



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ABAETETUBA
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ELIEL DE ARAUJO E SILVA COSTA

TRIÂNGULOS PITAGÓRICOS, TERNOS PITAGÓRICOS E SUAS PROPRIEDADES

Abaetetuba – Pará

2018

ELIEL DE ARAUJO E SILVA COSTA

TRIÂNGULOS PITAGÓRICOS, TERNOS PITAGÓRICOS E SUAS PROPRIEDADES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Pará como requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática. Orientador prof. Me. Manoel Lima Corrêa.

Abaetetuba – Pará

2018

ELIEL DE ARAUJO E SILVA COSTA

TRIÂNGULOS PITAGÓRICOS, TERNOS PITAGÓRICOS E SUAS PROPRIEDADES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Pará como requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática. Orientador prof. Me. Manoel Lima Corrêa.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Manoel Lima Corrêa
Orientador

Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa
Membro

Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro
Membro

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, por ser o autor e consumidor da fé, onde me tem sustentado na felicidade e na angustia e creio em seu Filho amado Jesus Cristo como único salvador, minha mãe Clayrdea, minha esposa Ediselma, meu filho Samuel e aos meus irmãos e suas famílias que sempre presentes muito contribuíram nessa minha jornada acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me sustentado com saúde e força nas dificuldades.

A esta universidade, seu corpo docente, direção e administração que contribuíram para meu crescimento intelectual e profissional.

Ao meu orientador Prof. Me. Manoel Lima Corrêa, pelo suporte no pouco tempo que lhe coube, pelas correções e incentivos.

A minha mãe, minha esposa, meu filho, meus irmãos e aos colegas de turma.

E a todos que de uma forma direta ou indireta fizeram parte de minha formação, o meu muito obrigado.

EPÍGRAFE

“Se não fosse imperador, desejaria ser professor. Não conheço missão maior e mais nobre que a de dirigir as inteligências jovens e preparar os homens do futuro”.

D. Pedro II

RESUMO

O presente trabalho é dedicado ao estudo dos triângulos Pitagóricos, bem como os ternos dos números que representam seus lados, sua forma algébrica e geométrica. Mostram-se algumas de suas propriedades, como eles se apresentam e como reconhecer esses ternos, apresenta-se também à fórmula geradora tanto de ternos pitagóricos primitivos, como os não primitivos e uma consequência dessa fórmula é que os triângulos obtidos através dela são retângulos. Provar-se que existem infinitos ternos Pitagóricos primitivos através de uma variação da fórmula citada anteriormente e consequentemente infinitos triângulos Pitagóricos primitivos. Aplicando-se os conceitos, lemas e propriedades estudadas sobre os ternos Pitagóricos nesse trabalho num caso particular do teorema de Fermat. Mas antes falar-se um pouco do contexto histórico e sobre o matemático que dá o nome a essa classe de triângulos, quem foi Pitágoras? Também se aborda a descoberta de uma tábua de pedra do período babilônico e com ela descobrir que antes de Pitágoras esses triângulos já eram conhecidos e estudados pelos babilônios, apresentar-se conceitos básicos sobre triângulos e uma demonstração do Teorema de Pitágoras.

Palavra-chave: Triângulos Pitagóricos, Ternos Pitagóricos, Teorema de Pitágoras.

ABSTRACT

The present work is devoted to the study of the Pythagorean triangles, as well as the suits of numbers representing their sides, their algebraic and geometric form. Some of their properties, how they present themselves, and how to recognize these suits, are also presented to the generating formula of both primitive and non-primitive Pythagorean suits, and a consequence of this formula is that the triangles obtained through it are rectangles. To prove that there are infinite primitive Pythagorean suits through a variation of the formula quoted above and consequently infinite primitive Pythagorean triangles. Applying the concepts, lemmas and properties studied on the Pythagorean suits in this work in a particular case of Fermat's theorem. But before we speak a little of the historical context and about the mathematician who gives the name to this class of triangles, who was Pythagoras? It also addresses the discovery of a stone tablet from the Babylonian period and with it discover that before Pythagoras these triangles were already known and studied by the Babylonians, to present basic concepts on triangles and a demonstration of the Pythagorean Theorem.

Keywords: Pythagorean Triangles, Pythagorean Suits, Pythagorean Theorem.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Imagem representativa de Pitágoras, fundador da Escola Pitagórica. ---	12
Figura 2: Tábua de Plimpton 322 -----	14
Figura 3: Triângulo -----	17
Figura 4: Tipos de triângulo.-----	18
Figura 5: Triângulos semelhantes.-----	18
Figura 6: Triângulos semelhantes.-----	19
Figura 7: Triângulos semelhantes.-----	19
Figura 8: Triângulos semelhantes. -----	20
Figura 9: Triângulos semelhantes.-----	20
Figura 10: Triângulos retângulos semelhantes e não semelhantes. -----	21
Figura 11: Triângulo retângulo. -----	21
Figura 12: Relações métricas do triângulo retângulo. -----	22
Figura 13: Triângulos retângulos semelhantes. -----	23
Figura 14: Quadrilátero formado a partir de triângulos retângulos. -----	23
Figura 15: Triângulo Pitagórico. -----	25
Figura 16: Triângulo não Pitagórico. -----	26

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
2 CONTEXTO HISTÓRICO	12
3 TRIANGULOS PITAGÓRICOS	17
3.1 Definições e Exemplos	17
3.2 Semelhança de Triângulos	18
3.3 Casos ou critérios de semelhança	19
4 TERNOS PITAGÓRICOS	26
4.1 Triplos de Pitágoras	26
4.2 Fórmulas Geradoras dos Ternos Pitagóricos	28
4.3 Propriedades dos Ternos Pitagóricos	28
5 APLICAÇÃO	37
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	41
REFERÊNCIAS	42

1 INTRODUÇÃO

A escolha do tema é inicialmente a oportunidade de conhecer mais sobre como foi construída a matemática, qual era o objetivo do seu uso, seu desenvolvimento durante os séculos e mais sobre os matemáticos envolvidos na sua construção.

Neste trabalho, por exemplo, estuda-se sobre o teorema de Pitágoras e sua utilização na busca por ternos de números inteiros que são os ternos Pitagóricos, onde esse teorema também é aplicado na Geometria plana. Encontrarem equações que tenham soluções inteiras era um dos objetivos principais desses matemáticos e até no presente momento matemáticos da atualidade dedicam tempo trabalhando em pesquisas no mundo todo com o mesmo objetivo. Esse assunto é muito estudado em Teoria dos Números para a construção dos números. E as equações envolvidas na busca por números inteiros são conhecidas por Equações Diofantinas.

A escolhe-se para o tema de nosso trabalho: “Triângulo pitagórico, ternos pitagórico e suas propriedades”, onde se aborda o assunto de forma progressiva para facilitar o entendimento do seu conteúdo.

Descobre-se que esses Triângulos podem ser primitivos e não primitivos.

Nosso objetivo geral é realizar uma demonstração para o teorema de Fermat quando n é da forma $4k$. Utilizaremos os conceitos, lemas e propriedades dos triângulos (ternos) pitagóricos.

Nosso objetivo específico é:

- Mostrar as propriedades dos ternos Pitagóricos.
- Destacar que todo termo Pitagórico é obtido através de $(2st, s^2 - t^2, s^2 + t^2)$.
- Demonstrar que os ternos pitagóricos primitivos são infinitos.

A disposição dos capítulos no trabalho:

No segundo capítulo apresenta-se o contexto histórico envolvendo o assunto abordado e sobre os matemáticos que dedicaram seu tempo estudando o assunto em questão.

No terceiro capítulo é dedicado aos triângulos Pitagóricos, abordando-se os conceitos básicos sobre triângulos, semelhança de triângulos, exemplos e será feita uma demonstração do Teorema de Pitágoras dentre as mais de trezentas existentes.

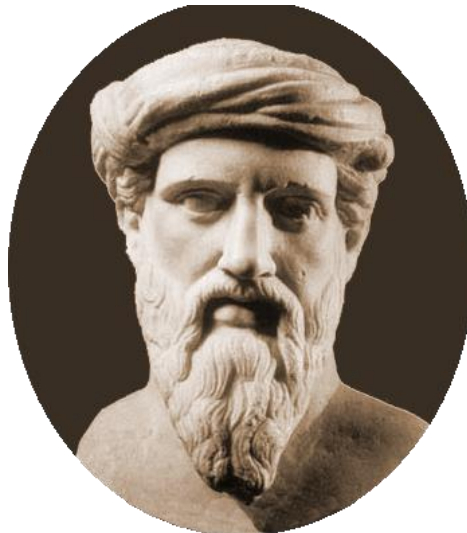
No quarto capítulo estudam-se sobre os ternos Pitagóricos, conceitos, propriedades, demonstrações, fórmulas geradoras dos ternos, etc.

No quinto e ultimo capítulo será realizada uma aplicação utilizando os conceitos e propriedades deste trabalho no famoso Teorema de Pierre de Fermat.

2 CONTEXTO HISTÓRICO

Pitágoras (572-497 a.C.) foi uma figura muito misteriosa, sendo reconhecido não só como matemático, mas também como líder religioso, sábio, místico e filósofo grego da Antiguidade. Criador do “Teorema de Pitágoras”; mesmo assim existem pouquíssimos documentos que se sabe sobre ele.

Figura 1 – Imagem representativa de Pitágoras, fundador da Escola Pitagórica.



Fonte: <https://www.escolasanti.com.br/pitagoras-e-os-pitagoricos>

Muitos estudos dizem que Pitágoras nasceu na cidade de Samos, uma ilha situada no Mar Egeu, Grécia na região da Ásia Menor (Magna Grécia), por volta de 572 a.C., e esse período é o final do século VI é possível e provavelmente que tenha sido discípulo do maior sábio e matemático famoso de sua época Tales de Mileto, Pitágoras viajou por muitos anos e morou em vários lugares em busca de conhecimento e sabedoria, entre esses lugares estão a Babilônia, Caldéia, Egito e tudo indica que tenha chegado até a Índia. Onde ao retornar do Egito em 532 a.C. a Samos encontrou o poder nas mãos do ditador e tirano Polícrates e sob domínio persa nesse momento optou em fugir para o porto marítimo de Crotona que era uma colônia grega localizada no sul da Itália.

Depois de fugir da cidade de Samos, é em Crotona que resolveu colocar em pratica os conhecimentos adquiridos em suas peregrinações e fundando a então famosa Escola Pitagórica, onde estudavam e discutiam filosofia, matemática (aritmética e geometria), ciências naturais e religião, essa escola era cheia de ritos e cerimônias secretas, uma de suas doutrinas era que ninguém podia registra ou revelar esses ritos e cerimônias secretas, o que provavelmente contribuíram para que hoje não se tenha registros mais evidentes de seus estudos, teorias, descobertas, o cotidiano da escola e muito menos sobre a personalidade do ilustre fundador dessa escola, todas as aulas eram orais e todas as descobertas eram dedicadas a esse fundador, por isso não se sabe realmente o que foi feito por Pitágoras e o que ele se apossou dos seus alunos e discípulos.

Segundo (BOYER, 1996), Pitágoras tinha verdadeiro culto religioso pelos números, e é atribuída a ele a frase que diz “*tudo é número*”, que era o lema de sua escola, onde mostra que procurava entender e explicar a existência das coisas através dos mesmos é dado a ele a criação dos termos “*matemática*” (ou “o que é aprendido”) e “*filosofia*” (ou “amor à sabedoria”) para expressar seus pensamentos intelectuais.

Nessa escola havia cerca de 600 integrantes, e as famílias mais nobres dessa cidade delegavam seus filhos para serem instruídos na aritmética, geometria, música, astronomia, política, religião e moral, esses estudantes abastados provavelmente iriam ocupar cargos importantes na sociedade que viviam.

Na época em que esteve no Egito Pitágoras conheceu as famosas pirâmides e é nesse momento que provavelmente tenha desenvolvido seu tão famoso “Teorema de Pitágoras”, que é a relação que existe entre os lados de um triângulo retângulo, onde, provou que em um triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa, no entanto, a indícios que os babilônios já conheciam o chamado Teorema de Pitágoras ($b^2 + c^2 = a^2$) no ano de 1600 a.C..

Pitágoras morreu talvez assassinado, já bem velho e provavelmente no ano de 497 a.C. em Metaponto, região sul da Itália. A escola permaneceu ainda por pelo menos mais dois séculos.

A tábua de Plimpton 322

Segundo (EVES, 2004), essa tábua é do período babilônico antigo e foi escrita entre (1900 a 1600 a.C. aproximadamente) a *Plimpton 322* foi uma das mais

ilustres tábuas babilônicas já investigada, seu nome é devido a coleção G.A. Plimpton da Universidade de Colúmbia, listada com o número 322. Ela estar incompleta devido à perda de um pedaço de seu lado esquerdo, como mostra a Figura 2. Neugebauer e Sachs em 1945 foram os primeiros a explicar seu conteúdo.

Figura 2: Tabua de Plimpton 322



Fonte: <https://cienciantiga.wordpress.com/2012/07/24/plimpton-322/>

Segundo (BOYER, 1996), o conteúdo dessa tabela são números, sendo a primeira coluna da extrema direita os números que representam a quantidade de linhas que vão de um a quinze e tem o objetivo de reconhecer a ordem dos elementos nas outras três colunas que se segue, onde essas três restantes representam os lados de triângulos, considerando um triângulo retângulo.

Tendo em vista a segunda e terceira coluna os lados a e c respectivamente desse triângulo e utilizando

$$b = 2pq, a = p^2 - q^2, c = p^2 + q^2,$$

temos:

Por exemplo, os números na primeira linha são obtidos partindo de $p = 12$ e $q = 5$, com valores correspondentes $a = 119$ e $b = 120$ e $c = 169$. Os valores de a e c são exatamente os que se encontram na segunda e terceira posição a partir da esquerda na primeira linha da tabela. (BOYER, 1996, p.25).

O resultado desse exemplo está destacado em cinza na tabela abaixo.

Suponhamos que se fosse calculado o outro cateto b dos triângulos e para hipotenusa c e cateto a da tábua, poderão encontrar outros ternos pitagóricos, a parte da tabela abaixo destacada em verde, seria a representação de uma parte da *Plimpton 322*.

Tabela 1: Ternos Pitagóricos.

b = Cateto	a = Cateto	c = Hipotenusa	Linhas	p	Q
2st	$p^2 - q^2$	$p^2 + q^2$			
120	119	169	1	12	5
3456	3367	4825	2	64	27
4800	4601	6649	3	75	34
13500	12709	18541	4	125	54
72	65	97	5	9	4
360	319	481	6	20	9
2700	2291	3541	7	54	25
960	799	1249	8	32	15
600	481	769	9	25	12
6480	4961	8161	10	81	40
60	45	75	11	2	1
2400	1679	2929	12	48	25
240	161	289	13	15	8
2700	1771	3229	14	50	27
90	56	106	15	9	5

Fonte: Tabela elaborada pelo próprio acadêmico

Com a descoberta dessa tábua e o estudo de seu conteúdo, revela-se que os babilônios conheciam e desenvolviam formulas que encontravam os ternos conhecidos hoje como ternos pitagóricos, a *Plimpton 322* é um dos registros mais fascinantes da matemática (mais precisamente sobre trigonometria) desse período.

Observando que a fórmula geradora dos ternos Pitagóricos descritos na tábua de Plimpton é $(2st, s^2 - t^2, s^2 + t^2)$ que foi desenvolvida por Euclides, onde será visto algumas propriedades dos mesmos mas adiante.

Euclides e o seu livro “Os Elementos”

Euclides juntamente com seu livro “Os Elementos”, foram muito importante para o desenvolvimento da matemática.

Infelizmente existem poucos registros sobre Euclides, mas fragmentos históricos revelam que nasceu e viveu por volta de 325 a.C. – 265 a.C. na Grécia Antiga provavelmente tenha obtido sua formação matemática na escola platônica de Atenas, foi professor de matemática em Alexandria e seus estudos e trabalhos em matemática (Geometria) colaborou para que essa cidade se tornasse o centro mundial do esquadro e do compasso, por volta do século III a.C. no Egito.

É considerado o pai da Geometria, escreveu o livro “*Os Elementos*” que é reconhecido como o livro didático mais bem sucedido de todos os tempos tendo influenciado vários matemáticos e pesadores em diversos momentos da história. Esse livro é o refinamento de toda matemática que precedeu e que existia em sua época, onde incluíam as obras de Tales de Mileto, Pitágoras, Platão e dos egípcios e gregos que tinham construído a matemática até então.

Segundo (BOYER, 1996), essa obra brilhante está dividida em 13 livros. Se tratando os seis primeiros da Geometria plana elementar; os três posteriores sobre Teoria dos Números; o decimo sobre os Irracionais e os três últimos dedicados a Geometria espacial. E essa obra fez parte do ensino da matemática por um período de 2000 anos.

Pierre de Fermat e seu famoso Teorema

Pierre de Fermat (1601-1665) nasceu na França, seu pai era um rico mercador que lhe possibilitou uma educação de qualidade, formou-se em direito, ingressou no serviço público no ano de 1631, sendo promovido a juiz. Seu fascínio pela matemática ocorreu quando leu a Aritmética de Diofanto. Ficou conhecido como o “Príncipe dos Amadores”, por não ter a matemática como a principal função de sua vida, dedicava-se a ela em horas vagas como um passatempo, mesmo assim Pascal o considerou como o maior matemático de seu tempo, contribuiu significativamente para o desenvolvimento da matemática destacando-se: o cálculo geométrico e infinitesimal, teoria da probabilidade e sendo mais reconhecido por seus trabalhos em teoria dos números, em especial para o famoso *último teorema de Fermat*.

Um dos mais famosos problemas na história da matemática e talvez um dos que mais inspirou o desenvolvimento de novas teorias é o chamado *último teorema de Fermat*.

Pierre de Fermat, que tinha o costume de fazer anotações nas margens de sua cópia do livro de Diofanto, enunciou o teorema que afirma ser impossível encontrar inteiros positivos x, y, z tais que

$x^n + y^n = z^n$ (*) quando n é um número inteiro maior do que 2: “encontrei uma demonstração verdadeiramente maravilhosa para isto, mas a margem é demasiado pequena para contê-la”.

A demonstração do último teorema de Fermat somente foi obtida depois de mais de trezentos anos após sua formulação. Tal demonstração, devida a Andrew Wile e Richard Taylor. (MARTINEZ, MOREIRA, SALDANHA, TENGAM, pag. 159/160).

3 TRIANGULOS PITAGÓRICOS

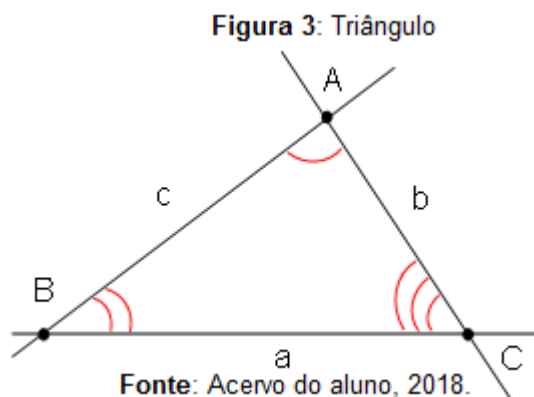
Nesse capítulo, se aborda alguns tópicos que servira de base para os próximos capítulos. Será apresentado de forma sucinta, definições e exemplos e propriedades básicas acerca dos triângulos pitagóricos.

3.1 Definições e Exemplos

Definição 1. (Triângulo)

Segundo (DOLCE, 1993), *dados três pontos, A, B e C, não colineares (não alinhados), a reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, e chama-se triângulo ABC.*

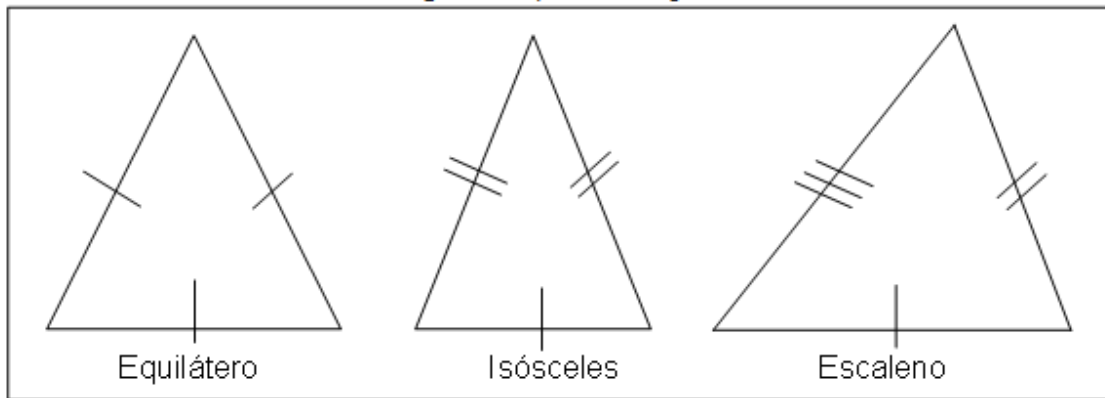
Indicação: triângulo ABC = Δ ABC.



Em outras palavras, um triângulo é um polígono convexo cuja região é formada por três semirretas concorrentes entre si, duas a duas, em três pontos diferentes, formando seus três lados.

Exemplo 1:

Figura 4: Tipos de triângulo.



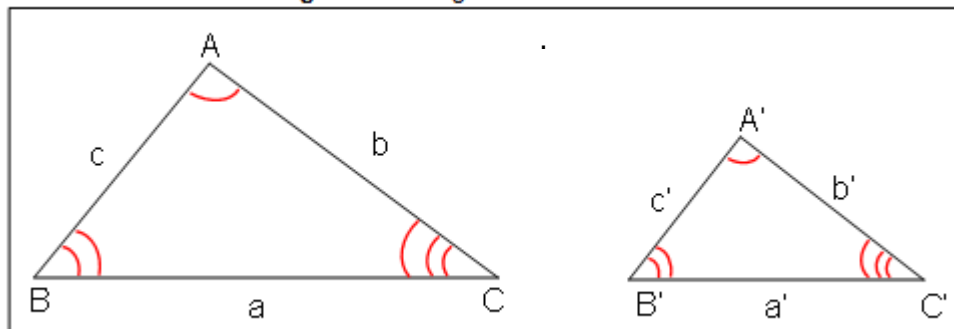
Fonte: Acervo do aluno, 2018.

3.2 Semelhança de Triângulos

Definição 2.

Dois triângulos são semelhantes se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e seus respectivos lados proporcionais.

Figura 5: Triângulos semelhantes.



Fonte: Acervo do aluno, 2018.

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{pmatrix} \text{ e } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

onde o símbolo " $\sim$ " significa semelhança entre os triângulos.

Chama-se razão de semelhança o número real k , tal que é a razão entre os respectivos lados dos triângulos, assim temos que

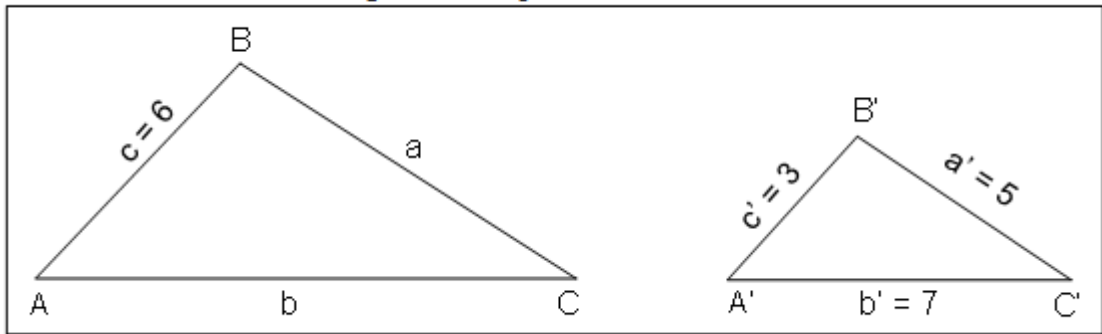
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$$

se $k = 1$, os triângulos são congruentes.

Exemplo 2:

Dado dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, sendo as medidas dos lados do segundo $A'B' = 3\text{ cm}$, $A'C' = 7\text{ cm}$ e $B'C' = 5\text{ cm}$, já a medida de um dos lados do primeiro mede $\overline{AB} = 6\text{ cm}$, devemos encontrar a razão de semelhança entre os triângulos e com ela encontrar a medida dos dois lados do primeiro triângulo.

Figura 6: Triângulos semelhantes.



Fonte: Acervo do aluno, 2018.

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{6}{3} = 2$$

portanto a razão de semelhança é 2. Daí, temos

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{5} \Rightarrow a = 10 \\ \frac{b}{7} \Rightarrow b = 14 \end{cases}$$

logo, os lados do primeiro triângulo medem $\overline{BC} = 10\text{ cm}$ e $\overline{AC} = 14\text{ cm}$.

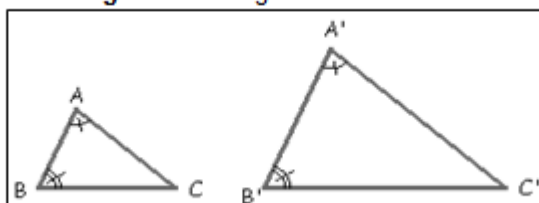
3.3 Casos ou critérios de semelhança

Não é necessário que se conheça todos os lados e ângulos dos triângulos para que tenhamos a semelhança assegurada. É isso que nos dizem os critérios de semelhança de triângulos, que são divididos em três casos, a saber;

I) Caso AA - Ângulo Ângulo

"Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes."

Figura 7: Triângulos semelhantes

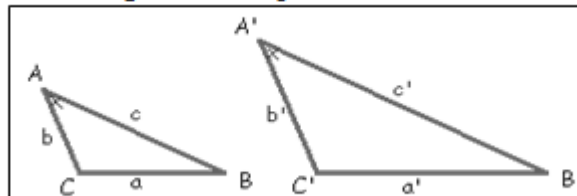


Fonte: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/moduloll/conteudos2_criterios1.html

II) Caso LAL – Lado Ângulo Lado

"Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos lados homólogos do outro triângulo e se o ângulo entre estes lados for congruente ao correspondente do outro triângulo, então os triângulos são semelhantes."

Figura 8: Triângulos semelhantes.

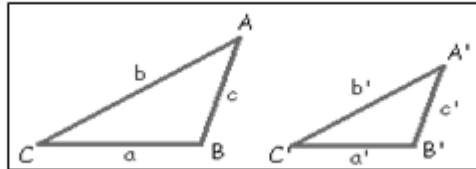


Fonte: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/moduloll/conteudos2_criterios1.html

III) Caso LLL – Lado Lado Lado

"Se dois triângulos possuem os seus lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes."

Figura 9: Triângulos semelhantes.



Fonte: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/moduloll/conteudos2_criterios1.html

Exemplo 3:

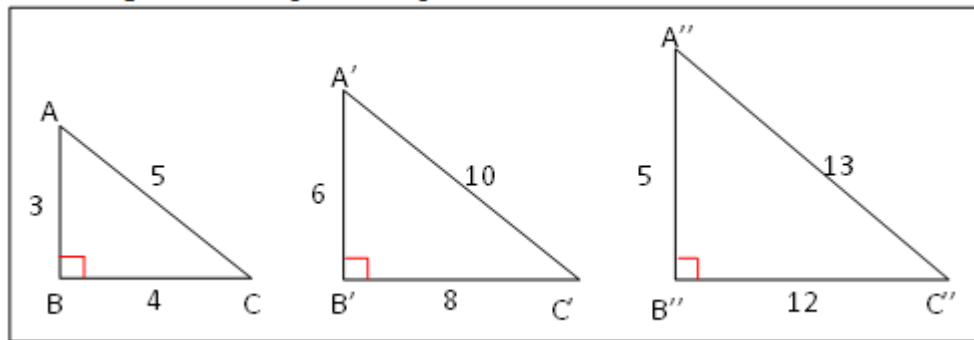
Sejam os triângulos ABC , $A'B'C'$ e $A''B''C''$, sendo as medidas dos lados dados por 3, 4 e 5; 6, 8 e 10 e 5, 12 e 13 respectivamente. Veja que os triângulos ABC , $A'B'C'$ são semelhantes, pois seus lados são homólogos proporcionais, isto é,

$$\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = 2$$

Já os triângulos $A'B'C'$ e $A''B''C''$ não são semelhantes, pois seus lados homólogos não são proporcionais, ou seja, não existe k inteiro tal que

$$\frac{5}{10} = \frac{12}{8} = \frac{13}{10} = k$$

assim como os triângulos ABC e $A''B''C''$.

Figura 10: Triângulos retângulos semelhantes e não semelhantes.

Fonte: Acervo do aluno, 2018.

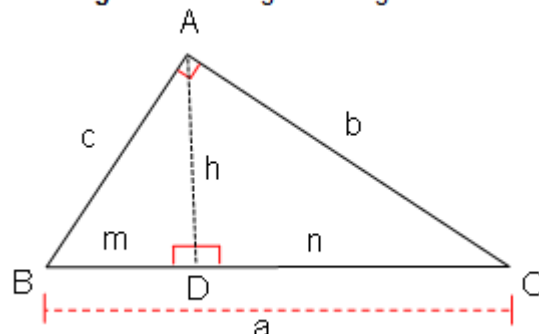
Como a base de estudo deste trabalho restringe-se aos triângulos retângulos, iremos por tanto, defini-lo a seguir.

Definição 3. (Triângulo Retângulo)

Chama-se *triângulo retângulo*, o triângulo que possui um ângulo de 90° (*ângulo reto*); por consequência da lei angular de Tales os outros ângulos são agudos.

Este triângulo possui algumas características muito importantes, vejamos;

Tomando um triângulo ABC qualquer, com o ângulo reto em A , o lado $\overline{BC}$ oposto a esse ângulo é chamado de hipotenusa que é o maior lado do triângulo e os outros dois lados são denominados catetos. Traçando um seguimento $\overline{AD}$ perpendicular a $\overline{BC}$, com D em $\overline{BC}$, com essas informações podemos nomear os elementos de um triângulo retângulo.

Figura 11: Triângulo retângulo.

Fonte: Acervo do aluno, 2018.

onde;

$\overline{BC} = a$: hipotenusa

$\overline{AC} = b$: cateto,

$\overline{AB} = c$: cateto,

$\overline{BD} = m$: projeção do cateto c sobre a hipotenusa,

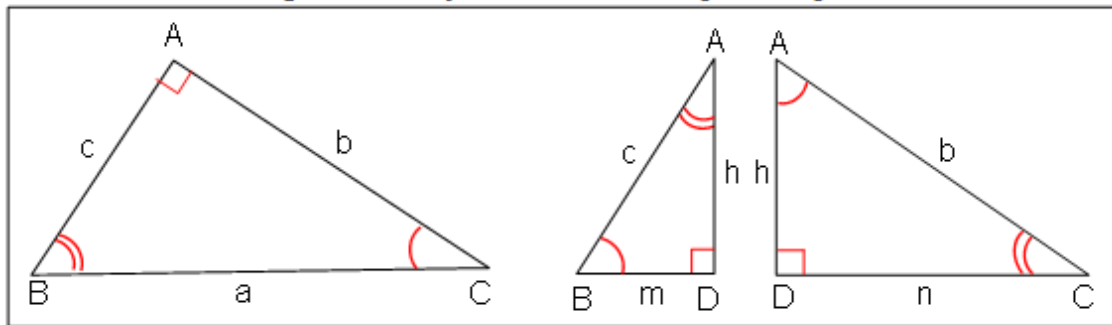
$\overline{CD} = n$: projeção do cateto b sobre a hipotenusa,

$\overline{AD} = h$: altura relativa à hipotenusa.

Relações métricas:

Com base nos critérios de semelhança de triângulos citados anteriormente com seus elementos já identificados, temos:

Figura 12: Relações métricas do triângulo retângulo.



Fonte: Acervo do aluno, 2018.

(1) $b^2 = a \cdot n$

(3) $h^2 = m \cdot n$

(5) $b \cdot h = c \cdot n$

(2) $c^2 = a \cdot m$

(4) $b \cdot c = a \cdot h$

(6) $c \cdot h = b \cdot m$

Uma das propriedades dos triângulos retângulos é a seguinte equação, dada em forma de teorema.

Teorema 1. (Pitágoras)

Em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa, isto é,

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Existem mais de trezentas maneiras de realizar a demonstração do Teorema de Pitágoras, entretanto escolhemos o que é baseada numa fonte chinesa antiga. Que utiliza figuras planas.

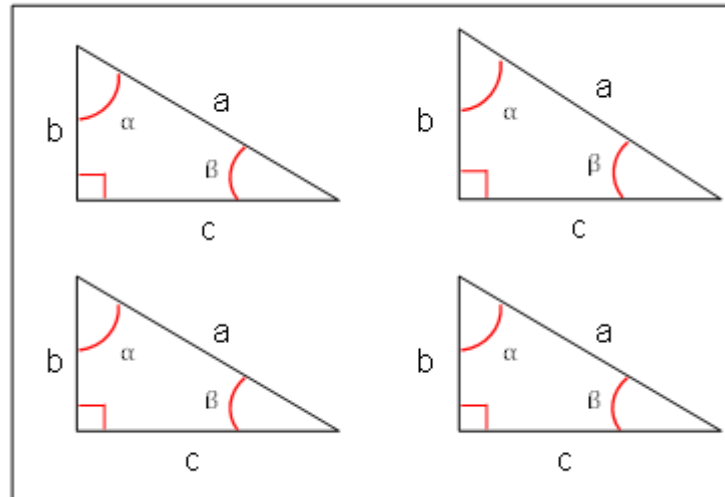
Demonstração:

Seja um triângulo retângulo de lados a , b e c vamos fazer quatro cópias desse triângulo, sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° graus e no triângulo retângulo o maior ângulo que é o ângulo reto mede 90° graus e a soma dos outros dois ângulos α e β medem também 90° graus, temos

então que $\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$, se subtrairmos 90° graus de ambos os lados obtemos o seguinte valor:

$$\alpha + \beta + 90^\circ - 90^\circ = 180^\circ - 90^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

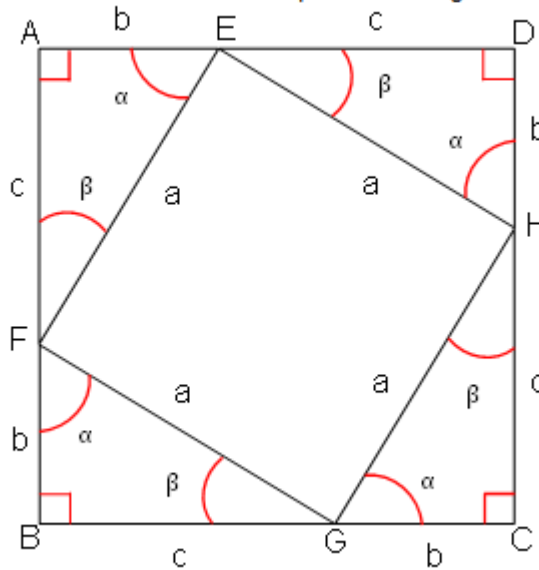
Figura 13: Triângulos retângulos semelhantes.



Fonte: Acervo do aluno, 2018.

Depois vamos mover esses triângulos de modo que forme um quadrado maior por fora de lados $(b + c)$ e por dentro forme um quadrilátero menor de lados (a) , onde provaremos que esse quadrilátero é um quadrado. Poderemos perceber que ao unirmos esses triângulos formaremos ângulos retos já que $\alpha + \beta = 90^\circ$ graus. Vamos realizar então a construção descrita.

Figura 14: Quadrilátero formado a partir de triângulos retângulos.



Fonte: Acervo do aluno, 2018.

Para demonstrar que o quadrilátero EFGH de lado (a) é um quadrado, temos que primeiro provar que seus ângulos internos são retos e medem 90° graus cada um, já que os quatro lados são iguais, temos:

Iniciaremos com o ângulo $E\hat{F}G$. Onde podemos ver que este se encontra apoiado no lado AB do quadrado $ABCD$. Sabendo que a medida do ângulo $A\hat{F}B$ é 180° e $A\hat{F}B = \beta + \alpha + E\hat{F}G$.

Logo

$$\beta + \alpha + E\hat{F}G = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + E\hat{F}G = 180^\circ \Rightarrow \mathbf{E\hat{F}G = 90^\circ}.$$

De modo análogo, temos que a medida do ângulo $A\hat{E}D$ é 180° e

$$A\hat{E}D = \beta + \alpha + F\hat{E}H.$$

assim

$$\beta + \alpha + F\hat{E}H = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + F\hat{E}H = 180^\circ \Rightarrow \mathbf{F\hat{E}H = 90^\circ}.$$

Sendo a medida do ângulo $D\hat{H}C$ é 180° e

$$D\hat{H}C = \beta + \alpha + E\hat{H}G.$$

temos

$$\beta + \alpha + E\hat{H}G = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + E\hat{H}G = 180^\circ \Rightarrow \mathbf{E\hat{H}G = 90^\circ}.$$

Da mesma forma, como a medida do ângulo $B\hat{G}C$ é 180° e

$$B\hat{G}C = \beta + \alpha + F\hat{G}H.$$

segue que

$$\beta + \alpha + F\hat{G}H = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + F\hat{G}H = 180^\circ \Rightarrow \mathbf{F\hat{G}H = 90^\circ}.$$

Com isso provamos que o quadrilátero $EFGH$ é um quadrado. Assim concluímos que o quadrado $ABCD$ de lado $(b + c)$ será igual a área dos quatro triângulos retângulos de lados a , b e c somado com a área do quadrado $EFGH$ interno de lado (a) , nos resta agora igualar as áreas.

A área do quadrado maior é igual à $(b + c)^2$.

A área de cada triângulo retângulo é igual à $\frac{bc}{2}$.

A área do quadrado menor é igual à a^2 .

Assim, segue que

$$(b + c)^2 = \frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} + a^2$$

$$(b + c)^2 = 2(bc) + a^2$$

$$b^2 + 2(bc) + c^2 = 2(bc) + a^2$$

portanto, conclui-se que

$$b^2 + c^2 = a^2 \quad (1)$$

o que provado a veracidade do Teorema de Pitágoras.

Os números a , b e c são todos números inteiros. Desta forma, esses números são chamados de ternos Pitagóricos.

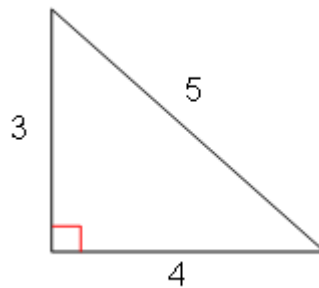
Definição 4.

Um triângulo retângulo ABC de lados a, b, c é dito Pitagórico se as medidas dos lados são números inteiros.

Exemplo 4:

São exemplos de triângulos Pitagóricos os três triângulos cujo seus lados são (3, 4 e 5), (15, 8, 17), (7, 24, 25) respectivamente. Pois eles satisfazem a equação (1).

Figura 15: Triângulo Pitagórico.



Fonte: Acervo do aluno, 2018.

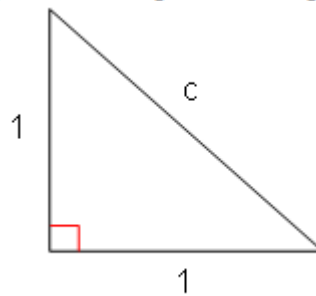
No exemplo acima destacamos o triângulo de medidas (3, 4 e 5), por ser um triângulo gerador, no qual suas propriedades serão desenvolvidas no próximo capítulo.

Exemplo 5:

Dado o triângulo 2, 3 e 4, observe que este não é pitagórico, pois não satisfaz a equação (1), isto é, $2^2 + 3^2 \neq 4^2$.

Exemplo 6:

O triângulo retângulo de lados (1, 1 e $\sqrt{2}$), satisfaz a equação (1), entretanto um de seus lados não é um número inteiro. Veja que,

Figura 16: Triângulo não Pitagórico.**Fonte:** Acervo do aluno, 2018.

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow c^2 = 2 \Rightarrow c = \sqrt{2}$$

como c não pertence ao conjunto dos números inteiros e sim ao conjunto dos números irracionais, não é um Triângulo Pitagórico.

Uma curiosidade sobre a descobertas dos irracionais mais precisamente a raiz quadrada de 2, desse terno:

Pitágoras não era capaz de provar pela lógica que os números irracionais não existem, mas quando Hipaso de Metaponta (nascido em c.500 a.C.) demonstrou que a raiz quadrada de 2 é irracional e argumentou sobre sua existência, diz a lenda que Pitágoras o afogou. (ROONEY, ANNE, 2012, p.60).

4 TERNOS PITAGÓRICOS

Nesse capítulo, serão apresentadas, algumas propriedades importantes acerca das ternas Pitagóricas é apresentaremos alguns lemas e o teorema principal o qual gera todos os ternos Pitagóricos primitivos e não primitivos.

4.1 Triplos de Pitágoras

Definição 5

Um terno (x, y, z) é considerado terno pitagórico se e somente se x, y e z são números inteiros positivos, tais que vale o teorema

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Exemplo 7:

O terno $(3, 4, 5)$ é pitagórico, pois são inteiros positivos e satisfazem o teorema de Pitágoras, uma vez que

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

O mesmo o ocorre com os ternos (5, 12, 13) e (9, 12, 15), pois são inteiros positivos e satisfazem a equação acima.

Sabendo que existem infinitos ternos pitagóricos que satisfazem o teorema de Pitágoras, além disso, esses ternos podem ser obtidos a partir de um terno pitagórico apenas, basta multiplicar esse terno por um número natural k .

Teorema 2:

Seja (x, y, z) um terno Pitagórico e seja k um número natural. Então (kx, ky, kz) também é um terno Pitagórico.

Demonstração:

Seja $(x; y; z)$ um Terno Pitagórico e seja k um número real. Como $(x; y; z)$ é um Terno Pitagórico, então se verifica a condição

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Multiplicando o terno $(x; y; z)$ por um k qualquer pertencente N , obtemos

$$k(x, y, z) = (kx, ky, kz).$$

Então

$$(kx)^2 + (ky)^2 = (kz)^2$$

$$k^2x^2 + k^2y^2 = k^2z^2$$

$$k^2(x^2 + y^2) = k^2z^2$$

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Portanto, (kx, ky, kz) também é um Terno Pitagórico.

Surge então o conceito de terno Pitagórico primitivo, sendo definido abaixo.

Definição 6

Dizemos que um terno pitagórico (x, y, z) é primitivo se o $mdc(x, y, z) = 1$.

Exemplo 8:

O terno pitagórico do exemplo 5 é primitivo, pois o $mdc(3, 4, 5) = 1$ o mesmo acontece com o terno (5, 12, 13), pois $mdc(5, 12, 13) = 1$, já o ternos (9, 12, 15) não é primitivo, pois o $mdc(9, 12, 15) = 3$.

Como consequência dos ternos pitagóricos primitivos, onde vale a relação de Pitágoras surgem os triângulos pitagóricos primitivos cujas medidas dos seus lados são dadas por ternos primitivos.

4.2 Fórmulas Geradoras dos Ternos Pitagóricos

As equações envolvidas na descoberta de ternos pitagórico são as famosas Equações Diofantinas, muito estudadas em Teoria dos Números.

Os pitagóricos já sabiam que qualquer terno da forma $(m, \frac{1}{2}(m^2 - 1), \frac{1}{2}(m^2 + 1))$ onde m é um inteiro positivo maior do que 1 é um terno pitagórico. Entretanto, nem todos os ternos pitagóricos podem ser obtidos através da fórmula supracitada, por exemplo, o terno (15,8,17) é um terno pitagórico, mas não é da forma $(m, \frac{1}{2}(m^2 - 1), \frac{1}{2}(m^2 + 1))$. Assim, existem outras fórmulas geradoras, contudo neste trabalho veremos a fórmula que gera os ternos da tábua de Plimpton.

4.3 Propriedades dos Ternos Pitagóricos

Propriedade 1:

Um terno Pitagórico (x, y, z) corresponde a um triângulo retângulo.

Demonstração:

Para que o terno Pitagórico, (x, y, z) seja um triângulo é necessário que

$$x < y + z \quad (i) \quad y < x + z \quad (ii) \quad \text{e} \quad z < x + y \quad (iii).$$

Se z é maior do que x e y é suficiente provar a desigualdade (iii), as outras serão consequências.

Para isso, considere o terno Pitagórico (x, y, z) , logo, vale que

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{2}$$

Daí, temos que

$$x^2 < z^2 \Rightarrow x < z$$

$$y^2 < z^2 \Rightarrow y < z$$

Logo, z é maior elemento do terno (x, y, z) , somando $2xy$ em ambos os membros em (2), temos

$$x^2 + y^2 + 2xy = z^2 + 2xy$$

$$(x + y)^2 = z^2 + 2xy$$

Assim,

$$(x + y)^2 > z^2 \Rightarrow x + y > z$$

logo, o terno (x, y, z) corresponde a um triângulo, como vale a equação 1 segue que, este triângulo é retângulo.

Propriedade 2:

Se o terno Pitagórico é primitivo, então não existem dois elementos pares.

Demonstração:

De fato, seja o terno Pitagórico (x, y, z) , suponha que exista dois elementos pares x e y . Então, eles são da forma $2p$ e $2q$, com inteiros positivos respectivamente e z é ímpar, isto é, $2k + 1$, como terno é Pitagórico, então

$$(2p)^2 + (2q)^2 = (2k + 1)^2$$

$$4p^2 + 4q^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$4(p^2 + q^2) = 4k(k + 1) + 1$$

$$2(2p^2 + 2q^2) = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

note que, o primeiro membro é par e o segundo é ímpar, o que é impossível, pois não existe um número par que seja igual a um número ímpar. Logo, x e y não podem ser ambos pares.

Agora suponha que x e y são ímpares, então eles são da forma $2p + 1$ e $2q + 1$ respectivamente e z par, isto é, da forma $2k$. Assim, temos

$$(2p + 1)^2 + (2q + 1)^2 = (2k)^2$$

$$4p^2 + 4p + 1 + 4q^2 + 4q + 1 = 4k^2$$

$$4(p^2 + q^2 + p + q) + 2 = 4k^2$$

dividindo ambos os membros por 2, temos

$$2(p^2 + q^2 + p + q) + 1 = 2k^2$$

o que é impossível, pois o primeiro membro é ímpar e o segundo é par. Logo, x e y não podem ser ambos ímpares.

Portanto, conclui-se que x e y são de paridades distintas e consequentemente z será ímpar.

Propriedade 3:

Se o terno Pitagórico é primitivo, então o maior elemento é ímpar.

Demonstração:

Seja o terno Pitagórico (x, y, z) primitivo assim, temos que

$$x^2 + y^2 = z^2$$

daí, temos

$$x^2 < z^2 \Rightarrow x < z$$

$$y^2 < z^2 \Rightarrow y < z$$

logo z é maior elemento da terna.

Pela propriedade anterior x e y são de paridade distintas. Supondo x par então y será ímpar assim, temos

$$(2p)^2 + (2k + 1)^2 = z^2$$

como a soma de um número ímpar com um número par é ímpar, tem-se que z^2 é ímpar e consequentemente z é ímpar e como z é o maior elemento, isto prova a propriedade. A demonstração é análoga, supondo y ímpar.

Através das propriedades acima, podemos afirmar que em um terno pitagórico primitivo, sempre o maior dos elementos é ímpar e somente um dos elementos é par. Dessa forma, temos que x e y são os menores elementos sendo eles de paridade distintas e z é o maior deles sendo ele ímpar.

Vamos ver um teorema que enuncia uma formula que gera os ternos Pitagóricos primitivos, para isso iremos enunciar e demonstrar os seguintes lemas;

Lema 1:

Se (x, y, z) é um terno Pitagórico primitivo, então $\text{mdc}(x, y) = \text{mdc}(y, z) = \text{mdc}(x, z) = 1$.

Demonstração:

Se $d = \text{mdc}(x, y) > 1$, então existe um divisor primo p de d . Logo, $p \mid x$ e $p \mid y$ assim, segue que

$$p \mid x^2 + y^2 = z^2$$

implicando que

$$p \nmid z$$

assim, temos que

$$p < \text{mdc}(x, y, z) = 1$$

o que é absurdo, pois p é primo.

De forma análoga, prova-se os outros dois casos e, portanto, conclui-se que $\text{mdc}(x, y) = \text{mdc}(y, z) = \text{mdc}(x, z) = 1$.

Exemplo 9:

Considere o terno pitagórico primitivo $(9, 40, 41)$, observe que, $\text{mdc}(9, 40, 41) = 1$, daí temos

$$\text{mdc}(9, 40) = 1, \text{mdc}(40, 41) = 1 \text{ e } \text{mdc}(9, 41) = 1.$$

Lema 2:

Sejam a, b, c inteiros positivos, tais que, $\text{mdc}(a, b) = 1$ e $ab = c^2$. Então, a e b são individualmente quadrados perfeitos.

Demonstração:

Temos que todo fator p primo de a é também fator primo de c^2 mas não é fator primo de b , já que $\text{mdc}(a, b) = 1$. Entretanto, em c^2 todo fator primo possui expoente par, se todos os expoentes dos fatores primos de a possuem expoente par, então se conclui que a é quadrado perfeito. Analogamente prova-se o mesmo para b .

Portanto, conclui-se que a e b são quadrados perfeitos.

Teorema 3:

Sejam $s, t \in \mathbb{N}$ com $s > t \geq 1$ e $\text{mdc}(s, t) = 1$ isto é, s, t são primos entre si e não ambos ímpares entre si, com

$$x = 2st, \quad y = s^2 - t^2 \quad \text{e} \quad z = s^2 + t^2$$

então;

- a)** O terno (x, y, z) é Pitagórico primitivo
- b)** Qualquer terno Pitagórico primitivo é obtido através de $(2st, s^2 - t^2, s^2 + t^2)$.

Em particular, existem infinitos ternos Pitagóricos primitivos. Vejamos o começo de uma tabela com os ternos Pitagóricos primitivos:

Tabela 2: Ternos Pitagóricos Primitivos.

		$y = \text{cateto}$	$x = \text{cateto}$	$z = \text{hipotenusa}$
s	t	$s^2 - t^2$	$2st$	$s^2 + t^2$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	4	9	40	41
6	1	35	12	37
6	5	11	60	61
7	2	45	28	53
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Fonte: Acervo do aluno, 2018.

Demonstração:**a)** De fato, veja que

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= (2st)^2 + (s^2 - t^2)^2 \\
 &= 4s^2t^2 + (s^4 - 2s^2t^2 + t^4) \\
 &= 4s^2t^2 + s^4 + t^4 - 2s^2t^2 \\
 &= s^4 + 2s^2t^2 + t^4 \\
 &= (s^2 + t^2)^2 \\
 &= z^2
 \end{aligned}$$

logo, (x, y, z) é um terno Pitagórico.Suponha que exista p primo com $p > 2$ tal que

$$p \mid d = \text{mdc}(x, y, z)$$

assim, p é ímpar. Como, $p \mid 2st$ então, $p \mid s$ ou $p \mid t$. Também, temos que $p \mid s^2 + t^2$, assim, $p \mid s$ e $p \mid t$ o que é impossível, pois teríamos $p \leq \text{mdc}(s, t) = 1$, mas $p > 2$ primo, assim $d = 1$ não possui fator primo. Isto, prova o item **a**).

b) Seja (x, y, z) um terno Pitagórico primitivo qualquer, com x par e y ímpar. Dai, temos

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= z^2 \\
 x^2 &= z^2 - y^2 \\
 x^2 &= (z + y)(z - y)
 \end{aligned}$$

dividindo ambos os membros por 4 temos

$$\frac{x^2}{4} = \frac{1}{4}(z+y)(z-y)$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{(z+y)}{2} \frac{(z-y)}{2}$$

chame $\frac{(z+y)}{2} = u$ e $\frac{(z-y)}{2} = v$

- Note que, o produto uv é um quadrado perfeito.
- u e v são inteiros positivos de mesma paridade, pois z e y são inteiros positivos e $z > y$
- $u > v$, pois $z + y > z - y$

assim,

$$\frac{x^2}{4} = uv \quad (3)$$

e

$$u + v = \frac{(z+y)}{2} + \frac{(z-y)}{2} = z \quad (4)$$

$$u - v = \frac{(z+y)}{2} - \frac{(z-y)}{2} = y \quad (5)$$

Seja $d = \text{mdc}(u, v)$, então $d \mid u + v$ e $d \mid u - v$ de (4) e (5), segue que $d \mid \text{mdc}(y, z)$.

Pelo Lema 1, segue que o $\text{mdc}(y, z) = 1$, pois (x, y, z) é primitivo. Logo, o $\text{mdc}(u, v) = 1$.

Pelo Lema 2, u e v são individualmente quadrados perfeitos. Assim, ponha $u = s^2$ e $v = t^2$ com $s, t \in \mathbb{N}$. Dai, $\text{mdc}(s, t) = \text{mdc}(u, v) = 1$ e $s - t$ é ímpar. De (4) e (5) conclui-se que

$$s^2 + t^2 = z \quad \text{e} \quad s^2 - t^2 = y$$

e de (3), temos

$$\frac{x^2}{4} = uv = s^2 t^2$$

$$x^2 = 4s^2 t^2$$

$$x = \sqrt{4s^2 t^2}$$

$$x = 2st$$

Portanto, conclui-se que qualquer terno Pitagórico primitivo é obtido da forma $(2st, s^2 - t^2, s^2 + t^2)$.

Exemplo 10:

Escolhendo $s = 11$ e $t = 4$, substituindo esses valores na fórmula acima temos

$$2 \times 11 \times 4 = 88$$

$$11^2 - 4^2 = 105$$

$$11^2 + 4^2 = 137$$

assim, temos

$$(88, 105, 137)$$

é um terno Pitagórico primitivo, pois satisfaz o teorema de Pitágoras

$$88^2 + 105^2 = 137^2$$

e, o $\text{mdc}(88, 105, 137) = 1$.

Teorema 4:

Em qualquer terno Pitagórico primitivo, os números 3, 4 e 5 estão presentes.

Demonstração:

Para isto, basta mostrar que o terno (3,4,5) esteja presente como fatores dos elementos do termo gerador $(2st, s^2 - t^2, s^2 + t^2)$.

De fato, seja o termo gerador $(2st, s^2 - t^2, s^2 + t^2)$ com as condições estabelecidas no *teorema 3*, observe que

- O fator 4 está sempre presente no elemento $2st$ pelo fato de qualquer um dos números s ou t ser par (*pela propriedade 3*).
- O fator 3 está presente em $s^2 - t^2$. De fato, dividindo s e t pelo fator 3, teremos como resto os números 1 e 2. Logo, estes números são da forma $3k + 1$ ou $3k + 2$. Porém, de qualquer forma, o quadrado deles é da forma $3k + 1$. Portanto, a diferença $s^2 - t^2$ de dois números da forma $3k + 1$ é divisível por 3.
- Da mesma forma, dividindo s e t pelo fator 5 teremos como resto os números 1, 2, 3, 4. Assim, estes números são da forma $5k + 1$, $5k + 2$, $5k + 3$ e $5k + 4$ desta

maneira, se s^2 e t^2 forem da mesma forma, então $s^2 - t^2$ será um múltiplo de 5, porém se forem de forma diferentes, ou seja, um dos quadrados da forma $5k + 1$ e o outro $5k + 4$, então o fator 5 estará presente no elemento $s^2 + t^2$.

Portanto, conclui-se que os números 3, 4 e 5 estão presentes em qualquer terno pitagórico primitivo.

Teorema 5:

Existem infinitos ternos Pitagóricos primitivos.

Demonstração:

Segundo (SILVA, 2014), Seja a forma geradora $(2st, s^2 - t^2, s^2 + t^2)$, considere $t = 1$ assim, temos

$$(2s, s^2 - 1^2, s^2 + 1^2)$$

agora, considere $s = 2k$, sendo k um inteiro primo, assim

$$x = 2s = 4k$$

observe que x só possui dois divisores primos a saber 2 é o próprio k .

Note que,

$$y = s^2 - 1 \text{ e } z = s^2 + 1$$

são impares. Como $2 \nmid y$ e $2 \nmid z$ e além disso $k \nmid y$ e $k \nmid z$. Se $k|y$ e $k|z$. Então $k|(y + z)$. Mas,

$$y + z = (s^2 + 1) - (s^2 - 1)$$

$$y + z = 2$$

logo $k|2$ implicando que $k = 2$, pois k é primo.

O que é um absurdo.

Portanto, x, y, z são relativamente primos entre si. Como existem infinitos primos k , então existem infinitas ternas Pitagóricas da forma

$$(2s, s^2 - 1^2, s^2 + 1^2)$$

Com $p > 1$. Como ela satisfaz as propriedades (2) e (3), então esta terna é primitiva, o que conclui a demonstração.

Propriedade 4:

Dois triângulos Pitagóricos primitivos não são semelhantes.

Demonstração:

De fato, sejam os triângulos ABC e A'B'C' primitivos, então respectivamente temos $\text{mdc}(a, b, c) = 1$ e $\text{mdc}(a', b', c') = 1$.

Suponhamos que esses triângulos são semelhantes, logo existe um $k \in \mathbb{Z}$, tal que

i) $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$, com $k > 1$ assim, temos $a' = ka, b' = kb$ e $c' = kc$ observe que o terno $(a', b', c') = (ka, kb, kc)$ e $\text{mdc}(ka, kb, kc) = k$ o que é absurdo, pois o $\text{mdc}(a', b', c') = 1$ e $(a', b', c') = (ka, kb, kc)$.

Logo, os triângulos ABC e A'B'C' não são semelhantes.

ii) Agora se $0 < k < 1$, temos $a = ka', b = kb'$ e $c = kc'$, onde a demonstração é análoga bastando considerar nessa analogia $k \in \mathbb{Q}$.

Propriedade 5:

Qualquer número ímpar > 1 é o y de pelo menos um terno Pitagórico primitivo.

Demonstração:

De fato, seja $y = 2k - 1$ um número ímpar, pela fórmula geradora do teorema 2, temos

$$y = 2k - 1 = s^2 - t^2 = (s + t)(s - t) > 1$$

pois, é condição do teorema (3). Daí, temos

$$2k - 1 = (s + t)(s - t) \quad (2)$$

como $(2) > 1$, considere

$$s - t = 1 \quad \text{e} \quad s + t = 2k - 1$$

assim, temos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} s - t &= 1 \\ s + t &= 2k - 1 \end{aligned}$$

resolvendo, temos

$$\begin{aligned} s &= k \\ t &= k - 1 \end{aligned}$$

substituindo esses valores nos elementos da fórmula geradora

$$(2st, \quad s^2 - t^2, \quad s^2 + t^2)$$

temos

$$(2k(k - 1), \quad k^2 - (k - 1)^2, \quad k^2 + (k - 1)^2)$$

resolvendo

$$(2k(k-1), \quad k^2 - k^2 + 2k - 1, \quad k^2 + k^2 + 2k + 1)$$

temos

$$(2k(k-1), \quad 2k-1, \quad 2k(k+1)+1)$$

onde, o terno acima é Pitagórico primitivo, obtido a partir do y dado. Portanto, qualquer número da forma $2k-1$, com $k > 1$ é o y do terno Pitagórico primitivo.

Propriedade 6:

Todo número natural divisível por 4 é o x de pelo menos um terno Pitagórico primitivo.

Demonstração:

Seja $x = 4k$ dado, pela fórmula geradora, temos

$$x = 4k = 2st$$

considerando $s = 2k$, tem-se $t = 1$, substituindo esses valores nos elementos da formula geradora, temos

$$(4k, \quad 4k^2 - 1, \quad 4k^2 + 1)$$

onde, este terno é um Pitagórico primitivo com x dado, para qualquer $k \geq 1$.

Exemplo 11:

Considere o terno Pitagórico primitivo $(156, 133, 169)$, veja que o valor $156 = 4 \times 39$, e ele foi obtido através do elemento $2st$ considerando $s = 13$ e $t = 6$. Portanto, 156 é divisível por 4.

5 APLICAÇÃO

Nesta seção aplicaremos os conceitos estudados anteriormente para mostrarmos o teorema de Fermat para o caso $4|n$.

A CONJECTURA DE FERMAT

Segundo (MAIER, 2005), A conjectura de Pierre de Fermat (também: o “último Teorema” de Fermat) afirma que a equação Diofantina

$$x^n + y^n = z^n$$

não é solúvel por nenhum triplo (x, y, z) com $x, y, z \in \mathbb{N}$ se $n \geq 3$.

Essa conjectura se tornou um desafio para vários matemáticos brilhantes e depois de 350 anos foi finalmente provada pelo matemático Andrew Wiles em 1994/95.

Demonstraremos esta afirmação no caso $4|n$, já provado pelo próprio Pierre de Fermat (1601-1665).

Observação 1.

Sejam $n, a, b, c \in \mathbb{N}$ tais que $a|n$, $b|n$, $c|n$. Se existirem números $x, y, z \in \mathbb{N}$ tais que $x^n + y^n = z^n$, então existem também $x', y', z' \in \mathbb{N}$ tais que

$$x'^a + y'^b = z'^c.$$

Demonstração:

Sejam $r, s, t \in \mathbb{N}$ com $n = ar = bs = ct$. Fazendo-se $x' = x^r, y' = y^s, z' = z^t$, segue

$$x'^a + y'^b = x^{ra} + y^{sb} = x^n + y^n = z^n = z^{tc} = z'^c$$

■

Equivalentemente podemos formular

Observação 2.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Se existirem números $a, b, c \in \mathbb{N}$ com $a|n$, $b|n$, $c|n$ tais que $x^a + y^b = z^c$ é impossível para $x, y, z \in \mathbb{N}$, então também $x^n + y^n = z^n$ é impossível com $x, y, z \in \mathbb{N}$.

Esta observação reduz o problema da conjectura de Fermat para seu tratamento somente com os expoentes primos: Porquê

$$x^p + y^p = z^p \text{ é impossível para todos os primos } p > 2?$$

Consequência.

Seja $n \in \mathbb{N}$ com $4|n$. Se $x^4 + y^4 = z^2$ é impossível para $x, y, z \in \mathbb{N}$, então também $x^n + y^n = z^n$ é impossível com $x, y, z \in \mathbb{N}$.

■

Teorema. (Fermat).

A equação $x^4 + y^4 = z^2$ não possui solução $x, y, z \in \mathbb{N}$.

(Consequentemente a conjectura de Fermat estará provada quando $4|n$.)

Demonstração:

Consideremos o conjunto

$$S = \{z \in \mathbb{N} | \exists x, y \in \mathbb{N} \text{ com } x^4 + y^4 = z^2\}.$$

Suponhamos, $x^4 + y^4 = z^2$ fosse solúvel com $x, y, z \in \mathbb{N}$. Isto significa $S \neq \emptyset$. Seja $z_0 \in S$ o elemento mínimo. Logo, existem $x_0, y_0 \in \mathbb{N}$ com $z_0^2 = x_0^4 + y_0^4$. Porém, se $z_0 > z_1 \in \mathbb{N}$, então não existem $x_1, y_1 \in \mathbb{N}$ com $z_1^2 = x_1^4 + y_1^4$. Portanto, o método desta demonstração vai ser, construir a partir de (x_0, y_0, z_0) um triplo $x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{N}$ com $z_1^2 = x_1^4 + y_1^4$ e $z_1 < z_0$. Se conseguirmos isto, teremos a condição desejada que terminará a demonstração.

Mostramos primeiro $\text{mdc}(x_0, y_0) = 1$

Se $d = \text{mdc}(x_0, y_0)$, colocamos $x_1 = \frac{x_0}{d}$ e $y_1 = \frac{y_0}{d}$ e obtemos

$$x_1^4 + y_1^4 = \left(\frac{x_0}{d}\right)^4 + \left(\frac{y_0}{d}\right)^4 = \frac{x_0^4 + y_0^4}{d^4} = \frac{z_0^2}{d^4} = \left(\frac{z_0}{d^2}\right)^2 = z_1^2 \Rightarrow \frac{z_0}{d^2} = z_1 \Rightarrow z_0 = d^2 z_1.$$

Com $z_1 < z_0$ se $d > 1$, concluímos $d = 1$.

Como $(x_0^2)^2 + (y_0^2)^2 = z_0^2$ com $\text{mdc}(x_0^2, y_0^2) = 1$, temos que (x_0^2, y_0^2, z_0) é um triplo Pitagórico primitivo. Pelo teorema 3 existem $s, t \in \mathbb{N}$ com $s > t$, $\text{mdc}(s, t) = 1$ e $s - t$ ímpar, tais que

$$x_0^2 = 2st, \quad y_0^2 = s^2 - t^2 \quad \text{e} \quad z_0 = s^2 + t^2.$$

Afirmamos que t é par: Se s fosse par, teríamos $s = 2s'$ e $t = 2t' + 1$ e segue $y_0^2 = (2s')^2 - (2t' + 1)^2 = 4s'^2 - 4t'^2 - 4t' - 1 = 4(s'^2 - t'^2 - t') - 1 = 4l - 1$, o que é impossível para um quadrado perfeito (um quadrado perfeito ímpar deveria ter a forma $4k + 1$!). Logo de fato t é par e s é ímpar. Coloquemos $t = 2r$ com $r \in \mathbb{N}$ e obtemos $x_0^2 = 2st = 4sr$ e daí

$$\left(\frac{x_0^2}{4}\right) = sr \Rightarrow \left(\frac{x_0}{2}\right)^2 = sr.$$

Temos $\text{mdc}(r, s) = 1$, pois $\text{mdc}(s, t) = 1$. Logo, r e s ambos são quadrados perfeitos, digamos $s = z_1^2$, $r = w_1^2$ com $z_1, w_1 \in \mathbb{N}$.

De $y_0^2 = s^2 - t^2$ segue que

$$t^2 + y_0^2 = s^2$$

e como $\text{mdc}(s, t) = 1$, vemos que (t, y_0, s) é um triplo Pitagórico primitivo. Existem então $u, v \in \mathbb{N}$ com $u > v$, $u - v$ ímpar, $\text{mdc}(u, v) = 1$, tais que

$$t = 2uv, \quad y_0 = u^2 - v^2 \quad \text{e} \quad s = u^2 + v^2.$$

Agora, $uv = \frac{t}{2} = r = w_1^2$. Mais uma vez concluímos que u e v são individualmente quadrados perfeitos, digamos $u = x_1^2$ e $v = y_1^2$ com $x_1, y_1 \in \mathbb{N}$. Calculamos

$$x_1^4 + y_1^4 = u^2 + v^2 = s = z_1^2,$$

o que significa $z_1 \in S$. Mas como $0 < z_1 < z_1^2 = s < s^2 < s^2 + t^2 = z_0$, isto é impossível devido à minimalidade de $z_0 \in S$.

Isto mostra que S é vazio, portanto $x^4 + y^4 = z^2$ não pode ser solúvel em $\mathbb{N}$.

Portanto concluímos que não existe solução para $4|n$ já provada pelo próprio Fermat.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho de conclusão de curso, foi abordado de forma básica os triângulos Pitagóricos e as ternas Pitagóricas. Concluimos que eles podem ser classificados como ternos primitivos e não primitivos. Provou-se que todos esses ternos, tanto os primitivos quanto os não primitivos são obtidos através da forma $(2st, s^2 - t^2, s^2 + t^2)$, além disso, demonstrou-se que existem infinitos ternos primitivos. Através das propriedades, concluimos que os catetos dos triângulos Pitagóricas primitivos são de paridades distintas, isto é, se um deles for par então necessariamente o outro tem que ser ímpar e que o maior elemento da terna é um número ímpar e esse maior elemento é a hipotenusa do triângulo Pitagórico. Conclui-se esse trabalho com uma aplicação que prova o teorema de Fermat $(x^n + y^n = z^n)$, para n da forma $4k$ utilizando para isso a equação $x^4 + y^4 = z^2$.

Esperamos que esse trabalho sirva de inspiração e apoio tanto para estudante do ensino médio, como do ensino superior para possíveis estudos e trabalhos que envolvam o mesmo conteúdo.

Caso aja algum interesse para trabalhos futuros sugerimos que explorem o assunto dedicando um capítulo só para aplicações, podem também realizar um trabalho com maior rigor matemático sugerimos o estudo sobre Teoria dos Números com ênfase nas equações Diofantinas.

REFERÊNCIAS

- [1] BEZ, E. T. **Relacionando Padrões entre Sequência de Fibonacci, Secção Áurea e Ternos Pitagóricos**. Monografia, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 1997. <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/96816/Edson_Tadeu_Bez.PDF>
- [2] BOYER, Carl B. **História da Matemática**, 1996. Tradução: GOMIDE, Elza F. São Paulo, ed. da universidade de São Paulo. 1974.
- [3] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 7ª ed. - São Paulo: Atual, 1993.
- [4] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática** / tradução: Hygino H. Domingues, SP: Editora da UNICAMP, 2004.
- [5] MAIER, R. R. **Teoria dos Números**. Universidade de Brasília. Departamento de Matemática I. E. Brasília, 2005. <<http://www.mat.unb.br/~maier/tnotas.pdf>>
- [6] MARTINEZ, F. E. B.; MOREIRA, C. G. T de A.; SALDANHA, N. C.; TENGAM, E. **Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro**. 2013. <http://www.mat.ufmg.br/~fbrocher/TN/Teoria_dos_numeros_Um_passeio_com_primos_3ed.pdf>
- [7] ROONEY, Anne – **A História da Matemática** – Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito 2012 – São Paulo – M. Books do Brasil Editora Ltda.
- [8] SILVA, C. M. **Propriedades Aritméticas e Geométricas das Ternas Pitagóricas**. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Feira de Santana. Feira de Santana Bahia, 2014. <http://profmatt.uefs.br/arquivos/File/CALEBE_MIRANDA_DA_SILVA.pdf>

[9]<<https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96613/Fernando.pdf?sequence=1>>.

[10] <<https://www.todamateria.com.br/pitagoras/>>.