UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO TOCANTINS/ABAETETUBA

FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO DA FUNÇÃO QUADRÁTCA E APLICAÇÃO

NILSON GONÇALVES DE ALMADA

ABAETETUBA – PARÁ

2022

NILSON GONÇALVES DE ALMADA

DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO DA FUNÇÃO QUADRÁTCA E APLICAÇÃO

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito final para obtenção do grau de Licenciatura Plena em Matemática, pela Universidade Federal do Pará-UFPA, Campus Universitário do Baixo Tocantins/ Abaetetuba, sob orientação do prof. Dr. José Francisco da Silva Costa

ABAETETUBA - PARÁ

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G635d Gonçalves de Almada, Nilson Gonçalves de Almada.
DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO DA FUNÇÃO QUADRÁTCA E APLICAÇÃO / Nilson Gonçalves de Almada Gonçalves de Almada. — 2022.
36 f. : il.

Orientador(a): Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa Silva Costa
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Curso de Matemática, Abaetetuba, 2022.

1. função quadrática. 2. Desenvolvimento analítico. 3. Aplicações . I. Título.

CDD 510

NILSON GONÇALVES DE ALMADA

DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO DA FUNÇÃO QUADRÁTCA E APLICAÇÃO

BANCA

Prof. José Francisco da Silva Costa
Presidente/Orientador

Prof. Dr Rômulo Correa Lima
Membro Interno – FACET/CUBT

Prof. Dr. Nélio Santos Nahum
Membro Interno – SEDUC/PA

Prof. Ms. José Maria dos Santos Lobato Júnior
Membro Externo –IFPA-Tucuruí-PA

Este trabalho é dedicado aos meus pais, Raimundo e Emíla Almada, irmãos e familiares que sempre estiveram ao meu lado incentivando e torcendo por mim. À minha esposa Nara Helena e filhos que foram a razão e motivo cruciais para prosseguir nessa trajetória universitária.

Nilson Gonçalves de Almada

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por ter me concedido o dom da vida, de sonhar e ter esperança em dias melhores. Aos amigos de longa data que me acompanham até hoje e que sempre me deram forças para contornar obstáculos e os superar, ao professor Dr. José Francisco da Silva Costa que me orientou neste trabalho.

Aos amigos, Dj Bola Sena, Cledson Araújo, Chiquinho Carvalho e ao professor Dr. Samuel Maciel Corrêa (In memorian).

A todos os professores que me proporcionaram conhecimento durante minha trajetória acadêmica e que se tornaram meus amigos.

A todos as pessoas que passaram por minha vida até aqui e que me deixaram uma lição pois “Nunca é tarde e sempre há o que recomeçar”.(Metrópole 91)

Na vida os passos de um homem podem ser regidos a partir de uma função quadrática, isso se acelerar ou retardar. Mas se os seus passos forem constantes, devagar, devagar chega no seu objetivo, sem pressa e caminhando sempre uniforme.

Nilson Almada

RESUMO

O presente trabalho de conclusão de curso objetiva desenvolver um estudo da função quadrática considerando duas diferentes abordagens. Na primeira é destacada o formalismo analítico da função quadrática considerando os principais elementos que a caracteriza tanto do ponto de vista analítico quanto geométrico. Após essa abordagem, realiza-se o estudo a partir de aplicações que contextualizam o ensino da função do 2° grau. Na segunda abordagem, desenvolve-se um segundo formalismo analítico com demonstrações que evidenciam o surgimento de uma grandeza **A** como função entre a altura máxima correspondente ao ponto da ordenada do vértice com diferença entre as abscissas do vértice com a variável x. Em todo o caso, a partir desses resultados, torna-se possível estabelecer uma relação entre a grandeza A, a abscissa do vértice com as raízes da função quadrática. Aplicam-se esse formalismo alternativo em três problemas que podem ser encontrados em situações do cotidiano. Conclui-se a pesquisa considerando que com os formalismos analíticos/geométricos desenvolvidos tendo em vista as aplicações apresentadas em ambos, que o estudo da função quadrática pode receber um novo “olhar” cientifico, tendo em vista que a teoria não se restringe apenas em técnicas separadas do contexto do cotidiano, sendo esse último fundamentalmente necessário para aproximar a teoria da prática o que é de caráter essencial para um processo de ensino e aprendizagem eficaz.

Palavras-Chaves: Função quadrática; Desenvolvimento analítico; Aplicações.

ABSTRACT

This article aims to develop a study of the quadratic function considering two different approaches. In the first one, the analytical formalism of the quadratic function is highlighted, considering the main elements that characterize it both from an analytical and geometric point of view. After this approach, the study is applied from applications that contextualize the teaching of the polynomial function of the 2nd degree. In the second approach, a second analytical formalism is developed with demonstrations that show the emergence of a quantity A as a function between the maximum height corresponding to the ordinate point of the vertex with the difference between the abscissas of the vertex with the variable x. In any case, from these results, it becomes possible to establish a relationship between the quantity A, the abscissa of the vertex, with the roots of the quadratic function. This alternative formalism is applied to three problems that can be encountered in everyday situations. The research concludes considering that with the analytical/geometric formalisms developed in view of the applications presented in both, that the study of the quadratic function can receive a new scientific "look", considering that the theory is not restricted only to techniques separated from the context of everyday life, the latter being fundamentally necessary to bring theory to practice, which is essential for an effective teaching and learning process.

Keywords: quadratic function; Analytical development; applications.

SUMÁRIO

1-INTRODUÇÃO

O estudo de funções representa relevante conteúdo aplicado no espaço escolar e volatado para o ensino básico. Diferentes abordagens metodológicas são realizadas com intuito de adequar o conhecimento visando também o desenvolvimento teórico/prático. Mostra-se que no caso das funções linear e quadrática recebem um destaque na área da Física quando no estudo da Cinemática, verifica-se movimentos de objetos regidos por essas funções a partir de uma característica comum nos movimentos que processam de forma uniforme e variado (RESNICK, 2008).

Para o entendimento do estudo da função na área da Matemática, usa-se o conceito matemático de função como uma relação entre dois conjuntos em que, a cada valor do primeiro, corresponde somente um valor no segundo, ou seja, o estudo das funções pode ser entendido como o estudo de relações entre grandezas que variam (DANTE,1999).

Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, 2006, ainda sobre o ensino específico de funções dentro da própria matemática e até mesmo em outras áreas do conhecimento, o estudo das funções permite que o discente compreenda a linguagem algébrica do ponto de vista científico que deve ser necessário para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema (MURAKAMI, 2004)

Ainda no estudo pertinente a Matemática, restringe-se a função como um conceito que pode ser trabalhado de forma bem explorada, desde o entendimento da forma geral dela até a representação da variável tendo em vista o esboço gráfico (LIMA,2005). Com base no desenvolvimento anterior, o professor deve no contexto da sala de aula, desenvolver um conteúdo de função onde consiga buscar uma metodologia que venha facilitar um melhor entendimento do conceito de função e a área onde poderá ser aplicada (PARANÁ, 2006).

Em relação a construção gráfica, são particularmente importantes para uma melhor compreensão dos elementos, como domínio, contradomínio, raízes, estudos dos sinais, etc. Sob esse aspecto geométrico e algébrico (LIMA, ELON, 2001), algumas metodologias de ensino, procuram enfatizar aplicativos computacionais como recursos didáticos para uma melhor compreensão e visualização. Nesse caso, muitos professores usam o software Geogebra como uma ferramenta que tem como meta auxiliar no esboço e interpretação dos elementos dados por uma determinada função (GEOGEBRA, 2019)

Tendo em vista o que foi exposto nesse contexto, o presente trabalho objetiva abordar o estudo e desenvolvimento da função quadrática enfatizando o formalismo matemático que a caracteriza, trazendo aplicações contextualizadas importantes para compreensão do conceito e entendimentos dos elementos a ela intrínsecos. Tendo em vista essa temátioca, desenvolve-se como os objetivos específicos: a) Verificar a relevância do desenvolvimento da função quadrática analítico/geométrico analisando vértice, raízes e concavidade; b) Mostrar um método alternativo de estudar a função quadrática considerando o produto médio da altura máxima pela variação das raízes da referida função quadrática; c) compreender o estudo teórico da função elaborando problemas direcionados ao cotidiano.

Para a justificativa, entende-se que o estudo de função tem sua maior relevância quando o ensino acontece levando em consideração uma abordagem em que a teoria acompanhada com problemas contextualizados contribui que o processo de ensino e aprendizagem seja muito mais significativo, pois aproxima o aluno do cotidiano quando se trata de problemas que tende para essa realidade. Outra abordagem interessante que é tratada, corresponde as determinações das raízes em função do semi-produto da altura máxima pela diferença dos valores quecorrespondem a raiz e a abscissa do vértice, fazendo aplicações em probelamas que envolvem esse semi-produto (RESNICK, 2008)

2-DESENVOLVIMENTO

Torna-se interesssnante comopreender o estudo da função, considerando o conhecimento que acontece a partir de conceitos e formulações matemáticas que ampliam o entendomento de um afunção quadrática. Dessa maneira, o presente tópico procura desenvolver o estudo a partir de demonstrações do cálculo de raízes, vétices, fórmula canônica e esboço gráfico no sistema cartesiano.

2.1 ESTUDO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Esse tópico realiza uma abordagem levando em conta a definição da função do 2° grau, dando destaque aos elementos que a caracteriza no plano cartesiano. Assim sendo, desenvolvem-se os formalismos analítico e geométrico da função do 2° grau. Portanto, nessa abordagem restringe-se o estudo apenas nas demonstrações e comentários acerca dos elementos principais, a saber, a determinação das raízes e discussões, o ponto do vértice, a forma canônica como métodos analíticos. Para a abordagem geométrica, traça-se no plano cartesiano a parábola reconhecendo os elementos desenvolvidos o que pode ser aplicado em outras áreas do conhecimento humano (SANTOS, 2007).

2.1 DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO DO 2º GRAU E SEUS ELEMENTOS.

Antes de enunciar o conceito de função polinomial do 2° grau, considera-se primeiramente, duas situações problemas para verificar a utilidade do ponto de vista contextualizado da função do 2° grau.

Problema 1: Jogador de Golfe.

Um jogador posiciona-se para lançar uma pequena bola com velocidade inicial de 20m/s. Sabe-se que a bola executa um movimento parabólico num campo conservativo sem levar em conta a resistência do ar. Determine tempo total de queda e a altura máxima atingida. Considere que a aceleração da gravidade local seja de $10m/s^2$. Para resolver esse problema, utiliza-se a função quadrática verificado no estudo da cinemática para o caso do movimento uniformemente variado (HALLIDAY, 2006).

$$h = \frac{1}{2}gt^2 + vot + h_0 \quad (1)$$

Sendo que, $vo = 20m/s$, $g = -10m/s^2$ e $h_0 = 0$

Representam, respectivamente, a velocidade inicial, a aceleração da gravidade e a altura inicial. Levando esses valores na função dada, vem que:

$$h = -5t^2 + 20t \quad (2)$$

Pode-se a partir dessa expressão calcular o tempo que a bola descreveu a trajetória parabólica. Isto é. Quando a bola retornar na base do solo, tem-se que , $h = 0$, logo,

$$-5t^2 + 20t = 0$$

Resolvendo essa expressão, vem que: $t' = 0$ e $t'' = 2$,

Logo o tempo de queda da bola foi $2s$. De acordo com o enunciado, o campo gravitacional em que a bola realiza o movimento parábolico é conservativo. Logo, o tempo de subida e o tempo de descida são iguais. Nesse caso, pode-se considerar que o corpo atingiu a altura máxima no seguinte tempo:

$$t = \frac{T}{2} = \frac{2}{2} \rightarrow t = 1.$$

Levando na função da altura e considerando $t = 1s$.vem que,

$$h = -5t^2 + 20t \rightarrow \; h = 15$$

Portanto, a altura máxima atingida pela bola foi de $h = 15m$.

Problema 2: Avião sobrevoando horizontalmente e o lançamento de projétil

Um avião sobrevoa horizontalmente a uma altura de 2000m quando lança um projétil com velocidade de 60m/s. Determine o tempo e o alcance horizontal que o projétil explode.

Solução

Para resolver esse problema, usa-se a seguinte função do movimento, considerando a não existência de força de resistência atuando no sistema durante o movimento.

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad (3)$$

Sendo a altura $h = 2000m$ e a gravidade de $g = 10m/s^2$, tem-se que o tempo que o projetil atingiu o solo será,

$$2000 = \frac{1}{2}.10t^2 \rightarrow \; t = 20$$

Para calcular o alcance, usa-se a seguinte função:

$$x = v_0.t \quad (4)$$

Como a velocidade é $v = 60m/s$ e o tempo foi de $t = 20s$, vem que o valor do alcance será,

$$x = 1200m$$

Tendo em vista as aplicações apresentadas, verifica-se que a função polinomial do 2° grau se torna importante para ser aplicada em situações problemas para equacionar e interpretar fenômenos que exigem o conhecimento científico-matemático tão necessários no cotidiano, como será verificado, posteriormente. Assim sendo, define-se a função do 2° grau da seguinte maneira, A função $f : \Re \rightarrow \Re$ definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \; a \neq 0 \tag{5}$$

É chamada de função quadrática ou do 2° grau, onde a e b são valores reais. Existem importantes elementos associados a ela que podem ser úteis para serem aplicados em muitas situações problemas do cotidiano (FRANÇA, 2001).

2.2 CÁLCULO DAS RAÍZES DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Toda equação da forma

$$\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c} = 0 \tag{6}$$

Pode ser resolvida por meio da fórmula

$$\mathrm{x} = \frac{-\mathrm{b} \pm \sqrt{\Delta}}{2\mathrm{a}}, \tag{7}$$

Em que,

$$\Delta = \mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}, \tag{8}$$

Que representa o discriminante da equação quadrática. (IMENES, L. M. 2002)

Demonstração

Seja dada a seguinte equação, em que *a*, *b*, *c* são reais. Logo,

$$a.x^2 + b.x + c = 0$$

Levando c para o segundo membro, tem-se que:

$$a.x^2 + b.x = -c$$

Multiplicando ambos os membros por 4ª, isto é,

$$4.a\,(a.x^2 + b.x) = -4.a.c$$

Ou

$$4.a^2.x^2 + 4.a.b.x = -4.a.c$$

Somando b^2em ambos os membros, obtem-se que,

$$4.a^2x^2 + 4.a.b.x + b^2 = b^2 - 4.a.c$$

O primeiro termo é um quadrado perfeito. Logo:

$$4.a^2x^2 + 4.a.b.x + b^2 = (2.a.x + b)^2 = b^2 - 4.a.c$$

Isolando x, vem que,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ou

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Deve-se fazer uma discussão com bases no discriminante da equação.

2.3 DISCUSSÕES DOS ZEROS DA EQUAÇÃO QUADRÁTICA

A interseção da parábola com o eixo *x* define os *zeros* da função. Para determinarmos os zeros basta resolver a equação do 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0\,. \tag{9}$$

Para discutir o número de raízes da função, deve-se analisar a expressão dada por (8), cujos valores podem ser positivo, negativo e zero. Se a parábola intersecta o eixo *x* em dois pontos distintos, a expressão dada por (8) assume um valor positivo. Isto é,

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \tag{10}$$

Se a expressão dada por (8) for nulo, a parábola intercepta o eixo das abscissa em apenas um ponto. Isto é,

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \tag{11}$$

Se as raízes forem complexas, a exprersão (8), torna-se negativo e a parábola não intercepta o eixo das abscissas em nenhum ponto.

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \tag{12}$$

2.4 FORMA CANÔNICA

. Para iniciar o estudo analítico da função quadrática, verifica-se ser possível obter os valores de máximo e mínimo da função, usando-se uma maneira de expressar a função numa notação denominada de forma canônica. Seja, a função dada pela expressão (5). isto é,

$$\boldsymbol{f}(x) = ax^2 + bx + c$$

Pode-se obter uma outra forma alternativa da função anterior, considerando a seguinte fórmula canônica,

$$f(x) = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2 - 4ac}{4a^2})\right]$$

Ou

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right], \qquad (13)$$

,

Demonstração

Sendo a função,

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Colocando a em evidencia, vem que,

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Somando e subtraindo o valor $\frac{b^2}{4a^2}$, vem que,

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

Fazendo agrupamento dos termos, obtem-se que,

$$f(x) = \frac{b^2}{4a^2} = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)\right]$$

Fazendo a fatoração,

$$f(x) = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2 - 4ac}{4a^2})\right]$$

Representando $b^2 - 4ac$ por Δ, tem-se a a forma canônica.

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

2.5 O VÉRTICE DA PARÁBOLA

A interseção de uma parábola com o seu eixo de simetria é um ponto chamado vértice. O vértice é o ponto de ordenada máxima ou mínima, dependendo da concavidade da parábola. Pode-se mostrar a coordenada do vértice que representam os pontos extremantes da função, ou seja os valores que conduzem a função a valores máximo e mínimo. Tomando a expressão dada por (13), pode-se obter a cooredanda do vértice.

Distribuindo o valor literal de a, obtem-se que,

$$f(x) = \left[a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\mathrm{a}}\right] \tag{14}$$

Entende-se que o eixo de simetria divide a parábola em outras duas semi-parábolas simétrica. Nesse caso, para obter a abscissa do vértice, deve-se considar que a expressão em (14) terá um valor mínmo ou máximo quando o 1° termo ao quadrado da expressão (13) for nulo. Ou seja,

$$x_v = -\frac{b}{2a}. \tag{15}$$

Levando a expressão (15) em (14), obtem-se para a ordenada do vértice.

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} \tag{16}$$

A ordenada para o eixo y. Para saber se trata de um máximo, verifica-se que a é negativo e no caso contrário, positivo, como se verificará no tópico a seguir.

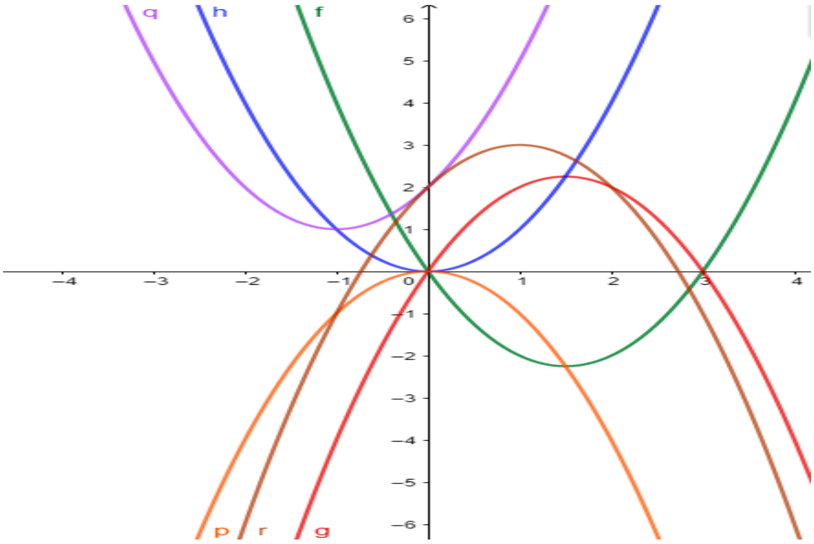
2.6 GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

O gráfico de uma função dada pela expressão (5). Isto é,

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

É uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo y. Se o coeficiente de x^2 for positivo ($a > 0$), a parábola tem a concavidade voltada para cima. Se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

Figura 1: Traçados de parábolas no plano cartesiano, mostrando pontos extremantes concavidades e intersecções delas com o eixo coordenado



Fonte: Acervo dos autores.

2.7 APLICAÇÕES

Produto entre dois números

A soma de dois números x e y vale 20. Qual deve ser o valor do produto que corresponde ao maior valor?

Solução

Para resolver esse problema, monta-se o seguinte sistema:

$$x + y = 20$$

$$P = x.y$$

Logo,

$$x + y = 20 \rightarrow \; y = 20 - x$$

Levando em P, vem que,

$$P = x.(20 - x) = -x^2 + 20x$$

Para que o produto seja máximo, deve-se obter o valor da abscissa do vértice. Isto é,

$$x = V_x = \frac{-b}{2.a} = \frac{-20}{2.(-1)} = \frac{20}{2} = 10$$

Logo,

$$y = 20 - x \rightarrow \;\; y = 20 - 10 = 10$$

Para que o produto seja máximo, os valores de x e y devem ser iguais a 10.

Agência de viagem

Na cidade de Abaetetuba, há no terminal setores que vendem pacotes de viagens para passageiros com destino a Capital (Belém-Pa) e para outras localidades, como Cametá, Igarapé-Miri, Barcarena e etc. Assim sendo, uma determinada agencia de viagem, realiza um pacote coletivo com destino a cidade de Mosqueiro apenas de ida e volta. O ônibus possui 40 poltronas, onde cada uma ocupada, custa 80,00. Se caso há desistência, verifica-se que cada passageiro irá pagar um acréscimo de 20,00 no pacote. Dessa forma, para que essa agência obtenha lucro máximo na venda desse pacote de viagem como destino a cidade de Mosqueiro, determine o número de pessoas que devem realizar a viagem.

Solução:

Seja x a quantidade de pessoas que irão ocupar as poltronas. Nesse caso, se todas as poltronas forem ocupadas, o valor recebido pela agencia será R$ 2.400,00. No entanto, havendo desistência, o custo obtido será,

$$C(x) \; = \; x[(80 + \; 20(40 - x)]$$

$$C(x) = 80x + 800x - 20x^2$$

$$C(x) = 880x - 20x^2$$

Coniderando o ponto do vértice da abscissa da função, vem que,

$$V_x = \frac{-b}{2.a} = \frac{-880}{2.(-20)} = \frac{880}{40} = 22$$

Logo, tem-se um valor máximo para $x = 22$.

Lançamento de um bola

Um jogador chuta uma bola a partir do solo, com uma velocidade inicial de 20m/s e com ângulo de 69º. Considerando $g = 10m/s^2$, determine: A) o alcance em relação o ponto de lançamento, B) A altura máxima, C) O tempo de queda. Despreze a força de resistência.

Solução

A) Considerando os dados do problema, tem-se que

$g = 10m/s^2$

$v_0 = 20m/s$

$H_0 = 0$

$v_0 = 20m/s$

$\theta = 60°$

Para obter a função horária de $H(t)$, tendo em vista que o movimento é variado e portanto, com aceleração constante, pode-se usar a seguinte expressão:

$$H = H_0 + v_{oy}t + \frac{1}{2}gt^2$$

Como $v_{oy} = v_0 sen\theta = 20.sen60° = 20.\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \rightarrow v_{oy} = 10\sqrt{3}m/s$

Logo, levando na função anterior, obtém que,

$$H = 0 + 10\sqrt{3}t - 5t^2 = 10\sqrt{3}t - 5t^2$$

Tendo em vista que o lançamento ocorre contra o campo gravitacional.

Sabendo-se que o movimento acontece de modo que a aceleração é constante, a velocidade varia linearmente com o tempo, sendo dado pela expressão:

$$v = v_{0y} + gt$$

Considerando os valores dados, obtém-se que,

$$v = 10\sqrt{3} - 10t$$

Para o eixo horizontal, o movimento é considerado uniforme sendo que a função do alcance em relação ao tempo é dada pela expressão:

$$x = v_{0x}.t = v_0 cos\theta.t = v_0 cos60.t = 20.\frac{1}{2}.t = 10t$$

Isolando o tempo nessa última expressão, vem que:

$$t = \frac{x}{10}$$

Levando esse valor na função quadrática, pode-se obter a função H(x). Isto é:

$$H = 10\sqrt{3}t - 5t^2 = 10\sqrt{3}\frac{x}{10} - 5(\frac{x}{10})^2$$

Resultante em,

$$H = \sqrt{3}x - \frac{1}{20}x^2 = x(\sqrt{3} - \frac{1}{20}x)$$

Nesse caso, o alcance da bola acontecerá quando $H = 0$. Logo,

$$x.\left(\sqrt{3} - \frac{1}{20}x\right) = 0$$

$\boldsymbol{x' = 0}$

$$\sqrt{3} - \frac{1}{20}x'' = 0$$

Ou

$$x'' = 20\sqrt{3}$$

Assim, a bola ocupa a posição do alcance em $x'' = 20\sqrt{3}m$

B) A altura máxima irá ocorrer quando considera a metade do valor do alcance dado pela alternativa A). Isto é,

$$x'' = 10\sqrt{3}$$

Como

$$H(x) = x(\sqrt{3} - \frac{1}{20}x)$$

Logo,

$$H(x) = 10\sqrt{3}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{20}10\sqrt{3}\right) \rightarrow H(x) = 10\sqrt{3}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 30 - 15 = 15$$

Portanto, a altura máxima será $H(x) = 15m$

C) Sendo

$$t = \frac{x}{10}$$

Para $10\sqrt{3}m$, vem que,

$$t = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$$

Portanto, o tempo de queda foi de $t = \sqrt{3}s$

Esvaziamento de um reservatório

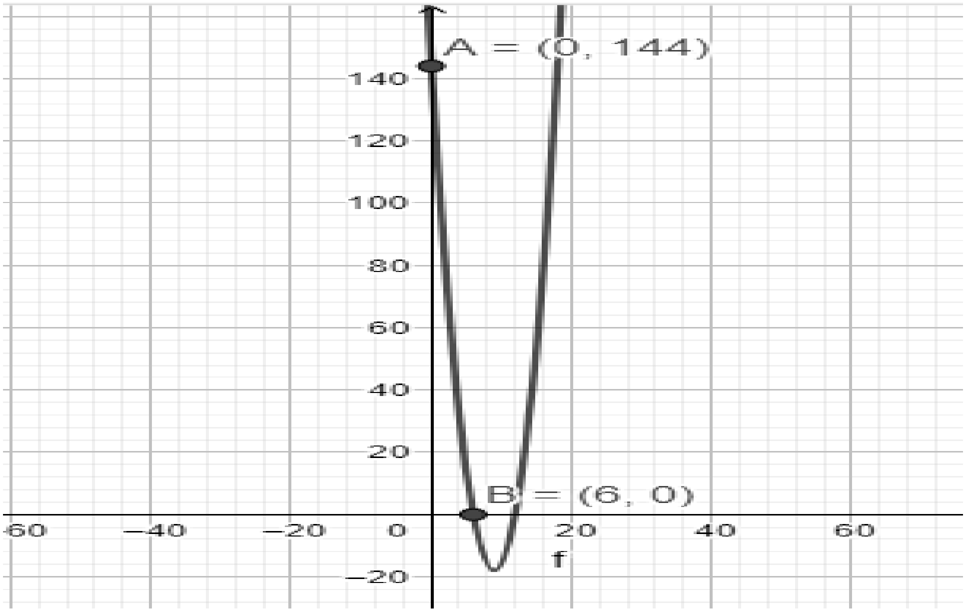
Certo reservatório, contendo 144 m³ de água, deve ser drenado para limpeza. Decorridas t horas após o início da drenagem, o volume de água que saiu do reservatório, em m³, é dado por V(t) = 36t - 2t². Sabendo-se que a drenagem teve início às 10 horas, determine o momento em que o reservatório estará completamente vazio.

$$\Delta V = 36t - 2t^2 \;\rightarrow\; 144 - 36t + 2t^2 = 0 \;\rightarrow\; 72 - 18t + t^2 = 0 \rightarrow$$

$$\Delta = 324 - 72.4.1 \;\rightarrow\; \Delta = 324 - 288 = 36 \rightarrow$$

$$t' = \frac{18+6}{2} = \frac{24}{2} \;\rightarrow\; t = 12h$$

Alternativa falsa, pois o segundo tempo não pode ser considerado de acordo com o gráfico a seguir:



De acordo com o gráfico, verifica-se que o problema é real, não sentido de considerar volume negativo, logo o gráfico pode ser considerado para o intervalo de valores de o a $144m^3$ e no intervalo de tempo $0 < t \leq 6h$. Logo, o segundo tempo leva ao seguinte valor:

$$t'' = \frac{18-6}{2} = \frac{12}{2} \;\rightarrow\; t = 6h$$

Nesse caso, verifica-se que o volume é esvaziado num tempo de 6h. Como o inicio do esvaziamento ocorreu ás 10h. O momento em que o reservatório estará completamente vazio será:

$$t = 10h + 6h = 16h$$

5-O lucro de uma empresa

Considere que uma empresa que vende os produtos onde o preço unitário é função da quantidade de unidades adquiridas pelo comprador. Nesse caso, pode-se considerar que o lucro mensal L, obtido com a venda seja dado pela seguinte função:

$$L(x) = -0{,}2x^2 + 200$$

Qual deve ser o valor dado a x para que o lucro obtido seja máximo?

Solução:

Para obtenção do valor máximo, tem-se que,

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

De acordo com a função de $L(x)$, tem-se que, $a = 0{,}0022$ e $b = 2.000$. Logo, obtém-se a abcissa do vértice,

$$V_x = \frac{-b}{2.a}$$

Levando os valores de a e b, obtém-se para

$$V_x = \frac{-200}{2.(-0{,}2)} = \frac{200}{0{,}4.} = 500.$$

Nesse caso, deve-se vender um número de 500 produtos. Para obter o valor do lucro máximo, leva-se o valor de x na função lucro. Isto é,

Logo,

$$L(500) = -0{,}2.500 + 200 = -100 + 200 = 100$$

Assim, tem-se que o lucro obtido pela empresa com a venda dos produtos é de R$ 100,00

O salto de um gato no solo

A incrível habilidade dos gatos[1] de cair de grandes alturas e não sofrer, ás vezes nenhum dano é puramente uma questão de física, biologia evolucionária e psicologia. Apesar de haver poucas pesquisas nessa habilidade que os gatos adquiriram assim como outros animais possuem também, sabe-se que segundo um estudo de 1987, realizado com 132 gatos que foram trazidos para uma clínica veterinária após quedas muito grandes, constatou que 90% sobreviveu e apenas 37% precisou de tratamento de emergência.

[1] Como gatos sobrevivem a quedas de grandes alturas? (hypescience.com)

Um deles caiu de uma altura de 32 andares e apenas quebrou um dente e danificou um pulmão, sendo liberado 48 horas depois. Os cientistas procuraram justificar que os gatos têm uma grande área superficial se comparada com o peso, o que reduz a força do impacto no chão.

Ao caírem de uma altura considerável, existe a presença de força de atrito que após um certo tempo, equilibra a força peso o que possibilita que a partir da velocidade terminal considerada constante, os adquiram uma velocidade terminal menor do que animais grandes. Em termos de valores um gato de tamanho comum atinge velocidade terminal a cerca de 97 quilômetros por hora, enquanto que o ser humano caindo da mesma altura atinge a 193km/h. A forma geométrica do corpo e a viscosidade do meio tem uma forte influência nessa diferença de velocidade.

Assim sendo, os gatos por serem animais “arbóreos”, assim como macacos, répteis e outras criaturas que possuem essas características peculiares, são desenhados pela evolução para serem incrivelmente resistentes a quedas. A partir da seleção natural, os gatos desenvolveram um instinto para girar o corpo e ao cair consegue obter êxito durante a queda.

Outra questão é que os animais ao se desprenderem podem abrir as pernas de maneira a criar um efeito “para-quedas”. Os músculos das pernas sevem como molas para absorver choques, e os membros também estão angulados em baixo do corpo, ao invés de se estenderem, como no caso dos humanos. “Se o gato tivesse que aterrissar com as pernas diretamente abaixo da coluna, os ossos iriam todos se quebrar. Mas eles colocam essa energia nas juntas, o que força menos o osso e com isso consegue sobreviver a queda de grandes alturas.

O problema a seguir ilustra o pulo de um gato e a sua altura máxima que pode atingir, razão pela qual conseguem alcançar um determinado objeto residencial, como armário, guarda-roupa, etc.

Suponha que um gato, ao saltar do solo, tenha sua posição no espaço descrita em função do tempo (em segundos) dada pela expressão $h = 2t - 0,5t^2$, onde h é altura que o gato alcança, em metros.

a) Quanto tempo o gato vai levar para atingir a altura máxima?

Solução:

Nesse caso, deve-se usar a expressão (12). Isto é,

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

Do enunciado, tem-se que, $b = 2, a = -0,5$

$$x_v = -\frac{2}{2.(-0,5)} = 2$$

Assim, o gato para atingir a altura máxima leva 2s.

b) Qual a altura máxima alcançada pelo gato?

Solução:

Para esse problema, usa-se a expressão dada por (13). Isto é,

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

Logo,

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4.(-0,5).0 = 4$$

Assim,

$$H = -\frac{4}{4.(-0,5)} = 2$$

Portanto, o gato chega a atingir uma altura máxima de 2m.

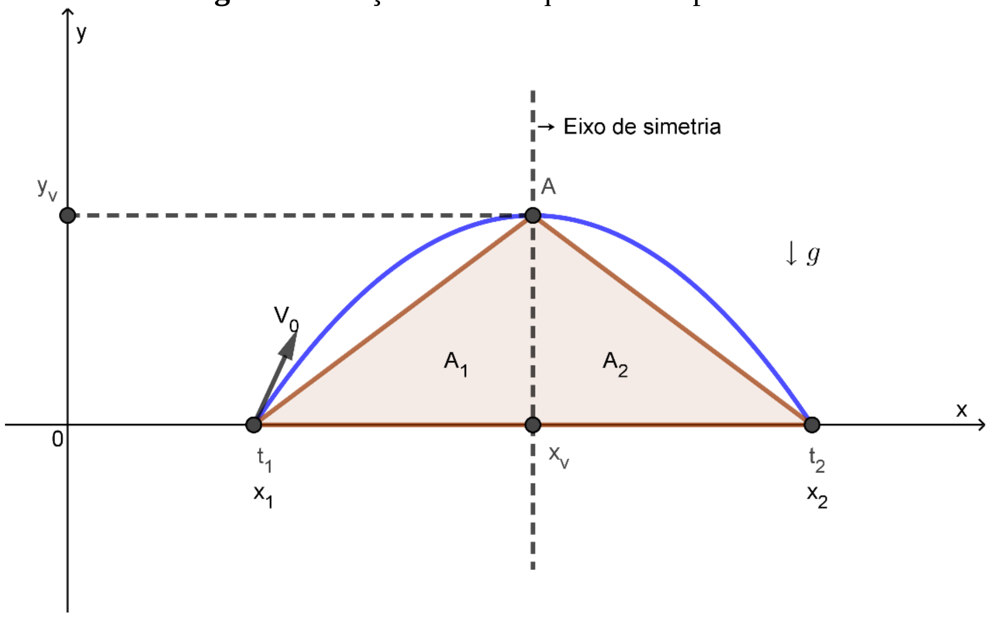
3- ESTUDO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA PELO MÉTODO GEOMÉTRICO

Nos tópicos anteriores, verificou-se o estudo da função quadrática, as raízes, o vértice, a formula canônica e o esboço da parábola no plano cartesiano. Nesse tópico, desenvolve-se o estudo da função do 2° grau, considera-se que a abordagem leva a duas grandezas que conduz ao intervalo de tempo e altura máxima da parábola. Demonstra-se como obter essas grandezas que representa como uma função do discriminante da função. Verifica-se ainda que ao realizar o produto das raízes, obtém além do primeiro termo já conhecido, surgem duas parcelas que correspondem as grandezas supracitadas. Após esse formalismo, aplicam-se alguns problemas que leve em conta essa forma alternativa de estudar a função polinomial do 2° grau.

3.1 DESENVOLVIMENTO DA GRANDEZA **A**

Considere a parábola dada pela figura (**Figura 1**) onde se supões duas áreas

Figura 1: Lançamento oblíquo de uma partícula



Fonte: Os autores (2021)

O valor x_1 representa a primeira raiz da parábola e o valor x_2 a segunda raiz. Considere ainda que essa parábola representa a trajetória de uma partícula que sai das posições determinadas pelas raízes da função que representa a parábola. A princípio, a trajetória da partícula é parabólica (HIBBELER, R.C. 2011)

O ponto A é a altura máxima alcançada pela partícula De acordo com a figura acima, verifica-se que durante a subida o corpo executa a trajetória da semi-parábola e sob ela varre uma grandeza que relaciona a ordenada com o intervalo de tempo (de modo semelhante a área de triângulo ABC). Logo, triângulo A_1, será:

$$A_1 = \frac{|y_t|.(x_v - x_1)}{2}$$

$$|y_t|.(x_v - x_1) = 2.A_1 \tag{17}$$

Para a outra semi-parábola, a partícula executa um tempo de descida e a grandeza A_2 do triângulo, será:

$$A_2 = \frac{y_t.(x_2 - x_v)}{2}$$

$$x_2 - x_v = \frac{2A_2}{|y_t|} \tag{18}$$

Como v representa o eixo de simetria que passa pelo ponto do vértice da parábola $V(x_V, y_v)$, pode-se considerar que

$$A_1 = A_2 \tag{19}$$

Nesse caso, pode-se considerar as expressões (17) e (18) da seguinte maneira:

$$x_1 = x_v - \frac{2A}{|y_t|} \tag{20}$$

$$x_2 = x_v + \frac{2A}{|y_t|} \tag{21}$$

3.2 PRODUTO DAS RAIZES

Considerando-se o produto das raízes da parábola, isto é

$$P = x_1.x_2 \tag{22}$$

e levando (18) e (21) em (22), obtém-se que,

$$P = \left(x_v - \frac{2A}{|y_t|}\right).\left(x_v + \frac{2A}{|y_t|}\right)$$

$$P = x_v^2 - 2A\frac{x_v}{|y_t|} - 2A\frac{x_v}{|y_t|} - \frac{4A^2}{y_t^2}$$

$$P = x_v^2 - \frac{4A^2}{y_t^2} \tag{23}$$

Deve-se descobrir os valores de x_v e y_v. Logo, resolvendo o sistema composto pelas equações (18) e (21), tem-se que:

$$x_1 + x_2 = 2x_v$$

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} \tag{24}$$

Como a trajetória é parabólica, tem-se que

$$y = ax^2 + bx + c \text{ e} \tag{25}$$

para $y = 0$, vem que

$$ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \tag{26}$$

$$ax_2^2 + bx_2 + c = 0 \tag{27}$$

Subtraindo (26) de (27) vem que,

$$\left(ax_2^2 + bx_2 + c\right) - \left(ax_1^2 + bx_1 + c\right) = 0$$

$$ax_2^2 - ax_1^2 + bx_2 - bx_1 = 0$$

$$a\left(x_2^2 - x_1^2\right) + b\left(x_2 - x_1\right) = 0$$

$$a\left(x_2 + x_1\right)\left(x_2 - x_1\right) + b\left(x_2 - x_1\right) = 0$$

$$\left(x_2 - x_1\right)\left[a\left(x_2 + x_1\right) + b\right] = 0 \qquad (28)$$

Como

$$x_2 - x_1 \neq 0, \qquad (29)$$

Então,

$$a\left(x_2 + x_1\right) + b = 0$$

Ou

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad (30)$$

Levando (24) em (30), vem que:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \qquad (31)$$

Que representa a abcissa do vértice. Levando a expressão (31) na função quadrática v

$y = ax^2 + bx + c$,

Obtém-se o valor y_t, isto é:

$$y_t = -\frac{\Delta}{4a} \qquad (32)$$

3.3 FÕRMULA DO VALOR MÁXIMO DA FUNÇÃO PELO INTERVALO $\Delta \boldsymbol{X}$.

Tomando as expressões (31) e (32) e levando em (23), vem que:

$$P = \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{4A^2}{\left(-\frac{\Delta}{4a}\right)^2}$$

$$P = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4A^2}{\frac{\Delta^2}{16a^2}}$$

$$P = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{64A^2a^2}{\Delta^2} \qquad (33)$$

Sendo,

$$b^2 = \Delta + 4ac \tag{34}$$

Levando (34) em (33) vem que:

$$P = \frac{\Delta + 4ac}{4a^2} - \frac{64A^2a^2}{\Delta^2}$$

$$P = \frac{\Delta}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} - \frac{64A^2a^2}{\Delta^2}$$

$$P = \frac{c}{a} + \frac{\Delta}{4a^2} - \frac{64A^2a^2}{\Delta^2} \tag{35}$$

A expressão (35) representa o produto das raízes x_1 e x_2 da função quadrática. Verifica-se que o produto das raízes em livros textos é dado como

$$P = \frac{c}{a}, \tag{36}$$

Ou seja, não aparece os termos $\frac{\Delta}{4a^2}$ e $\frac{64A^2a^2}{\Delta^2}$ Posteriormente, demonstrar-se-á que estes termos devem ser nulos, isto é

$$\frac{\Delta}{4a^2} - \frac{64A^2a^2}{\Delta^2} = 0 \tag{37}$$

De posse da expressão (36), verifica-se que a grandeza A pode ser determinada da seguinte maneira:

$$\frac{\Delta}{4a^2} = \frac{64A^2a^2}{\Delta^2}$$

$$64A^2a^2.4a^2 = \Delta^3$$

$$A^2 = \frac{\Delta^3}{64a^2.4a^2}$$

$$A = \frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{16a^2} \tag{38}$$

Ou se considerar a expressão dada por (19), obtém-se que,

$$A_t = \frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{8a^2} \tag{39}$$

Vale ressaltar que a grandeza dada pela expressão (39), não representa uma área e sim, o produto médio entre o valor máximo ou mínimo da função pela diferença entre uma das raízes e a abscissa do vértice.

3.4 RAIZES DA FUNÇÃO

Com base nas expressões (20) e (21), torna-se possível obter as raízes da função quadrática e isto é dado,

$$x_1 = x_v - \frac{2A}{|y_t|}$$

E

$$x_2 = x_v + \frac{2A}{|y_t|}$$

Fazendo a diferença entre (20) e (21), vem que:

$$x_2 - x_1 = \left(x_v + \frac{2A}{|y_t|} \right) - \left(x_v - \frac{2A}{|y_t|} \right)$$

$$x_2 - x_1 = \frac{4A}{|y_t|} \qquad (40)$$

Considerando as expressões dadas por (32) e (38), obtém-se que,

$$x_2 - x_1 = 4.\frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{16a^2}.\left(\frac{4a}{\Delta} \right) \qquad (41)$$

Ou

$$x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \qquad (42)$$

Tendo em vista as expressões (30) e (42), chega-se ao seguinte resultado,

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad (43)$$

E

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad (44)$$

O que configura o fato de desprezar os termos

$$\frac{\Delta}{4a^2} \text{ e } \frac{64A^2a^2}{\Delta^2}$$

Tendo em vista a abordagem levando em consideração a grandeza A, pode-se elaborar o seguinte teorema que associa a grandeza citada definida como sendo semi-produto do valor máximo da função e a diferença entre uma das raízes da função com a abscissa do vértice. **.**

3.5 APLICAÇÃO

1-Dada uma função quadrática e sabendo que a grandeza A possui 27m.s, determine a função do 2º grau, considerando $a = -1$

Solução

Tendo em vista que, a relação (18). Isto é,

$$A_t = \frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{8a^2}$$

Como: $A_1 = 27m.s$ e a=-1, substituindo na expressão anterior, vem que

$$:A_1 = \frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{8a^2}$$

Logo,

$$27 = \frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{8.1} \rightarrow \Delta\sqrt{\Delta} = 27.8 = 3^3 2^3 \;\; \rightarrow \Delta^3 = \; 3^6 2^6 \;\rightarrow \Delta = 36$$

Observando o gráfico, tem que:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

Logo,

$$4 = -\frac{b}{2.(-1)} \;\; \rightarrow b = 8$$

Usando,

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

E substituindo os valores de $b = -8 \;\; e \; a = -1$, vem que,

$$36 = 8^2 - 4.(-1).c$$

Assim, fazendo essa operação, obtém para o valor:

$$.c = 7$$

Sendo,

$$y = ax^2 + bx + c$$

Tem-se para a função,

$$y = -x^2 + 8x + 7$$

2- Determine a grandeza A cuja parábola que gera a seguinte função:

$$y = -2x^2 + 6x - \frac{5}{2}$$

Solução

Observando a função dada, vem que

$$a = -2, b = 6 \; e \; c = -5/2$$

Levando na expressão,

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

E substituindo os valores, obtém que,

$$\Delta = 36 - 4.(-2).\left(-\frac{5}{2}\right) = 16$$

Usando a expressão da área do triângulo sob o gráfico da parábola, obtém-se que,

$$:A_1 = \frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{8a^2}$$

Logo,

$$A = \frac{16\sqrt{4}}{8.4} = 2$$

Portanto a grandeza A sob o gráfico tem valor

$$A = 2m.s$$

3-Um avião viaja horizontalmente a uma altura de $2000m$ em relação ao solo com velocidade de $40m/s$.encontre o tempo total de queda do objeto, sabendo-se que a grandeza A varrida tem valor dado por $A = 20.000m.s$.

Solução.

Sejam os valores conhecidos, $A = 20.000$, $g = -10m/s^2$, $H = 2000m$ e $x_v = 0$

Logo, usando a expressão

$$x_2 = x_v + \frac{2A}{|y_t|}$$

E levando os valores dados, vem que,

$$x_2 = 2.\frac{20.000}{2000} = 20$$

Logo, o tempo que o corpo leva para chegar ao solo é de 20s.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tendo em vista o contexto abordado, constatou-se o quanto a função do 2º auxiliam na interpretação e na análise de situações problemas que envolve o formalismo analítico e geométrico. Assim sendo, o gráfico da função traz muitas informações a respeito dos elementos ela associada. Pontos extremantes, raízes e concavidade são importantes para informar a respeito de como pode ser tratado a natureza da função que originou aquele gráfico. Dessa maneira, tornou-se possível construir o seu esboço no plano artesiano conhecendo a natureza da referida função.

A determinação algébrica do vértice da parábola contribuiu para a elaboração do gráfico e possibilitou determinar a imagem da função, bem como seu valor de máximo ou mínimo como foi mostrado neste trabalho nas aplicações realizadas. A forma canônica trouxe uma relevante informação a respeito da coordenada do vértice, enquanto que o sinal do coeficiente do primeiro termo da função quadrática, foi utili para saber a concavidade da função. O valor que presentou o termo independente representou, geometricamente, a intersecção da parábola com o eixo da ordenada que foram verificados com base nas situações problemas que foram desenvolvidos.

Diante desse contexto, o processo de ensino e aprendizagem diante do que foi observado nesse trabalho , mostrou a importância de desenvolver um conteúdo que não estivesse distanciado da prática, pois a teoria também ocupa uma posição relevante tendo em vista que possibilita um processo de teoremas, axiomas que são fundamentais para o ensino. Todavia, o caráter científico apenas se completa diante da aplicabilidade desse conhecimento teórico.

Quanto o estudo da função quadrática que considerou um conhecimento baseado na parte geométrica em que se levou em conta a fórmula que envolveu o semi-produto da altura pelo intervalo da abscissa (temporal ou espacial), tornou-se útil, abrindo um novo rumo de encarar a função, bem como as demonstrações de vértices e raízes, como da forma como foram expostos no texto do trabalho. Portanto foi pensando nessa ideia científica entre teoria e prática que esse trabalho foi desenvolvido.

REFERÊNCIAS

DANTE, L. R. **Matemática – contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, 1999.

E.L. Lima et. al., **A Matemática do Ensino Médio**, vol.1, SBM, Rio de Janeiro (2005).
FRANÇA, L.N.F. e MATSUMURA, A.Z. Mecânica Geral. Vol. Estática. Ed. Edgard Blücher Ltda. 1ª edição. S.P. 2001.

GEOGEBRA. **Manual do Usuário**. Disponível em: <http://www.geogebra.at/> Acesso em: 29 de junho de 2019.

Halliday e Resnick, "**Fundamentos da Física, Mecânica**", *volume1*, editora LTCE S.A., 7ª edição, (2006).

HIBBELER, R.C. **Mecânica para Engenharia**. Vol. Estática. São Paulo. Ed. Pearson Prentice Hall. 12ª edição. 2011.

IMENES, L. M. e LELLIS, M. **Matemática para todos**. 8ª série. São Paulo: Scipione, 2002.
KAMINSKI, P.C. Mecânica Geral para Engenheiros. Ed. Edgard Blücher Ltda. 1ª edição. 2000. S.P.

LIMA, Elon, Lages. CARVALHO, Paulo Cezar Pinto, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado. **A Matemática do Ensino Médi0**- Volume 1. 5ª Edição. Capítulo 6. SBM, 2001. ISBN 85-85818-10-7

MURAKAMI, Gelson Iezzi Carlos. "**Fundamentos da Matemática Elementar** - Volume 1". 8ª Edição. São Paulo: Atual, 2004. ISBN 85-357-0455-8

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática Para a Educação Básica**. Curitiba, 2006.

RESNICK, R., WALTER, J. - **Fundamentos de Física**, *Volume1*. Editora SA, 8ª edição, 2008
Wikipédia – Enciclopédia Livre.