. Se perpendiculares, elas desapareciam. Padrões esses que dependiam da rotação do plano de polarização de um dos feixes. Com evidência de que a polarização cromática era uma consequência da relação entre dupla refração e o *princípio da interferência* postas “à mesa”, tratou de relacioná-las também a hipótese da *transversalidade da luz*, sem, no entanto poder, confirmá-la ainda. Segundo Leclerc ^[9], pensamento este que já fora sugerido por Àmpere.

Em 1819, com a colaboração de Arago, retomou todos os experimentos e evidências que demonstravam a não interferência entre os raios ordinário e extraordinário ^[14], o que reforçou em Fresnel a ideia sobre a *transversalidade da luz*, ilustrada na figura (1).

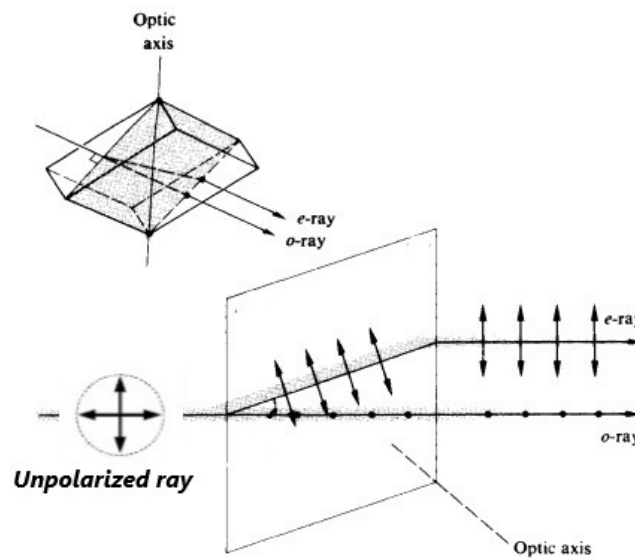


Figura 1 – Ilustração da birrefringência no espató da Islândia, a partir da hipótese sobre a transversalidade da luz proposta por Ampère-Fresnel, na qual um feixe de luz não polarizada incide perpendicularmente ao eixo óptico do cristal, gerando os raios ordinário (*o-ray*) e extraordinário (*e-ray*) que possuem velocidades diferentes no meio cristalino e, por viajarem com oscilações perpendiculares um ao outro, não formam padrões de interferência. Fonte: Hecht, E., 2002, *Optics*, adaptado

A afirmação deliberada da transversalidade das ondas luminosas viria em 1821^[15],

quando Fresnel nos apresenta um novo tipo de éter, infinitamente rígido à compressão e, elástico ao cisalhamento, capaz de suportar vibrações com as características necessárias para ondas luminosas transversais. Admitiu que um cristal biaxial é aquele admitido possuir três "eixos de elasticidade", os quais perpendiculares entre si, podendo ser representado pela seguinte matriz

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & f^2 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Sendo \hat{p} o versor que identifica a polarização e \hat{s} o versor da direção normal em relação à frente da onda e como esta é uma onda transversal, conseqüentemente

$$\hat{p} \cdot \hat{s} = 0. \quad (1.3)$$

Fresnel assume que os modos de polarização tem direções tais que as velocidades de propagação ao longo delas são extremas no cristal, para uma direção \hat{s} . Com isso é possível encontrar \hat{p} e tais velocidades, v associadas para cada \hat{s} , se soubermos as elasticidades K_{mn} . Isso equivale a o problema de autovalor, conforme Freitas, L.D.L. ^[16]

$$v^2 p^i = O^{im} K_{mn} p^n, \quad (1.4)$$

em que⁴

$$O^{ij}(\hat{s}) := \delta^{ij} - s^i s^j. \quad (1.5)$$

Se o eixo z tiver a mesma direção do eixo principal do cristal e duas elasticidades forem iguais, ficamos com o caso do da birrefringência em cristais uniaxiais. De forma que

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & f^2 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

A teoria da birrefringência de Fresnel forneceu a explicação dos fenômenos de "polarização cromática" em finas lâminas, onde a polarização é fixa: os raios ordinário e extraordinário advindos da lâmina passavam por uma nova dupla refração no analisador de forma que os raios ordinário e extraordinário provindos do analisador poderiam ter direções de vibrações iguais, interferindo um ao outro, justificando, analiticamente, o surgimento das cores. Ele pode, assim, calcular essas interferências e comparar aos dados de Biot, obtendo uma explicação para eles aos olhos da teoria ondulatória.

⁴ Consideramos a convenção de Einstein, na qual os índices repetidos, na mesma expressão indicial, são somados sobre todos os valores tomados por eles. Desta forma, podemos ter $K_{mn} p^n = K_{m1} p^1 + K_{m2} p^2 + K_{m3} p^3$. Convenção esta que adotaremos ao longo de todo texto.

O ano de 1822 foi decisivo para Fresnel desvendar a natureza distinta das cores produzidas através do eixo óptico do quartzo, uma vez que não poderia ser descrita pela teoria birrefringente (1.4). Apresentou um experimento ^[17] para verificar esse tipo de "polarização cromática" confirmando que a birrefringência do quartzo, muito próxima ao seu eixo, produz dois raios aparentemente despolarizados. Conjecturou um estado de polarização que pode ser entendido como superposição de duas polarizações fixas (*linear*) em direções mutuamente ortogonais, defasadas uma em relação a outra de $\lambda/4$, gerando a *polarização circular*. A polarização circular pode ainda ser "da esquerda para a direita" ou "da direita para a esquerda", dependendo do sentido da rotação. Afirmou, ainda, haver outros tipos de polarizações entre as retilíneas e circulares, as quais denominou *elípticas*. Além disso, evidenciou que o fraco poder rotatório ao longo do eixo óptico no quartzo variava de acordo com a cor, sendo esta variação o inverso do comprimento de onda para cada uma, λ^{-1} . Ao unir isso ao princípio da interferência obteve a lei de Biot (1.1), mas agora com princípios ondulatórios da óptica.

Com isso, Fresnel estava com todos os elementos prontos para refutar as ideias corpusculares sobre a atividade óptica. Impondo, agora, uma nova interpretação para os fenômenos ópticos postulados pelos seus antecessores, sobretudo, às bases da ondulatória para reinterpretar a teoria das polarizações móveis de Biot. Por conta de toda essa destreza, tanto teórica quanto experimental, é consenso que Fresnel seja considerado um divisor de águas na óptica clássica. Também deixou um legado enorme com sua formulação matemática do éter sólido elástico, não tivesse falecido precocemente (1827), porventura, pudesse ter encontrado uma justificativa dinâmica para a atividade óptica.

1.4 A Dinâmica da birrefringência

Após o estabelecimento da teoria ondulatória e o modo como ela explicava a cinemática dos raios de luz polarizados em meios cristalinos, a questão que se pôs foi a seguinte: qual a dinâmica da onda, no meio, que permite obter o problema de autovalor (1.4) para as ondas transversais? Com o intuito de modelar e oferecer ferramentas que pudessem responder a esta problemática, surgiram algumas teorias considerando a luz como onda de deformação transversal. Dentre elas destacamos a formulação de James MacCullagh (1809-1847) ^[18, 19], uma vez que a descrição da birrefringência circular foi postulada primeiramente por ele, segundo Whittaker ^[20]. Assim, em 1836, MacCullagh propôs uma equação sem, no entanto, justificá-la, a qual pudesse abarcar as birrefringências linear e circular do quartzo. Seja $\vec{e} = \vec{e}(\vec{r}, t) = (e_x, e_y, e_z)$, o vetor deformação do meio etéreo, as deformações compressionais (ψ) e rotatórias ($\vec{\eta}$) a ele associadas são,

$$\psi = \nabla \cdot \vec{e}, \quad \vec{\eta} = \nabla \times \vec{e}, \quad (1.7)$$

respectivamente. Ao campo $\vec{\eta}$ se associa a onda puramente transversal, isto é, a luz. A equação

postulada por MacCullagh para a onda luminosa no cristal de quartzo, foi

$$\rho \frac{\partial^2 e^i}{\partial t^2} = \varepsilon^{ibm} K_{ab} \partial_m \eta^a - c^2 C \nabla^2 \eta^i . \quad (1.8)$$

Na equação, ρ é a densidade do meio luminífero, a qual se assume ser a mesma dentro e fora da matéria bruta, sendo que esta última afeta as propriedades elásticas “naturais” do éter. O caso $C = 0$ descreve a birrefringência linear, conforme estabelecida por Fresnel.

Agora, mostraremos que a partir de (1.8) obteremos ondas puramente transversais, satisfazendo o problema de autovalor de Fresnel ($C = 0$), bem como a birrefringência do quartzo. Para isso, lembramos que as (1.7) podem ser reescritas em notação indicial por

$$\psi = \partial_i e^i , \quad \eta^i = \varepsilon^{ijk} \partial_j e_k ,$$

e ao tomarmos a divergência na equação da onda de MacCullagh, teremos

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \partial_i e^i = \partial_i \varepsilon^{ibm} K_{ab} \partial_m \eta^a - c^2 C \nabla^2 \partial_i \eta^i .$$

Se fizermos a contração da matriz de elasticidade com a deformação rotatória geramos um vetor, digamos A_b . Ou seja, $K_{ab} \eta^a = A_b$. Desta forma a equação acima toma a forma

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \partial_i \varepsilon^{imb} \partial_m A_b - c^2 C \nabla^2 \partial_i \eta^i . \quad (1.9)$$

No primeiro termo ao lado direito da (1.9) notamos que a contração das derivadas $\partial_i \partial_m$ (que são simétricas) com o tensor Levi-Civita ε^{ibm} (que é antissimétrico) geram uma nulidade nesse termo da equação. Já para o segundo termo, usamos a correspondência com a notação vetorial,

$$\partial_i \eta^i = \nabla \cdot \vec{\eta} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{e}) = 0 ,$$

gerando na (1.9) o seguinte resultado

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 . \quad (1.10)$$

A equação acima nos informa que ondas longitudinais não são propagadas no meio proposto por MacCullagh. Se, agora, para $C = 0$, lançarmos mão do rotacional na (1.8) ficamos com

$$\rho \frac{\partial^2 \eta^k}{\partial t^2} = \varepsilon^{ijk} \partial_j \left(\varepsilon^{ibm} K_{ab} \partial_m \eta^a \right) .$$

Lembrando que uma das propriedades do tensor Levi-Civita nos diz que

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ibm} = \delta^b_j \delta_k^m - \delta_j^m \delta^b_k , \quad (1.11)$$

teremos

$$\rho \frac{\partial^2 \eta^k}{\partial t^2} = K_{ab} \partial_j [(\delta_{jb} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kb})] (\partial_m \eta^a),$$

ou, utilizando a definição da delta de Kronecker

$$\rho \frac{\partial^2 \eta^k}{\partial t^2} = K_{ab} (\partial_b \partial_k - \partial_m^2 \delta_{kb}) \eta^a.$$

Alternativamente, esse resultado pode ser escrito da forma

$$\rho \frac{\partial^2 \eta_i}{\partial t^2} = K^{ab} (\partial_i \partial_b - \delta_{ib} \nabla^2) \eta_a. \quad (1.12)$$

Uma solução de onda plana harmônica, de frequência ω , velocidade v , propagando-se na direção \hat{s} , de polarização \hat{p} , pode ser caracterizada assim

$$\vec{\eta} = \eta_0 \hat{p} \exp \left\{ i\omega \left(t - \frac{\hat{s}}{v} \cdot \vec{r} \right) \right\}, \quad \hat{s} \cdot \hat{p} = 0, \quad (1.13)$$

ou em notação indicial

$$\eta^j = \eta_0^j \exp \left\{ i\omega \left(t - \frac{\hat{s}}{v} \cdot \vec{r} \right) \right\}.$$

Substituindo-a em (1.12) e fazendo $\rho = 1$, virá

$$-\omega^2 \eta_0^j = K^{ab} (\partial_b \partial_a \eta^j - \delta_{ij} \nabla^2 \eta^i). \quad (1.14)$$

Desenvolveremos agora os dois termos do lado direito de (1.14), separadamente. Para o primeiro, Segue então

$$\partial_a \eta^j = \eta_0^j \partial_a \exp \left\{ i\omega \left(t - \frac{\hat{s}}{v} \cdot \vec{r} \right) \right\} = -\eta_0^j \left[i\omega \frac{\hat{s}}{v} \cdot (\partial_a \vec{r}) \right] \exp \left\{ i\omega \left(t - \frac{\hat{s}}{v} \cdot \vec{r} \right) \right\},$$

logo

$$\partial_a \eta^j = -\frac{i\omega}{v} s_a \eta_0^j \exp \left\{ i\omega \left(t - \frac{\hat{s}}{v} \cdot \vec{r} \right) \right\},$$

ou seja

$$\partial_a \eta^j = -\frac{i\omega}{v} s_a \eta^j.$$

Consequentemente,

$$\partial_b \partial_a \eta^j = -\frac{\omega^2}{v^2} s_a s_b \eta^j. \quad (1.15)$$

Agora, para o segundo termo

$$\delta_{ij} \nabla^2 \eta^j = -\frac{\omega^2}{v^2} s_a s^a \eta^j = -\frac{\omega^2}{v^2} \eta^j,$$

pois $s_a s^a = 1$. Mais uma vez, utilizando as propriedades da delta de Kronecker, podemos reescrever essa expressão de forma que

$$\delta_{ij} \nabla^2 \eta^j = -\frac{\omega^2}{v^2} \delta^j_i \eta^i. \quad (1.16)$$

Ao substituir (1.15) e (1.16) em (1.14) vem

$$\omega^2 \eta_0^j = K^{ab} \left(\frac{\omega^2}{v^2} s_a s_b \eta^j + \frac{\omega^2}{v^2} \delta^j_i \eta^i \right).$$

O que, conforme (1.13), resulta

$$v^2 p_i = K^{ab} (\delta_{ib} - s_i s_b) p_a \quad (1.17)$$

Note que este é o problema de auto-valor (1.4) construído por Fresnel em sua teoria da birrefringência linear

A birrefringência circular do quartzo era peculiar, manifestando-se mesmo quando o raio se propaga sobre o eixo do cristal e estando fortemente ligada à dispersão. Não podia portanto ser contemplada no caso $C = 0$. Já para $C \neq 0$, vamos considerar um feixe luminoso, o qual se propaga paralelamente ao eixo óptico do cristal, coincidente com a direção z , ou seja,

$$\vec{e} = \vec{e}(z, t), \quad \vec{e} \cdot \vec{z} = 0.$$

Encontraremos, agora, qual a equação da onda associada a (1.8). Note que podemos reescrevê-la assim,

$$\rho \frac{\partial^2 e^i}{\partial t^2} = -(\nabla \times \vec{A})^i - c^2 C \nabla^2 \eta^i, \quad (1.18)$$

onde, como definido anteriormente o vetor \vec{A} é

$$\vec{A} := \mathbb{K} \vec{\eta} \quad (1.19)$$

sendo a matriz \mathbb{K} a matriz dada em (1.6). Dada a transversalidade da perturbação luminosa podemos escrever

$$\vec{\eta} = (\nabla \times \vec{e}) = \hat{z} \times \frac{\partial \vec{e}}{\partial z}, \quad (1.20)$$

onde usamos a propriedade do cálculo vetorial

$$\nabla \times \vec{F}(z) = \hat{z} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial z}. \quad (1.21)$$

Desta forma, (1.19) se torna então

$$\vec{A} = a^2 \vec{\eta} = a^2 \hat{z} \times \frac{\partial \vec{e}}{\partial z}. \quad (1.22)$$

Substituindo (1.20) e (1.22) em (1.18), segue que

$$\rho \frac{\partial^2 e^i}{\partial t^2} = -a^2 (\nabla \times \hat{z} \times \frac{\partial \vec{e}}{\partial z}) - c^2 C \hat{z} \times \frac{\partial^3 \vec{e}}{\partial z^3}. \quad (1.23)$$

Se na equação anterior, no primeiro termo do lado direito, lançarmos mão da identidade vetorial

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \cdot \vec{B})\vec{A} - (\nabla \cdot \vec{A})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}, \quad (1.24)$$

dividi-la por a^2 e rearranjar os termos, finalmente, obteremos

$$\frac{\rho}{a^2} \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial z^2} = -\frac{c^2}{a^2} C \hat{z} \times \frac{\partial^3 \vec{e}}{\partial z^3}. \quad (1.25)$$

Feito isso, queremos encontrar quais as características das soluções em (1.25). Logo, ao considerarmos uma luz incidente, monocromática, plano polarizada, com uma frequência tal que $\omega = \frac{c}{\lambda}$, onde λ é o comprimento desse feixe no vácuo. Ainda, se essa onda também possuir amplitude e_0 e um vetor polarização representado pelo versor \hat{p} , podemos escrevê-la como

$$\vec{e}(\vec{z}, t) = e_0 \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{c} n \right) \right] \hat{p}. \quad (1.26)$$

Se a substituirmos em (1.25) seguirá

$$\frac{\omega^2}{c^2} n^2 \vec{e} - \frac{\rho \omega^2}{a^2} \vec{e} = -i \frac{\omega^3}{c} n^3 C \hat{z} \times \frac{\partial^3 \vec{e}}{\partial z^3},$$

dividindo por ω^2/c^2 , ficamos com

$$\left(n^2 - \rho \frac{c^2}{a^2} \right) \hat{p} = i \omega c n^3 C \hat{z} \times \hat{p}. \quad (1.27)$$

Na equação anterior, se isolarmos \hat{p} e substituir ele próprio no lado direito dela, teremos

$$\left(n^2 - \rho \frac{c^2}{a^2} \right)^2 \hat{p} = -\omega^2 c^2 n^6 C^2 \hat{z} \times (\hat{z} \times \hat{p}). \quad (1.28)$$

Caso consideremos a identidade vetorial

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}),$$

podemos extrair, dada a transversalidade da onda luminosa, $\hat{p} \cdot \hat{z}$, que

$$\hat{p} = -\hat{z} \times (\hat{z} \times \hat{p}). \quad (1.29)$$

Portanto, (1.27) é agora

$$\left(n^2 - \rho \frac{c^2}{a^2}\right)^2 = \omega^2 c^2 n^6 C^2,$$

e definindo

$$n_0 := c\sqrt{\rho}/a, \quad (1.30)$$

além de considerar a relação da frequência com o comprimento de onda, seguirá

$$(n^2 - n_0^2)^2 = \frac{c^4 C^2}{\lambda^2} n^6, \quad (1.31)$$

o que resulta em

$$n_{\pm}^2 - n_0^2 = \pm \frac{c^2 C}{\lambda} n^3. \quad (1.32)$$

Assim, de (1.27) e (1.32) teremos

$$\left(n_0^2 \pm i \frac{c^2 C}{\lambda} n^3 - n_0^2\right) \hat{p}_{\pm} = -i \frac{c^2 C}{\lambda} n^3 \hat{z} \times \hat{p}_{\pm},$$

logo,

$$\pm \hat{p}_{\pm} = -i \hat{z} \times \hat{p}_{\pm}. \quad (1.33)$$

Devido as características do feixe luminoso, conseqüentemente

$$\hat{p}_{\pm} = p_x \hat{x} \pm p_y \hat{y},$$

ao passo que para o \hat{p}_+ , substituindo em (1.33) seguirá

$$\hat{p}_+ = i p_x \hat{y} - i p_y \hat{x},$$

o que nos leva a

$$p_x = i p_y.$$

Ao tomarmos a ortonormalização das bases complexas,

$$\hat{p}_{\pm} \cdot \hat{p}_{\pm} = 0 \quad , \quad \hat{p}_{\pm} \cdot \hat{p}_{\pm}^* = 1 \quad ,$$

obtemos

$$p_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad p_y = \frac{i}{\sqrt{2}} \quad ,$$

em vista disso,

$$p_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + i\hat{y}) \quad .$$

analogamente para p_- ,

$$p_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} - i\hat{y}) \quad ,$$

ou seja,

$$\hat{p}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} \pm i\hat{y}) \quad , \quad (1.34)$$

nos informando que as soluções de (1.25) ocorrem aos pares e são da forma

$$\vec{e}_{\pm}(\vec{z}, t) = e_0^{\pm} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{c} n_{\pm} \right) \right] \hat{p}_{\pm} \quad , \quad (1.35)$$

sendo n_{\pm} soluções de (1.32) com as amplitudes associadas, e_0^{\pm} . As velocidades de cada uma são dadas por

$$v_{\pm} = \frac{c}{n_{\pm}} \quad ,$$

de modo que essas soluções representam ondas de polarização circular esquerda (+) e direita (-), respectivamente. Para nos certificarmos disso, lançamos mão da parte real de (1.35), O que nos leva a

$$Re(\vec{e}_{\pm}) = \frac{|e_0^{\pm}|}{\sqrt{2}} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} n_{\pm} + \theta_0^{\pm} \right) \right] \hat{x} + \frac{|e_0^{\pm}|}{\sqrt{2}} \sen \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} n_{\pm} + \theta_0^{\pm} \right) \right] \hat{y} \quad , \quad (1.36)$$

onde a fase θ_0^{\pm} surge de

$$e_0^{\pm} = |e_0^{\pm}| \exp i\theta_0^{\pm} \quad .$$

A partir disso, concluímos que a solução geral de (1.25) é dada por

$$\vec{e}(z,t) = e_{0+} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{c} n_+ \right) \right] \hat{p}_+ + e_{0-} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{c} n_- \right) \right] \hat{p}_-. \quad (1.37)$$

Dado que as soluções acima representam modos de polarizações elípticas, podemos considerar o caso, no qual o meio em questão ocupa o semiespaço $z \geq 0$, enquanto que o semiespaço $z < 0$ é vazio. A onda incidente, propagando-se sempre ao longo de z , encontra-se linearmente polarizada no vácuo com suas oscilações ocorrendo, por exemplo, em x . Assim, a condição de contorno para (1.37) será

$$\vec{e}(0,t) = \left(\frac{e_{0+} + e_{0-}}{\sqrt{2}} \right) e^{i\omega t} \hat{x} + i \left(\frac{e_{0-} - e_{0+}}{\sqrt{2}} \right) e^{i\omega t} \hat{y} = e_0 e^{i\omega t} \hat{x},$$

ou seja, as amplitudes, neste caso, serão idênticas

$$e_{0+} = e_{0-} = \frac{e_0}{\sqrt{2}}. \quad (1.38)$$

Posto isso, a (1.37) fica

$$\vec{e}(z,t) = \frac{e_0}{\sqrt{2}} \left\{ \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{c} n_+ \right) \right] \hat{p}_+ + \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{c} n_- \right) \right] \hat{p}_- \right\}, \quad (1.39)$$

nos informando modos de polarizações circulares, esquerda (+) e direita (-), propagando-se com velocidades distintas, uma da outra, no interior do meio, caracterizando a birrefringência circular sobre o eixo óptico do cristal.

Em seguida, queremos mostrar como MacCullagh deduziu a lei de Biot. Para isso, se definirmos

$$\bar{n} := \frac{n_+ + n_-}{2}, \quad \frac{\Delta n}{2} := \frac{n_+ - n_-}{2}, \quad (1.40)$$

consequentemente

$$n_{\pm} = \bar{n} \pm \frac{\Delta n}{2}. \quad (1.41)$$

Se substituirmos, assim, (1.41) em (1.39) e usando a (1.34) faz-se

$$\vec{e}(z,t) = e_0 \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{c} n_+ \right) \right] \left\{ \cos \left(\frac{\omega \Delta n}{c} \frac{z}{2} \right) \hat{x} + \text{sen} \left(\frac{\omega \Delta n}{c} \frac{z}{2} \right) \hat{y} \right\}, \quad (1.42)$$

onde vemos que se $z = 0$, por exemplo, a oscilação dessa onda acontece apenas na direção \hat{x} . Já em $z > 0$, notamos que a onda avança (já dentro do meio óptico cristalino) com componentes tanto em \hat{x} como em \hat{y} , isto é,

$$\hat{p}(\Delta n, z) = \cos\left(\frac{\omega}{c} \frac{\Delta n}{2} z\right) \hat{x} + \sin\left(\frac{\omega}{c} \frac{\Delta n}{2} z\right) \hat{y},$$

é o vetor polarização da solução, responsável pelo giro de uma polarização linear até uma nova polarização linear de orientação $\Delta\theta$ com o eixo \hat{x} em $z = d$, com Δn quantificando esse giro conforme a onda atravessa o meio. Já que $\Delta\theta$ consiste nesse ângulo de deflexão, ainda considerando a parte real da onda, havemos de ter

$$\operatorname{tg}(\Delta\theta) = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{c} \frac{\Delta n}{2} d\right),$$

em vista disso

$$\Delta\theta = \frac{\omega}{c} \frac{\Delta n}{2} d. \quad (1.43)$$

Neste instante, averiguemos, para conjectura de MacCullagh, qual a relação entre a dispersão ordinária (n) e a dispersão rotatória, a partir da (1.32). Reescrevendo-a,

$$n_{\pm} = n_0 \left(1 \pm \frac{c^2 C n_0^2}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.44)$$

na qual, segundo (1.41), percebemos a relação $\bar{n} = n_0$. Considerando, ademais, a diferença entre n e n_0 em aproximação linear com C , realizaremos a expansão binomial de (1.44). Por conseguinte,

$$n_{\pm} = n_0 \pm \left(\frac{c^2 C n_0^2}{2\lambda}\right) \pm \left(\frac{c^4 C^2 n_0^2}{8\lambda^2}\right) \pm \dots,$$

e ao lançarmos mão de termos até primeira ordem, além de subtrairmos n_+ de n_- , evidenciamos

$$\frac{\Delta n}{2} = \frac{c^2 C}{2\lambda} n_0^2. \quad (1.45)$$

Desse modo, substituindo Δn em (1.43), concluímos que

$$\Delta\theta = \frac{c^2 C}{2\lambda^2} n_0^2 d,$$

ou, igualmente,

$$\Delta\theta = 2\pi^2 \rho \frac{c^4}{a^2} C \frac{1}{\lambda^2} d, \quad (1.46)$$

cuja medida é o ângulo de rotação do plano de polarização, conforme MacCullagh, obedecendo a lei de Biot. As duas variedades do quartzo, direita (-) ou esquerda (+), tem a constante C positiva ou negativa, respectivamente.

MacCullagh, em 1839, tentou dar uma justificativa dinâmica à birrefringência linear proposta por ele, usando a mecânica de Lagrange^[20]. Para isso, definiu um potencial elástico, cuja dependência se associava apenas as deformações rotacionais, $\vec{\eta}$, dado por

$$\mathcal{U}_{mac} = \frac{1}{2} K_{ab} \eta^a \eta^b, \quad (1.47)$$

na qual, K_{ab} são interpretadas como parâmetros de uma rigidez a rotação imposta pelo éter, em meios anisotrópicos. Segue que, a densidade lagrangiana toma a forma

$$\mathcal{L}_{mac} = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} K_{ab} \eta^a \eta^b. \quad (1.48)$$

Executando a variação do setor cinético, resultará

$$\delta \mathcal{F} = \rho \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \delta \vec{e} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \cdot \delta \vec{e} \right) - \rho \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} \cdot \delta \vec{e}$$

ou, em notação indicial,

$$\delta \mathcal{F} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial e_i}{\partial t} \delta e_i \right) - \rho \frac{\partial^2 e_i}{\partial t^2} \delta e_i. \quad (1.49)$$

Para aplicar a variação em \mathcal{U}_{mac} , lembremos, da mecânica do contínuo, que o tensor de rotação é definido por

$$\Omega_{ij} := \frac{1}{2} (\partial_j e_i - \partial_i e_j),$$

o qual se associa ao rotacional do vetor deformação do seguinte modo

$$(\nabla \times \vec{e})^i = \varepsilon^{ijk} \Omega_{jk} = \eta^i.$$

À vista disso, podemos escrever o potencial (1.47) de modo igual a

$$\mathcal{U}_{mac} = \frac{1}{2} K_{ab} (\nabla \times \vec{e})^a (\nabla \times \vec{e})^b, \quad (1.50)$$

fazendo a variação

$$\delta \mathcal{U}_{mac} = K_{ab} (\nabla \times \vec{e})^a (\nabla \times \delta \vec{e})^b = K_{ab} (\nabla \times \vec{e})^a \varepsilon^{bij} \partial_i \delta e_j,$$

onde usamos o fato da matriz, K_{ab} , ser simétrica. Assim sendo,

$$\delta \mathcal{U}_{mac} = \partial_i \left[K_{ab} (\nabla \times \vec{e})^a \varepsilon^{bij} \delta \vec{e}_j \right] - K_{ab} [\partial_i (\nabla \times \vec{e})^a] \varepsilon^{bij} e_j,$$

notando que o primeiro termo é de fronteira e que não contribuirá para a dinâmica, a expressão anterior se resume a

$$\delta \mathcal{U}_{mac} = -[\varepsilon^{jbi} K_{ab} \partial_i \eta^a] \delta e_j + F$$

sendo F a referência para os outros termos de fronteira. Se fizermos a troca dos índices $i \rightarrow m$ e $j \rightarrow i$, temos também

$$\delta \mathcal{U}_{mac} = -[\varepsilon^{ibm} K_{ab} \partial_m \eta^a] \delta e_i + F .$$

Isto posto, a variação da densidade (1.48) se apresentará por

$$\delta \mathcal{L}_{mac} = -\rho \frac{\partial^2 e_i}{\partial t^2} \delta e_i + [\varepsilon^{ibm} K_{ab} \partial_m \eta^a] \delta e_i + F ,$$

e quando utilizarmos o princípio da mínima ação de Hamilton ($\delta_{mac} = 0$)

$$\rho \frac{\partial^2 e^i}{\partial t^2} = \varepsilon^{ibm} K_{ab} \partial_m \eta^a , \quad (1.51)$$

que é a equação postulada (1.8), com $C = 0$.

No meio isotrópico, a matriz de elasticidade de Fresnel é simplesmente

$$K_{ab} = \kappa \delta_{ab} , \quad (1.52)$$

sendo κ agora chamada de rigidez rotatória do meio luminífero. Nestas condições, a energia potencial de MacCullagh (\mathcal{U}_{mac}) torna-se simplesmente

$$\mathcal{U}_{mac} = \frac{1}{2} \kappa |\nabla \times \vec{e}|^2 , \quad (1.53)$$

e a equação da onda (1.51) se transforma em

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} = -\kappa \nabla \times \nabla \times \vec{e} . \quad (1.54)$$

MacCullagh estabeleceu, assim, uma fundamentação dinâmica para (1.8) nos meios sem dispersão rotatória ($C = 0$).

2 O EFEITO MAGNETO-ÓPTICO DE FARADAY

2.1 Motivações e as primeiras descobertas científicas

Michael Faraday(1791-1867), nasceu em uma família que não poderia lhe oferecer mais que uma educação básica mínima, teve boa parte de sua instrução infantil comprometida, pois a educação oferecida pelas instituições à época estavam ligadas à igreja da Inglaterra e outras organizações às quais seus pais não faziam parte ^[20, 21]. Na adolescência, conheceu George Riebau, encadernador que trabalhava em Blandford Street, em Londres. Tornou-se aprendiz e lá pode ter contato com obras como: *Conversations in Chemistry*, de Jane Marcet; *Elements of Chemistry*, de Lavoisier e a *the Encyclopaedia Britannica article on electricity*, de James Tyler ^[21].

A grande bagagem metodológica-científica de Michael começou a ser construída quando ele passou a acompanhar palestras, dentre elas as de Sir Humphry Davy (1778-1829) na *Royal Institution of Great Britain*. Por volta de 1812, Faraday enviou a Davy uma carta desejando um emprego e, junto a ela, uma “transcrição”, rica em detalhes, mostrando que ele aprendera bastante sobre as palestras de seu futuro mentor^[20]. Em 1813, Faraday foi admitido como assistente de Davy, onde pode reproduzir e criar experimentos, sobretudo em eletroquímica, o que o possibilitou a desenvolver o primeiro motor homopolar relatado ^[22]. Em 1824, quando Michael tornou-se membro(fellow) da **Royal Society**, Davy, presidente da sociedade desde 1820, posicionou-se contra. Davy solicitou a Faraday que declinasse da nomeação, mas ele se recusou. Entretanto, Davy era uma autoridade dessa instituição e tinha certa autonomia para tomar decisões importantes em relação a ela. Assim, juntamente com o Conselho daquela sociedade, estabeleceu um Comitê para a descoberta da composição química e aperfeiçoamento de vidros com que pudessem oferecer propriedades ópticas satisfatórias. Este trabalho demandou “longos” 4 anos da carreira de Faraday. Para tanto, uma sala e fornalhas foram construídas nas dependências da própria Royal Institution, em setembro de 1827, sendo o sargento Charles Anderson, da Real Artilharia, designado para assistente. Faraday relatou muitas dificuldades em encontrar propriedades “ideias”, as quais deviam derivar de uma combinação singular entre composição e estrutura. Foi durante esse período que ele obteve o borato de chumbo com sílica, o **borossilicato de chumbo**, objeto que ele guardará por anos e que estará no contexto de duas entre suas maiores descobertas: não só sua primeira evidência de um corpo diamagnético, como também o material através do qual ele descobriria o efeito magneto-óptico.

Desde a descoberta de Oersted (sobre a ação magnética da corrente elétrica), em 1820, Faraday estava impulsionado e direcionado sobre a busca de uma relação mais íntima entre ações elétricas e magnéticas. Após anos de investigação, em 24 de novembro de 1831, ele inaugurou

sua série “*Experimental Researches in Electricity*” (ERE) ^[23], com um artigos que relatam a descoberta da indução eletromagnética, em um dos quais ele afirma :

“a esperança sobre a obtenção da eletricidade a partir do magnetismo comum, me estimulou em vários momentos a investigar experimentalmente o efeito indutivo das correntes elétricas” [^[23], p. 2.] .

2.2 A relação entre magnetismo e luz

James Clerk Maxwell (1831-1879) nos conta ^[24] que, em 1822, Faraday já estava trabalhando para verificar algum poder da força elétrica sobre a luz polarizada. Investigou a possibilidade da ação da corrente elétrica contínua, bem como de se estabelecer e interromper o contato elétrico (o que se relaciona à ação da indução eletromagnética) sobre um raio luminoso. Testou substâncias que se decompõe, por eletrólise, também as que não se decompõe (como nitrato de prata, vidro, etc), enquanto em estado sólido. Entretanto, não pode observar tal ação. Ainda segundo Maxwell, lê-se no diário de Faraday, datado em 6 de maio, “*Não vejo razão para esperar que qualquer tipo de estrutura ou tensão possa ser evidenciados em corpos decomponíveis ou não decomponíveis, em estados isolantes ou condutores*”.

No final do ano de 1837, Faraday publicou a descoberta da capacidade indutiva específica em dielétricos ^[25], onde ele também afirma sua concepção de que a linha de indução elétrica era a representação de uma ação contígua, propagada ponto a ponto do espaço, em linha curva. Disso surge certa controvérsia entre a concepção de Faraday, das linhas de força, e a concepção de Coulomb, de uma ação instantânea elétrica instantânea à distância. A aparente incompatibilidade entre as duas concepções, atrairá a atenção do jovem William Thomson (1824-1907), a partir da década de 1840 ^[26]. Em 1853, Thomson irá demonstrar que, dentro de um domínio eletrostático, tanto a ideia faradiana quanto a coulombiana são compatíveis ^[27]. Até que em 6 de agosto de 1845, W.Thomson indaga Faraday através de uma carta sobre uma possível ação da força eletrostática sobre a luz polarizada:

“Uma [...] questão que, penso eu, nunca foi investigada é relativa à ação de um dielétrico transparente sobre a luz polarizada. É sabido que uma ação bem definida é produzida sobre a luz polarizada quando transmitida através do vidro em qualquer estado ordinário de violenta tensão, análoga aquela através de um cristal transparente. Se a tensão, a qual pode ser elevada ao ponto de quebrar o vidro, pode ser produzida pela eletricidade, parece provável que uma ação similar possa ser observada.” ^[28], p. 147]

Faraday não demorou a responder, também por carta , em 8 de agosto, escreveu:

“Já trabalhei bastante sobre o estado de um dielétrico no tocante a luz polarizada, e você encontrará meus resultados negativos nos parágrafos 951-955 de meus *Experimental Researches* [...] Também trabalhei duramente sobre dielétricos cristalinos para descobrir alguma condição molecular nos mesmos (ver par. 1688, etc.), mas somente pude obter resultados negativos.” [28], p. 149]

Apesar do aceno negativo na carta, em 30 de agosto, ele tentou novamente encontrar uma ação de dielétricos sobre a luz polarizada, não obteve sucesso. Retomou também experimentos com a luz polarizada através de eletrólitos, e também vidro, quartzo e espato da Islândia. No dia 5 de setembro, usou o vidro que havia guardado na época do Comitê de Aperfeiçoamento óptico, o **borossilicato de chumbo**, como isolamento dielétrico entre as placas de um capacitor, as quais eram perfuradas com o objeto de analisar a luz polarizada que as atravessaria. Como ele afirma no diário de laboratório, “ainda sem efeito” [29], parágrafo 7499].

No dia 13 de setembro de 1845, Michael Faraday buscou alguma evidência da interação entre magnetismo e luz. Inicialmente, nos conta [29] que usou variadas configurações entre os ímãs selecionados para verificar uma possível ação no feixe de luz polarizada, utilizando o ar como meio (Figura 2).

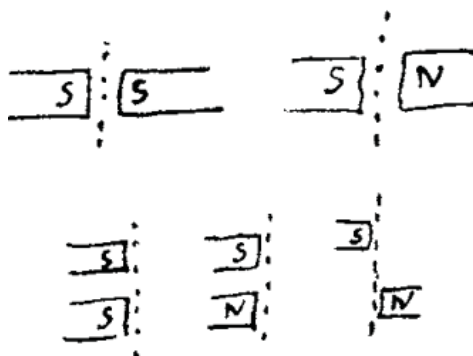


Figura 2 – Desenho feito por Faraday, em seu diário, para ilustrar as posições dos polos magnéticos arranjadas por ele, ora opostos, ora iguais, em lados opostos a direção da luz polarizada quando utilizou o ar como meio. Fonte: [29], p. 262]

Em seguida, usou *vidro flint*, *quartzo* e *espato da Islândia*, novamente. E nenhuma ação foi captada por ele. Após isso, lançou mão novamente do vidro pesado de **borossilicato de chumbo**. Fez a luz plano polarizada passar através do bloco de vidro pesado, primeiramente com polos magnéticos, tanto opostos quanto iguais, em lados opostos do percurso da luz. Nenhum efeito. Então, dispôs os polos opostos do mesmo lado do percurso da luz e um efeito foi produzido

sobre ela (Figura 3). Também encontrou o efeito no borato de chumbo e, em menor intensidade, no vidro de Silex e no vidro Crown. Em meio líquido o encontrou na água, no álcool, o éter, em grau decrescente de intensidade. Em óleos como o de amêndoa, de oliva, de rícino, de papoula, de linhaça, de espermacete de baleia, e outros, também o encontrou. Óleos essenciais como terebintina, de espiga de lavanda, de jasmin, de louro, etc. também exibiram atividade óptica induzida pelo magnetismo. Observou o fenômeno, ainda, em distintos hidrocarbonetos como óleo de enxofre fundido, cloreto de enxofre, cloreto de arsênico, etc. Conjecturou que em todas as substâncias aquosas, fosse a água o elemento ativo. No ar ou em “corpos gasosos” (oxigênio, hidrogênio, nitrogênio, óxido nítrico, ácido sulfúrico, ácido muriático, etc.) nada encontrou. Notou que o bálsamo da copaíba tinha poder rotatório contrário (direito), e que nas duas espécies de óleo de terebintina, um era de rotação direita e o outro esquerda. O efeito que acabou de descobrir corroborava a sua convicção de uma ligação indireta entre magnetismo e luz, proporcionada “pela mediação da substância na qual estas e o raio tem uma existência simultânea” ^[1], p. 15].

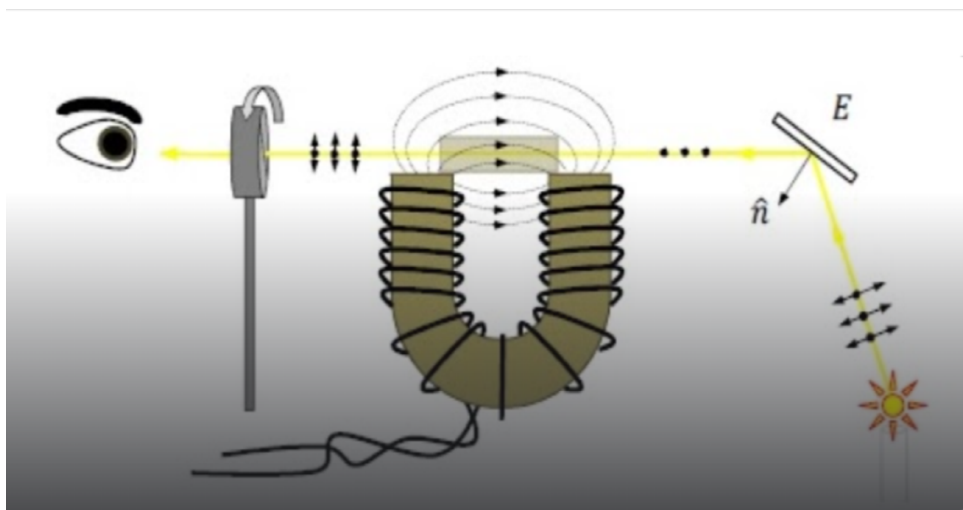


Figura 3 – Ilustração do arranjo experimental de Faraday em 13 de setembro de 1845: Uma fonte de luz cujo raio é polarizado por reflexão em um espelho atravessa uma barra do material (Borossilicato de Chumbo) que está posto entre os polos de um eletroímã, seguindo para o analisador (prisma de Nicol) e daí ao olho do observador. Quando o eletroímã é acionado a rotação do plano de polarização da luz que chega ao analisador é observada. Desligando o eletroímã, a situação original se restabelece.

Também listou várias substâncias transparentes, sólidas e líquidas, através das quais o efeito podia ser observado, aí incluindo meios cristalinos, de atividade óptica natural. Com relação aos meios opticamente ativos Faraday notou que o giro induzido pelo campo magnético apenas se sobrepunha ao giro naturalmente produzido. Porém, enquanto que no caso a atividade óptica natural, o giro pode ser desfeito fazendo o raio retornar após reflexão, no caso da atividade

óptica induzida pelo campo magnético externo o mesmo não ocorria, havendo uma deflexão sempre aumentada para um raio de luz percorrendo o caminho em ida e volta. Enquanto que a atividade óptica natural depende do sentido de propagação do raio na amostra, o efeito Faraday dependia exclusivamente do sentido do campo magnético externo e ocorria, nos meios de rotação direita, no mesmo sentido de “correntes Amperianas” capazes de produzir um campo paralelo ao campo magnético externo. Embora suas medidas não fossem precisas, estabeleceu que o ângulo de rotação, $\Delta\theta$ é proporcional à distância, d , percorrida pelo raio luminoso, no meio, e à intensidade do campo magnético, H . Não escreveu uma fórmula, mas podemos anacronicamente dizer que Faraday estabeleceu

$$\Delta\theta \propto H d, \quad (2.1)$$

se o campo é aplicado paralelamente à direção de propagação, e nulo se o campo magnético é aplicado perpendicularmente à direção de propagação.

A ação do vidro, um dielétrico, sobre o estado de polarização da luz lançou o pensamento de Faraday em nova direção. Tal ação somente poderia ocorrer se o vidro respondesse ao campo magnético aplicado, como que em um estado de magnetização novo ainda que muito fraco, distinto dos materiais usualmente chamados magnéticos como o Ferro, o Níquel ou o Cobalto. Intuiu que se abrisse, igualmente, a possibilidade de verificar-se a universalidade da natureza magnética da matéria. Investigações concomitantes o levaram então à esta segunda descoberta: a existência do **diamagnetismo**¹

2.3 O impacto da descoberta na comunidade científica

Em 6 de novembro de 1845, Faraday encaminhou o artigo que viria a inaugurar a 19ª série de seus *ERE* à Royal Society^[1]. Em 8 de Novembro, a Revista literária *Athenaeum* fez o anúncio público da descoberta na coluna “*Our Weekly Gossip*”, antes mesmo que seu artigo fosse lido perante a Royal Society, ocorrida em 20 de Novembro. No ano seguinte, houve uma reimpressão no *Philosophical Magazine*^[30], além de outras traduções como a da revista alemã *Annalen der Physik*^[31].

Ainda em 1846, Rudolph Boettger (1806-1881), professor de física e química no *Physikalischer Verein*, em Frankfurt, logo tomou conhecimento deste experimento. Reproduziu os experimentos de Faraday e os publicou. Concluiu como Faraday, e de forma independente, que o giro no plano de polarização devia-se à alguma mudança de estado das moléculas do meio transparente, na presença do campo magnético, e não na ação direta do campo magnético sobre a luz^[32]. Também na Alemanha, Johann Christian Poggendor (1796-1877) comentou e obteve

¹ Em certos materiais, após um campo magnético H ser aplicado, ocorre um alinhamento líquido de dipolos magnéticos no material (polarização magnética), no sentido inverso a H . A este fenômeno, denominamos *diamagnetismo*

uma tradução para o alemão do *On the magnetization of light and the illumination of magnetic lines of force* de Faraday.

Na França, a notícia chegou à Academia de Paris por Jean-Baptiste Dumas (1800-1884) [33]. A tradução completa da série 19 dos *ERE* para o francês nos “*Archives des Sciences physiques*” de maio [34] e então nos “*Annales de Physique*” [35] de julho. Claude Pouillet (1791-1868), que fora aluno e colaborador de Biot, foi o primeiro membro da academia a verificar o efeito Faraday, qualificando-o como “*fato fundamental, pois até o presente, não possui análogo na ciência*” [36].

Também, no ano de 1846, Alexandre-Edmond Becquerel (1820-1891) observou a similaridade entre a rotação magnética produzida no efeito Faraday e a da lei de Biot, da atividade óptica natural, quanto a sua dependência com o comprimento de onda, λ , da luz usada [37]. Estabeleceu, em primeira aproximação, uma lei do inverso do quadrado do comprimento de onda; o que nos permite reescrever (2.1) como

$$\Delta\theta \propto \frac{H}{\lambda^2} d. \quad (2.2)$$

Pierre Auguste (Augustin) Bertin (1818-1884) investigou a rotação magnética, chamando atenção para o poder rotatório de **dissulfeto de carbono** (“sulfure de carbone”), o triplo daquele da água e metade do vidro flint de Faraday [38].

Em 1851, Gustav Wiedemann (1826-1899) confirmou a dependência do ângulo de rotação, no efeito Faraday, proporcional à intensidade do campo. No entanto mostrou que (2.2) não era exatamente uma lei do inverso do quadrado do comprimento de onda, acentuando-se a discrepância no caso do **dissulfeto de carbono** [39, 40]. Analisando as linhas espectrais *C, D, E, F, G*, de Fraunhofer, na essência de terebintina e na essência de limão, concluiu que $\Delta\theta \lambda^2$ cresce não linearmente, com λ , notadamente para o **dissulfeto de carbono**. Comparou a rotação natural na terebintina, $\Delta\theta(\lambda_k, 0)$ à magneticamente induzida $\Delta\theta(\lambda_k, I)$, para as linhas $\{C, D, E, b, F\} \rightarrow \{k = 1, 2, 3, 4, 5\}$ de Fraunhofer, encontrando

$$\frac{\Delta\theta(\lambda_k, 0)}{\Delta\theta(\lambda_k, I)} \approx cte. \quad k = 1, 2, 3, 4, 5. ,$$

indicando a similaridade entre a rotação magnética e a natural, quanto ao comprimento de onda.

Na década seguinte, a partir de 1854, Marcel Émile Verdet (1824-1866) iniciou a série de investigações intituladas “*Recherches sur les propriétés optiques développées dans les corps transparents par l’action du magnétisme*”. Na primeira parte [41] Verdet recapitulou os experimentos de Pouillet, Becquerel e Boettger. Classificando-os como confirmadores da descoberta, mas que não foram além do que Faraday estabelecera ele próprio, exceto por Becquerel (2.2), que indicou a similaridade com a lei de Biot (1.1), da atividade óptica natural, na dependência do comprimento de onda. Verdet estabeleceu rigorosamente a proporcionalidade entre a rotação

do plano de polarização e a intensidade do campo magnético que a produz, tratando a grandeza do campo magnético a partir da eletrodinâmica de Weber e suas “*medidas eletrodinâmicas*”, tomando três substâncias em suas medidas: o vidro-pesado, o flint, e o **dissulfeto de carbono**. Faraday somente estabelecera que o efeito dependia da intensidade quando o campo magnético é paralelo à direção de propagação e nulo quando ortogonal a ela. Verdet ,então, confirmou ^[42], experimentalmente, que “*a rotação do plano de polarização é proporcional ao cosseno do ângulo subtendido entre a direção do raio de luz e aquela da ação magnética*”.

Em 1856, Verdet descobriu o poder rotatório magnético contrário ao da água, em **sais de ferro dissolvidos** no éter ou álcool ^[43]. No caso dos sais de níquel e manganês, revelaram poder rotatório similar ao da água. Testou também sais de cromo e cobalto com resultados inconclusivos. Sobre a oposição das atividades para os sais de Ferro e Níquel, apontou a dificuldade que tal propriedade trazia a qualquer teoria sobre o fenômeno. Chamou atenção também de que não é possível afirmar que o poder de rotação magnético é tanto mais fraca quanto mais forte é a capacidade magnética (a permeabilidade) do meio. Propôs chamar de “*direta*” a ação magnética da água e “*inversa*” a dos sais de ferro.

Em 1858, expressou a lei da rotação magnética ^[44] na forma

$$\Delta\theta_M = V \vec{m} \cdot \hat{s} d , \quad (2.3)$$

na qual $\vec{m} \cdot \hat{s}$ é o componente da força magnética na direção do feixe de luz. O parâmetro V , o qual ele chamou de *poder rotatório magnético* do meio, hoje chamada **“constante” de Verdet**, dependente da frequência da luz polarizada que o atravessa (em primeira aproximação $V \propto \lambda^{-2}$, conforme (2.2)). Mediu o valor de V para pouco mais de uma dezena de líquidos, comparando-o aos índices de refração n das substâncias correspondentes. Gaspard De La Rive (1801-1873) especulara uma proporcionalidade entre V e o índice de refração n do meio, mas os resultados de Verdet mostraram que a sugestão de De La Rive não se sustentava.

Em 1863, estabeleceu então que

$$V \propto \frac{1}{\lambda^2} f(\lambda) \quad (2.4)$$

sendo $f(\lambda)$ uma função lentamente decrescente de λ .

Vimos que a descoberta do efeito Faraday teve uma rápida e grande repercussão no meio científico. Além disso, ela será desafiadora para vários cientistas por décadas. Ainda abrirá caminhos para eles proporem modelos e explicações fenomenológicas da atividade magneto-óptica.

3 PRIMEIRAS ABORDAGENS TEÓRICAS DO EFEITO FARADAY

3.1 Equações de Airy e as análises de Verdet

George Biddell Airy (1801-1892) postulou, em 1846, uma equação para onda luminosa no efeito magneto-óptico ^[45]. Foi o primeiro tratamento matemático visando descrever o efeito Faraday. Partindo da visão, então geralmente aceita, de que a luz era uma onda transversal no éter elástico, fundado por Fresnel, Airy adotou uma abordagem fenomenológica do problema, introduzindo termos a priori na equação para a luz. Buscou inspiração no trabalho de MacCullagh sobre **birrefringência circular natural** em cristais de quartzo. Embora se referindo a este, por vezes, como “*Prof. MacCullagh*”, não citou nenhum artigo específico, o que nos permite deduzir que seja o “*On the laws of the Double refraction of quartz*” ^[46].

Com isso, se

$$\frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} - A \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial z^2} = 0 \quad , \quad \vec{e} \cdot \hat{z} = 0,$$

é a equação da onda para a deformação elástica transversal, \vec{e} , do éter, a qual representa a luz, no vazio; então no meio opticamente ativado pelo campo magnético seria,

$$\frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} - A \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial z^2} = C_m \hat{z} \times \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}, \quad (3.1)$$

o parâmetro C_m , a ser determinado pela experiência, depende da intensidade do campo magnético, que neste caso está aplicado na direção z , e é nulo sem a presença do mesmo. Airy verificou que as características das soluções de (3.1) são estados de polarizações circulares, tanto esquerdo quanto direito, com velocidades distintas gerando assim uma rotação do plano de polarização que, segundo ele, estariam de acordo com os dados experimentais do vidro de borossilicato de chumbo.

Airy também propôs mais duas opções para descrição do efeito Faraday, baseadas na ordem de derivação do termo que realiza o produto vetorial com a direção \hat{z} , em (3.1). Ordem essa que pode ser substituída, desde que ocorram termos cuja ordem total da derivada seja ímpar, já que isso seria a condição de termos polarizações circulares em acordo com (1.33). Na derivada espacial a ordem deve ser par, uma vez que no efeito óptico magneticamente induzido a rotação não é sensível a inversão $z \rightleftharpoons -z$, sendo ela dependente do sentido do campo magnético aplicado. As outras equações que, adicionalmente, foram sugeridas por ele

$$\frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} - A \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial z^2} = C_m \hat{z} \times \frac{\partial^3 \vec{e}}{\partial t \partial z^2}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} - A \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial z^2} = C_m \hat{z} \times \frac{\partial^3 \vec{e}}{\partial t^3}, \quad (3.3)$$

são boas candidatas à descrição da luz no meio com birrefringência circular, a depender dos dados experimentais. De fato, se tivermos uma equação da onda tal que

$$\frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} - A \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial z^2} = C_m \hat{z} \times \frac{\partial^{r+s} \vec{e}}{\partial t^s \partial z^r}, \quad r + s = 3. \quad (3.4)$$

Ao substituírmos (1.26) em (3.4) teremos

$$\left(n^2 \frac{\omega^2}{c^2} A - \omega^2 \right) \hat{p} = C_m \left[(i)^{r+s} \left(\frac{\omega^{r+s}}{c^r} \right) (n)^r \right] \hat{z} \times \hat{p}. \quad (3.5)$$

dividindo a equação acima por $\omega^2 A/c^2$ e fazendo $n_0 = c/\sqrt{A}$ ficamos com

$$(n^2 - n_0^2) \hat{p} = \frac{C_m}{A} i^{r+s} \left(\frac{\omega^{r+s-3}}{c^{r-2}} \right) n^r \hat{z} \times \hat{p},$$

ao passo que se nela consideramos as (1.29) e (1.31), bem como a restrição da ordem total de derivação ser ímpar, seguirá

$$(n^2 - n_0^2)^2 \hat{p} = \frac{C_m^2}{A^2} \left(\frac{\omega^{2r+2s-4}}{c^{2r-4}} \right) (n)^{2r} \hat{p},$$

o que nos leva portanto a

$$n_{\pm}^2 - n_0^2 = \pm \frac{C_m}{A} \frac{\omega^{r+s-2}}{c^{r-2}} n^r \quad (3.6)$$

Apesar de (3.6) já nos garantir que os modos de polarização são circulares esquerdo e direito, por conta do termo n^r pressupor uma indefinição de grau polinomial, não estão explícitos quais os valores de n associados a cada modo. Em vista de encontrarmos, Δn , definimos

$$n = n_0 + \alpha C_m. \quad (3.7)$$

Operando a expansão binomial em n^2 prosseguirá

$$n^2 = n_0^2 + 2\alpha C_m n_0 + \alpha^2 C_m^2,$$

já para o termo n^r , ao recorrer novamente para expansão, temos

$$n^r = n_0^r + r \alpha C_m n_0^{r-1} + r \alpha^2 C_m^2 n_0^{r-2} + \dots,$$

se consideramos apenas termos de até primeira ordem em C_m , substituindo n^2 e n^r em (3.6) e analisando para n_+ exprimiremos

$$\alpha = \frac{1}{2A} \frac{\omega^{r+s-2}}{c^{r-2}} n_0^{r-1}.$$

Isto significa que n_+ será

$$n_+ = n_0 + \frac{C_m \omega^{r+s-2}}{2A c^{r-2}} n_0^{r-1}, \quad (3.8)$$

Similarmente para n_-

$$n_- = n_0 - \frac{C_m \omega^{r+s-2}}{2A c^{r-2}} n_0^{r-1},$$

consequentemente

$$\Delta n = \frac{C_m \omega^{r+s-2}}{A c^{r-2}} n_0^{r-1},$$

a qual nos leva a um ângulo de rotação do plano de polarização, de acordo com (1.43), considerando que a onda percorra um caminho no intervalo de $d = 0$ até $d = 1$

$$\Delta \theta = \frac{C_m \omega^{r+s-1}}{2A c^{r-1}} n_0^{r-1}. \quad (3.9)$$

Em 1863, Verdet prossegue em suas investigações. Excluiu a possibilidade (3.1) mostrando que ela é incompatível com a lei de rotação magnética lei do inverso do quadrado do comprimento de onda ^[47]. Em desacordo, portanto, com (2.4). Buscando obter uma equação da onda que pudesse deduzir os aspectos dispersivos do efeito Faraday, a partir da experiência e dos dados que ele possuía. Aí aprofunda a abordagem fenomenológica de Airy, combinando os resultados deste com a teoria da dispersão de Cauchy ^[48], a qual admitira uma propagação da luz regulada pela equação

$$\frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} - \phi \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{e} = 0,$$

em que ϕ é um polinômio em $\partial^2/\partial z^2$, cujos coeficientes constantes dependem da natureza do meio. Desta equação decorre a relação de dispersão $\omega^2 - \phi(k^2) = 0$, bem como o índice de refração $n = n(\omega)$ do meio.

Verdet então propôs a equação de onda no meio dispersivo e com poder rotatório magnético, como uma extensão que incorpora (3.2) e (3.3), da forma

$$\frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} - \phi \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{e} = m \hat{z} \times \left[\psi \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{e} \right], \quad (3.10)$$

em que ϕ é o polinômio de grau par da dispersão ordinária e ψ um polinômio impar na derivada temporal e par na derivada segunda espacial. A constante m é proporcional a intensidade da ação magnética.

As sugestões de Airy, incorporadas por Verdet, correspondem às escolhas dos polinômios ψ

$$\psi_a = \frac{\partial^3}{\partial t \partial z^2}, \quad \psi_b = \frac{\partial^3}{\partial t^3}. \quad (3.11)$$

Além disso, uma inspeção cuidadosa indicava que a situação (3.3) adequava-se melhor que (3.2), embora mesmo esta não possibilitasse justificar os dados para o **creosoto**. Sua conclusão foi de que ψ não podia ser uma função universal, mas dependente de substância. Além disso, deu particular atenção ao **dissulfeto de carbono** e ao **creosoto**, por serem líquidos que ofereciam um grande poder dispersivo e uma transparência quase completa para as duas extremidades do espectro visível. Deles emergiram os dados que melhor exibiram as discrepâncias do poder rotatório V em relação ao índice de refração n , sendo a discrepância mais acentuada no creosoto, embora seja esse menos dispersivo que o dissulfeto de carbono.

3.2 A construção de Maxwell

Maxwell abraçou o programa de construir uma teoria das ações elétrica e magnética, baseada nas linhas de força de Faraday, assim que se graduou em Cambridge, em 1854 ^[49].

Em 1861, publica seu segundo artigo ^[50, 51], com uma pretensão de unificação, incluindo a óptica. Maxwell associa a ação eletromagnética como resultado de uma obra contígua do meio eletromagnético sobre os corpos nele imersos. Este meio, ele supõe estar em estado de “tensão” na direção das linhas de força e de “pressão” perpendicularmente às mesmas. Para isso introduz então o seu “mar de vórtices” (influenciado pelas hipóteses de Thomsom ^[52]), em que o campo magnético em um dado ponto é identificado com a velocidade turbilhonar do vórtice, no ponto considerado. Concebeu o meio etéreo como uma distribuição de vórtices moleculares dotados de elasticidade. Nos interstícios entre os vórtices implementou partículas, como rolamentos, que permitiam a livre rotação de vórtices adjacentes, podendo no entanto tensioná-los por deformação elástica. O campo magnético, \vec{H} , corresponde ao movimento turbilhonar dos vórtices, o deslocamento elétrico, \vec{D} , às deformações elásticas, $\vec{\epsilon}$, promediadas sobre a superfície do vórtice. A translação dos rolamentos corresponde à corrente elétrica, e o acúmulo deles é a carga elétrica livre. Maxwell mostrou que das relações dinâmicas de um sistema assim concebido surgem as leis da magnetostática, da eletrostática, da eletrodinâmica, da indução eletromagnética, bem como distúrbios elásticos cujo componente transversal tem as características da luz. Isto encerrou as partes I, II e III do longo artigo de Maxwell.

Sua primeira tentativa de uma justificativa dinâmica do efeito Faraday surgiu na parte IV ^[53]. Maxwell inicia por considerar o momento angular de um vórtice individual, o qual pode

ser expresso por,

$$\vec{L}_{cel} = \frac{\mu R}{4\pi} \vec{H} V_{cel} ,$$

sendo μ a permeabilidade magnética do meio (proporcional à densidade ρ do meio etéreo) R é o raio do vórtice etéreo e V_{cel} seu volume. Ainda \vec{H} é o campo magnético, aqui entendido como movimento turbilhonar do vórtice.

O efeito da deformação elástica induzida no vórtice pela passagem da onda elástica cisalhante (a luz) produz um torque, de modo que

$$\frac{d\vec{L}_{cel}}{dt} = \frac{\mu R}{4\pi} \frac{d\vec{H}}{dt} V_{cel} = \frac{\mu R}{4\pi} (\vec{H} \cdot \nabla) \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} V_{cel} . \quad (3.12)$$

Isso significa que há um estado de tensão, T_{ij} no vórtice, produzido pela passagem da onda, o qual se relaciona ao torque por¹

$$\frac{dL_{cel}^i}{dt} = \varepsilon^{ijk} \oint_{cel} x_j T_{kl} n^l dS ,$$

sendo \hat{n} o versor normal à superfície do vórtice, \vec{x} o vetor posição do elemento de área dS em que a integral de superfície atua.

Se consideramos pontos sobre a superfície do vórtice, podemos escrever

$$\vec{x} = R \hat{n} , \quad dS = R^2 d\Omega ,$$

onde $d\Omega$ é o elemento de ângulo sólido. Além disso, ao julgarmos uma geometria esférica para esse vórtice teremos

$$\frac{dL_{cel}^i}{dt} = R^3 \varepsilon^{ijk} \oint_{cel} n_j T_{kl} n^l d\Omega .$$

Supondo a não variação relevante de T_{kl} , no domínio dos vórtices, ficaremos com

$$\frac{dL_{cel}^i}{dt} = R^3 \varepsilon^{ijk} T_{kl} \oint_{cel} n_j n^l d\Omega ,$$

a qual, lançando mão da identidade

$$\oint_{cel} n_j n^l d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta_j^l , \quad (3.13)$$

se reduz a

$$\frac{dL_{cel}^i}{dt} = -\varepsilon^{ijk} T_{[jk]} V_{cel} , \quad (3.14)$$

em que,

¹ Conforme sabemos da dinâmica newtoniana dos meios contínuos

$$T_{[jl]} := \frac{1}{2}(T_{jk} - T_{kj}), \quad (3.15)$$

é a parte antissimétrica do tensor de tensões.

Quando igualamos (3.12) a (3.14), encontraremos

$$\frac{\mu R}{4\pi} (\vec{H} \cdot \nabla) \frac{\partial e^i}{\partial t} = -\varepsilon^{ijk} T_{[jk]},$$

ou, multiplicando por ε^{lmn}

$$\varepsilon_{lmn} \frac{\mu R}{4\pi} (\vec{H} \cdot \nabla) \frac{\partial e^i}{\partial t} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{lmn} \varepsilon^{ijk} (T_{jk} - T_{kj}).$$

Lembrando de um dos resultados do produto entre tensores Levi-Civita

$$\varepsilon_{imn} \varepsilon^{ijk} = \delta^j_m \delta_n^k - \delta^j_n \delta_m^k,$$

advém

$$\varepsilon_{lmn} \frac{\mu R}{4\pi} (\vec{H} \cdot \nabla) \frac{\partial e^i}{\partial t} = -\frac{1}{2} (\delta^j_m \delta_n^k - \delta^j_n \delta_m^k) (T_{jk} - T_{kj}) = -2T[mn],$$

da qual, renomeando os índices, emergirá

$$T_{jk} = -\varepsilon_{jki} \frac{\mu R}{8\pi} (\vec{H} \cdot \nabla) \frac{\partial e^i}{\partial t}, \quad (3.16)$$

T_{jk} representa, assim, o tensor de tensões da onda sobre os vórtices. A reação de tais tensões sobre a própria onda, \vec{f} , deve então ser adicionada a dinâmica dela. Tomando o divergente do tensor de tensões

$$f^j = \partial_k T^{jk} = \partial_k \left[-\varepsilon_i^{jk} \frac{\mu R}{8\pi} (\vec{H} \cdot \nabla) \frac{\partial e^i}{\partial t} \right],$$

disso decorre que para a onda transversal se propagando em z , então $\vec{e} = \vec{e}(z, t) = (e_x, e_y, 0)$ paralelamente ao campo magnético \vec{H} , conjuntamente com a proprieda vetorial (1.21),

$$\vec{f} = \frac{\mu R}{8\pi} H \hat{z} \times \frac{\partial^3 \vec{e}}{\partial t \partial z^2}, \quad (3.17)$$

resultando a equação da onda (luz)

$$\frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial z^2} = \frac{\mu R}{8\pi \rho} H \hat{z} \times \frac{\partial^3 \vec{e}}{\partial t \partial z^2}, \quad (3.18)$$

em que, ρ é a densidade do meio. Trata-se de uma equação similar à (3.2) e que contempla a birrefringência circular magnética.

Reparamos que (3.18) é um dos possíveis casos da (3.4). Assim sendo, conforme manuseamos para alcançar (3.9), aqui, o ângulo de rotação é compreendido segundo

$$\Delta\theta = \frac{\pi c^2}{4 a^3} \mu \frac{RH}{\rho} \frac{1}{\lambda^2} d, \quad (3.19)$$

Entretanto, o modelo falha! Pois, prevê que a rotação do plano de polarização é proporcional à μ , o que prediz ocorrência do efeito Faraday no éter livre ($\mu = 1$). Além disso, a dependência com os parâmetros também não lança qualquer luz sobre a inversão observada por Verdet em certos paramagnético ($\mu > 1$), a respeito dos diamagnéticos ($0 < \mu < 1$)

Em 08 de dezembro de 1864, Maxwell leu perante a Royal Society o artigo, hoje clássico, sobre a teoria eletromagnética da luz [2]. No qual, ele abandona qualquer justificativa mecânica para explicar a dinâmica do éter. Nesse modelo ele nos apresenta suas famosas equações que descrevem o comportamento da interação entre eletricidade, magnetismo e luz com o meio, predizendo também a existência de ondas eletromagnéticas transversais. Como essas descrições estavam pautadas no formalismo lagrangeano, não necessitavam de detalhes sobre um éter que as respaldassem, ou seja, sem precisar partir das leis de Newton para apoiar as variáveis de campo. Apesar disso, ele ainda consideraria a questão de se propor um modelo mecânico, o qual seria um aprofundamento necessário ao pleno entendimento.

Em relação ao efeito Faraday, Maxwell nos reporta os trabalhos de Verdet, mas não insiste mais no seu modelo dos vórtices e rolamentos, embora ainda argumente que há uma ligação profunda entre a direção do campo magnético e os eixos dos movimentos rotacionais no éter. Não há aqui, no entanto, nova tentativa de um tratamento teórico do efeito magneto-óptico.

Em 1873, Maxwell apresentou uma palestra na Royal Institution [54], na qual relata ao que chama uma das “mais frutíferas descobertas” de Faraday. Novamente defendeu a conexão entre magnetismo e a presença “vórtices moleculares” no meio etéreo. Porém, acrescenta “*O modo pelo qual a força eletromotriz atua ao iniciar ou interromper estes vórtices é mais obscura, embora, é claro, consistente com os princípios dinâmicos*”. Nesse mesmo ano, publica seu *A treatise of electricity and magnetism* [55], onde dedica um capítulo a problemática do efeito Faraday. Novamente defende a hipótese dos vórtices moleculares e sua ligação com o campo magnético. Partindo de uma abordagem lagrangeana, na qual a ligação do campo magnético com a velocidade angular dos vórtices é feita apenas por uma constante de proporcionalidade indefinida.

Encarando a luz como onda elástica \vec{e} , na ausência do campo magnético externo, a densidade lagrangeana dela seria

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right)^2 - \mathcal{U},$$

em que ρ é a densidade do meio e \mathcal{U} é o potencial elástico. A vorticidade da própria onda (o

turbilhão a ela associado) é, conforme Helmholtz ^[56]

$$\vec{\omega} := \frac{1}{2} \nabla \times \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla \times \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}. \quad (3.20)$$

Se, por outro lado, há uma região com campo magnético externo, o vórtice se torna

$$\vec{\omega}_{ext} \propto \vec{H},$$

em que \vec{H} é o campo magnético do meio (*hipótese de que os campos magnéticos são vórtices etéreos* de Thomson).

A onda, de vorticidade $\vec{\omega}$, ao entrar no ambiente de vorticidade $\vec{\omega}_{ext}$ pode reforçar esse vórtice, caso os sentidos delas sejam o mesmo, ou atenuar caso sejam de sentidos contrários. Maxwell não especifica como essa interação ocorre. Apenas supõe um acoplamento dado por

$$\mathcal{F}_{int} \propto \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}_{ext} = 2C \vec{\omega} \cdot \vec{H}, \quad (3.21)$$

onde C é a constante que carrega justamente a não especificação e detalhes dessa interação entre os vórtices, da onda e do meio (e que representará o poder rotatório magnético desse meio). Com isso, a onda luminosa propagando-se num ambiente com turbilhões \vec{H} terá energia cinética dada por

$$\mathcal{F} = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right)^2 + 2C \vec{\omega} \cdot \vec{H}, \quad (3.22)$$

ao passo que usarmos a (3.20) em (3.22) chegamos a

$$\mathcal{F} = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right)^2 + C \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right) \cdot \vec{H}. \quad (3.23)$$

Para nós, macroscopicamente, há um campo \vec{H}_0 no meio. A onda, porém, na escala das deformações por ela propagadas, modifica (deforma) os vórtices por onde passa. Segundo a teoria dos vórtices de Helmholtz, então

$$\vec{H}(\vec{e}, \vec{H}_0) = \vec{H}_0 + \left(\vec{H}_0 \cdot \nabla \right) \vec{e}, \quad (3.24)$$

de forma que (3.22) será

$$\mathcal{F} = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right)^2 + C \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right) \cdot \vec{H}_0 + C \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right) \cdot \left(\vec{H}_0 \cdot \nabla \right) \vec{e}. \quad (3.25)$$

Aplicando a variação no setor cinético(3.23) seguirá

$$\delta \mathcal{F} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \cdot \delta \vec{e} \right) - \left(\rho \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} \cdot \delta \vec{e} \right) \cdot \delta \vec{e} + C \left(\nabla \times \frac{\partial \delta \vec{e}}{\partial t} \right) \cdot \vec{H}_0 +$$

$$+ C \left(\nabla \times \frac{\partial \delta \vec{e}}{\partial t} \right) \cdot (\vec{H}_0 \cdot \nabla) \vec{e} + C \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right) \cdot (\vec{H}_0 \cdot \nabla) \delta \vec{e} ,$$

ou ainda

$$\delta \mathcal{F} = - \left(\rho \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} \cdot \delta \vec{e} \right) \cdot \delta \vec{e} + C \left(\nabla \times \frac{\partial \delta \vec{e}}{\partial t} \right) \cdot (\vec{H}_0 \cdot \nabla) \vec{e} + C \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right) \cdot (\vec{H}_0 \cdot \nabla) \delta \vec{e} . \quad (3.26)$$

Note que

$$\left(\nabla \times \frac{\partial \delta \vec{e}}{\partial t} \right) \cdot (\vec{H}_0 \cdot \nabla) \vec{e} = \frac{\partial}{\partial t} \left[(\nabla \times \delta \vec{e}) \cdot (\vec{H}_0 \cdot \nabla) \vec{e} \right] - (\nabla \times \delta \vec{e}) \cdot (\vec{H}_0 \cdot \nabla) \delta \vec{e} ,$$

e também

$$\left(\nabla \times \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right) \cdot (\vec{H}_0 \cdot \nabla) \delta \vec{e} = (\vec{H}_0 \cdot \nabla) \left[\left(\nabla \times \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right) \cdot \delta \vec{e} \right] - \delta \vec{e} \cdot \left[(\vec{H}_0 \cdot \nabla) \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{e} \right) \right] .$$

Logo, se usarmos a propriedade vetorial

$$\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\nabla \times \vec{a}) \cdot \vec{b} - (\nabla \times \vec{b}) \cdot \vec{a} , \quad (3.27)$$

além de descartar os termos de fronteira, resulta que a variação da densidade lagrangiana, por Maxwell, é

$$\delta \mathcal{L} = - \left[\rho \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} + 2C (\vec{H}_0 \cdot \nabla) \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right) \right] \cdot \delta \vec{e} - \delta \mathcal{U} . \quad (3.28)$$

Como Maxwell não especifica a teoria da dispersão considerada, tomemos a liberdade de escolha de uma função quadrática das derivadas espaciais e dependente de apenas um parâmetro elástico, o qual denotaremos por κ . Assim para a variação da energia potencial elástica de um meio isotrópico não dispersivo temos^[57]

$$\delta \mathcal{U} = -\kappa \nabla^2 \vec{e} \cdot \delta \vec{e} .$$

Utilizando essa relação em (3.28) e lançando mão do princípio variacional ($\delta \mathcal{L} = 0$), alcançamos a dinâmica da onda na forma

$$\frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 \vec{e} = -\frac{2C}{\rho} (\vec{H}_0 \cdot \nabla) \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right) , \quad (3.29)$$

onde redefinimos a velocidade da onda tal que

$$a = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} . \quad (3.30)$$

Além do mais, se o campo \vec{H}_0 estiver na direção z então

$$\frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial z^2} = -\frac{2C}{\rho} H_0 \hat{z} \times \frac{\partial^3 \vec{e}}{\partial t \partial z^2}, \quad (3.31)$$

que é essencialmente (3.18), porém com a liberdade introduzida pela presença do parâmetro indeterminado C . Maxwell, novamente, obtém a sugestão (3.2) de Airy para dispersão rotatória. Disso, conclui, em consonância com (3.19) que o ângulo de rotação do plano de polarização é dado segundo a expressão

$$\Delta\theta = 4\pi^2 \frac{c^2}{a^3} \frac{1}{\rho\lambda} C d, \quad (3.32)$$

em que d é a espessura do caminho percorrido pela luz e C a constante indeterminada do modelo, alcançada experimentalmente. Isso, portanto, é consistente com (3.11), uma das possibilidades favorecidas por Verdet em 1863, muito embora os resultados dele não indicassem, claramente, a universalidade da fórmula, contrapostos pelos dados do creosoto e do dissulfeto de carbono.

3.3 Novo efeito magneto-óptico

O físico escocês, John Kerr (1824-1907), no ano de 1876, mostrou que o plano de polarização da luz pode ser rotacionado ao refletir sobre a superfície dos polos de um ímã ^[58]. Kerr, em 1878, anunciou o, hoje conhecido, efeito Kerr polar ^[59] para a luz incidente polarizada no plano de incidência, constatando que o fenômeno é mais complexo, podendo a rotação sofrer inversão de sentido, a partir do ângulo de incidência no entorno de 75° .

No intuito de descrever esse novo efeito, Francis Fitzgerald (1851-1901) investigou mais a fundo as condições de contorno sobre a interface de separação entre o ar e o meio rotatório magnético. Defensor da teoria eletromagnética da luz, FitzGerald almejava estabelecer uma teoria eletromagnética da reflexão/refração; tema que o próprio Maxwell deixara aberto à interpretações em sua obra eletromagnética.

A óptica de MacCullagh, baseada na formulação lagrangeana, (1.48), havia produzido uma teoria da reflexão/refração consistente com a leis de Fresnel, dos senos e das tangentes, o que levou FitzGerald a tomá-la como guia. Em 1879 postulou, então, a seguinte correspondência entre as variáveis de campo de Maxwell e de MacCullagh ^[60]:

$$\vec{D} \Leftrightarrow \nabla \times \vec{e}, \quad \vec{H} \Leftrightarrow \frac{\partial \vec{e}}{\partial t},$$

bem como a correspondência, antes estabelecida por Maxwell, entre a matriz inversa do tensor de permissividade ϵ_{ab} e as elasticidades de Fresnel K_{ab} . A partir desta associação, a *teoria eletromagnética da luz* herdou da óptica de MacCullagh sua teoria da reflexão/refração e as condições de contorno sobre os campos na interface de separação entre dois meios não dispersivos.

O objetivo de FitzGerald era, no entanto, estender tal teoria à descrição ao efeito Kerr e, para isso, modificou o setor cinético de (1.48), introduzindo o acoplamento entre os *vórtices* de Maxwell, como em (3.23), e com ele obteve novas condições de contorno para os campos na superfície de separação entre o ar e o meio com dispersão rotatória. Seus resultados reproduziram de forma tolerável o efeito Kerr, mas o meio rotatório em questão era transparente, o que obviamente não se aplica ao ferro ou aço.

Em 1879, descobriu-se finalmente o efeito Faraday através de gases, na França, por Antoine Henry Becquerel (1852-1908) ^[61] e por E. Bichat ^[62], na Alemanha, por A. Kundt (1839-1894) e Wilhem Conrad Röntgen (1845-1923) ^[63].

3.4 Descrição eletromagnética do efeito Faraday

Ainda, no ano de 1879, Edwin Herbert Hall (1855-1938), descobriu o efeito que hoje leva seu nome. Hall observou a existência de uma força eletromotriz, \vec{E}_h , nas laterais de uma lâmina condutora atravessada pela corrente elétrica, \vec{J} , estando a lâmina na presença de um campo magnético externo, \vec{B}_0 , perpendicular ao plano da lâmina ^[64].

Henry Augustus Rowland (1848-1901), orientador de Hall, havia estudado com Helmholtz, em Berlim, quando demonstrou experimentalmente que um disco dielétrico eletrizado (eletricidade estática) posto para girar (carregando junto a eletricidade) se comportava como um disco de corrente (óbvio para nós, mas discussão não trivial à época). Devido a descoberta da “*Nova ação magnética*” de Hall, Rowland imaginou que uma força eletromotriz similar ocorrerá em dielétricos, para a corrente de deslocamento. No efeito Hall temos

$$\vec{E}_h(\vec{J}) = r_h \vec{B}_0 \times \vec{J}, \quad (3.33)$$

em que r_h é uma constante característica do condutor. Analogamente para Rowland,

$$\vec{E}_h(\vec{D}) = r_h \vec{B}_0 \times \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

em que $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ é o vetor deslocamento elétrico, ε a permeabilidade do material.

A correspondente equação de Maxwell para a “*força eletromotriz*”, com a contribuição do termo da “*nova ação magnética*”, é

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + r_h \vec{B}_0 \times \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (3.34)$$

Como

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (3.35)$$

a lei de Faraday se escreve então como

$$\nabla \times \left(\vec{E} - r_h \varepsilon \vec{B}_0 \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.36)$$

Além disso, a “lei das correntes” de Ampère-Maxwell permanece com sua forma usual

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (3.37)$$

Rowland explicitou a equação da onda eletromagnética a partir do potencial vetorial magnético \vec{A} de divergência nula

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0. \quad (3.38)$$

Se multiplicarmos (3.34) por $\mu_0 \varepsilon$ e aplicarmos nela a derivada parcial temporal, virá

$$\left(\mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) - r_h \varepsilon \vec{B}_0 \times \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}. \quad (3.39)$$

Note que de (3.35) e (3.37) temos

$$\mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A},$$

onde se usarmos a (3.38) obteremos

$$\mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\nabla^2 \vec{A}. \quad (3.40)$$

Ao substituirmos (3.37) em (3.36), resulta

$$\mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = -r_h \varepsilon \vec{B}_0 \times \nabla^2 \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right). \quad (3.41)$$

A partir disso, a equação de onda eletromagnética propagando-se em z , isto é com $\vec{A} = \vec{A}(z, t)$, paralelamente à direção do campo \vec{B}_0 é

$$\mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} = -r_h \varepsilon B_0 \hat{z} \times \frac{\partial^3 \vec{A}}{\partial t \partial z^2}, \quad (3.42)$$

mostrando que o mecanismo de Rowland está em conformidade com (3.2) de Airy. Com isto posto, a rotação magnética, de acordo com (3.9), resultará na forma

$$\Delta \theta = 2\pi^2 r_h c n_0^3 \frac{1}{\lambda^2} B_0 d. \quad (3.43)$$

Em (3.43) vemos que tanto a intensidade quanto o sinal da constante de Verdet são determinados pela constante Hall, r_h . Isso fez Rowland sugerir que essa relação entre efeitos Hall e Faraday, indicava mais uma evidência forte da autenticidade que *teoria eletromagnética da luz* carrega.

Porém, Em 1881, Hall obteve ^[65] medidas de r_h para os metais magnéticos (positiva para o Ferro e Cobalto, enquanto que para o Níquel encontrou valor significativamente maior e negativo) que colocaram em cheque a crença de Rowland sobre a identidade entre os dois fenômenos. O estudo do efeito Hall nos metais magnéticos revelou que não estava claro se o efeito era função da indução eletromagnética, \vec{B}_0 , do campo magnético, $\mu\vec{B}_0$, ou do grau da magnetização, \vec{M} , induzida no metal, pelo campo aplicado \vec{H}_0 . Medidas de r_h para o Níquel pareciam indicar a dependência com \vec{M} , na medida em que o efeito deixava de crescer proporcionalmente ao campo aplicado próximo à intensidade de saturação.

4 ÍONS E ELÉTRONS

4.1 Breve histórico sobre a teoria da dispersão

A partir das teorias, discutidas até aqui, que descreveram a atividade óptica, natural ou magnética, podemos afirmar que elas nos mostram possuir uma espécie exótica de dispersão. Neste contexto, se os efeitos magneto-ópticos, tanto de Faraday, quanto de Kerr, estivessem e, harmonia com *teoria eletromagnética da luz*, conseqüentemente se poderia esperar um fundamento eletromagnético da dispersão. Inicialmente, o desenvolvimento da teoria da dispersão se deu dentro das teorias elastodinâmicas da luz, como vertente dominante. Desde sua origem, com a teoria de Cauchy ^[48], a crença generalizada era de que o índice de refração devesse decair com o comprimento de onda, relação essa estabelecida empiricamente por

$$n_0(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}, \quad (4.1)$$

na qual (A, B, C) são constantes características do meio e determinadas experimentalmente. Entretanto, em 1862, François Leroux observou raios de diferentes cores através de um prisma que continha vapor de iodo. Chamou atenção para inversão na ordem do matiz, na qual a cor vermelha possuía um desvio mais acentuado que a cor azul. Denominou essa nova característica de *dispersão anômala*

Em 1872, Wolfgang von Sellmeier conjecturou que as partículas da matéria respondem as vibrações etéreas gerando uma adição vibratória ao próprio éter. Tais partículas possuem uma frequência natural de vibração, pois cada uma está presa aos respectivos sítios. Assim é representada a dispersão ^[66]. Em particular, se uma vibração do éter está próxima à frequência natural da partícula material, então se dá a ressonância, invalidando (4.1) na vizinhança do comprimento de onda dessa ressonância. A fórmula de Sellmeier da dispersão,

$$n^2(\omega) - 1 = \sum_a \alpha_a \frac{\omega_a^2}{\omega_a^2 - \omega^2}, \quad (4.2)$$

foi capaz de explicar a dispersão anômala, como resultado das ressonâncias que ocorrem em torno das frequências naturais $\{\omega_a\}$ das partículas da matéria, as frequências de absorção. Os α_a , constantes características do meio, fornecem intensidades associadas à cada absorção.

Em 1875, Hermann von Helmholtz (1821–1894) deu o passo seguinte ao modelo de Sellmeier introduzindo o amortecimento como parte das forças às quais as partículas estão submetidas em seus sítios, distinguindo dois sistemas de equações acopladas, um para as vibrações luminais do éter e outra das partículas ^[67]. Helmholtz contornou assim a dificuldade de

se obter o resultado fisicamente inaceitável $n \rightarrow \infty$ para as frequências de absorção, conforme (4.2). Entretanto, tudo aqui é mecânico, na tradição da elastodinâmica da luz.

4.1.1 Dispersão e ondas eletromagnéticas

No período entre 1886-1888, Rudolf Heinrich Hertz (1857-1894) produziu ondas eletromagnéticas em laboratório, demonstrando que tais distúrbios se propagam na mesma velocidade que a luz, refratam, refletem e interferem tal e qual a onda luminosa^[68]. O “irradiador”, dispositivo pelo qual Hertz produziu ondas eletromagnéticas, consistia basicamente num dipolo elétrico oscilante, o que levou à sugestão da presença de pequenos “irradiadores de Hertz” no íntimo da matéria, responsáveis não somente pela emissão de luz por parte desta, quando aquecida, por exemplo, como também pela dispersão da luz que a atravessa. Tal descoberta tendenciou a preferência de uma nova geração de físicos para adoção da teoria eletromagnética da luz em detrimento a elastodinâmica luminosa. De forma que éter eletromagnético, o qual era representado por alguma forma das “*equações de Maxwell*”, ganhou força, após os experimentos de Hertz. Abriu-se então o novo campo da óptica das “*ondas Hertzianas*”, bem como ampliou-se os horizontes da *teoria eletromagnética da luz*.

Deste modo, em 1893, Helmholtz elaborou de sua teoria da dispersão anterior^[69], na qual as partículas da matéria, agentes da dispersão óptica, foram agora substituídos por “*íons*” os quais carregam polarizações elétricas. Assim o sistema de equações “de Maxwell” descrevia a dinâmica do éter eletromagnético enquanto que a dinâmica das polarizações fornecia a ação dispersiva que a matéria exerce sobre o éter (sobre a luz), estando ambos os sistemas acoplados.

No ano de 1892, Hendrik Antoon Lorentz admitiu a existência de pequenas partículas materiais dotadas de carga elétrica^[70], tratando da dinâmica das partículas imersas em um éter estacionário, capazes de influenciá-lo e serem influenciadas, por intermédio de suas cargas. Para Lorentz a polarização em dielétricos resulta do afastamento, elasticamente forçado, de partículas de cargas iguais e opostas, e que as correntes amperianas resultam dos movimentos cíclicos das mesmas. A partir disso, estabeleceu a lei de força sofrida pela partícula de carga e pelo éter circundante:

$$\vec{f} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B}. \quad (4.3)$$

Combinando a dinâmica da partícula de massa m_e , no interior do dielétrico, elasticamente presa ao seu sítio com a dinâmica da onda eletromagnética, obteve a formula de dispersão

$$n^2(\omega) - 1 = \frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (4.4)$$

cuja forma permanece inalterada, ainda hoje, no eletromagnetismo clássico!

4.2 Os modelos de Drude

Paul Karl Ludwig Drude (1863-1906) foi contemporâneo de Hertz e defensor da superioridade da descrição eletromagnética da luz e da matéria, com relação à "velha escola" como bem expressou em seu livro *Physik des Äthers* ^[71]. Nesta obra, tinha como objetivo “*derivar, com base em experimentos fundamentais, as fórmulas estritamente necessárias para a caracterização matemática das características observáveis*”. Nesse sentido não justificou o eletromagnetismo em bases mecânicas. Ainda, no livro, abordou a dispersão rotatória magnética da luz, apontando dificuldades no modelo dos vórtices moleculares, de Maxwell, que depende da mecânica do éter subjacente. Também apontou dificuldades do mecanismo de Rowland-Hall, já que o bismuto apresenta o efeito Hall mais forte e atividade magnética mais baixa que o Ferro; e este, por sua vez, apresenta efeito Hall fraco. Adotou como equações de Maxwell para descrição do efeito magneto-óptico, as quais reescrevemos em linguagem anacrônica, em unidades do *S.I.*,

$$\nabla \times \left[\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{b} \times \vec{E}) \right] = -\mu \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (4.5)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (4.6)$$

em que \vec{b} é o vetor magneto-óptico, a ser deduzido de alguma teoria do fenômeno (inexistente). A permissividade elétrica ε produz o índice de refração ($n \propto \sqrt{\varepsilon}$). Além do efeito Faraday, juntamente com condições de contorno apropriadas, tais equações podem descrever o efeito Kerr, sendo possível afirmar que \vec{b} deve ser proporcional à magnetização, \vec{M} .

Drude estabeleceu, em 1899, uma compreensão dos efeitos magneto-ópticos relacionando os parâmetros eletromagnéticos à hipótese iônica da matéria ^[72]. Propôs duas abordagens, aos quais se associam fórmulas de dispersão rotatória magnética distintas.

4.2.1 Hipótese Hall

Na primeira, que chamou de **hipótese Hall**, o íon em movimento é uma corrente que sofre ação direta do campo aplicado, \vec{B} , tal como ocorre no efeito Hall, sendo esta ação

$$\mu_0 e \dot{\vec{s}} \times \vec{B}.$$

Considera, dessa forma, que a dinâmica do íon de massa m e carga e , o qual está deslocado de \vec{s} a partir da sua posição de equilíbrio, sob ação da força elástica $-m\omega_0^2 \vec{s}$, do campo elétrico, $e\vec{E}$ da onda eletromagnética que atravessa o meio, assim como da “*ação hall*” do campo \vec{B} , é

$$m\ddot{\vec{s}} + m\omega_0^2 \vec{s} + 2m\gamma \dot{\vec{s}} = -e\vec{E} - \mu_0 e \dot{\vec{s}} \times \vec{B}, \quad (4.7)$$

portanto a equação de um oscilador harmônico amortecido e forçado. Se supormos uma solução harmônica no tempo do tipo $\vec{s} = \vec{s}_0 e^{i\omega t}$ e a substituirmos em (4.7) ficaremos com

$$\vec{s} = -\frac{e/m}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)} \vec{E} - \mu_0 i \frac{\omega\omega_c}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)} \vec{s} \times \hat{n}, \quad (4.8)$$

na qual definimos $\vec{B} = B_0 \hat{n}$ e $\omega_c = e \frac{B_0}{m}$. Se tomarmos o produto vetorial de (4.8) com \hat{n} resulta

$$\vec{s} \times \hat{n} = -\frac{e/m}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)} \vec{E} \times \hat{n} - \mu_0 i \frac{\omega\omega_c}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)} (\vec{s} \times \hat{n}) \times \hat{n}.$$

Como $\vec{s} = -\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{s})$, virá

$$\vec{s} \times \hat{n} = -\frac{e/m}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)} \vec{E} \times \hat{n} + \mu_0 i \frac{\omega\omega_c}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)} \vec{s},$$

que ao ser substituída em (4.8) produz

$$\vec{s} \times \hat{n} = -\frac{e/m}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)} \vec{E} \times \hat{n} + \mu_0 i \frac{\omega\omega_c}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)} \left[-\frac{e}{m} \vec{E} \times \hat{n} + i\mu_0 \frac{\omega\omega_c}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)} \vec{s} \right].$$

Ainda, ao multiplicarmos a equação anterior por $(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)^2$ e isolando \vec{s}

$$\vec{s} = -\frac{e}{m} \left[\frac{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)^2 - \omega^2 \omega_c^2} \right] \vec{E} - \mu_0 \frac{e}{m} \left[\frac{i\omega\omega_c}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)^2 - \omega^2 \omega_c^2} \right] \hat{n} \times \vec{E}. \quad (4.9)$$

Note que podemos escrever $i\omega\vec{E} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Além disso, lembrando que $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$, bem como usando a propriedade anticomutativa do produto vetorial, surgirá

$$\vec{s} = \frac{e/m}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)} \vec{E} + \mu_0 \frac{e^2 m^2}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{H}_0. \quad (4.10)$$

Se este meio possuir condições típicas dos meios transparentes ao espectro visível e estiver longe das frequências de ressonância o fator $2i\gamma\omega$ pode ser desprezado e (4.10) se reduz a

$$\vec{s} = \frac{e/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E} + \mu_0 \frac{e^2 m^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B}_0. \quad (4.11)$$

O vetor polarização, $\vec{P} = -Ne\vec{s}$, associado é então

$$\vec{P} = \frac{Ne^2/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E} - \mu_0 \frac{Ne^3/m^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \vec{B}_0 \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (4.12)$$

em que N é o número de íons por unidade de volume. De forma análoga, vetor deslocamento elétrico será

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} v_h \hat{n} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (4.13)$$

na qual \hat{n} é o versor que indica a direção do campo aplicado e, ainda, introduzimos os parâmetros

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (4.14)$$

$$v_h = -\mu_0^2 B_0 \frac{Ne^3}{m^2} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}, \quad (4.15)$$

os quais são, respectivamente, a permissividade elétrica efetiva (ε) do meio e o parâmetro rotatório (v_h). Havendo N_a íons opticamente ativos de tipos e_a , de massa m_a , e frequência natural ω_a , as contribuições de todos eles devem ser levadas em conta, no que resulta

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \sum_a \frac{N_a e_a^2}{m_a} \frac{1}{(\omega_a^2 - \omega^2)}, \quad (4.16)$$

$$v_h = -\mu_0^2 B_0 \sum_a \frac{N_a e_a^3}{m_a^2} \frac{1}{(\omega_a^2 - \omega^2)^2}. \quad (4.17)$$

As **Equações de Maxwell** do problema, no modelo da **hipótese Hall**, são a lei de Faraday em sua forma padrão e a lei de Ampère-Maxwell com a presença do termo dispersivo, (4.13), na corrente de deslocamento, isto é,

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (4.18)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + v_h \hat{B} \times \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (4.19)$$

A dinâmica da onda eletromagnética que delas decorre é, por sua vez, considerando que os campos sejam solenoidais,

$$\mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{E} = -v_h \hat{B} \times \frac{\partial^3 \vec{E}}{\partial t^3}. \quad (4.20)$$

Se a onda se propaga paralelamente ao campo \vec{B}_0 , tomada como direção z , (4.20) reduz-se à

$$\mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -v_h \hat{z} \times \frac{\partial^3 \vec{E}}{\partial t^3}, \quad (4.21)$$

que conforme (3.9) gera uma rotação magnética dada por

$$\Delta\theta = 2\pi^2 c^3 \left(\frac{1}{n_0} \frac{v_h}{\lambda^2} \right) d. \quad (4.22)$$

4.2.2 Os circuitos moleculares

Na segunda abordagem ele considera que os íons tem momento magnético, chamando-a de **hipótese dos circuitos moleculares de Ampère-Weber**,

$$m = \frac{e}{T_e} S_e = \frac{1}{2\pi} e \omega_0 S_e, \quad (4.23)$$

sendo T_e o período natural, conseqüentemente e/T_e a corrente no circuito molecular a ele associado, S_e a área do circuito molecular. Tais momentos produzem magnetização \vec{M} a qual se associa a indução magnética \vec{B}_M , dados por

$$\vec{M} = Nm\hat{M}, \quad \vec{B}_M = \mu_0\vec{M}, \quad (4.24)$$

sendo N o número de circuitos moleculares por unidade de volume e \hat{M} o versor que indica a direção da magnetização.

Drude então considerou que o íon é um “pacote” de massa m e carga e que carrega consigo o seu momento magnético molecular - abstração feita por Drude 32 anos antes do experimento de Otto Stern e Walther Gerlach, no qual o spin foi evidenciado! -. Assim a dinâmica (4.7) agora é dada por

$$m\ddot{\vec{s}} = e\vec{E} - m\omega_0^2\vec{s} - 2m\gamma\dot{\vec{s}}, \quad (4.25)$$

sem o termo $\vec{s} \times \vec{B}$.

Novamente temos uma equação tipo oscilador harmônico. Supondo também a mesma solução harmônica de antes virá

$$\vec{s} = \frac{e/m}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)} \vec{E}, \quad (4.26)$$

de onde se obtém também

$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial t} = \frac{e/m}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (4.27)$$

O vetor polarização \vec{P} e o deslocamento elétrico \vec{D} serão

$$\vec{P} = Ne\vec{s} = N \frac{e^2}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)} \vec{E}, \quad (4.28)$$

e

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E}. \quad (4.29)$$

As oscilações desses “pacotes” carregam consigo magnetizações, logo as oscilações dos momentos magnéticos provocam oscilações do \vec{M} o que exige correção à lei de Faraday devido à variação de fluxo tal que

$$\vec{E}' = \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} \times \vec{B}_M = -v_m \hat{M} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

na qual introduzimos o parâmetro

$$v_m := \frac{\mu_0 N e^2}{2\pi m} \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (4.30)$$

Se existirem N_a íons ativos, de carga e_a , massa m_a , frequência natural ω_a e de momentos magnéticos m_a , a contribuição de todos devem ser levados em conta. Isso significa que ε em (4.29) será o mesmo dado em (4.16), enquanto que (4.30) se tornará

$$v_m := \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_a \frac{N_a e_a^2}{m_a} \frac{\omega_a}{\omega_a^2 - \omega^2} S_a. \quad (4.31)$$

Incorporando então a força eletromotriz \vec{E}' à lei de Faraday, bem como (4.29), as **Equações de Maxwell** do problema no modelo dos **circuitos moleculares**, são

$$\nabla \times \left(\vec{E} - v_m \hat{M} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (4.32)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (4.33)$$

as quais são um refinamento do modelo exibido por Drude em 1894, (4.5) e (4.6).

Ao aplicarmos o rotacional em (4.32) vem

$$-\nabla^2 \vec{E} - v_m (\hat{M} \cdot \nabla) \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (4.34)$$

onde usamos a propriedade vetorial

$$\nabla \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\nabla \cdot \vec{b}) \vec{a} - (\nabla \cdot \vec{a}) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b},$$

além do fato dos campos (\vec{E}, \vec{B}) serem supostos solenoidais de forma que

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

Se usarmos, afinal, a (4.33) na (4.34), decorre que a equação da onda eletromagnética será

$$\mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{E} = -v_m (\hat{M} \cdot \nabla) \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \quad (4.35)$$

O parâmetro responsável pela rotação magnética agora é v_m . Porém, conforme (4.30), este parâmetro depende do grau e do tipo (paralela ou antiparalela) de magnetização induzida no meio, pelo campo aplicado \vec{H}_0 . Supondo que a magnetização induzida corresponde ao ponto de saturação na curva de histerese, a magnetização será máxima e estará na mesma direção do campo aplicado \vec{H}_0 . Tomando-a como eixo z e sendo também esta a direção de propagação da luz, então

$$\vec{E} = \vec{E}(z, t) = (E_x, E_y, 0), \quad \hat{M} = (0, 0, 1),$$

e (4.35) reduz-se à

$$\mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -v_m \hat{z} \times \frac{\partial^3 \vec{E}}{\partial t \partial z^2}, \quad (4.36)$$

a qual gera uma rotação magnética, novamente, em acordo com (3.9)

$$\Delta \theta = 2\pi^2 c \left(n_0 \frac{v_m}{\lambda^2} \right) d. \quad (4.37)$$

Drude analisou os dados experimentais sobre o Efeito Faraday com o intuito de verificar a concordância com os modelos propostos por ele. Obteve fórmulas de dispersão a dois parâmetros, tanto para o modelo *hall* como o dos *circuitos moleculares*. Considerou que o meio somente tinha íons ativos em frequências no ultravioleta. Com isso, tomando a velocidade da luz no vácuo, $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$, e imaginando que a frequência natural do íon seja ω_1 , bem como $[(\omega/\omega_a)^2 \approx 0, a = 2, 3, 4, \dots]$, para o índice de refração teremos então, a partir de (4.16)

$$n^2 = 1 + \sum_a \frac{N_a e_a^2}{\varepsilon_0 m_a} \frac{1}{(\omega_a^2 - \omega^2)} = 1 + \frac{N_1 e_1^2}{m_1} \frac{1}{(\omega_1^2 - \omega^2)} + \frac{N_2 e_2^2}{m_2} \frac{1}{(\omega_2^2 - \omega^2)} + \frac{N_3 e_3^2}{m_3} \frac{1}{(\omega_3^2 - \omega^2)} + \dots$$

mas, $\omega_2^2 - \omega^2 \approx \omega_2^2$, $\omega_3^2 - \omega^2 \approx \omega_3^2$ Logo,

$$n^2 = 1 + \frac{N_1 e_1^2}{m_1} \frac{1}{(\omega_1^2 - \omega^2)} + \frac{N_2 e_2^2}{m_2} \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{N_3 e_3^2}{m_3} \frac{1}{\omega_3^2} + \dots$$

ou ainda,

$$n^2 = 1 + \sum_{a=2} \frac{N_a e_a^2}{\varepsilon_0 m_a} \frac{1}{\omega_a^2} + \frac{N_1 e_1^2}{m_1} \frac{1}{\omega_1^2} \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \right]^{-1}.$$

Na equação anterior se somarmos e subtrairmos o termo

$$\frac{N_1 e_1^2}{m_1} \frac{1}{\omega_1^2},$$

virá

$$n^2 = 1 + \sum_{a=1} \frac{N_a e_a^2}{\epsilon_0 m_a \omega_a^2} + \frac{N_1 e_1^2}{\epsilon_0 m_1 \omega_1^2} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right]^{-1}.$$

Chamando

$$a = 1 + \sum_{a=1} \frac{N_a e_a^2}{\epsilon_0 m_a \omega_a^2}, \quad (4.38)$$

$a = 1 + e$, também, tomando a relação

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda},$$

obteremos

$$n^2 = a + \frac{N_1 e_1^2}{\epsilon_0 m_1 \omega_1^2} \frac{\lambda_1^2}{\lambda - \lambda_1^2}.$$

Uma vez que o comprimento de onda se relaciona com a frequência por

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega},$$

podemos reescrevermos o índice de refração na forma

$$n^2 = a + \frac{4\pi^2 c^2 N_1 e_1^2}{\epsilon_0 m_1 \omega_1^4} \frac{1}{\lambda - \lambda_1^2},$$

e definindo

$$b = \frac{4\pi^2 c^2 N_1 e_1^2}{\epsilon_0 m_1 \omega_1^4}, \quad (4.39)$$

virá finalmente

$$n^2 = a + \frac{b}{\lambda - \lambda_1^2}, \quad (4.40)$$

que é a fórmula obtida para o índice de refração, o qual é comum aos dois modelos e possui ressonância no ultravioleta.

Para o coeficiente v associado a rotação magnética podemos lançar mão do mesmo tratamento matemático anterior. Em relação a abordagem *Hall*, usando (4.17), seguirá

$$v_h = -\mu_0^2 B_0 \frac{N_1 e_1^3}{m_1^2 \omega_1^4} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right]^2 - \mu_0^2 B_0 \sum_{a=2} \frac{N_a e_a^3}{m_a^2 \omega_a^4},$$

ou ainda

$$v_h = -\mu_0^2 B_0 \frac{N_1 e_1^3}{m_1^2 \omega_1^4} \frac{\lambda^4}{(\lambda^2 - \lambda_1^2)^2} - \mu_0^2 B_0 \sum_{a=2} \frac{N_a e_a^3}{m_a^2 \omega_a^4}.$$

Se definirmos

$$a'' := -\mu_0^2 B_0 \sum_{a=2} \frac{N_a e_a^3}{m_a^2 \omega_a^4}, \quad b'' := -\mu_0^2 B_0 \frac{N_1 e_1^3}{m_1^2 \omega_1^4}, \quad (4.41)$$

obtemos

$$v_h = a'' + b'' \frac{\lambda^4}{(\lambda^2 - \lambda_1^2)^2}. \quad (4.42)$$

A lei de rotação magnética (4.22) se torna, assim,

$$\Delta\theta_h = 2\pi^2 c^3 \frac{1}{n_0} \left[\frac{a''}{\lambda^2} + \frac{b'' \lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_1^2)^2} \right] d. \quad (4.43)$$

Já para o coeficiente rotatório \tilde{v} , usando (4.31), na abordagem sobre os *circuitos moleculares* segue que

$$v_m = \left(\frac{N_1 e_1^2 S_1}{m_1 \omega_1} \right) \frac{\lambda^4}{(\lambda^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{a=2} \frac{N_a e_a^2 S_a}{m_a \omega_a}.$$

Desta vez, chamando,

$$a' := \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{a=2} \frac{N_a e_a^2 S_a}{m_a \omega_a}, \quad b' := \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{N_1 e_1^2 S_1}{m_1 \omega_1},$$

concluimos que

$$v_m = a' + b' \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_1^2}. \quad (4.44)$$

E a lei de rotação para o caso das *correntes moleculares*, (4.37), será

$$\Delta\theta_m = 2\pi^2 c n_0 \left[\frac{a'}{\lambda^2} + \frac{b'}{\lambda^2 - \lambda_1^2} \right] d \quad (4.45)$$

Drude afirmou que os modelos estavam bem alinhados com os dados de Verdet para **disulfeto de carbono** e para o **creosoto**, porém favoreceu a abordagem dos *circuitos moleculares* comparativamente, em relação ao mecanismo da *hipótese hall*.

Na região próxima à ressonância favoreceu o mecanismo **hall**. Em tais circunstâncias os termos em b'' e b' acima são os dominantes, sendo que no modelo regido por b'' (hall) o sentido da rotação magnética se preserva, ao nos aproximarmos de λ_1 por valores menores ou maiores. Já no modelo regido por b' (circuitos moleculares) ocorre uma inversão do sentido da rotação. Macaluso e Corbino ^[73] observaram a rotação magnética em **vapores metálicos** de Sódio e Lítio, próxima à ressonância e seus dados não indicaram qualquer inversão. Isso levou Drude a admitir que provavelmente o mecanismo *hall* seria aquele aplicável a “*todos os gases e vapores.*”

Também favoreceu o mecanismo **hall** em vapores metálicos devido à birrefringência observada quando o raio atravessa o meio perpendicularmente ao campo magnético aplicado, conforme obtido por Woldemar Voigt (1850-1919) ^[74]. Tal birrefringência é inexistente no mecanismo dos **circuitos moleculares**, o que pode ser visto aqui tomando-se o termo da birrefringência circular em (4.35)

$$v_m (\hat{M} \cdot \nabla) \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$

Considerando o campo aplicado em z , $\hat{M} = \hat{z}$, e $(\hat{M} \cdot \nabla) \vec{E} = \partial \vec{E} / \partial z$. A onda propagando-se, digamos em x , é caracterizada por $\vec{E} = \vec{E}(x, t)$ o que anula o termo em questão. Assim a luz propagando-se perpendicularmente deve “perceber” o meio como isotrópico.

O ano de 1900 foi auspicioso para Drude. Além de tornar-se editor da prestigiada revista alemã *Annalen der Physik*, publicou seu segundo livro **Lehrbuch der Optik** ^[75], o qual marcou definitivamente a incorporação da teoria eletromagnética da luz e se tornou uma das obras mais influentes da Física. Para Buchwald ^[76], foi o primeiro trabalho abrangente no qual uma abordagem microscópica da ótica foi estabelecida. Logo na introdução Drude chama atenção

“Em primeiro lugar, desta forma se procede a uma explicação do fenômeno da dispersão, os experimentos puramente eletromagnéticos apenas sugerem, eu diria, a propriedade macroscópica dos corpos. Para explicar a dispersão óptica é necessário fazer hipóteses sobre a propriedade microfísica dos corpos [...] porque me parece a mais fácil, mais clara e, conseqüentemente, a que mais caracteriza, além da dispersão, as propriedades magnético-ópticas, bem como as dos corpos em movimento” ^[75], v].

No capítulo dedicado as “*substâncias magneticamente ativas*” tratou o efeito Faraday a partir das duas abordagens, **hall** e das **circuitos moleculares**, apontando as mesmas qualidades e defeitos de cada um, como o fizera em 1899. Destacou que a hipótese **hall** é aquela que provavelmente se aplica aos “*gases e vapores*”, identificando que no vapor de Sódio o íon em questão era negativo (o elétron). Mostrou que este mecanismo permite explicar a birrefringência

dos vapores metálicos, observada quando a luz se propaga perpendicularmente à direção com campo aplicado.

Quando se trata, porém, das propriedades magneto-ópticas dos metais *fortemente magnéticos*, o Ferro, Níquel e Cobalto, aponta a inadequação da *hipotese hall* que não é capaz de fornecer a dependência da rotação magnética com a magnetização e a observada saturação, a partir da qual o aumento no campo \vec{H} não implica no aumento do poder rotatório magnética. Admite assim que, ainda que o mecanismo *hall* nunca esteja totalmente ausente, os dados experimentais indicavam que a influência das *correntes moleculares* é, nestes casos, muito maior, aplicando-o também à descrição do *efeito Kerr*.

4.3 A afirmação do elétron

O termo “elétron” foi cunhado por George Johnstone Stoney (1826-1911) para designar o íon do hidrogênio, obtido na eletrólise^[77]. Tal “elétron” possui uma relação carga/massa

$$\frac{e'}{m_H} \approx 10^4. \quad (4.46)$$

Em 1896, Peter Zeeman (1865-1943) descobriu a separação das linhas espectrais sob ação de um campo magnético externo, paralelo a direção de propagação da luz^[78]. Lorentz, que era mentor de Zeeman, logo descreveu o novo efeito com base na teoria dos íons, estimando sua relação carga/massa, em unidades eletromagnéticas, em

$$\frac{e}{m_e} \approx 10^7, \quad (4.47)$$

e estabelecendo que eram negativos. Se distinguia do íon positivo associado ao hidrogênio (4.46) pelo sinal contrário e por sua relação carga massa 10^3 vezes superior. Medidas de e/m_e e e^2/m_e no efeito Zeeman indicaram que a carga e era igual e oposta a carga e' e que, portanto, era a sua massa do novo íon 10^3 menor. A princípio, Lorentz não chamou essa carga de *elétron*, o que viria a adotar só a partir de 1899.

Paralelamente, estudos sobre descargas elétricas em gases e a natureza dos *raios catódicos* estavam em andamento e deles surgiram evidências que as relacionavam com a ascensão do elétron. Em 1895, Jean Baptiste Perrin (1870-1942) mostrou que transportavam eletricidade negativa^[79]. Em 1897, a interpretação de que se tratava de um feixe de partículas ganhou força, após sucessivas medidas de relação carga/massa. Em janeiro Emil Johann Wiechert (1861-1928) declarou que eram raios massivos, de partículas 1500 vezes menos que a do íon do hidrogênio^[80]. Joseph John Thomson (1856-1940), no famoso artigo intitulado “*Cathode Rays*”^[81], apresentou sua única medida da relação carga massa, no valor de $m/e = 1,6 \times 10^{-7}$, em unidades C.G.S. eletromagnéticas. Em síntese, tais medidas forneceram que os “*corpúsculos*” catódicos possuem a mesma relação carga massa, (4.47), que o íon do efeito Zeeman.

No ano de 1899, J.J.Thomson ^[82] forneceu evidência de que o mesmo *corpúsculo* catódico é o íon presente no *efeito foto-elétrico*, no *efeito termo-iônico*, também o mesmo envolvido no processo de ionização de todos os gases, sob ação dos raios-X, bem como os constituintes da recém descoberta *emissão beta* radioativa. Tais descobertas colocaram o elétron como um íon cuja presença na constituição da matéria era universal.

4.4 O declínio do modelo das correntes moleculares

A, já citada, hipótese **hall** de Drude corresponde à abordagem do efeito-Faraday que Lorentz apresentou em sua teoria do elétron ^[5], na qual o termo $\dot{\vec{s}} \times \vec{B}_0$ surge como consequência do setor magnético da força de Lorentz. É a abordagem “de primeiros princípios” que encontramos nos livros ainda usados no presente, como a “descrição clássica” do efeito-Faraday ^[3, 83].

No período que se seguiu à publicação do *Lehrbuch*, dificuldades lá apontadas no mecanismo das *correntes moleculares* aprofundaram-se. Também o *status* do elétron como *íon fundamental* se consolidou, o que levou ao favorecimento quase universal da *hipótese hall* como mecanismo da rotação magnética no efeito-Faraday, apesar deste mecanismo não permitir a descrição da dependência quanto a magnetização de saturação. No prefácio da segunda edição do *Lehrbuch* de 1906, Drude afirma que os desdobramentos da teoria da dispersão e da atividade rotatória magnética, desde 1900, estiveram basicamente associados à substituição da *hipótese iônica* pela *hipótese do elétron* a qual ele incorporou e indicou nos pontos pertinentes. O mais significativo avanço, alerta, foi certamente o tratamento da emissão de radiação térmica, após os trabalhos de Planck (1900) com a determinação da lei do corpo negro.

Em 1908, Voigt publicou “*Magneto-und Elektro-Optik*” ^[84], apontando as dificuldades do modelo das correntes moleculares quanto ao comportamento da curva de dispersão na vizinhança das linhas de absorção, e também a birrefringência induzida quando o campo é aplicado transversalmente à direção de propagação da luz, que havia sido estabelecida por ele em vapores metálicos e *inequivocamente* em líquidos como o nitrobenzeno. Para Voigt, um critério da maior importância para descartar os esquemas explicativos que fossem incapazes de prever a birrefringência transversal, como é o caso de (4.35). A partir disso, o modelo das “correntes moleculares” rapidamente definiu.

No ano seguinte Lorentz publicou “*The Theory of Electrons*” ^[5], onde elencou como marcos da conexão entre os fenômenos eletromagnéticos e ópticos os efeitos Faraday (1845), Kerr (1877) e Zeeman (1896). O efeito Faraday foi aqui discutido, como já dissemos, a partir de sua teoria do elétron, o que corresponde ao mecanismo *hall* de Drude, tendo o elétron como íon universal.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscamos evidenciar como a descoberta do efeito Faraday não resultou de uma investigação acidental e aleatória, mas que teve suas origens em toda uma tradição que descreveu a atividade óptica natural, desembocando em uma série de estudos e experimentos com o intuito de revelar a natureza intrínseca das interações luminosas. Fresnel consolidou, assim, uma teoria da birrefringência advogada sobre um meio elástico, abrindo caminho para modelos dinâmicos que a respaldaram. Vimos, também, que o mecanismo elastodinâmico de MacCullagh para a atividade óptica do quartzo serviu de base à conjecturas que estavam além de seu tempo.

Com a manifestação do efeito-magneto óptico surgiram, em seguida, teorizações acerca da dinâmica responsável pelo fenômeno. Conquanto elas se adequavam a certos casos, novos indícios experimentais, como a descoberta da “rotação inversa” nos fluidos ferromagnéticos por Verdet, abriam mais leques sobre a fundamentação do Efeito Faraday. Também, destacamos que a teoria eletromagnética da luz de Maxwell teve como pressuposto o achado de Faraday, apesar de não ter contemplado este.

Observamos que quanto mais se avançava na óptica dos meios dispersivos, mais ficava evidente a necessidade de se estabelecer uma separação entre as propriedades do éter e da matéria. Com o advento da hipótese iônica, a interação entre o campo eletromagnético e as “moléculas” tomaram forma resultando na teoria da dispersão eletromagnética de Lorentz, cuja extensão à dispersão rotatória nos trouxe informações sobre os parâmetros dinâmicos da atividade magneticamente induzida, proporcionada, sobretudo, pelos trabalhos de Drude.

A teoria iônica foi capaz de produzir dois modelos, realizando fisicamente o significado da constante magneto-óptica. A falta de evidências mostradas, por exemplo, por Macaluso; Corbino e Voigt contribuíram para decadência no modelo dos *circuitos moleculares*. Com a afirmação do elétron somente a *hipótese Hall* sobreviveu. A princípio, o efeito Faraday poderia agora ter uma descrição clássica fundamentada e completa com os parâmetros de campo e atomísticos, o que não houve!

Com as devidas ressalvas e advertências, nossos textos didáticos, talvez, devessem abordar de forma mais detalhada as implicações teóricas no modelo das *Correntes Moleculares* como alternativa explicativa do efeito Faraday, a nível clássico.

REFERÊNCIAS

- 1 FARADAY, M., *Philosophical Transactions of Royal Society*, **136**, pp. 1-20 (1846).
- 2 MAXWELL, J.C., *Philosophical Transactions of Royal Society*, **155**, pp. 459-512 (1865).
- 3 SCHWARTZ, M., *Principles of electroDynamics* (Dover, New york, 1987).
- 4 GRIFFITHS, David J., *Introduction to electrodynamics* (Prentice Hall, New Jersey, 1999)
- 5 LORENTZ, H.A., *The Theory of electrons*, (MacMillan & CO., London, 1909).
- 6 ARAGO, F., *Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut Impérial de France* , P.I, année 1811, p.93 (1812).
- 7 BIOT, J.B., *Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut Impérial de France*, P.I, année 1811, p. 135 (1812).
- 8 BIOT, J.B., *Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut Impérial de France*, P.I, année 1812, p. 1 (1814).
- 9 LECLERCQ, F., *Revue d'histoire des sciences*, **66**, pp. 396-416 (2013/2).
- 10 BIOT, J.B., *Bulletin des Sciences par la Société Philomatique de Paris*, p. 190 (1815).
- 11 BIOT, J.B., *Annales de Chimie et Physique*, **10**, p. 63 (1819).
- 12 BUCHWALD, Jed Z., *The Rise of the Wave Theory of Light* (Chicago Univ. press, Chicago, 1989).
- 13 FRESNEL, A.J., *Oeuvres complètes*, **T.1**, pp. 385-349 (1866).
- 14 FRESNEL, A.J., ARAGO, F., *Annales de Chimie et Physique*, **10**, p. 288 (1819).
- 15 FRESNEL, A.J., *Annales de Chimie et Physique*, **17**, pp. 102-112; pp. 167-196 (1821).
- 16 FREITAS, L.D.L., **A birrefringência da luz na abordagem elastodinâmica**. Orientador: Marcelo Costa de Lima. 2021. 103 f. TCC (Graduação) – Curso de Física Licenciatura, Faculdade de Física, Universidade Federal do Pará, Belém, 2021.
- 17 FRESNEL, A.J., *Note sur la double réfraction du verre comprimé*, Ann Chim Phys II, **20**, pp. 376-383 (1822).
- 18 MACCULLAGH, J., *Philosophical Magazine*, **x**, s. 3, p. 42 (1837).
- 19 MACCULLAGH, J., *Transactions of the Royal Irish Academy*, **xxi**, p. 17 (1848).
- 20 WHITTAKER, E., *A History of theories of aether and electricity* (Longmans, Green, and Co., London, 1910).

- 21 JENKINS, A., *Michael Faraday's mental exercises: an artisan essay-circle in regency*, (Liverpool University Press, London, 2008), Vol. 51.
- 22 FARADAY, M., "New Electro-Magnetic Apparatus", *Quarterly Journal of Science, Literature and the Arts*, **12**, pp. 186-187 (1821).
- 23 FARADAY, M., *On the Induction of Electric Currents; On the Evolution of Electricity from Magnetism; On a New Electrical Condition of Matter; On Arago's Magnetic Phenomena.*, Royal Society, **122**, p. 125 (1832).
- 24 MAXWELL, J.C., *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell* (Dover Publ. Inc., New York, 1965), **2**, pp. 786-793.
- 25 FARADAY, M., *Philosophical Transactions of Royal Society*, **128**, p.1 (1838).
- 26 THOMSON, W., *On the mathematical theory of electricity in equilibrium*, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **v.8**, n.49, pp. 42-62 (1854).
- 27 THOMSON, W., *On the mutual attraction or repulsion between two electrified spherical conductors*, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **v. 5**, n. 32, p. 287-297 (1853).
- 28 THOMPSON, S.P., *The life of William Thomson*, (MACMILLAN and Co. Limited, London, 1910), v.1, pp. 147-149.
- 29 FARADAY, M., *Faraday's diary of experimental investigation*, (2nd. ed., HR Direct, 2008), **vol. 4**, par. **7499** p. 262.
- 30 FARADAY, M., *Philosophical Magazine*, S.3, **28**, p. 294 (1846).
- 31 FARADAY, M., *Annalen der Physik*, **144**, p. 105 (1846).
- 32 KNUDSEN, O., *Archive for History of Exact Sciences*, **15**, n°3, p.235 (1976).
- 33 FARADAY, M., *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'académie de Sciences*, **22**, pp. 113-115 (1846).
- 34 FARADAY, M., *Archives des Sciences Physiques et Naturelles de Genève*, **T.1**, pp.385-416, (1846)
- 35 FARADAY, M., *Annales de Chimie et de Physique*, Ser.3, **17**, pp. 359-392 (1846).
- 36 POUILLET, *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'académie de Sciences*, **22**, pp.135-146 (1846).
- 37 BECQUEREL, E., *Annales de Chimie et de Physique*, S.3, **17**, pp. 437-451 (1846).

- 38 BERTIN, A., *Annales de Chimie et de Physique*, S.3, **23**, pp.5-32 (1848).
- 39 WIEDMANN, G., *Annalen der Physik*, **158**, pp.215-232 (1851).
- 40 WIEDMANN, G., *Annales de Chimie et de Physique*, S.3, **34**, pp.121-124 (1852).
- 41 VERDET, E., *Annales de chimie et de physique*, S.3, **41**, pp. 370-412 (1854).
- 42 VERDET, E., *Annales de chimie et de physique*, S.3, **43**, pp. 37-44 (1855).
- 43 VERDET, E., *Comptes Rendus*, **43**, pp. 529-532 (1856).
- 44 VERDET, E., *Annales de chimie et de physique*, S.3, **52**, pp. 129-163 (1858).
- 45 AIRY, G.B., *Philosophical Magazine*, S. 3, **28**, p.469 (1846).
- 46 MACCULLAGH, J., *On the laws of the double refraction of quartz*, P. Dixon Hardy, (1836).
- 47 VERDET, E., *Annales de Chimie et physique*, **69**, p.415 (1863).
- 48 CAUCHY, A., *Nouveaux Exercices de Mathématiques*, (J.G. Calve lib., Prague, 1836).
- 49 MAXWELL, J.C., *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, **10**, p. 155 (1855).
- 50 MAXWELL, J.C., *Philosophical Magazine*, S.4, **21**, n° 139, pp. 161-175; n° 140, pp.281-291 (1861).
- 51 MAXWELL, J.C., *Philosophical Magazine*, S.4, **22**, n° 151, p. 12 (1862).
- 52 THOMSOM, W., “*Dynamical Illustrations of the Magnetic and the Helicoidal rotatory effects on transparent Bodies on Polarized Light*, *Philosophical Transactions of Royal Society*, **8**, pp. 150-158 (1857).
- 53 MAXWELL, J.C., *Philosophical Magazine*, S.4, **23**, n° 152, pp.85-95 (1862).
- 54 MAXWELL, J.C., *On Action at a Distance*, *Proceedings of the Royal Institution of Great Britain*, **7**, pp.44-54 (1873).
- 55 MAXWELL, J.C., *A treatise on electricity and Magnetism*, 1st ed. (Clarendon Press, Oxford, 1873), v.2.
- 56 HELMHOLTZ, H., *Philosophical Magazine*, S.4, **33**, p.485 (1867).
- 57 DE LIMA, M.C; FREITAS, L. D. L. *Fresnel-Green-Maxwell: a teoria da birrefringência em três atos*, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. **43**, p.7 (2021).
- 58 KERR, J., *Philosophical Magazine*, S.5, **3**, p.321 (1877).
- 59 KERR, J., *Philosophical Magazine*, S.5, **5**, p.161 (1878).

- 60 FITZGERALD, G.F., *Philosophical Transactions of Royal Society of London*, **171**, pp. 691-711 (1880).
- 61 BECQUEREL, H., *Comptes Rendus*, **88**, pp. 709-712 (1879).
- 62 BICHAT, E., *Comptes Rendus*, **88**, pp. 712-713 (1879).
- 63 KUNDT, A., RONTGEN, W.C., *Annalen der Physik*, 242, pp. 332-336 (1879).
- 64 HALL, E.H., *American Journal of Mathematics*, **2**, p. 287 (1879).
- 65 Hall, E.H., *Philosophical Magazine*, S.5, **12**, p. 157 (1881).
- 66 SELLMEIER, W., *Annalen der Physik*, **221**, pp. 399-421; pp. 520-549, (1872).
- 67 HELMHOLTZ, H. *Annalen der Physik*, **230**, pp. 582-596, (1875).
- 68 HERTZ, H., *Annalen der Physik*, **270**, pp. 551-569; pp. 609-623 (1888).
- 69 HELMHOLTZ, H., *Annalen der Physik*, **284**, pp.389-405 (1893).
- 70 LORENTZ, H.A., *Archives Néerlandaises*, pp. 363-552, (1892).
- 71 DRUDE, P., *Physik des Äthers auf elektro-magnetischer Grundlage* (Enke, Stuttgart, 1894).
- 72 DRUDE, P., *Verh Deutsch Phys. Ges.*, **1**, p.107 (1899).
- 73 MACALUSO, D. & CORBINO, O.M., *Comptes Rendus*, **127**, pp. 647-651 (1898).
- 74 VOIGT, W., *Annalen der Physik*, **303**, pp. 345-365 (1899).
- 75 DRUDE, P., *Lehrbuch der Optik*, (S.Hirzel, Leipzig, 1900), 1a. edição alemã.
- 76 BUCHWALD, JED.Z., *From Maxwell to microphysics: aspects of electromagnetic theory in the last quarter of the nineteenth century*, (University of Chicago Press, 1985).
- 77 STONEY, G.J., *Of the "electron," or atom of electricity: To the editors of the Philosophical Magazine*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, v. 38, n. 233, p. 418-420 (1894)
- 78 ZEEMAN, P., *Nature*, **55**, p.347 (1897).
- 79 PERRIN, J., *Comptes Rendus*, **121**, p.1130 (1895).
- 80 WIECHERT, E., *Schriften d. Physikalisch-Ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg in Preussen*, **38**, p.3 (1897).
- 81 THOMSON, J.J., *Philosophical Magazine*, S.5, **44**, p.293 (1897).
- 82 THOMSON, J.J., *Philosophical Magazine*, S.5, **48**, pp.547-567 (1899).

- 83 HECHT, E., *Optics* (Pearson Educ. Limited, Harlow England, 2017).
- 84 VOIGT, W., *Magneto-und Elektro-Optik*, (B.G. Teubner, Leipzig, 1908).