



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SALINÓPOLIS  
FACULDADE DE FACULDADE DE MATEMÁTICA

DIELLE CRUZ DA COSTA

**SOLUÇÃO EXATA E ESTABILIZAÇÃO EXPONENCIAL PARA  
UMA EQUAÇÃO DE REAÇÃO-DIFUSÃO NÃO LINEAR**

Salinópolis - Pa

2019

DIELLE CRUZ DA COSTA

**SOLUÇÃO EXATA E ESTABILIZAÇÃO EXPONENCIAL PARA  
UMA EQUAÇÃO DE REAÇÃO-DIFUSÃO NÃO LINEAR**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Faculdade de Matemática do Campus de Salinópolis da Universidade Federal do Pará, como requisito básico para a obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos

Coorientador: Prof. Dr. Lindomar Miranda Ribeiro

Salinópolis - Pa

2019

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD  
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará  
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a)  
autor(a)**

---

C955s Cruz da Costa, Dielle  
Solução exata e estabilização exponencial para uma  
equação de reação - difusão não linear / Dielle Cruz da  
Costa. — 2019.  
35 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos  
Coorientador(a): Prof. Dr. Lindomar Miranda Ribeiro  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Curso de  
Licenciatura em Matemática, Campus Universitário de  
Salinópolis, Universidade Federal do Pará, Salinópolis, 2019.

1. Equação de reação-difusão. 2. solução exata. 3.  
decaimento exponencial. 4. simulação computacional. I.  
Título.

CDD 515.353

---

DIELLE CRUZ DA COSTA

**SOLUÇÃO EXATA E ESTABILIZAÇÃO EXPONENCIAL PARA  
UMA EQUAÇÃO DE REAÇÃO-DIFUSÃO NÃO LINEAR**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Faculdade de Matemática do Campus de Salinópolis da Universidade Federal do Pará, como requisito básico para a obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos

Coorientador: Prof. Dr. Lindomar Miranda Ribeiro Ramos

Data da apresentação: 04/07/2019

Banca examinadora

---

Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos

---

Prof. Dr. Lindomar Miranda Ribeiro

---

Prof. MSc. Marcos Lima Cardoso

Salinópolis - Pa

2019

# DEDICATÓRIA

*Dedico à meu Deus, à meus pais Jocivaldo e Dilma e aos meus irmãos Jocielle e Geovane. Entrega o teu caminho ao Senhor; confia nele, e ele agirá. **Salmos 37:5***

# AGRADECIMENTOS

Primeiro a Deus pelas oportunidades que tem me concedido, por sempre estar comigo em todos os momentos decisivos de minha vida, por me guiar a fazer as melhores escolhas, por me dotar de saúde, persistência, paciência e disposição para poder alcançar os meus objetivos.

Aos meus pais Jocivaldo Casseb e Dilma Cruz por serem incansáveis em sua luta, sempre preocupados em garantir nosso melhor, por sempre estarem me auxiliando na escolha do melhor caminho, por me darem forças para que eu continuasse com os meus propósitos e com toda humildade e simplicidade me ensinaram a valorizar as pequenas coisas que a vida nos oferece e nunca desistir de nossos objetivos, agradeço aos meus irmãos Jocielle Costa e Geovane Costa pelos seus incentivos e confiança.

Aos colegas de graduação: Carlos Alberto, Edson Marcos, Marcel Ellain, Willian Mozart, João Ricardo, Maysa Fernanda. Em especial, ao meu amado, amigo e companheiro Danilo Paixão pela sua dedicação, paciência e afeto, por estar comigo nos piores e melhores momentos dessa caminhada sempre me apoiando dando força e acreditando em mim, aos meus irmãos de curso Werllen Lisboa e Samuel Sarmiento pelas suas amizades e por sempre me ajudarem durante esse percurso, aos amigos Fábica Michele e Valtenis Corrêa por serem pessoas maravilhosas dotadas de companheirismo. Grata a todos pelos momentos de brincadeiras, risos, estudos e por tornarem essa graduação mais divertida.

A todos os meus professores que contribuíram com novos conhecimentos. Em especial meu professor e orientador Anderson Ramos por sua paciência, orientação e dedicação, muito aprendi com ele. E a professora Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria pelos seus ensinamentos, me mostrando valores, respeito e confiança, por ser um exemplo de pessoa e uma excelente profissional.

Agradeço a todos meus familiares que acreditaram que eu conseguiria alcançar meus objetivos e me incentivaram a isso.

# RESUMO

Neste trabalho estudamos alguns aspectos quantitativos e qualitativos de uma equação de reação-difusão não linear. Os modelos de difusão não lineares têm sido amplamente aplicados em diversas áreas da ciência e principalmente na modelagem de populações. Os principais resultados obtidos aqui são: a solução exata do problema não linear e a propriedade de decaimento exponencial da energia total. No que diz respeito a resolução analítica do problema o ponto central consiste em justificar a escolha adequada do coeficiente de reação  $k(x)$ , a fim de garantir a aplicação do método da separação de variáveis para o problema não linear. Feito isto, passamos a considerar dois problemas: um de valor inicial e outro de contorno, os quais são resolvidos. Em relação a estabilização exponencial da energia, usamos técnicas multiplicativas para encontrarmos a lei de dissipação e a partir daí, aplicamos as desigualdades de Poincaré e de Jensen para construirmos a estimativa de decaimento exponencial.

**Palavras Chaves:** Equação de reação-difusão, solução exata, decaimento exponencial, simulação computacional.

# ABSTRACT

In this paper we study some quantitative and qualitative aspects of a nonlinear reaction-diffusion equation. Nonlinear diffusion models have been widely applied in various areas of science and especially in population modeling. The main results obtained here are: the exact solution of the nonlinear problem and the exponential decay property of the total energy. Regarding the analytical resolution of the problem, the central point is to justify the appropriate choice of the reaction coefficient  $k(x)$ , in order to ensure the application of the variable separation method to the nonlinear problem. This done, we now consider two problems: one of initial value and one of contour, which are solved. Regarding the exponential stabilization of energy, we use multiplicative techniques to find the dissipation law and from there we apply the Poincaré and Jensen inequalities to construct the exponential decay estimate.

**Key Words:** Reaction-diffusion equation, exact solution, exponential decay, computer simulation.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>8</b>
1.1	Objetivos do trabalho . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>13</b>
2.1	Alguns resultados . . . . .	13
2.2	Séries de Fourier . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Problema de difusão</b>	<b>19</b>
3.1	Solução exata . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Abordagem energética</b>	<b>26</b>
4.1	Energia total . . . . .	26
4.2	Estabilidade exponencial . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Simulação computacional</b>	<b>30</b>
5.1	Solução exata e energia total . . . . .	30
<b>6</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>32</b>
	<b>Referências</b>	<b>34</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Os modelos de difusão descrevem a concentração de algum material que se desloca no espaço e no tempo. Este material pode ser representado por partículas, componentes químicos, membros de uma população biológica ou ainda pode ser interpretado como uma onda desse material se difundindo por um meio. A difusão pode ser entendida como sendo o deslocamento de partículas devido ao movimento aleatório, tal qual ocorre no movimento browniano [MEHRER, 2007]. Modelos governados por equações de difusão têm sido amplamente aplicados em diversas áreas da ciência, tais como química, física, biologia e ecologia, principalmente na modelagem de migração de populações [MAYO et al., 2012, VISWANATHAN, 2010, ARGOLO et al., 2012, OLLA, 2012, KWON and KIM, 2011]. Os primeiros modelos de difusão foram atribuídos ao fisiologista alemão Adolf Eugen Fick. Em 1885 ele introduziu a Lei de Difusão de Fick [FICK, 1855], no contexto do estudo da difusão de um gás através de uma membrana líquida no estado estacionário, ou seja, quando a concentração dentro do volume de difusão não muda com relação ao tempo. No caso estacionário, a *Lei de Difusão de Fick* estabelece que o fluxo de difusão é proporcional ao gradiente de concentração, ou seja,

$$J = -D\nabla u(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

onde  $J$  é o fluxo da difusão,  $D > 0$  é o coeficiente de difusão e ainda, como  $D > 0$  na equação (1.1), o sinal de negativo indica que o fluxo se dá de uma região de maior concentração para uma região de baixa concentração. A variável  $u$  representa a concentração de partículas ou densidade populacional de uma espécie. Há fenômenos difusivos onde o transporte de matéria depende tanto da posição espacial quanto do tempo. Este caso não estacionário recebe o nome de *Segunda Lei de Fick*, a qual é dada por

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\Delta u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.2)$$

Também é importante ressaltar os modelos de difusão onde a matéria possa ser criada a

partir de uma determinada fonte  $f = f(u)$ . Esses modelos são conhecidos como equações de reação-difusão, as quais são descritas por

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - D\Delta u(x,t) + f(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.3)$$

No caso em que  $f = 0$ , a equação (1.3) também é conhecida como equação do calor e tem sido amplamente estudada na literatura [EVANS, 1999]. No caso unidimensional a equação do calor é dada por

$$w_t - kw_{xx} = 0, \quad \text{em } (0, 1) \times (0, \infty), \quad (1.4)$$

$$w(0,t) = w(1,t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (1.5)$$

$$w(x,0) = w_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1.6)$$

onde  $k > 0$  é a constante de difusividade térmica do material. A solução geral da equação do calor em série de Fourier é dada por

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2\pi^2 t} \text{sen}(n\pi x), \quad (1.7)$$

onde  $c_n$  é o coeficiente de Fourier. A energia total associada à equação do calor é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 |w|^2 dx, \quad (1.8)$$

e satisfaz a lei de dissipação

$$\frac{d}{dt} E(t) = -k \int_0^1 |w_x|^2 dx, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.9)$$

Isto nos mostra que a energia é um funcional monótono não-crescente no tempo.

Em problemas lineares a solução exata pode ser facilmente obtida pelo método da separação de variáveis, no entanto em problemas não lineares são raros os casos em que conseguimos explicitar a solução exata. E quando isto não é possível recorreremos aos métodos numéricos.

Em [Zemskov and Loskutov, 2010], os autores estudaram a equação de Fisher-Kolmogorov dada por

$$u_t - Du_{xx} - \left( a - \frac{u}{\cos x} \right) u = 0, \quad (1.10)$$

onde  $a > 0$  é constante. Usando o método da separação de variáveis supondo  $u(x,t) =$

$X(x)T(t)$  eles consideraram as equações

$$DX_{xx} - (q - a)X = 0, \quad (1.11)$$

$$T_t - qT + T^2 = 0, \quad (1.12)$$

onde  $q \in \mathbb{R}$  é o parâmetro de separação desconhecido e em seguida mostram as soluções gerais que são da forma

$$X(x) = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x} \quad \text{com } \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{(q-a)/D} \quad \text{se } q > a, \quad (1.13)$$

$$X(x) = B_1 \cos(\lambda x) + B_2 \sin(\lambda x) \quad \text{com } \lambda = \sqrt{(a-q)/D} \quad \text{se } q < a, \quad (1.14)$$

$$X(x) = C_1 x + C_2, \quad \text{se } q = a, \quad (1.15)$$

e ainda,

$$T(t) = \frac{q}{1 + e^{c_0 - qt}}, \quad \text{se } q \neq 0, \quad (1.16)$$

$$T(t) = \frac{1}{c_0 - t}, \quad \text{se } q = 0, \quad (1.17)$$

onde a constante  $c_0$  é definida pelas condições iniciais. Com isto, eles conseguiram obter a solução exata do problema dada por

$$u(x,t) = \frac{(a-D) \cos x}{1 + e^{[c_0 - (a-D)]t}}, \quad \text{se } q = a - D \quad \text{com } q < a. \quad (1.18)$$

$$u(x,t) = \frac{(a+D) \cosh x}{1 + e^{[c_0 - (a+D)]t}}, \quad \text{se } q = a + D \quad \text{com } q > a, \quad (1.19)$$

onde  $c_0$  é constante. Abaixo temos a Figura 1.1 que mostra as soluções exatas referentes à (1.18) e (1.19) respectivamente.

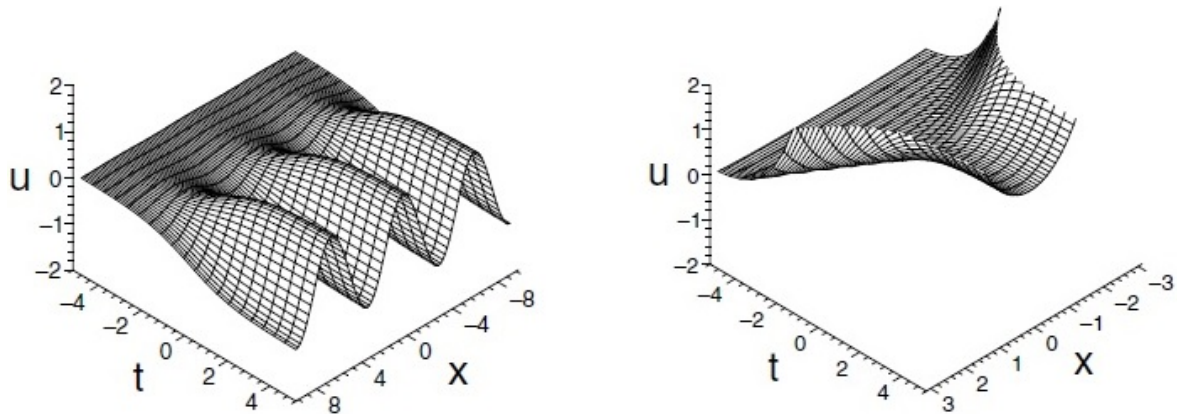


Figura 1.1: Solução exata (1.18) com  $c_0 = 0$  e  $a - D = 1$  (lado esquerdo). Solução exata (1.19) com  $c_0 = 0$  e  $a + D = 1$  (lado direito). Fonte: [Zemskov and Loskutov, 2010].

Observando a solução exata dada por (1.18) na figura acima, percebemos ela se estabiliza no zero quando  $t \rightarrow -\infty$ . Por outro lado, quando  $t \rightarrow \infty$  notamos a presença de oscilações espaciais e além disso, podemos ver que  $|u(x,t)|$  é monótona não-decrescente e limitada, ou seja,  $\lim_{t \rightarrow \infty} |u(x,t)| \leq 1$ .

Para entendermos melhor o comportamento assintótico da equação (1.10) consideramos o intervalo compacto  $[0, L]$  e fazemos uma análise baseada em argumentos de energia e definimos a energia de (1.10) por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L |u|^2 dx. \quad (1.20)$$

É fácil ver que

$$\frac{d}{dt} E(t) = -D \int_0^L |u_x|^2 dx + a \int_0^L |u|^2 dx - \int_0^L \frac{u^3}{\cos x} dx, \quad (1.21)$$

ou seja, a taxa de variação da energia não possui sinal definido. Assim temos uma “competição” entre as constantes  $D > 0$  e  $a > 0$  que altera qualitativamente o comportamento do modelo quando  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Em [Nakaki, 1988] o autor estudou a equação de difusão não linear unidimensional dada por

$$v_t = (v^m)_{xx} - cv^p, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (1.22)$$

com condições iniciais

$$v(x, 0) = v^0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.23)$$

onde  $m > 1$ ,  $p > 0$  e  $c \geq 0$  são constantes e  $v^0(x)$  é uma função não-negativa. As equações da forma (1.22) são muito estudadas em dinâmica de fluidos, física do plasma e dinâmica populacional (ver [Scheidegger, 1974, Berryman and Holland, 1980, Gurtin and MacCamy, 1977]). De acordo com Nakaki a equação (1.22) descreve um processo unidimensional de transferência de um fluido não linear com absorção, onde  $v = v(x, t)$  é a densidade do fluido no tempo  $t$  no espaço  $x$ . O fenômeno mais interessante, que (1.22)–(1.23) representa, é a ocorrência da propagação de velocidade finita.

Novamente, fazendo uma análise baseada em argumentos de energia e considerando o domínio compacto  $[0, L]$  definimos a energia

$$E(t) = \frac{1}{m+1} \int_0^L \left| v^{\frac{m+1}{2}} \right|^2 dx, \quad (1.24)$$

e obtemos a taxa de variação

$$\frac{d}{dt}E(t) = - \int_0^L |v_x^m|^2 dx - c \int_0^L v^{m+p} dx, \quad \forall t \geq 0, \quad (1.25)$$

desde que  $v_x v \Big|_0^L = 0$  para todo  $t \geq 0$ . Desta nossa análise podemos fazer a seguinte afirmação: *Se  $m, p \in \mathbb{N}$  possuem a mesma paridade o sistema é dissipativo.*

## 1.1 Objetivos do trabalho

O objetivo principal deste trabalho consiste em estudar um caso particular do problema de reação-difusão não linear apresentado em [Nakaki, 1988] e provar o decaimento exponencial da energia total e seguindo os passos dos autores [Zemskov and Loskutov, 2010] para encontrar a solução exata do problema.

O trabalho está organizado da seguinte forma:

1. No Capítulo 2, começamos com as preliminares, onde é fornecido as principais proposições e definições usadas no trabalho.
2. No Capítulo 3, consideramos problema (1.22)–(1.23), onde fizemos  $m = 1$  e  $p = 3$ . A constante  $c > 0$  foi substituída por uma função  $k(x) > 1$ . Com isto, ficamos com o problema de reação-difusão não linear dado por

$$u_t - u_{xx} + k(x)f(u) = 0 \quad \text{em } (0, 1) \times (0, \infty), \quad (1.26)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (1.27)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1.28)$$

onde  $k(x) > 1$  é o coeficiente de reação determinado posteriormente. O termo de reação é dado por  $f(s) = F'(s)$  com  $F(s) := s^4/4$ . A escolha dos coeficiente  $m = 1$  e  $p = 3$  com mesma paridade esta baseada no Corolário 1.

3. No Capítulo 4, fazemos uma análise do problema de difusão baseada em argumentos de energia e provamos o decaimento exponencial da energia total.
4. Finalmente no Capítulo 5, fazemos algumas simulações computacionais para exemplificar nossos resultados.

# Capítulo 2

## Preliminares

Neste capítulo descrevemos alguns resultados importantes que foram usadas no decorrer deste trabalho.

### 2.1 Alguns resultados

**Proposição 2.1.1 (Equação de Bernoulli)** *Seja*

$$y' = f(t)y + g(t)y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}_*, \quad (2.1)$$

*uma equação diferencial de 1ª ordem com  $f(t)$  e  $g(t)$  definidas e contínuas no mesmo intervalo aberto  $I$ . A solução da equação (2.1) é dada por*

$$y = e^{(1-\alpha)\int f(t)dt} \left( k + (1-\alpha) \int g(t)e^{-(1-\alpha)\int f(t)dt} dt \right). \quad (2.2)$$

**Prova:** Para  $y \neq 0$  a equação (2.1) é equivalente a

$$y^{-\alpha}y' = f(t)y^{1-\alpha} + g(t). \quad (2.3)$$

Fazendo a mudança de variável  $u = y^{1-\alpha}$  implica em

$$\frac{du}{dt} = (1-\alpha)y^{-\alpha}y', \quad (2.4)$$

e conseqüentemente obtemos a equação linear

$$\frac{du}{dt} = (1-\alpha)f(t)u + (1-\alpha)g(t), \quad (2.5)$$

com solução dada por

$$y = e^{(1-\alpha)\int f(t)dt} \left( k + (1-\alpha) \int g(t)e^{-(1-\alpha)\int f(t)dt} dt \right), \quad (2.6)$$

onde as integrais indicam primitivas particulares dos integrandos.

■

**Proposição 2.1.2 (Princípio da superposição de solução)** *Seja*

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (2.7)$$

*uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes  $a, b$  constantes. Se  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  são soluções de (2.7) então para quaisquer constantes  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  temos que*

$$y_g(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad (2.8)$$

*também é solução de (2.7).*

**Prova:** De fato, se  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  são soluções de (2.7) segue que

$$y_1'' + ay_1' + by_1 = y_2'' + ay_2' + by_2 = 0 \quad (2.9)$$

Daí temos que,

$$\begin{aligned} y_g'' + by_g' + cy_g &= (c_1 y_1(x)'' + c_2 y_2(x)'' ) + a(c_1 y_1(x)' + c_2 y_2'(x)) + b(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)) \\ &= c_1 (y_1(x)'' + ay_1(x)' + by_1(x)) + c_2 (y_2(x)'' + ay_2(x)' + by_2(x)) = 0. \end{aligned}$$

■

**Proposição 2.1.3 (Desigualdade de Jensen)** *Seja  $g$  uma função convexa suave. Então vale*

$$g\left(\int_0^1 v(x)dx\right) \leq \int_0^1 g(v(x))dx. \quad (2.10)$$

**Prova:** Desde que  $g$  seja uma função convexa e suave, segue da Série de Taylor que (11.77)

$$g(t-h) = g(t) - hg'(t) + O(h^2), \quad (2.11)$$

onde  $O(h^2) := \frac{h^2}{2!}g''(t) \geq 0$ . Tomando  $t-h=s$  e desprezando  $O(h^2)$  temos

$$g(t) + (s-t)g'(t) \leq g(s), \quad t, s \in \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

Fazendo,

$$s = v(x), \quad t = \int_0^1 v(x)dx, \quad (2.13)$$

e integrando em  $[0, 1]$  com relação a  $x$  concluímos que

$$g\left(\int_0^1 v(x)dx\right) \leq \int_0^1 g(v(x))dx. \quad (2.14)$$

■

**Proposição 2.1.4 (Desigualdade de Poincaré)** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que  $f(a) = 0$ ,  $f'$  exista e seja contínua por partes. Então,*

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx. \quad (2.15)$$

**Prova:** Como  $f(a) = 0$  temos do Teorema fundamental do cálculo que

$$f(x) = \int_a^x f'(y)dy, \quad (2.16)$$

com  $a \leq x \leq b$ . Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$|f(x)|^2 = \left(\int_a^x f'(y)dy\right)^2 \leq \left(\left(\int_a^x 1^2 dy\right)^{1/2} \left(\int_a^x |f'(y)|^2 dy\right)^{1/2}\right)^2 \quad (2.17)$$

$$= \left(\int_a^x 1 dy\right) \left(\int_a^x |f'(y)|^2 dy\right) \leq (x-a) \int_a^b |f'(y)|^2 dy \quad (2.18)$$

Integrando ambos os lados em  $[a, b]$  obtemos

$$\int_a^b |f(x)|^2 \leq \left(\frac{x^2}{2} - ax + c\right) \Big|_a^b \int_a^b |f'(y)|^2 dy = \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx. \quad (2.19)$$

■

**Proposição 2.1.5** *Suponha que as funções  $u_n$  sejam contínuas e que a série  $\sum_{n+1}^{\infty} u_n(x)$  convirja uniformemente. Então a soma*

$$u(x) = \sum_{n+1}^{\infty} u_n(x) \quad (2.20)$$

*é também uma função contínua.*

**Prova:** Ver [Figueiredo, 2018].

■

**Proposição 2.1.6** *Suponha que as funções  $u_n$  sejam integráveis em um intervalo  $I$  e que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  convirja uniformemente. Então*

$$\int_I \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I u_n(x) dx. \quad (2.21)$$

**Prova:** Ver [Figueiredo, 2018].

■

**Proposição 2.1.7** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável em qualquer intervalo limitado.*

(i) *Se  $f$  é uma função par então*

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx. \quad (2.22)$$

(ii) *Se  $f$  é uma função ímpar então*

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 0. \quad (2.23)$$

**Prova:** Ver [Figueiredo, 2018].

■

**Proposição 2.1.8 (Relações de Ortogonalidade)** *Sejam  $m, n \in \mathbb{Z}_+^*$  então*

$$\int_0^L \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}_+^* \quad (2.24)$$

$$\int_0^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} \frac{L}{2}, & \text{se } m = n \geq 1 \\ 0, & \text{se } m \neq n \geq 1 \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\int_0^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} \frac{L}{2}, & \text{se } m = n \geq 1 \\ 0, & \text{se } m \neq n \geq 1 \end{cases} \quad (2.26)$$

**Prova:** Ver [Figueiredo, 2018].

■

**Definição 2.1.1 (Função periódica)** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Dizemos que  $f$  é periódica de período  $p$  se*

$$f(x) = f(x + p), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.27)$$

## 2.2 Séries de Fourier

Dada uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica de período  $2L$ , integrável e absolutamente integrável, podemos escrever

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (2.28)$$

Isto significa que a expressão do lado direito é a série de Fourier de  $f$ . De acordo com [Figueiredo, 2018], uma questão que surge naturalmente é: Que relação há entre  $f$  e sua série de Fourier? Seria bom que fosse de igualdade mas nem sempre isso ocorre!

O teorema abaixo nos dá uma condição suficiente para que isto ocorra.

**Teorema 2.2.1** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função seccionalmente diferenciável e de período  $2L$ . Então a série de Fourier da função  $f$  converge em cada ponto  $x$ , para  $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$ , i.e.,*

$$\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (2.29)$$

**Prova:** Ver [Figueiredo, 2018].

■

Para integrarmos uma série de Fourier devemos ter em mente as hipóteses do teorema abaixo.

**Teorema 2.2.2 (Integração de Séries de Fourier)** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $2L$  e seccionalmente contínua e seja*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (2.30)$$

*sua série de Fourier. Então*

(i) *a série pode ser integrada termo a termo e o valor da série integrada é a integral de  $f$ ; mais precisamente,*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_a^b \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_a^b \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right); \quad (2.31)$$

(ii) *a função*

$$F(x) = \int_0^x \left( f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt, \quad (2.32)$$

*é periódica de período  $2L$ , contínua, tem derivada  $F'$  seccionalmente contínua e é representada*

por sua série de Fourier

$$\int_0^x \left( f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt = \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} - \frac{b_n}{n} \cos \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (2.33)$$

e

$$\frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L F(x) dx \quad (2.34)$$

**Prova:** Ver [Figueiredo, 2018].

■

## Capítulo 3

### Problema de reação-difusão não linear

Neste capítulo apresentamos o primeiro resultado deste trabalho que é a solução exata do problema (3.1)–(3.4) para um coeficiente de reação escolhido convenientemente. Esta escolha foi feita de modo a tornar possível transformar um problema de resolver uma equação diferencial parcial não linear num problema de resolver duas equações diferenciais ordinárias, sendo um deles um problema de contorno e a outro um problema de valor inicial. A ideia por trás deste método é fazer com que o problema de valor de contorno seja uma equação linear e o problema de valor inicial seja uma equação não linear do tipo Bernoulli.

#### 3.1 Solução exata do problema

Consideramos o problema de difusão não linear dado por

$$u_t - u_{xx} + k(x)f(u) = 0 \quad \text{em } (0, 1) \times (0, \infty), \quad (3.1)$$

onde  $k(x) > 1$  é o coeficiente de reação determinado posteriormente. O termo de reação é dado por  $f(s) = F'(s)$ , onde

$$F(s) := \frac{s^4}{4}, \quad (3.2)$$

é o potencial de energia que conduz a solução ao estado  $u = 0$ . As condições de contorno de Dirichlet homogêneas são dadas por

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.3)$$

e a condição inicial por

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (3.4)$$

A escolha dos coeficiente  $m = 1$  e  $p = 3$  com mesma paridade esta baseada no Corolário 1 (ver página 12).

**Proposição 3.1.1** A solução exata do problema (3.1)–(3.4) com  $k(x) = 1/\sin^2(n\pi x)$  é dada em série de Fourier por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{e^{-n^2\pi^2 t}}{\sqrt{1 + \frac{G_0^2}{n^2\pi^2} (1 - e^{-2n^2\pi^2 t})}} \text{sen}(n\pi x), \quad (3.5)$$

onde  $c_n$  é o coeficiente de Fourier dado por

$$c_n = 2 \int_0^1 u_0(x) \text{sen}(n\pi x) dx. \quad (3.6)$$

**Prova:** Considerando o *ansatz* da forma

$$u(x, t) = F(x)G(t), \quad (3.7)$$

segue que

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G'(t) + k(x)F^2(x)G^3(t)}{G(t)}. \quad (3.8)$$

Escolhendo  $k(x)F^2(x) = 1$  determinamos  $k(x) = 1/F(x)^2$  e ficamos com

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G'(t) + G^3(t)}{G(t)}. \quad (3.9)$$

Observamos que o lado esquerdo da equação acima depende apenas de  $x$ , enquanto que o lado direito depende apenas de  $t$ . Logo podemos concluir que ambos os lados, são independentes de  $x$  e  $t$ . Isto quer dizer que,

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G'(t) + G^3(t)}{G(t)} = \sigma, \quad \text{para algum } \sigma \in \mathbb{R}. \quad (3.10)$$

Por outro lado, substituindo  $u(x, t) = F(x)G(t)$  nas condições de contorno  $u(0, t) = u(1, t) = 0$  temos,

$$u(0, t) = 0 \Rightarrow F(0)G(t) = 0 \Rightarrow F(0) = 0, \quad (3.11)$$

$$u(1, t) = 0 \Rightarrow F(1)G(t) = 0 \Rightarrow F(1) = 0, \quad (3.12)$$

e substituindo nas condição inicial  $u(x, 0) = u_0(x)$  temos

$$u(x, 0) = u_0(x) \Rightarrow F(x)G(0) = u_0(x), \quad (3.13)$$

de onde adotamos  $G(0) = G_0 \in \mathbb{R}_*$ .

Com isto, passamos a considerar o problema de contorno

$$F''(x) - \sigma F(x) = 0 \quad \text{em } (0, 1), \quad (3.14)$$

$$F(0) = F(1) = 0, \quad (3.15)$$

e o problema de valor inicial

$$G'(t) - \sigma G(t) + G^3(t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.16)$$

$$G(0) = G_0. \quad (3.17)$$

Para resolvermos o problema de contorno (3.14)–(3.15) precisamos analisar três casos.

**Caso 1:** Supondo  $\sigma > 0$  e considerando  $F(x) = e^{\mu x}$  temos a equação característica

$$\mu^2 - \sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \pm\sqrt{\sigma}. \quad (3.18)$$

Daí temos que

$$F(x) = e^{\sqrt{\sigma}x} \quad \text{e} \quad F(x) = e^{-\sqrt{\sigma}x}. \quad (3.19)$$

Segue do *Princípio da superposição de solução* que

$$F(x) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}x}, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad (3.20)$$

também é solução do problema (3.14)–(3.15). Agora resta analisarmos os coeficientes  $c_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Devido as condições de contorno  $F(0) = F(1) = 0$  temos

$$F(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -c_1, \quad (3.21)$$

$$F(1) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}} = c_1 e^{\sqrt{\sigma}} - c_1 e^{-\sqrt{\sigma}} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 (e^{2\sqrt{\sigma}} - 1) = 0. \quad (3.22)$$

Como  $(e^{2\sqrt{\sigma}L} - 1) \neq 0$ , segue que  $c_1 = c_2 = 0$ . Logo temos a solução trivial

$$F(x) = 0, \quad \forall x \in (0, 1). \quad (3.23)$$

Como não estamos interessados na solução trivial, o parâmetro  $\sigma > 0$  não serve.

**Caso 2:** Supondo  $\sigma = 0$  o problema de contorno é dado por

$$F''(x) = 0 \quad \text{em } (0, 1), \quad (3.24)$$

$$F(0) = F(1) = 0. \quad (3.25)$$

Segue daí que  $F(x) = c_1x + c_2$  e devido as condições de contorno  $F(0) = F(1) = 0$  temos

$$F(0) = c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0, \quad (3.26)$$

$$F(1) = c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0. \quad (3.27)$$

Isto também nos fornece a solução trivial  $F(x) = 0$  para todo  $x \in (0, 1)$ , o que não nos interessa. Resta analisarmos o caso em  $\sigma \in \mathbb{R}$  é estritamente negativo.

**Caso 3:** Supondo  $\sigma < 0$ , escrevemos  $\sigma = -\lambda^2$  com  $\lambda \in \mathbb{R}_*$ . Daí segue de (3.20) que

$$F(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda^2}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda^2}x} = c_1 e^{i\lambda x} + c_2 e^{-i\lambda x},$$

e considerando a relação de Euler  $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$  temos que

$$F(x) = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x). \quad (3.28)$$

Segue das condições de contorno  $F(0) = F(1) = 0$  que

$$F(0) = C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0, \quad (3.29)$$

$$F(1) = C_1 \cos(\lambda) + C_2 \sin(\lambda) = C_2 \sin(\lambda) = 0. \quad (3.30)$$

Para evitarmos mais uma solução trivial, devemos considerar  $C_2 \neq 0$ . Com isto temos a equação

$$\sin(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = n\pi, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.31)$$

e conseqüentemente  $\sigma_n = -n^2\pi^2$ . Assim, obtemos a solução não trivial do problema (3.14)–(3.15) dada por

$$F_n(x) = C_2 \sin(n\pi x) \quad \text{com } x \in (0, 1), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.32)$$

Conseqüentemente, obtemos o coeficiente de reação

$$k(x) = \frac{1}{\sin^2(n\pi x)} \quad \text{com } x \in (0, 1), \quad (3.33)$$

que é uma condição suficiente para usarmos o método da separação de variáveis.

Agora resta resolvermos o problema de valor inicial (3.16)–(3.17). Para isto, primeiro linea-

rizamos a equação (3.16) multiplicando por  $G(t)^{-3}$ . Com isto, temos

$$G(t)^{-3}G'(t) = \sigma_n G(t)^{-2} - 1. \quad (3.34)$$

Usando a mudança de variável  $y(t) := G(t)^{-2}$  ficamos com

$$y(t)' = -2G(t)^{-3}G'(t). \quad (3.35)$$

Logo a equação (3.34) pode ser escrita na forma linear

$$y'(t) = -2\sigma_n y(t) + 2. \quad (3.36)$$

Resolvendo a equação acima temos

$$\begin{aligned} y &= e^{-2\sigma_n \int dt} \left( k + 2 \int e^{2\sigma_n \int dt} dt \right) = e^{-2\sigma_n t} \left( k + 2 \int e^{2\sigma_n t} dt \right) = e^{-2\sigma_n t} \left( k + \frac{e^{2\sigma_n t}}{\sigma_n} \right), \\ &= ke^{-2\sigma_n t} + \frac{1}{\sigma_n} = \frac{k\sigma_n e^{-2\sigma_n t} + 1}{\sigma_n}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Retornando à variável  $G(t)$  temos

$$G(t)^{-2} = \frac{k\sigma_n e^{-2\sigma_n t} + 1}{\sigma_n} \Rightarrow G(t) = \sqrt{\frac{\sigma_n}{k\sigma_n e^{-2\sigma_n t} + 1}}. \quad (3.38)$$

Para  $t = 0$  temos  $G(0) = G_0$ . Logo,

$$G(0) = \sqrt{\frac{\sigma_n}{k\sigma_n + 1}} \Rightarrow k\sigma_n = \frac{\sigma_n - G_0^2}{G_0^2}. \quad (3.39)$$

Substituindo (3.39) em (3.38) temos

$$G(t) = \sqrt{\frac{\sigma_n G_0^2}{(\sigma_n - G_0^2)e^{-2\sigma_n t} + G_0^2}} = \frac{G_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{G_0^2}{\sigma_n}\right)e^{-2\sigma_n t} + \frac{G_0^2}{\sigma_n}}}, \quad (3.40)$$

$$= \frac{G_0}{\sqrt{e^{-2\sigma_n t} - e^{-2\sigma_n t} \left(1 - e^{2\sigma_n t}\right) \frac{G_0^2}{\sigma_n}}}, \quad (3.41)$$

como  $\sigma_n = -n^2\pi^2$  temos que

$$G_n(t) = \frac{G_0 e^{-n^2\pi^2 t}}{\sqrt{1 + \frac{G_0^2}{n^2\pi^2} \left(1 - e^{-2n^2\pi^2 t}\right)}} \quad \text{com } t \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.42)$$

Segue das equações (3.32) e (3.42) e do Princípio da superposição de solução que

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{e^{-n^2\pi^2 t}}{\sqrt{1 + \frac{G_0^2}{n^2\pi^2} (1 - e^{-2n^2\pi^2 t})}} \operatorname{sen}(n\pi x), \quad \forall x \in [0, 1], \quad (3.43)$$

onde  $G_0 \neq 0$  é constante e os coeficiente de Fourier  $c_n$  são escolhidos de modo que tomando  $t = 0$  em (3.43) tenhamos

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(n\pi x). \quad (3.44)$$

Como  $u(x,0) = u_0(x)$  segue que,

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(n\pi x), \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (3.45)$$

Portanto os  $c_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) devem ser coeficientes de Fourier da função  $u_0(x)$ , dada em  $[0, 1]$ . Note que  $u_0(x)$  deve se escolhida de modo a ser uma função ímpar e periódica de período 2, a fim de termos uma série de senos de argumento  $n\pi$ .

Para encontrarmos os valores de  $c_n$ , multiplicamos a equação (3.45) por  $\operatorname{sen}(k\pi x)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) e integramos em  $[0, 1]$ . Com isto, obtemos

$$\int_0^1 u_0(x) \operatorname{sen}(k\pi x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{sen}(k\pi x) dx, \quad (3.46)$$

e assim,

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_0(x) \operatorname{sen}(k\pi x) dx &= c_1 \int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(k\pi x) dx + c_2 \int_0^1 \operatorname{sen}(2\pi x) \operatorname{sen}(k\pi x) dx \\ &+ c_3 \int_0^1 \operatorname{sen}(3\pi x) \operatorname{sen}(k\pi x) dx + c_4 \int_0^1 \operatorname{sen}(4\pi x) \operatorname{sen}(k\pi x) dx \\ &+ \dots + \dots \\ &+ c_{n-1} \int_0^1 \operatorname{sen}((n-1)\pi x) \operatorname{sen}(k\pi x) dx + c_n \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{sen}(k\pi x) dx \\ &+ \dots + \dots \end{aligned}$$

Usando as relações de ortogonalidade entre as funções  $\operatorname{sen}(n\pi x)$  e  $\operatorname{sen}(k\pi x)$  (ver Proposição 2.1.8) segue que

$$\int_0^1 u_0(x) \operatorname{sen}(n\pi x) dx = \frac{1}{2} c_n, \quad (3.47)$$

ou ainda,

$$c_n = 2 \int_0^1 u_0(x) \operatorname{sen}(n\pi x) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.48)$$

■

# Capítulo 4

## Abordagem energética

### 4.1 Energia total

Aqui tratamos das questões referentes a estabilização assintótica do problema (3.1)–(3.4). Na proposição abaixo definimos a energia total do problema e provamos a sua lei de dissipação. Já na Seção 4.2 provamos um dos principais resultados deste trabalho que é a estabilização exponencial da energia total.

**Proposição 4.1.1** *A energia total associada ao problema (3.1)–(3.4) é dada por*

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^1 |u(x,t)|^2 dx, \quad \forall t \geq 0, \quad (4.1)$$

e satisfaz a lei de dissipação

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_0^1 |u_x(x,t)|^2 dx - \int_0^1 k(x) |u(x,t)|^4 dx < 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (4.2)$$

com  $k(x) > 1$  para todo  $x \in (0, 1)$ .

**Prova:** Multiplicando a equação (3.1) por  $u$  e integrando por partes em  $(0, L)$  temos

$$\int_0^1 u_t u dx - u_x u \Big|_0^1 + \int_0^1 |u_x|^2 dx + \int_0^1 k(x) f(u) u dx = 0. \quad (4.3)$$

Usando a identidade  $u_t u = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|^2$  segue que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 |u|^2 dx - u_x u \Big|_0^1 + \int_0^1 |u_x|^2 dx + \int_0^1 k(x) f(u) u dx = 0. \quad (4.4)$$

Segue das condições de contorno (3.3) e de  $f(u) = F'(u) = u^3$  que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 |u|^2 dx + \int_0^1 |u_x|^2 dx + \int_0^1 k(x) |u|^4 dx = 0. \quad (4.5)$$

Definindo a energia total por

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^1 |u|^2 dx, \quad \forall t \geq 0, \quad (4.6)$$

obtemos a lei de dissipação

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_0^1 |u_x|^2 dx - \int_0^1 k(x) |u|^4 dx \leq 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.7)$$

■

## 4.2 Estabilidade exponencial

**Teorema 4.2.1** *A energia total do problema (3.1)–(3.4) com  $k(x) \geq 1$  para todo  $x \in (0, 1)$ , decai exponencialmente para zero com  $t \rightarrow \infty$ , i.e., existe uma constante  $\beta \geq 1$ , tal que*

$$E(t) = \frac{\pi^2 E(0)}{\pi^2 + 2E(0) \left(1 - e^{-\frac{2\pi^2}{\beta} t}\right)} e^{-\frac{2\pi^2}{\beta} t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.8)$$

**Prova:** Segue da lei de dissipação dada em (4.2) que

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_0^1 |u_x|^2 dx - \int_0^1 k(x) |u|^4 dx \leq - \int_0^1 |u_x|^2 dx - \int_0^1 |u|^4 dx, \quad (4.9)$$

desde que  $k(x) \geq 1$  para todo  $x \in (0, 1)$ . Usando a desigualdade de Poincaré

$$\int_0^1 |u|^2 dx \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 |u_x|^2 dx, \quad (4.10)$$

temos que

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq -2\pi^2 E(t) - \int_0^1 |u|^4 dx. \quad (4.11)$$

Por outro lado, considerando a desigualdade de Jensen

$$g\left(\int_0^1 v(x) dx\right) \leq \int_0^1 g(v(x)) dx, \quad (4.12)$$

para  $g(x) = x^2$  com  $g'' > 0$  e  $v(x) = |u|^2$  é fácil ver que,

$$\left( \int_0^1 |u|^2 dx \right)^2 \leq \int_0^1 |u|^4 dx. \quad (4.13)$$

Substituindo (4.13) em (4.11) temos

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq -2\pi^2 E(t) - \left( \int_0^1 |u|^2 dx \right)^2, \quad (4.14)$$

e conseqüentemente,

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq -2\pi^2 E(t) - 4E^2(t). \quad (4.15)$$

Agora note que existe uma constante  $\beta > 1$  tal que

$$\beta \frac{d}{dt} E = -2\pi^2 E - 4E^2, \quad E = E(t). \quad (4.16)$$

A equação acima é conhecida como equação de Bernoulli.

Para resolvermos a equação acima multiplicamos ambos os lados por  $E^{-2}$ . Com isto, obtemos

$$\beta \frac{dE}{dt} E^{-2} = -2\pi^2 E^{-1} - 4. \quad (4.17)$$

Fazendo a mudança de variável

$$u = E^{-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} u = -\frac{dE}{dt} E^{-2}, \quad (4.18)$$

e substituindo em (4.17) temos

$$\frac{d}{dt} u = f(t)u + g(t), \quad (4.19)$$

onde  $f(t) = 2\pi^2/\beta$  e  $g(t) = 4/\beta$ . Segue daí que a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{\int f(t)dt} \left[ k + \int g(t) e^{-\int f(t)dt} dt \right] = e^{\frac{2\pi^2}{\beta} \int dt} \left[ k + \frac{4}{\beta} \int e^{-\frac{2\pi^2}{\beta} \int dt} dt \right] \\ &= e^{\frac{2\pi^2}{\beta} t} \left[ k - \frac{2}{\pi^2} e^{-\frac{2\pi^2}{\beta} t} \right] = k e^{\frac{2\pi^2}{\beta} t} - \frac{2}{\pi^2} = \frac{k\pi^2 e^{\frac{2\pi^2}{\beta} t} - 2}{\pi^2}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Como  $u = E^{-1}$ , voltamos para a variável  $E$ , i.e., ficamos com

$$E(t) = \frac{\pi^2}{k\pi^2 e^{\frac{2\pi^2}{\beta} t} - 2}, \quad (4.21)$$

com  $\beta > 1$ . Fazendo  $t = 0$  obtemos a energia inicial  $E(0)$  dada por

$$E(0) = \frac{\pi^2}{k\pi^2 - 2} \Rightarrow k\pi^2 = \frac{\pi^2 + 2E(0)}{E(0)}. \quad (4.22)$$

Substituindo (4.22) em (4.21) temos

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{\pi^2}{\left(\frac{\pi^2 + 2E(0)}{E(0)}\right)e^{\frac{2\pi^2}{\beta}t} - 2} = \frac{\pi^2 E(0)}{(\pi^2 + 2E(0))e^{\frac{2\pi^2}{\beta}t} - 2E(0)}, \\ &= \frac{\pi^2 E(0)}{\pi^2 e^{\frac{2\pi^2}{\beta}t} + 2E(0)e^{\frac{2\pi^2}{\beta}t} - 2E(0)}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

ou ainda,

$$E(t) = \frac{\pi^2 E(0)}{\pi^2 e^{\frac{2\pi^2}{\beta}t} + 2E(0)\left(e^{\frac{2\pi^2}{\beta}t} - 1\right)} = \frac{\pi^2 E(0)}{\left[\pi^2 + 2E(0)\left(1 - e^{-\frac{2\pi^2}{\beta}t}\right)\right]e^{\frac{2\pi^2}{\beta}t}}. \quad (4.24)$$

Portanto, temos que

$$E(t) = \frac{\pi^2 E(0)}{\pi^2 + 2E(0)\left(1 - e^{-\frac{2\pi^2}{\beta}t}\right)} e^{-\frac{2\pi^2}{\beta}t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.25)$$

Assim fica provado que a energia decai exponencialmente para zero com  $t \rightarrow \infty$ .

■

# Capítulo 5

## Simulação computacional

Para realizamos as simulações computacionais da solução exata e da energia total do problema (3.1)–(3.4), usamos o software MatLab que é um dos mais utilizados em computação científica.

### 5.1 Solução exata e energia total

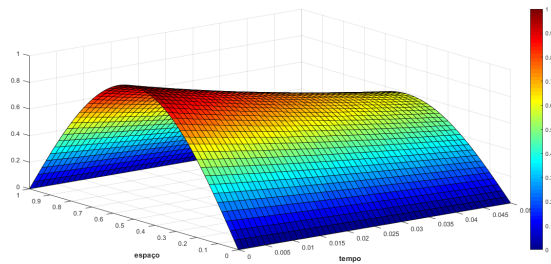


Figura 5.1: Solução exata  $u(x,t)$  plotada com os dados:  $L = 1$ ,  $T = 0.05$ ,  $G_0 = 1$  e  $n = 1$ .

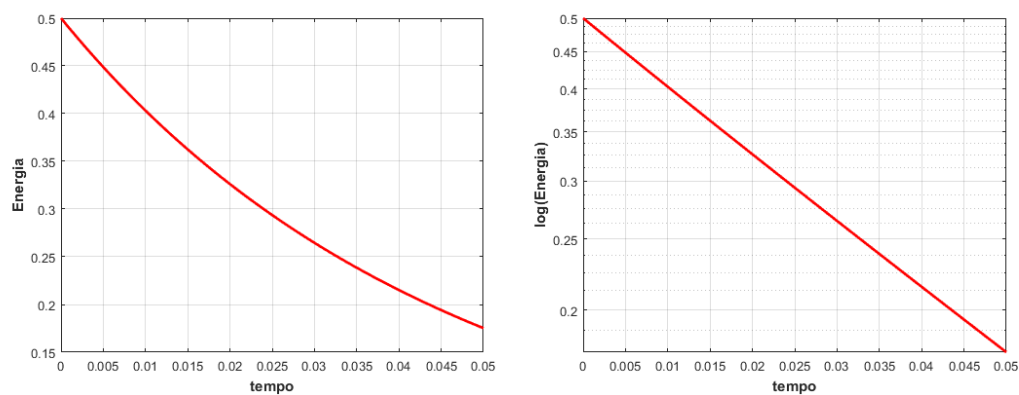


Figura 5.2: Energia total: escala decimal (lado esquerdo) e escala semi-log (lado direito)

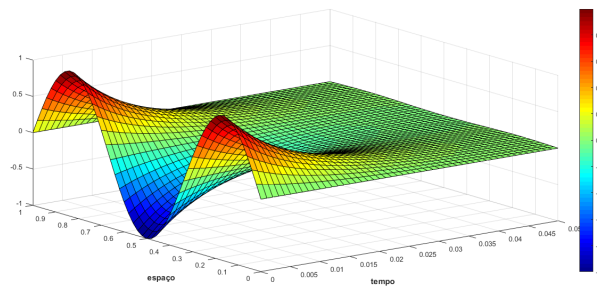


Figura 5.3: Solução exata  $u(x, t)$  plotada com os dados:  $L = 1$ ,  $T = 0.05$ ,  $G_0 = 1$  e  $n = 3$ .

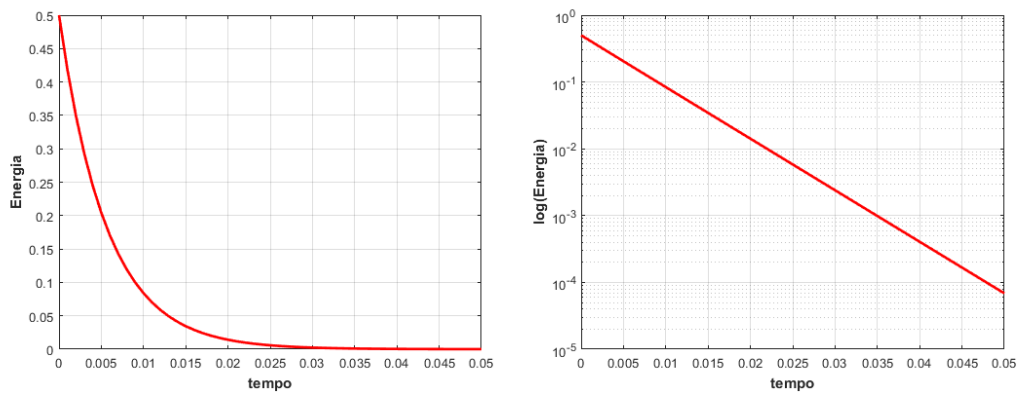


Figura 5.4: Energia total: escala decimal (lado esquerdo) e escala semi-log (lado direito)

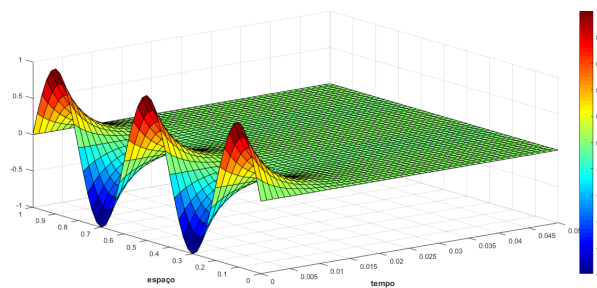


Figura 5.5: Solução exata  $u(x, t)$  plotada com os dados:  $L = 1$ ,  $T = 0.05$ ,  $G_0 = 1$  e  $n = 5$ .

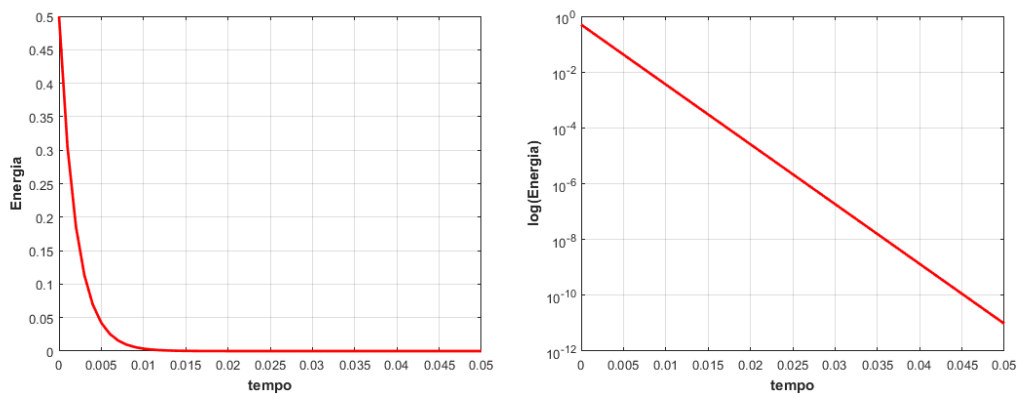


Figura 5.6: Energia total: escala decimal (lado esquerdo) e escala semi-log (lado direito)

## Capítulo 6

### Considerações finais

Neste trabalho estudamos alguns aspectos quantitativos e qualitativos de uma equação de reação-difusão não linear. Os principais resultados obtidos são: a solução exata do problema não linear e a propriedade de decaimento exponencial da energia total. Esperamos que o método apresentado neste trabalho possa motivar a resolução de outros problemas não lineares e futuramente pretendemos fazer um estudo numérico desse problema usando o método de diferenças finitas e comparar a solução numérica com a solução exata obtida.

# Referências

- [ARGOLO et al., 2012] ARGOLO, C., QUINTINO, Y., GLERIA, I., and LYRA, M. L. (2012). Critical short-time dynamics in a system with interacting static and diffusive populations. **Physical Review E**, 85(1).
- [Berryman and Holland, 1980] Berryman, J. G. and Holland, C. J. (1980). Stability of the separable solution for fast diffusion. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 74(4):379–388.
- [EVANS, 1999] EVANS, L. C. (1999). *Partial differential equations*, volume 83.
- [FICK, 1855] FICK, A. (1855). Ueber diffusion. **Annalen der Physik und Chemie**, 170(1):59–86.
- [Figueiredo, 2018] Figueiredo, D. G. (2018). *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. SBM.
- [Gurtin and MacCamy, 1977] Gurtin, M. E. and MacCamy, R. C. (1977). On the diffusion of biological populations. *Mathematical Biosciences*, 33(1-2):35–49.
- [KWON and KIM, 2011] KWON, S. and KIM, Y. (2011). Effects of excluded volume interaction on diffusion-reaction processes in crowded environments. **Physical Review E**, 84(4).
- [MAYO et al., 2012] MAYO, M., GHEORGHIU, S., and PFEIFER, P. (2012). Diffusional screening in treelike spaces: An exactly solvable diffusion-reaction model. **Physical Review E**, 85(1).
- [MEHRER, 2007] MEHRER, H. (2007). *Diffusion in Solids*. Springer Berlin Heidelberg.
- [Nakaki, 1988] Nakaki, T. (1988). Numerical interfaces in nonlinear diffusion equations with finite extinction phenomena. *Hiroshima Mathematical Journal*, 18(2):373–397.
- [OLLA, 2012] OLLA, P. (2012). Demographic fluctuations in a population of anomalously diffusing individuals. **Physical Review E**, 85(2).
- [Scheidegger, 1974] Scheidegger, A. E. (1974). *The physics of flow through porous media*. Third edition, University of Toronto press.
- [VISWANATHAN, 2010] VISWANATHAN, G. M. (2010). Fish in lévy-flight foraging. **Nature**, 465(7301):1018–1019.

[Zemskov and Loskutov, 2010] Zemskov, E. P. and Loskutov, A. (2010). Exact analytical solutions for nonlinear waves in the inhomogeneous fisher-kolmogorov equation. *The European Physical Journal B*, 79(1):79–84.