

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

BRENDA LETÍCIA NORONHA VELASCO

**A CARACTERÍSTICA DE EULER
DE SUPERFÍCIES**

Belém - Pará

2023

BRENDA LETÍCIA NORONHA VELASCO

A CARACTERÍSTICA DE EULER DE SUPERFÍCIES

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Faculdade de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará como requisito básico para a obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Antonio Moraes Vilhena

Belém - Pará

2023

BRENDA LETÍCIA NORONHA VELASCO

**A CARACTERÍSTICA DE EULER DE
SUPERFÍCIES**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Faculdade de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará como requisito básico para a obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Antonio Moraes Vilhena

Data da apresentação:

Conceito:

Prof. Dr. José Antonio Moraes Vilhena
FACMAT/ICEN/UFPA-Orientador

Prof. Msc. João Batista do Nascimento
FACMAT/ICEN/UFPA-Membro da banca

Prof. Dr. Valter Borges Sampaio Junior
FACMAT/ICEN/UFPA- Membro da banca

Belém - Pará

2023

Agradecimentos

Ao longo dessa jornada de pesquisa e aprendizado pude contar com apoio e contribuição de diversas pessoas que gostaria de reconhecer com imensa satisfação neste momento especial. Eu poderia escrever páginas e páginas de agradecimento, mas, para cada pessoa citada aqui tenho um imenso carinho.

Agradeço a meu amado Deus por ter me ajudado a superar os muitos momentos de dificuldade e cansaço e por seu infinito amor. Esse trabalho é fruto da Sua benção sobre minha vida. Agradeço aos meus amados pais, Clayton Araujo Velasco e Adelia Noronha Mota, por sempre prezarem para me dar a melhor educação possível e sempre me incentivarem a estudar. Sou grata pela família que Deus me deu. Agradeço a minha irmã, Ayla Sophia, por me incentivar através das suas provocações infantis e momentos de descontração com os nossos gatos.

Para meu orientador, José Vilhena, expresso minha enorme gratidão por ter me dado suporte no desenvolvimento desse trabalho com suas sugestões e feedbacks que foram fundamentais para o meu crescimento acadêmico. Obrigado pela paciência de corrigir meus erros, seu compromisso com este trabalho e pela sua motivação e encorajamento que foram essenciais para mim.

Agradeço também ao meu professor João Batista por ter me incentivado a estudar essa temática, por ter me orientado na X Bienal e no XIII EPAEM. Seu incentivo me levou a conquistar resultados além das minhas expectativas iniciais.

Também agradeço ao meu amado namorado Arthur Rente por me ouvir sempre que necessário, por acreditar em mim e pelas suas valorosas motivações. Obrigado pela sua estimada companhia e o seu amor durante essa jornada.

Resumo

Este trabalho visa explorar a característica de Euler de poliedros, superfícies e somas conexas de superfícies. Será apresentado, inicialmente, a demonstração do teorema de Euler para poliedros convexos devida ao matemático Adrien-Marie Legendre. Em seguida, discute-se o conceito de superfície regular e apresentamos os exemplos da Esfera e do Toro. Além disso, O estudo também aborda a triangulação de superfícies e a característica de Euler de uma triangulação e de somas conexas de superfícies.

Palavras-chaves: Característica de Euler. Poliedros. Superfícies. Triangulação. Somas conexas.

Abstract

This work aims to explore the Euler characteristic of polyhedra, surfaces and connected sums of surfaces. Initially, the proof of Euler's theorem for convex polyhedra due to the mathematician Adrien-Marie Legendre will be presented. Then, the concept of regular surface is discussed and we present the examples of the Sphere and the Torus. In addition, the study also addresses the triangulation of surfaces and the Euler characteristic of a triangulation and connected sums of surfaces.

Keywords: Euler characteristic. Polyhedra. Surface. Triangulation. Connected sums.

Sumário

1	Noções Preliminares	1
1.1	Definições Iniciais	1
1.2	Princípio da Indução Finita	6
1.3	Continuidade e Diferenciabilidade	7
2	Teorema de Euler para poliedros convexos	11
2.1	Aspectos Históricos	11
2.2	Demonstração de Legendre	15
3	Característica De Euler De Superfícies	20
3.1	Superfícies Regulares	20
3.2	Triangulação	24
3.3	Característica de Euler de uma superfície	26
3.4	Soma conexa de superfícies	33

Lista de Figuras

1.1	Elementos de um poliedro.	2
1.2	Poliedros convexo e não convexo.	2
1.3	Intersecção do plano γ com a esfera \mathcal{E}	3
1.4	Fuso Esférico	3
1.5	Fuso completo.	4
1.6	Triângulo Esférico $\Delta\mathcal{E}$	5
2.1	Sólidos platônicos	12
2.2	Visão inicial de Kepler do sistema solar.	13
2.3	Selo em memória aos 200 anos da morte de Euler	13
2.4	Adrien-Marie Legendre	14
2.5	Triângulo esférico ΔABC no hemisfério H	15
2.6	Região R_α	16
2.7	Hemisfério H coberto pelas regiões $R_\alpha, R_\beta, R_\gamma$	16
2.8	Projeção radial de um ponto do poliedro sobre a esfera.	17
2.9	Projeção radial de uma face do poliedro.	17
3.1	Coordenadas Esféricas	22
3.2	Toro	23
3.3	Exemplo de não triangulação do Toro	25
3.4	Superfícies compactas orientáveis.	26
3.5	Triangulação da esfera S^2	27
3.6	A esfera	28
3.7	Identificação do Toro	28

	9
3.8 Triangulação do Toro.	28
3.9 Toro	29
3.10 Construção da Faixa de Möbius.	29
3.11 Triangulação da faixa de Möbius.	29
3.12 Faixa de Möbius.	30
3.13 Construção do plano projetivo real	30
3.14 Triangulação do plano projetivo real.	31
3.15 Modelos do plano projetivo no \mathbb{R}^3	31
3.16 Construção da garrafa de Klein	32
3.17 Triangulação da garrafa de Klein	32
3.18 Garrafa de Klein	33
3.19 Soma conexa de dois toros.	35

Lista de Tabelas

3.1	Superfícies e suas características de Euler	36
-----	---	----

Introdução

Por meio de uma única relação, $V - A + F = 2$ que relaciona V vértices, A arestas e F faces de um poliedro, podemos adentrar em diversas áreas de estudo da matemática como Topologia, Teoria dos Grafos e Geometria Diferencial. São assuntos instigantes que por vezes é passado despercebido por estudantes da licenciatura em matemática. É interessante destacar que a característica de Euler é um importante invariante topológico, no entanto, não é objetivo de nosso trabalho aprofundar esse estudo estudando definições em topologia e topologia algébrica. Nosso principal intento é estudar essa relação estendida para algumas superfícies como o Toro, Garrafa de Klein, Esfera, Plano Projetivo Real e a Faixa de Möbius.

A descoberta que Euler (porém, há evidências que sugerem que Descartes já conhecia essa fórmula ver [13]), fez é apenas o começo de um longo percurso histórico que teve contribuições grandiosas de diversos matemáticos como Euclides, Kepler, Euler, Legendre e muitos outros para o desenvolvimento dessa temática.

No primeiro capítulo serão abordados definições essenciais para o desenvolvimento do trabalho principalmente para discutirmos o capítulo dois. Nele será apresentado a definição de poliedros e definições relacionadas a geometria esférica que vão fornecer a base para estudarmos a elegante demonstração de Legendre para o nosso teorema.

O capítulo 2 vai explorar alguns aspectos históricos relacionados ao tema desde os sólidos platônicos aos matemáticos envolvidos na demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos. Em seguida, apresentamos a demonstração do Teorema de Euler que usa um importante teorema da geometria esférica formulado pelo matemático Albert Girard.

No capítulo 3 apresentamos o objeto de estudo principal desse trabalho. Apresenta-

mos uma definição para superfícies no \mathbb{R}^3 , estudaremos o processo de triangulação de superfícies e calculamos a característica de Euler da esfera, toro, plano projetivo real, faixa de Möbius e garrafa de Klein e de somas conexas dessas superfícies.

Capítulo 1

Noções Preliminares

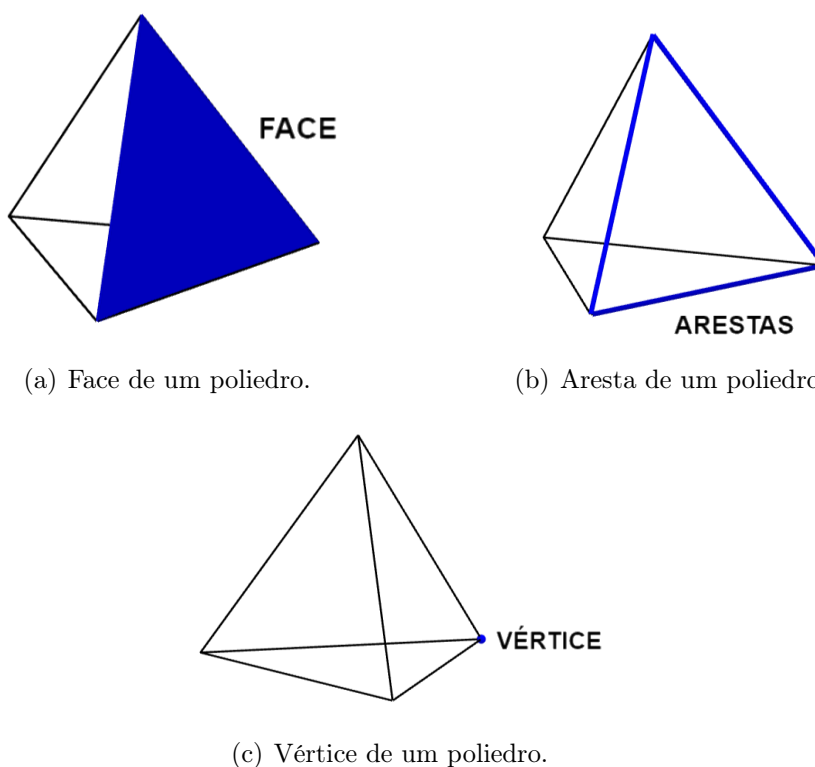
1.1 Definições Iniciais

Nesta seção, serão apresentadas as definições iniciais fundamentais para compreender o Teorema de Euler e a sua demonstração formulada por Legendre. Essas definições fornecerão a base necessária para o entendimento do Teorema de Euler, bem como para a compreensão da demonstração proposta por Legendre. As definições aqui expostas podem ser vistas com mais profundidade em [5], [14] e [7].

Definição 1.1 *Um poliedro é a reunião de um número finito de polígonos planos, denominadas faces do poliedro, tais que:*

- (i) *Cada lado de um polígono é lado de um, e apenas um, outro polígono;*
- (ii) *A intersecção de dois polígonos quaisquer é vazia ou é um lado comum, ou um vértice comum.*

Os lados do polígono são denominados as *arestas* do poliedro e os *vértices* de cada polígono são denominados os vértices do poliedro. Todo poliedro limita uma região do espaço denominada *interior do poliedro* ([5]).



(a) Face de um poliedro.

(b) Aresta de um poliedro.

(c) Vértice de um poliedro.

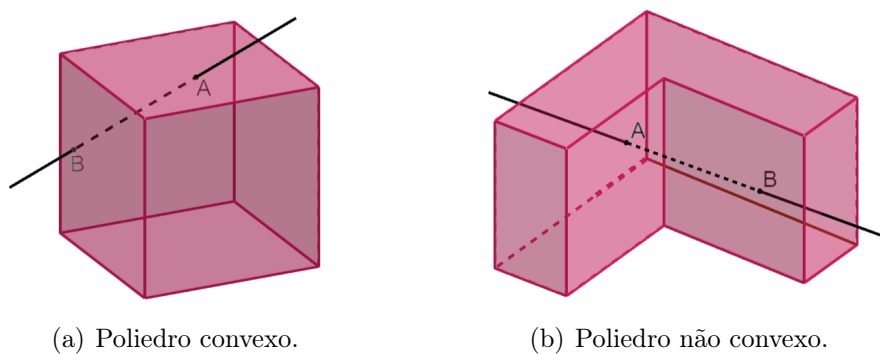
Figura 1.1: Elementos de um poliedro.

Fonte: A autora.

Definição 1.2 Um conjunto C do espaço é chamado *convexo* se, para quaisquer dois pontos A e B pertencentes ao conjunto C , o segmento \overline{AB} está inteiramente contido em C .

Definição 1.3 Um poliedro é chamado *convexo* se o seu interior for um conjunto convexo.

A figura a seguir mostra um exemplo de poliedro convexo e um não convexo.



(a) Poliedro convexo.

(b) Poliedro não convexo.

Figura 1.2: Poliedros convexo e não convexo.

Fonte: A autora.

Definição 1.4 [5] *Sejam O um ponto e r um número real positivo. Chamamos de esfera de centro O e raio r ao conjunto de pontos do espaço cuja distância ao ponto O é r .*

Definição 1.5 *A intersecção de um plano γ que passe pelo centro de uma esfera \mathcal{E} é um círculo máximo.*

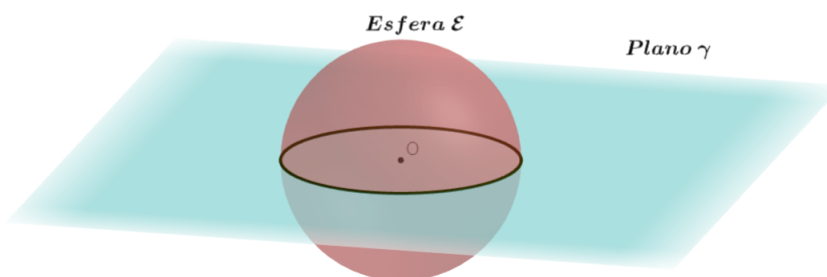


Figura 1.3: Intersecção do plano γ com a esfera \mathcal{E}

Fonte: A autora.

Definição 1.6 *Um hemisfério é uma região que corresponde a uma semi-esfera, ou seja, a região da esfera dividida por um círculo máximo.*

Definição 1.7 *Dado um ponto qualquer X na esfera \mathcal{E} , seu antípoda X' é, por definição, o único ponto da esfera, tal que o segmento de reta $\overline{XX'}$ contém o centro O da esfera \mathcal{E} .*

Definição 1.8 *Um fuso \mathcal{F} é uma região da esfera compreendida entre dois círculos máximos. A intersecção desses dois círculos máximos são dois pontos antípodas, chamados os vértices do fuso. O ângulo do fuso é, por definição, o menor ângulo α entre dois círculos máximos que correspondem aos lados do fuso.*

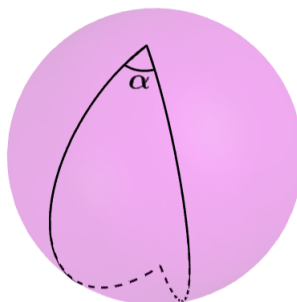


Figura 1.4: Fuso Esférico

Fonte: A autora.

Definição 1.9 Dado um fuso \mathcal{F} , o conjunto formado pelos antípodas dos pontos de \mathcal{F} é ainda um fuso \mathcal{F}' , chamado de fuso antípoda de \mathcal{F} . A reunião $\mathcal{F}_C = \mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ é chamada fuso completo.

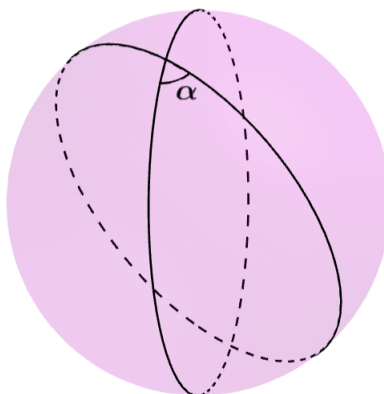


Figura 1.5: Fuso completo.

Fonte: A autora.

Proposição 1.10 [14] A área do fuso esférico \mathcal{F} de ângulo α , medido em radianos, é igual a $2\alpha r^2$.

Demonstração: Se o ângulo α do fuso esférico \mathcal{F} for π radianos ele cobrirá metade da esfera. Se sua medida for igual a 2π radianos o fuso cobrirá toda a esfera fazendo coincidir os seus lados. Sabemos que a área de uma esfera \mathcal{E} de raio r é igual a $4\pi r^2$. Como a área A_α de um fuso de abertura α é proporcional a seu ângulo α , temos que para $\alpha = 2\pi$, a área $A_{2\pi} = 4\pi r^2$. Então, para obter A_α usamos uma regra de três:

$$\frac{A_\alpha}{\alpha} = \frac{4\pi r^2}{2\pi}.$$

Ou seja,

$$2\pi \cdot A_\alpha = \alpha \cdot 4\pi r^2$$

$$2A_\alpha = 4\alpha r^2$$

$$A_\alpha = 2\alpha r^2.$$

Portanto, a área de fuso \mathcal{F} de ângulo α , medido em radianos, é $2\alpha r^2$. \square

Definição 1.11 Chama-se triângulo esférico a região na superfície da esfera compreendida entre três arcos de círculos máximos menores do que uma semi-circunferência.

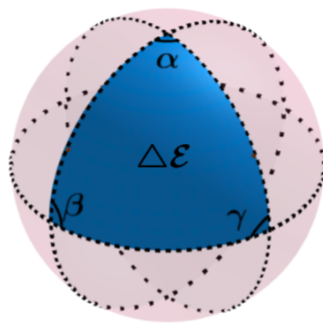


Figura 1.6: Triângulo Esférico $\Delta\mathcal{E}$

Fonte: A autora.

Teorema 1.1 [7] *Seja \mathcal{F}_C um fuso completo com um ângulo de menor medida α radianos. Considere um plano γ que passe pelo centro da esfera \mathcal{E} decompondo-a em dois hemisférios H e H' . O fuso completo \mathcal{F}_C fica dividido em duas partes, R e R' contidas em cada um desses hemisférios e com a mesma área $2\alpha r^2$.*

Demonstração: Seja a função $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ que transforma cada ponto $X \in \mathcal{E}$ em seu antípoda $f(X) = X'$. Tal função tem as propriedades:

- (i) Se $X \in H$ seu antípoda $f(X) = X' \in H'$;
- (ii) Se $X \in \mathcal{F}_C$ seu antípoda também pertence ao fuso completo \mathcal{F}_C ;
- (iii) Seja R uma região qualquer na esfera, a região antípoda $f(R) = R'$ formada pelos pontos antípodas dos pontos da região R , tem a mesma área que R .

Então, se chamarmos por R a região do fuso completo \mathcal{F}_C contida no hemisfério H e R' a parte de \mathcal{F}_C contida no hemisfério H' , podemos notar que:

$$A_{\mathcal{F}_C} = A_R + A_{R'} = 2A_R$$

Portanto, a área de R é igual $2\alpha r^2$. □

1.2 Princípio da Indução Finita

Nesta seção faremos uma breve revisão sobre o princípio de indução finita que utilizaremos no capítulo 3. O leitor, se desejar, poderá consultar a referência dessa seção em [8], página 24.

São dados, como objetos não-definidos, um conjunto \mathbb{N} , cujos elementos são chamados *números naturais*, e uma função $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o número $s(n)$, valor que a função s assume no ponto n , é chamado o *sucessor de n* . A função s satisfaz aos seguintes axiomas:

- (i) $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é *injetiva*. Em outros termos: $m, n \in \mathbb{N}$, $s(m) = s(n) \Rightarrow m = n$. Ou seja, dois números com o mesmo sucessor são iguais;
- (ii) $\mathbb{N} - s(\mathbb{N})$ *consta de um só elemento*. Ou seja, existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Ele se chama "um" e é representado pelo símbolo 1. Assim, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, tem-se $1 \neq s(n)$. Por outro lado, se $n \neq 1$ então existe um (único) $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $s(n_0) = n$;
- (iii) (Princípio da Indução) Se $X \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto tal que $1 \in X$ e, para todo $n \in X$ tem-se também $s(n) \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

Podemos enunciar o princípio da indução da seguinte maneira:

Definição 1.12 *Seja \mathcal{P} uma propriedade referente aos números naturais. Se 1 possui a propriedade \mathcal{P} e se, do fato de um número natural n possuir a propriedade de \mathcal{P} pode-se concluir que $n + 1$ possui a propriedade \mathcal{P} , então todos os números naturais possuem dessa propriedade.*

Uma demonstração na qual o axioma (iii) é usado, chama-se demonstração por indução.

1.3 Continuidade e Diferenciabilidade

Essa seção é fundamentada em [3], nela apresentamos uma breve revisão de algumas noções de continuidade e diferenciabilidade. As proposições apresentadas nessa seção serão admitidas sem demonstração. O leitor poderá consultar as demonstrações em [3].

Definição 1.13 *Uma bola aberta em \mathbb{R}^n com centro $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ e raio $\epsilon > 0$ é o conjunto*

$$B_\epsilon(P_0) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; (x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2 < \epsilon^2\}.$$

Definição 1.14 *Um conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto se para cada $P \in U$ existe uma bola $B_\epsilon(P) \subset U$.*

Convém dizer que um conjunto aberto em \mathbb{R}^n contendo um ponto $P \in \mathbb{R}^n$ é uma vizinhança de P . De agora em diante, $U \subset \mathbb{R}^n$ denotará um conjunto aberto de \mathbb{R}^n .

Definição 1.15 *Uma aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua em $P \in U$ se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$F(B_\delta(P)) \subset B_\epsilon(F(P)).$$

Em outros termos, F é contínua em P se pontos arbitrariamente próximos a $F(P)$ são imagens de pontos suficientemente próximos a P . Diz-se que F é contínua em U se F é contínua para todo $P \in U$.

Definição 1.16 *Dada uma aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, podemos determinar m funções de n variáveis da seguinte maneira. Seja $p = (x_1, \dots, x_n) \in U$ e $f(p) = (y_1, \dots, y_m)$. Então podemos escrever*

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = f_m(x_1, \dots, x_n).$$

As funções $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ são funções componentes de F .

Exemplo 1.17 *(Simetria) Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação que associa a cada $p \in \mathbb{R}^3$ o ponto que é simétrico a p em relação á origem $O \in \mathbb{R}^3$. Então $F(p) = -p$, ou*

$$F(x, y, z) = (-x, -y, -z),$$

com as seguintes funções componentes:

$$f_1(x, y, z) = -x, f_2(x, y, z) = -y, f_3(x, y, z) = -z.$$

Exemplo 1.18 (Projeção) Seja $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Então $f_1(x, y, z) = x$, $f_2(x, y, z) = y$.

A proposição a seguir mostra que a continuidade de uma aplicação F é equivalente à continuidade das suas funções componentes.

Proposição 1.19 $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua se e somente se cada função componente $f_i : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, é contínua.

Demonstração: [3]. □

Dessa proposição podemos concluir que as funções dos exemplos 1.17 e 1.18 são contínuas. Na grande maioria das aplicações, convém expressar a continuidade em termos de vizinhanças ao invés de bolas.

Proposição 1.20 Uma aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua em $p \in U$ se e somente se, dada uma vizinhança V de $F(p)$ em \mathbb{R}^m existe uma vizinhança W de p em \mathbb{R}^n tal que $F(W) \subset V$.

Demonstração: [3]. □

Definição 1.21 Dada uma aplicação contínua $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo sobre $F(A)$ se F é injetiva e a inversa $F^{-1} : F(A) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua. Nesse caso, A e $F(A)$ são conjuntos homeomorfos.

Definição 1.22 Seja $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. A derivada $f'(x_0)$ de f em $x_0 \in U$ é o limite (quando existe)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad x_0 + h \in U.$$

Quando f possui derivada em todos os pontos de uma vizinhança V de x_0 , podemos considerar a derivada $f' : V \rightarrow \mathbb{R}$ em x_0 , que é chamada a derivada segunda $f''(x_0)$ de f em x_0 , e assim por diante. f é diferenciável em x_0 se possui derivadas contínuas de todas as ordens em x_0 . f é diferenciável em U se é diferenciável em todos os pontos de U .

Definição 1.23 Seja $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. A derivada parcial de f com relação a x em $(x_0, y_0) \in U$, denotada por $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, é (quando existe) a derivada em x_0 da função de uma variável: $x \rightarrow f(x, y_0)$. Analogamente, a derivada parcial em relação a y em (x_0, y_0) , $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, é definida como a derivada em y_0 de $y \rightarrow f(x_0, y)$.

Quando f possui derivadas parciais em todos os pontos de uma vizinhança V de (x_0, y_0) , podemos considerar as derivadas parciais de segunda ordem em (x_0, y_0) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

E assim por diante, f é diferenciável em (x_0, y_0) se tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens em (x_0, y_0) . f é diferenciável em U se é diferenciável em todos os pontos de U .

Um fato importante é que as derivadas parciais obedecem à chamada regra da cadeia. Por exemplo, se $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ são funções diferenciáveis reais em $U \subset \mathbb{R}^2$ e $f(x, y, z)$ é uma função diferenciável real em \mathbb{R}^3 , então a composição $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ é uma função diferenciável em U , e as derivadas parciais de f em relação a, digamos, U é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}.$$

Vamos estender a noção de diferenciabilidade para aplicações $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Definição 1.24 Dizemos que F é diferenciável em $p \in U$ se as suas funções componentes são diferenciáveis em p ; isto é, escrevendo

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

as funções componentes f_i , $i = 1, \dots, m$, tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens em p . F é diferenciável em U se é diferenciável em todos os pontos de U .

Exemplo 1.25 Seja $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \operatorname{sen} v, \cos^2 v), \quad (u, v) \in U.$$

As funções componentes de F são:

$$\begin{aligned}f_1(u, v) &= \cos u \cos v, \\ f_2(u, v) &= \cos u \operatorname{sen} v, \\ f_3(u, v) &= \cos^2 v.\end{aligned}$$

F tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U . Logo, F é diferenciável

em U .

Definição 1.26 Um vetor tangente a uma aplicação $\alpha : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ em $t_0 \in U$ é o vetor em \mathbb{R}^m

$$\alpha'(t_0) = (x'_1(t_0), \dots, x'_m(t_0)).$$

Definição 1.27 Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável. Associamos a cada $p \in U$ uma aplicação linear $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ chamada a diferencial de F em p , e é definida da seguinte maneira. Sejam $w \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ uma curva diferenciável tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$. Pela regra da cadeia, a curva $\beta = F \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ também é diferenciável. Então,

$$dF_p(w) = \beta'(0).$$

Proposição 1.28 A definição dada acima para dF_p não depende da escolha da curva que passa por p com vetor tangente w , e dF_p é, de fato, uma aplicação linear.

Demonstração: [3]. □

Definição 1.29 A matriz de $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ nas bases canônicas de \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m , isto é, a matriz $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$, $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$, é chamada a matriz Jacobiana de F em p . Quando $n = m$, ela é uma matriz quadrada e o seu determinante é chamado o determinante Jacobiano; é comum denotá-lo por

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}.$$

Capítulo 2

Teorema de Euler para poliedros convexos

Neste capítulo, apresentamos alguns aspectos históricos relevantes para a temática do trabalho assim como exploraremos a demonstração do matemático Adrien Marie Legendre para o Teorema de Euler. Foi através do uso da geometria esférica e da elegante fórmula de Girard para a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico que Legendre conseguiu estabelecer de maneira sólida e rigorosa a demonstração para o famoso teorema.

2.1 Aspectos Históricos

Nessa seção as principais referências históricas são [4], [15] e [13], caso o leitor deseje se aprofundar mais poderá consultá-las.

Platão (428 a.C.- 348 a.C.), filósofo e matemático, acreditava que os poliedros regulares eram os blocos de construção de toda a matéria. Em sua obra *Timeu*, Platão apresentou um elaborado modelo atômico, em que cada um dos quatro elementos, que Platão chamou de corpos, está associado a um dos sólidos regulares: a terra associada ao cubo, o fogo ao tetraedro, o ar ao octaedro e a água ao icosaedro (ver [13]). Havia apenas a dificuldade de explicar o quinto sólido, o dodecaedro. Este último sendo associado ao universo. Em razão dessa associação os cinco sólidos são conhecidos como sólidos platônicos (ver [4]).

Nos *Elementos*, o matemático grego Euclides (300 a.C.) apresenta no Livro XIII uma prova de que existem apenas cinco poliedros regulares. A maior parte do Livro XIII, o livro final dos Elementos, é dedicado aos sólidos platônicos. Primeiro Euclides mostra que há pelo menos cinco sólidos platônicos que são o tetraedro, o octaedro, o icosaedro, o cubo e o dodecaedro e que eles são de fato regulares. E por fim, prova que não há mais do que estes cinco. A contribuição mais importante do Livro XIII é a prova de que existem cinco, e apenas cinco, sólidos platônicos (ver [13]).



Figura 2.1: Sólidos platônicos
Fonte: [13]

Johann Kepler (1571 - 1630) foi um matemático e astrônomo alemão que ficou famoso por enunciar as leis do movimento planetário. Kepler elaborou um modelo de sistema solar em que os poliedros regulares ficavam posicionados de tal maneira a produzir seis esferas de raios proporcionais às distâncias dos seis planetas então conhecidos naquela época (ver [15]).

De acordo com [13], seu novo modelo apareceu em seu primeiro livro, *Mysterium Cosmographicum* em 1596. Kepler argumentou que a existência dos cinco sólidos platônicos devem estar relacionados com a existência dos seis planetas conhecidos: Saturno, Júpiter, Marte, Terra, Vênus e Mercúrio. Com isso, Kepler afirma que as órbitas dos planetas estavam relacionadas ao posicionamento dos sólidos platônicos dentro das esferas.

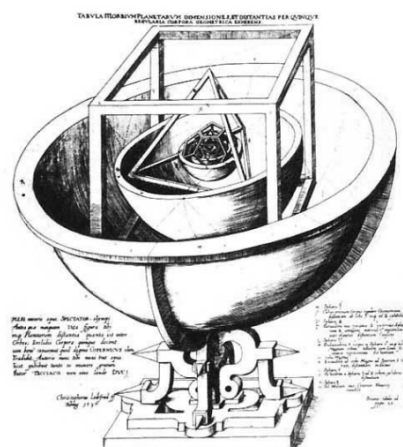


Figura 2.2: Visão inicial de Kepler do sistema solar.
Fonte: [13].

Leonhard Euler (1707 – 1783) foi um matemático suíço que estudou teologia pretendendo seguir carreira nesse campo, porém, encontrou sua vocação na matemática. Com o auxílio de seu pai, um pastor calvinista com aptidão para matemática, Euler passou a aprender os fundamentos dessa ciência. O pai, que havia estudado com Jakob Bernoulli, conseguiu que o filho fosse estudar com Johann Bernoulli. Em 1727, aos 20 anos, Euler passou a ser membro da Academia de São Petersburgo, chefiando a seção de matemática da Academia. Fez numerosas contribuições em diversos campos da matemática. Em um de seus artigos, Euler traz a relação $V - A + F = 2$ que figura papel de destaque nesse trabalho (ver página 471 em [4]).



Figura 2.3: Selo em memória aos 200 anos da morte de Euler
Fonte: [13]

Conforme [15], se um poliedro tem V vértices, A arestas e F faces, então sua característica de Euler é $V - A + F = 2$. Euler mostrou que essa é uma relação invariante para todos os poliedros convexos, um resultado agora conhecido como a fórmula do poliedro de Euler.

Entre os anos de 1750 e 1751, Euler escreveu dois artigos sobre sua relação para os poliedros. No primeiro artigo, Euler faz observações gerais sobre os poliedros e posteriormente começa sua discussão acerca da relação entre o número de faces, vértices e arestas. Ele verificou que $V - A + F = 2$ vale em vários casos especiais, porém, não apresentou uma prova de que a fórmula é válida para todos os poliedros. No seu segundo artigo, Euler fornece uma prova para essa relação, no entanto, sua demonstração não atendia os padrões de rigor da época. A demonstração verdadeiramente rigorosa só veio quatro décadas depois com Legendre (ver página 67 em [13]).

Adrien-Marie Legendre (1752 — 1833) foi um matemático francês que pertenceu à *Académie des Sciences* em Paris e a *Royal Society* de Londres. Seu legado inclui seu livro sobre geometria elementar que ele escreveu em 1794, *Elements de Géométrie* (Elementos de geometria). Legendre incluiu a fórmula de Euler para poliedros em seu livro, apresentando uma nova demonstração com argumentos baseados em conceitos de geometria esférica e propriedades métricas, como ângulo e área. A chave para essa prova é uma fórmula elegante de geometria esférica atribuída ao matemático Albert Girard (ver em [13]).



Figura 2.4: Adrien-Marie Legendre
Fonte: [13]

Conforme [4], Albert Girard (1595-1632) foi um matemático francês que tinha grande interesse por geometria esférica e trigonometria. Em 1626, ele publica um tratado sobre trigonometria contendo o mais antigo uso registrado das abreviações sen , tan e sec . Girard nos fornece um teorema que relaciona a área de um triângulo esférico, a soma de seus ângulos internos e o raio da esfera sobre qual o triângulo se encontra, esse teorema é o fator principal para a demonstração do teorema de Euler

que Legendre utiliza ([13]).

2.2 Demonstração de Legendre

Ao longo desta seção, examinaremos as etapas da demonstração de Legendre, explorando o uso de alguns artifícios da geometria esférica como ferramenta principal. Veremos como a fórmula de Girard desempenhou um papel essencial na construção dos argumentos apresentados por Legendre, permitindo-lhe obter resultados precisos e elegantes. Essa seção foi baseada na referência [7].

Teorema 2.1 (Fórmula de Girard) *A soma dos ângulos internos α , β e γ , de um triângulo esférico, medidos em radianos, em uma esfera \mathcal{E} de raio r , é dada pela fórmula:*

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A_{\Delta}}{r^2},$$

em que A_{Δ} é a área do triângulo considerado.

Demonstração: Considere um triângulo $\triangle ABC$ em um hemisfério H de uma esfera \mathcal{E} de raio r conforme a figura 2.5.

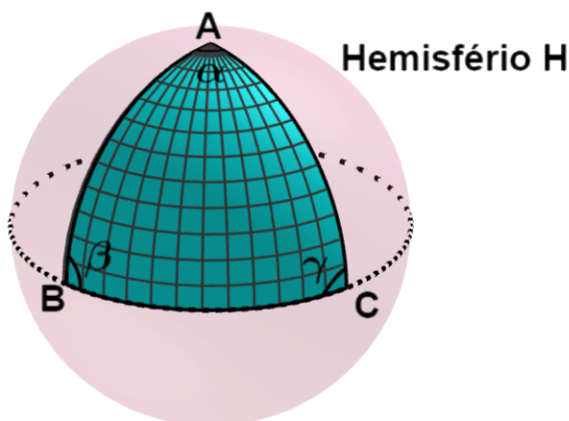


Figura 2.5: Triângulo esférico $\triangle ABC$ no hemisfério H

Fonte: A autora.

Vamos prolongar os lados que formam os ângulos α , β , γ do $\triangle ABC$ até o bordo do hemisfério H . Primeiro prolongamos os lados que formam o ângulo α até o bordo do hemisfério H , assim, encontramos uma região $R_{\alpha} \subset H$ de área igual $2\alpha r^2$ conforme o teorema 1.1.

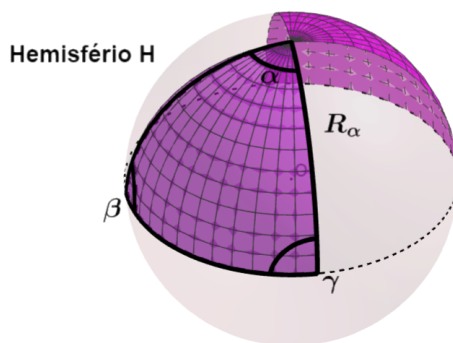
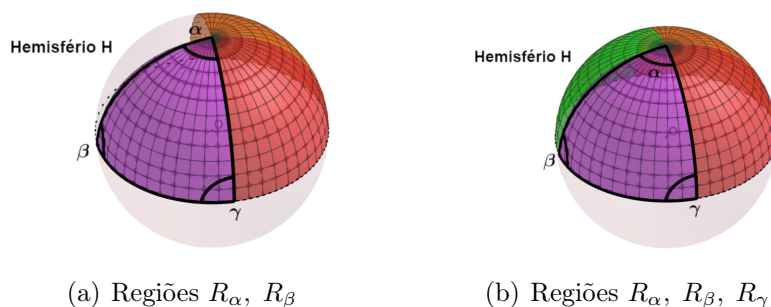


Figura 2.6: Região R_α
Fonte: A autora.

De maneira análoga para os demais ângulos β e γ , obtemos as regiões R_β e R_γ de áreas $2\beta r^2$ e $2\gamma r^2$ respectivamente, conforme a figura abaixo:



(a) Regiões R_α, R_β

(b) Regiões $R_\alpha, R_\beta, R_\gamma$

Figura 2.7: Hemisfério H coberto pelas regiões $R_\alpha, R_\beta, R_\gamma$.
Fonte: A autora.

Observe que a soma das regiões $R_\alpha + R_\beta + R_\gamma$ contém duas cópias do triângulo $\triangle ABC$. Então, ao somarmos essas três regiões obtemos uma região cuja área é correspondente a área do hemisfério H contada três vezes com a área do triângulo $\triangle ABC$ (duas vezes a mais do que deveria). Ou seja,

$$R_\alpha + R_\beta + R_\gamma = 2\pi r^2 + 2A_\Delta$$

$$2\alpha r^2 + 2\beta r^2 + 2\gamma r^2 = 2\pi r^2 + 2A_\Delta.$$

Simplificando a igualdade, obtemos:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A_\Delta}{r^2}. \quad (2.1)$$

□

Com esse resultado demonstrado podemos avançar para o teorema de Euler.

Teorema 2.2 (Teorema de Euler) *Seja P um poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces. Então vale a relação: $V - A + F = 2$.*

Demonstração: Considere um poliedro P convexo e regular com V vértices, A arestas e F faces. Suponha que as faces de P são triângulos. Se isso não for verdade, podemos traçar diagonais de modo que as faces de P se tornem triângulos e a relação $V - A + F = 2$ não se altere. Considere \mathcal{E} uma esfera de raio r e centro O contido no interior do poliedro P . Projetando radialmente o poliedro P sobre a esfera \mathcal{E} obtemos como resultado a decomposição da esfera \mathcal{E} em F triângulos esféricos, organizados conforme as faces do poliedro.

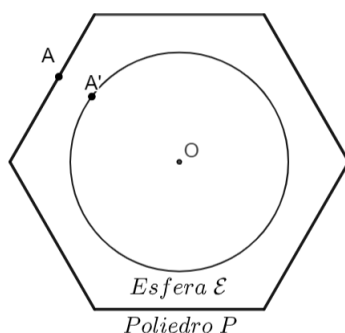


Figura 2.8: Projeção radial de um ponto do poliedro sobre a esfera.

Fonte: A autora.

O ponto A' da esfera é a projeção radial do ponto A do poliedro P considerado.

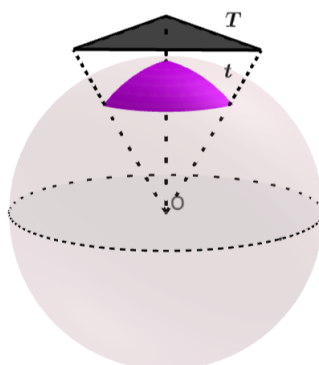


Figura 2.9: Projeção radial de uma face do poliedro.

Fonte: A autora.

Assim, por meio da projeção radial, temos uma esfera \mathcal{E} coberta de F triângulos

esféricos, com um total de A lados e V vértices. Para cada um dos triângulos Δ_i , com $i = 1, 2, \dots, F$, que decompõe a superfície da esfera \mathcal{E} , vale a fórmula de Girard $S_{\Delta_i} = \pi + (\frac{A_{\Delta_i}}{r^2})$, em que S_{Δ_i} é a soma dos ângulos internos do triângulo esférico e A_{Δ_i} é área do triângulo esférico. Como são F triângulos esféricos, serão F igualdades como a seguinte:

$$S_{\Delta_1} + S_{\Delta_2} + \dots + S_{\Delta_F} = \pi + \frac{A_{\Delta_1}}{r^2} + \pi + \frac{A_{\Delta_2}}{r^2} + \dots + \pi + \frac{A_{\Delta_F}}{r^2} = \pi F + \frac{\sum_{i=1}^F A_{\Delta_i}}{r^2}. \quad (2.2)$$

Somando-as temos:

$$\sum_{i=1}^F (\alpha^i + \beta^i + \gamma^i) = \pi F + \frac{\sum_{i=1}^F A_{\Delta_i}}{r^2}. \quad (2.3)$$

Como a esfera \mathcal{E} está coberta por F triângulos esféricos, então:

$$\sum_{i=1}^F A_{\Delta_i} = 4\pi r^2. \quad (2.4)$$

Ou seja, a soma da área de todos esses triângulos esféricos corresponde a área da esfera. Ademais, a soma dos ângulos em torno de cada vértice é 2π , logo:

$$\sum_{i=1}^F (\alpha^i + \beta^i + \gamma^i) = 2\pi V. \quad (2.5)$$

Reescrevendo a equação (2.3), temos:

$$\begin{aligned} 2\pi V &= \pi F + \frac{4\pi r^2}{r^2} \\ 2V &= F + 4. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Podemos fazer uma relação entre o número F de triângulos esféricos e o número A de lados desses triângulos. Observe que cada aresta do triângulo é lado de duas faces, isto é, cada triângulo tem três lados e cada lado é comum a dois triângulos, vem:

$$3F = 2A \quad (2.7)$$

$$F = 2A - 2F.$$

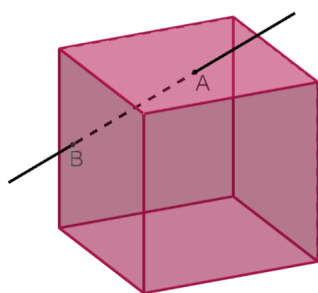
Substituindo o valor de F , que foi obtido acima, em (2.6) :

$$2V - 2A + 2F = 4$$

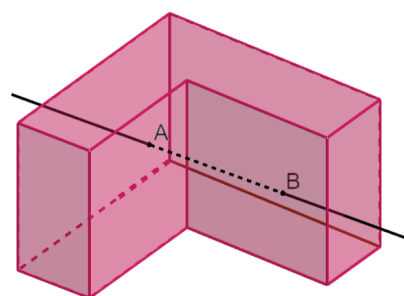
$$V - A + F = 2. \quad (2.8)$$

□

Para ilustrar esse teorema podemos calcular a relação de Euler para os poliedros da figura (1.1).



(a) Poliedro convexo.



(b) Poliedro não convexo.

Exemplo 2.1 Na figura (a) temos:

$$V - A + F = 2$$

$$8 - 12 + 6 = 2$$

$$2 = 2.$$

Para a figura (b) temos:

$$V - A + F = 2$$

$$12 - 18 + 8 = 2$$

$$2 = 2.$$

Capítulo 3

Característica De Euler De Superfícies

Neste capítulo, exploraremos a definição de superfícies regulares e em seguida examinaremos o processo de triangulação de uma superfície, passo fundamental para o realizarmos o cálculo da característica de Euler de uma superfície. Por fim, exploraremos o conceito de somas conexas de superfícies, que envolve a combinação de duas ou mais superfícies para criar uma nova superfície.

3.1 Superfícies Regulares

De modo intuitivo, uma superfície regular em \mathbb{R}^3 é formada tomando-se pedaços do plano e deformando ou colando-os entre si de maneira que o resultado seja uma figura sem vértices, arestas ou auto-intersecções. No que se segue apresentamos uma definição. A referência para essa seção pode ser consultada em [3].

Definição 3.1 *Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada $p \in S$, existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^3$, com $p \in V$, e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$, definida num aberto U de \mathbb{R}^2 tal que:*

- (i) *X é diferenciável. Isto é, se escrevermos $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in U$, as funções $x(u, v)$, $y(u, v)$ e $z(u, v)$ tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U .*
- (ii) *X é um homeomorfismo. Por (i) X é contínua, portanto, tem inversa $X^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ contínua.*
- (iii) *Para todo $q \in U$, a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.*

A aplicação X é chamada de *parametrização* ou um sistema de coordenadas (locais) em (uma vizinhança de) p . A vizinhança $V \cap S$ de p em S é chamada de uma *vizinhança coordenada*. Faremos alguns comentários importantes acerca da definição.

A condição (i) é natural se deseja fazer alguma geometria diferencial sobre S . Por exemplo, para se definir o conceito de plano tangente é necessário haver essa condição. Na condição (ii), a injetividade evita autointersecções em superfícies regulares, essa condição é necessária para falar de plano tangente em um ponto $p \in S$. A continuidade da inversa é uma condição essencial para provar que certos objetos definidos em termos de uma parametrização não dependem dessa parametrização, mas, apenas do próprio conjunto S .

Para expressar a condição (iii), temos a aplicação diferencial dX_q e as derivadas parciais das funções componentes de X indicadas por $\frac{\partial X}{\partial u}$ e $\frac{\partial X}{\partial v}$ no ponto q . Se fixarmos um dos parâmetros e variarmos o outro, é obtido uma curva na superfície S . Denominamos essa curva como *curva coordenada*. Os vetores tangentes a essas curvas em X_q são $\frac{\partial X}{\partial u}$ e $\frac{\partial X}{\partial v}$. Cada uma dessas derivadas compõe as colunas da matriz jacobiana da aplicação linear dX_q nas bases canônicas do \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .

$$dx_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

A condição (iii) afirma que a aplicação diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora, ou seja, essa condição é equivalente as seguintes afirmativas:

- A matriz da aplicação diferencial dX_q tem posto 2;
- $\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \neq 0$;
- Os vetores coluna da matriz dX_q são linearmente independentes.

Exemplo 1 (Esfera) Seja $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a esfera unitária. Vamos mostrar que \mathbb{S}^2 é uma superfície regular. Vamos parametrizar a esfera por coordenadas esféricas (φ, θ) , com φ sendo a longitude e θ é a colatitude (complemento da latitude). Seja a aplicação $X: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(\theta, \varphi) = (\text{sen}\theta \cos \varphi, \text{sen}\theta \text{sen}\varphi, \cos \theta) ,$$

definida em um aberto:

$$U = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \theta < \pi \text{ e } 0 < \varphi < 2\pi\}.$$

Então $X: U \rightarrow X(U)$ é uma parametrização de S^2 .

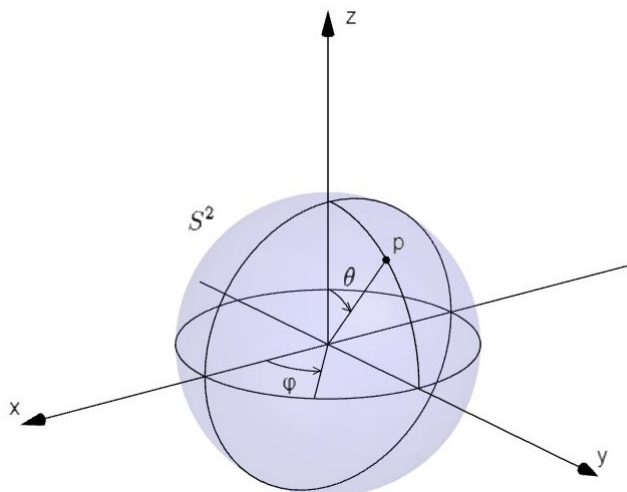


Figura 3.1: Coordenadas Esféricas

Fonte: A autora

De fato, existem derivadas parciais contínuas de todas as ordens das funções componentes de X , portanto, X é diferenciável e a condição (i) é satisfeita. Perceba que para os determinantes Jacobianos

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \varphi)} &= \cos \theta \operatorname{sen} \varphi, \\ \frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, \varphi)} &= \operatorname{sen}^2 \theta \cos \varphi, \\ \frac{\partial(x, z)}{\partial(\theta, \varphi)} &= -\operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen} \varphi, \end{aligned}$$

se anularem de modo simultâneo, é necessário que:

$$\cos^2 \theta \operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{sen}^4 \theta \cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^4 \theta \operatorname{sen}^2 \varphi = \operatorname{sen}^2 \theta = 0.$$

No entanto, isso não ocorre no aberto U e $\operatorname{sen} \theta \neq 0$. Portanto, a condição (iii) também é satisfeita. Para a condição (ii), observe que $X(U)$ omite um semicírculo de $S^2 - C$, onde C é o semicírculo

$$C = \{(x, y, z) \in S^2; y = 0, x \geq 0\},$$

Perceba que θ fica bem determinado por $\arccos z = \theta$ com $0 < \theta < \pi$. Conhecendo o valor de θ , temos que

$$\cos \varphi = \frac{x}{\operatorname{sen} \theta}, \quad \operatorname{sen} \varphi = \frac{y}{\operatorname{sen} \theta},$$

onde φ fica determinado de maneira única pois $0 < \varphi < 2\pi$. Conseqüentemente, se tomarmos um ponto $(x, y, z) \in S^2 - C$ teremos que $X^{-1}(x, y, z) \rightarrow (\theta, \varphi)$ existe pois φ fica bem determinado por $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$, onde $\varphi \in (\pi, 2\pi)$. Logo, X^{-1} é contínua e portanto, existe um homeomorfismo. Concluimos que $X : U \rightarrow S^2 - C$ é uma parametrização de S^2 que cobre toda a esfera, exceto o semicírculo C . Podemos usar outra parametrização para cobrir totalmente S^2 . Vamos considerar $Y : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ a seguinte aplicação

$$Y(\theta, \varphi) = (\operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \cos \theta, \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi),$$

definida no aberto

$$V = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < \theta < 0 \text{ e } 0 < \varphi < 2\pi\}.$$

Então $Y(V) = S^2 - C'$ é o semicírculo:

$$C' = \{(x, y, z) \in S^2 \mid x \leq 0 \text{ e } z = 0\}.$$

Analogamente, podemos verificar que Y também é uma parametrização de S^2 . Logo temos que $X(U) \cup Y(V) = S^2$.

Exemplo 2 (Toro) O toro de revolução \mathbb{T}^2 é a superfície obtida através da rotação da circunferência C centrado no ponto $(a, 0, 0)$ com raio $r > 0$ e $a > r$ dada por $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - a)^2 + z^2 = r^2, y = 0\}$ em torno do eixo Oz .

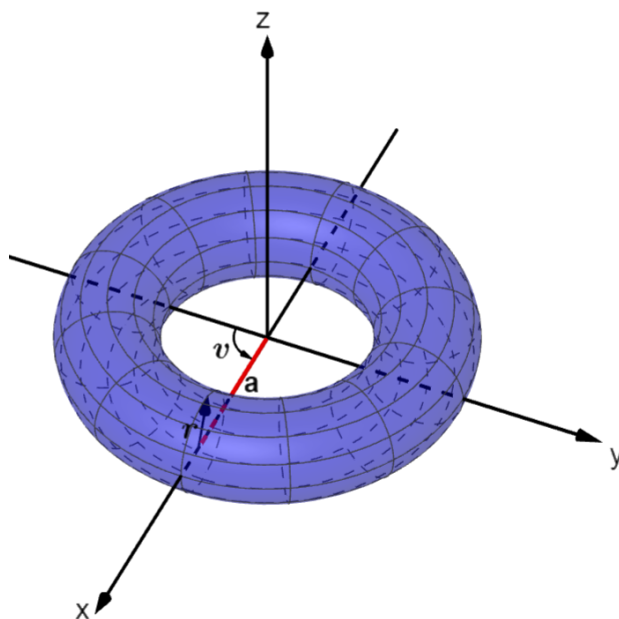


Figura 3.2: Toro
Fonte: A autora.

Uma parametrização para o toro \mathbb{T}^2 é dada pela aplicação $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$X(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \operatorname{senu}, r \operatorname{senu}),$$

definida em um aberto:

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u < 2\pi \text{ e } 0 < v < 2\pi\}.$$

De fato, X é diferenciável e a condição (i) é facilmente verificada. Perceba que essa parametrização $X(U)$ omite um paralelo e um meridiano, ou seja, não está definida no conjunto $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{T}^2; y = 0, x > 0\}$. Tomando um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{T}^2 - C$ veremos que a inversa de X^{-1} existe pois teremos $u = \arcsen(\frac{z}{r})$ com $0 < u < \pi$. Conhecendo o valor para u podemos determinar $v = \arctan(\frac{y}{x})$ definida no intervalo $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Logo, existe uma inversa X^{-1} que é contínua. Portanto, há um homeomorfismo e a condição (ii) está verificada.

Para condição (iii) temos que

$$dX_{(u,v)} = \begin{pmatrix} -r \operatorname{senu} & -(a + r \cos u) \operatorname{senv} \\ -r \operatorname{senu} \operatorname{senv} & (a + r \cos u) \cos v \\ r \cos u & 0 \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \|X_u \times X_v\|^2 &= \|X_u\|^2 \|X_v\|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 \\ &= (r^2 \operatorname{sen}^2 u (\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) + \cos^2 u) ((a + r \cos u)^2 (\operatorname{sen}^2 v + \cos^2 v)) - \\ &\quad - (r(a + r \cos u) \operatorname{senu} \operatorname{senv} \cos v + (-r)(a + r \cos u) \operatorname{senu} \operatorname{senv} \cos v)^2 \\ &= \sqrt{r^2 (a + r \cos u)^2} \\ &= r(a + r \cos u). \end{aligned}$$

Como $r > 0$ e $a > r$ podemos que X_u e X_v são vetores linearmente independentes e portanto, a condição (iii) é satisfeita.

3.2 Triangulação

Nessa seção apresentamos alguns argumentos topológicos necessários para definirmos uma triangulação de uma superfície. Novamente, a referência utilizada nessa seção é [3].

Definição 3.2 *Seja A um subconjunto de \mathbb{R}^3 . Um ponto $p \in \mathbb{R}^3$ é um ponto de acumulação de A se toda vizinhança de p em \mathbb{R}^3 contém um ponto de A , distinto de p .*

Definição 3.3 Um conjunto é fechado se ele contém todos os seus pontos de acumulação.

Definição 3.4 Um conjunto é limitado se está contido em alguma bola de \mathbb{R}^3 .

Se A é um conjunto fechado e limitado, dizemos que é um *conjunto compacto*. A esfera e o toro são exemplos de superfícies compactas enquanto a faixa de Möbius é limitada mas, não é fechada e portanto, não é compacta.

Definição 3.5 Uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ é conexa se quaisquer dois de seus pontos podem ser ligados por uma curva contínua contida em S .

Seja S uma superfície regular. Uma região conexa $R \subset S$ será regular se R é compacta e a sua fronteira ∂R é uma união finita de curvas regulares por partes fechadas e simples que não se intersectam. Neste trabalho vamos considerar uma superfície compacta como uma região regular com a fronteira sendo o conjunto vazio (ver [3]).

Definição 3.6 (*Triangulação*) Uma triangulação de uma região regular $R \subset S$ é uma família finita \mathcal{T} de triângulos T_i , $i = 1, \dots, n$, tal que:

$$(i) \cup_{i=1}^n T_i = R;$$

(ii) Se $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, $i \neq j$, então $T_i \cap T_j$ é uma aresta comum de T_i e T_j ou um vértice em comum de T_i e T_j .

A figura a seguir é um exemplo de não triangulação para o toro. Observe que mesmo os triângulos possuindo apenas um vértice em comum, após a identificação e colagem dos bordos do quadrado, conforme indicado na figura, passaram a ter dois vértices em comum. Ou seja, esse fato contradiz a condição (ii) da definição (3.6). Logo, não é uma triangulação (ver [1]).

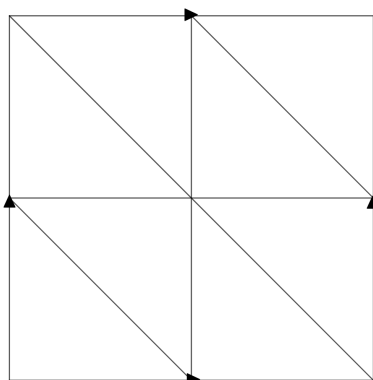


Figura 3.3: Exemplo de não triangulação do Toru
Fonte: A autora.

3.3 Característica de Euler de uma superfície

Como foi visto no capítulo anterior todo poliedro convexo tem característica de Euler igual a 2. Nossa intenção agora é calcular a característica de Euler utilizando a triangulação de superfícies como a esfera, o toro, o plano projetivo real, a faixa de Möbius e a garrafa de Klein. As triangulações presentes nessa seção foram elaboradas com base nas referências [2], [10] e [11].

Definição 3.7 *Seja \mathcal{T} uma triangulação de uma região regular $R \subset S$ de uma superfície regular S , denotamos por F o número de triângulos (faces), por A o número de lados (arestas) e por V o número de vértices da triangulação. O número*

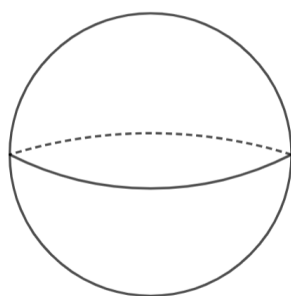
$$V - A + F = \chi(\mathcal{T}) \quad (3.1)$$

é chamado de característica de Euler da triangulação.

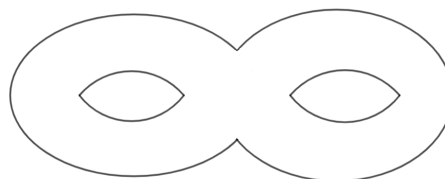
As proposições abaixo serão admitidas sem demonstrações.

Proposição 3.8 [3] *Toda região regular de uma superfície regular admite uma triangulação.*

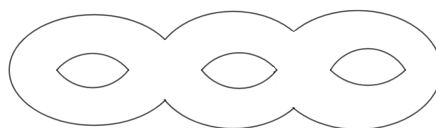
Proposição 3.9 [3] *Se $R \subset S$ é uma região regular de uma superfície S , a característica de Euler não depende da triangulação de R . Denotaremos, portanto, por $\chi(R)$.*



(a) Esfera



(b) Bitoro



(c) Tritoro

Figura 3.4: Superfícies compactas orientáveis.

Fonte: A autora.

Definição 3.10 [12] *Uma superfície cilíndrica obtida de um cilindro encurvado será denominado de alça.*

Proposição 3.11 *Toda superfície compacta e conexa $S \subset \mathbb{R}^3$ é homeomorfa a uma esfera com um número g de alças. O número*

$$g = \frac{2 - \chi(S)}{2} \quad (3.2)$$

é chamado o gênero de S .

Na figura (3.4), o gênero da esfera é 0, do bitoro é 2 e do tritoro é 3. Iniciaremos, agora, o processo de triangulações de algumas superfícies e em seguida calcular a suas características de Euler.

Exemplo 3 (Esfera) *Uma triangulação para a esfera é apresentada na figura a seguir.*

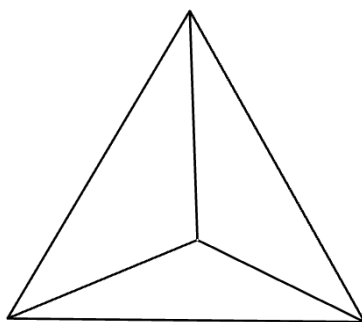


Figura 3.5: Triangulação da esfera S^2
Fonte: A autora.

Usando a relação (3.1) e a triangulação acima, temos 4 vértices, 6 arestas e 4 faces:

$$\begin{aligned} \chi(S^2) &= V - A + F \\ \chi(S^2) &= 4 - 6 + 4 \\ \chi(S^2) &= 2. \end{aligned}$$

Portanto, a característica de Euler da esfera é 2.

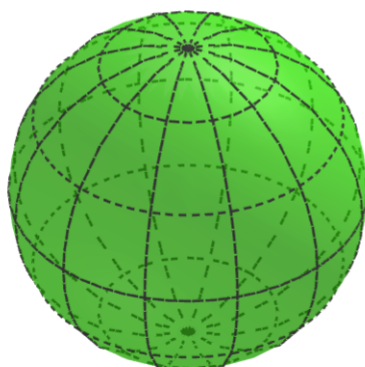


Figura 3.6: A esfera
Fonte: A autora.

Exemplo 4 (Toro) Um toro T^2 pode ser obtido de um retângulo fazendo as identificações retratadas na figura a seguir (ver [11]).

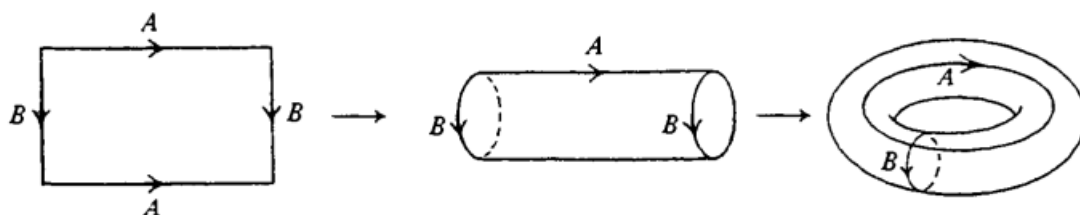


Figura 3.7: Identificação do Toro
Fonte: [11]

Para fazer o cálculo da característica de Euler do toro usaremos a triangulação da figura a seguir:

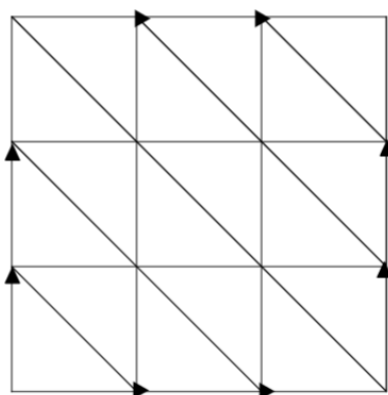


Figura 3.8: Triangulação do Toro.
Fonte: A autora.

Podemos verificar na triangulação do toro que temos 9 vértices, 27 arestas e 18 faces, então:

$$\chi(T^2) = V - A + F$$

$$\chi(T^2) = 9 - 27 + 18$$

$$\chi(T^2) = 0.$$

Portanto, a característica de Euler do toro é 0.

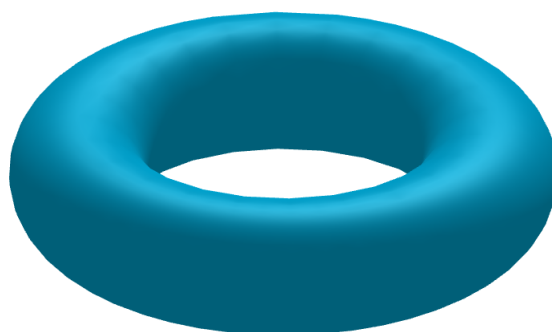


Figura 3.9: Toro
Fonte: A autora.

Exemplo 5 (*Faixa de Möbius*) A faixa de Möbius é obtida identificando-se as duas extremidades opostas de um retângulo após girá-lo em 180° . Isso pode ser feito facilmente com uma tira de papel (ver [2]).

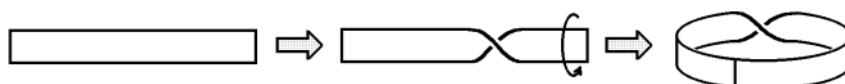


Figura 3.10: Construção da Faixa de Möbius.
Fonte: [14]

Uma forma de triangulação da faixa de Möbius é apresentado a seguir:

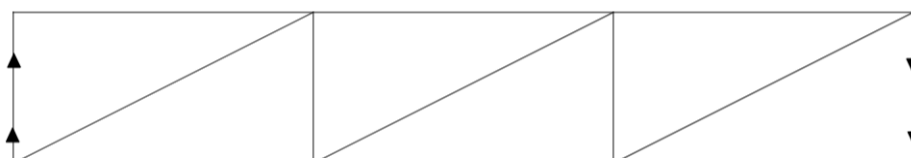


Figura 3.11: Triangulação da faixa de Möbius.
Fonte: A autora.

Para fazer o cálculo da característica de Euler da faixa de Möbius, observe que a sua triangulação tem 6 vértices, 12 arestas e 6 faces, então:

$$\chi(M) = V - A + F$$

$$\chi(M) = 6 - 12 + 6$$

$$\chi(M) = 0.$$

Portanto, a característica de Euler da faixa de Möbius é 0.



Figura 3.12: Faixa de Möbius.

Fonte: A autora.

Exemplo 6 (Plano Projetivo Real \mathbb{RP}) Para fazer a construção do plano projetivo, em vez de uma região poligonal plana, vamos considerar inicialmente o hemisfério sul da superfície de uma esfera, uma semi-esfera. Colamos então cada ponto da linha do equador (bordo da semi-esfera) ao ponto do equador diametralmente oposto. A superfície assim produzida é chamada plano projetivo (ver [14]).

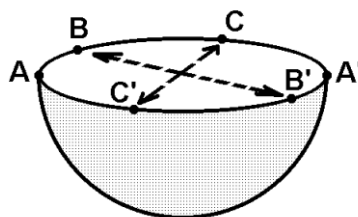


Figura 3.13: Construção do plano projetivo real

Fonte: [14]

Na figura 3.13 é representado a construção do plano projetivo real. Os pontos A , B e C são colados nos pontos antípodas A' , B' e C' , respectivamente. Assim sendo, o arco AB será colado no arco $A'B'$, após uma torção. Também serão colados, com uma torção, o arco BC em $B'C'$, e o arco CA em $C'A'$ (ver [14]). Uma triangulação para o plano projetivo real é dada na figura abaixo:

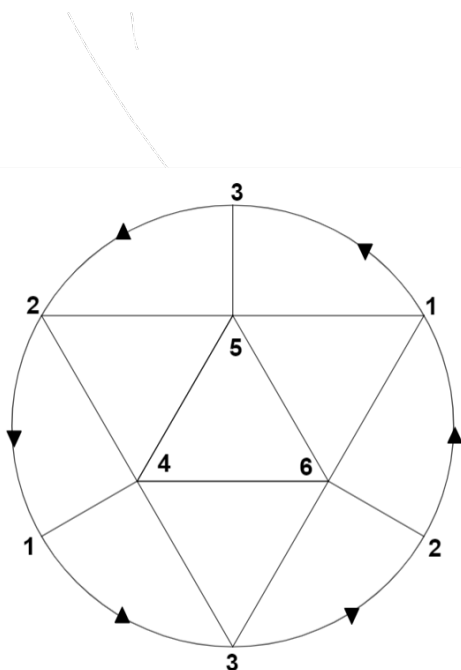


Figura 3.14: Triangulação do plano projetivo real.

Fonte: A autora.

Usando essa triangulação, temos 6 vértices, 15 arestas e 10 faces, então:

$$\chi(\mathbb{RP}) = V - A + F$$

$$\chi(\mathbb{RP}) = 6 - 15 + 10$$

$$\chi(\mathbb{RP}) = 1.$$

Portanto, a característica de Euler do plano projetivo real é 1. A esfera com cross-cap, a superfície romana de Steiner e a superfície de Boy, representadas respectivamente na figura abaixo são os três modelos do plano projetivo no espaço tridimensional mais conhecidos na literatura (ver [9]).



Figura 3.15: Modelos do plano projetivo no \mathbb{R}^3 .

Fonte: [9]

Exemplo 7 (*Garrafa de Klein*) A garrafa de Klein plana é uma superfície que pode ser obtida da seguinte maneira: Tomamos como ponto de partida, um retângulo plano. Colamos a aresta superior na inferior, em seguida, colamos a aresta esquerda na direita, após aplicarmos uma torção de 180° numa das extremidades da faixa retangular (ver [14]).

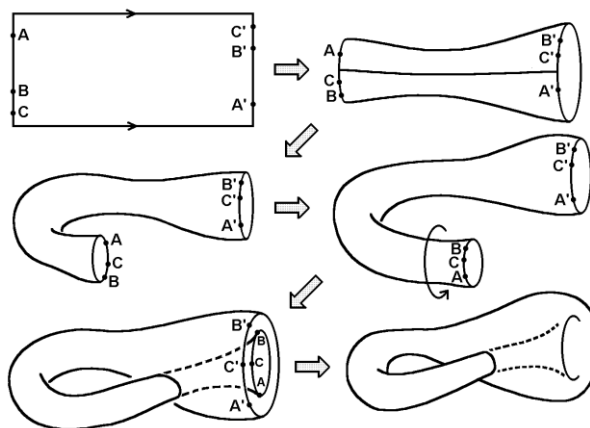


Figura 3.16: Construção da garrafa de Klein
Fonte: [14]

A garrafa de Klein pode ser triangulizada conforme a figura a seguir:

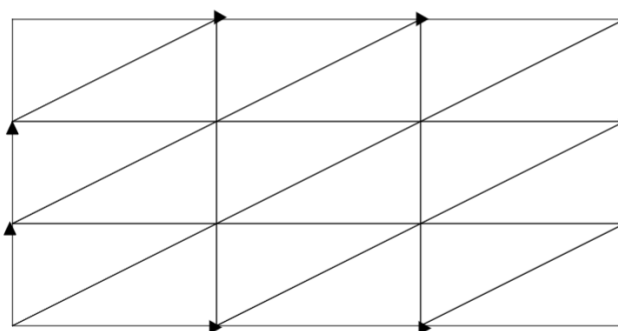


Figura 3.17: Triangulação da garrafa de Klein
Fonte: A autora.

Com essa triangulação temos 9 vértices, 27 arestas e 18 faces, então:

$$\chi(KB) = V - A + F$$

$$\chi(KB) = 9 - 27 + 18$$

$$\chi(KB) = 0.$$

Portanto, a característica de Euler da garrafa de Klein é 0.

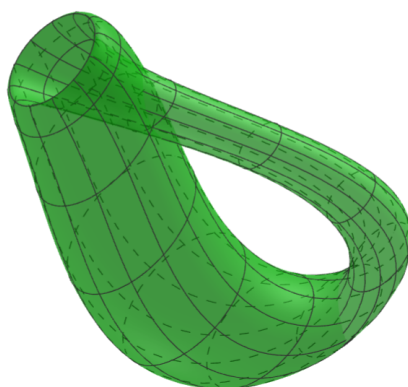


Figura 3.18: Garrafa de Klein
Fonte: A autora.

3.4 Soma conexa de superfícies

As referências utilizadas nessa seção foram [10] e [6].

Proposição 3.12 *A superfície $S = \bar{S} - \{P_1, \dots, P_N\}$ obtida retirando N pontos $\{P_1, \dots, P_N\}$ de uma superfície compacta e conexa \bar{S} de gênero g , tem característica de Euler $\chi(S) = 2 - 2g - N$.*

Demonstração: A superfície obtida ao retirar N pontos da superfície \bar{S} de gênero g é homeomorfa a superfície tirando N triângulos de \bar{S} . Então,

$$V_S = V_{\bar{S}}, \quad A_S = A_{\bar{S}}, \quad e \quad F_S = F_{\bar{S}} - N.$$

Logo,

$$\chi(S) = \chi(\bar{S}) - N.$$

Como,

$$\chi(\bar{S}) = 2 - 2g,$$

temos que

$$\chi(S) = 2 - 2g - N.$$

□

Definição 3.13 [6] *Sejam S_1 e S_2 duas superfícies quaisquer. Remova um disco de S_1 e S_2 e cole o restante através de seus bordos para formar uma nova superfície. Essa operação é chamada de soma conexa de S_1 e S_2 , sendo denotada por $S_1 \# S_2$.*

Proposição 3.14 [10] *Sejam S_1 e S_2 duas superfícies compactas. As características de Euler de S_1 e S_2 e de sua soma conexa, $S_1\#S_2$, são relacionadas pela fórmula:*

$$\chi(S_1\#S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

Demonstração: Suponha que S_1 e S_2 sejam duas superfícies trianguladas. Então, S_1 tem F_1 faces, V_1 vértices e A_1 arestas e S_2 tem F_2 faces, V_2 vértices e A_2 arestas. Teremos:

$$\chi(S_1) = V_1 - A_1 + F_1,$$

$$\chi(S_2) = V_2 - A_2 + F_2.$$

Ao realizarmos a operação de soma conexa de S_1 e S_2 removemos um triângulo de cada uma das superfícies e em seguida colamos o restante de maneira que as arestas coincidam com arestas e vértices com os vértices. Então, obtemos a seguinte triangulação para $S_1\#S_2$ com as seguintes expressões para as F faces, V vértices e A arestas:

$$F = F_1 + F_2 - 2, \text{ pois é retirado um triângulo de cada superfície;}$$

$$V = V_1 + V_2 - 3, \text{ pois três vértices de } S_1 \text{ foram colados com três vértices de } S_2;$$

$$A = A_1 + A_2 - 3, \text{ pois três arestas de } S_1 \text{ foram coladas com três arestas de } S_2.$$

Segue que:

$$\begin{aligned} \chi(S_1\#S_2) &= V - A + F \\ &= (V_1 + V_2 - 3) - (A_1 + A_2 - 3) + (F_1 + F_2 - 2) \\ &= (V_1 - A_1 + F_1) + (V_2 - A_2 + F_2) - 3 + 3 - 2 \\ &= \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2. \end{aligned}$$

□

Exemplo 8 *(Soma conexa de dois toros) Usando a proposição (3.14) podemos calcular a característica de Euler de um bi-toro:*

$$\begin{aligned}
 \chi(T_1^2 \# T_2^2) &= \chi(T_1^2) + \chi(T_2^2) - 2 \\
 &= 0 + 0 - 2 \\
 &= -2.
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

A figura seguinte indica como ocorre o processo da soma conexa entre os dois toros. Primeiro retira-se um disco D^2 de cada um dos toros e depois cola-se o restante através dos bordos.

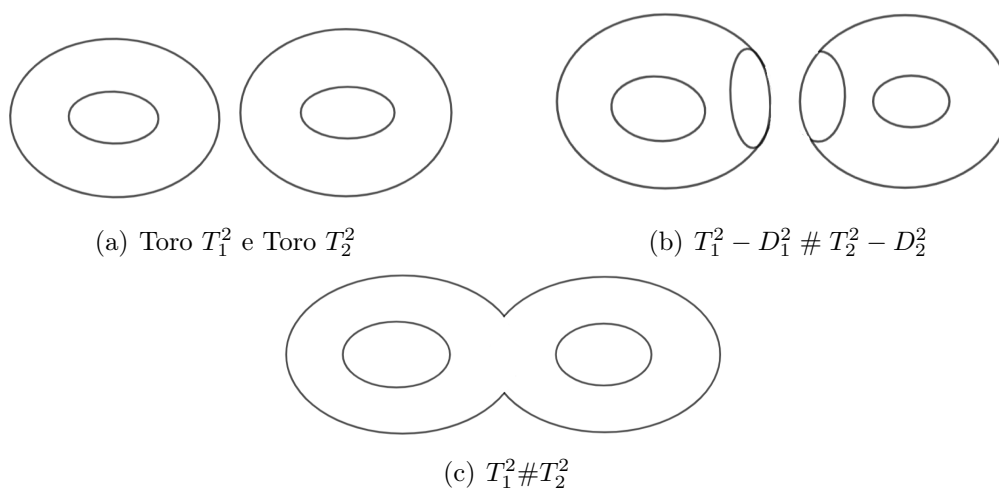


Figura 3.19: Soma conexa de dois toros.

Fonte: A autora.

Podemos verificar esse resultado com (3.2), se temos o bi-toro, então:

$$2 = \frac{2 - \chi(T_1^2 \# T_2^2)}{2},$$

logo

$$\chi(T_1^2 \# T_2^2) = -2.$$

Concluimos, então, que uma superfície de gênero 2 é uma superfície que é a soma conexa de dois toros.

Proposição 3.15 [10] *As características de Euler das superfícies: soma conexa de n toros, soma conexa de n planos projetivos, soma conexa de um plano projetivo e n toros e soma conexa de uma garrafa de Klein e n toros são dadas pela tabela abaixo:*

Tabela 3.1: Superfícies e suas características de Euler

Superfície	Característica de Euler
Soma conexa de n toros	$2 - 2n$
Soma conexa de n planos projetivos	$2 - n$
Soma conexa de um plano projetivo e n toros	$1 - 2n$
Soma conexa de uma garrafa de Klein e n toros	$-2n$

Fonte: A autora

Demonstração:

- (i) Vamos provar essa proposição usando o princípio de indução finita.

Seja $S = T^2 \# \dots \# T^2$ a soma conexa de n toros, com $n \geq 1$. Se $n = 1$ então $\chi(S) = 2 - 2 \cdot 1 = 0$.

Vamos supor que essa afirmação também é válida para um inteiro positivo $n = k$, isto é, $\chi(S_k) = 2 - 2k$. Seja S_{k+1} a soma conexa de $(k+1)$ -toros. Vamos provar que a fórmula também é verdadeira para $n = k + 1$.

De fato, como

$$\chi(S_{k+1}) = \chi((T^2 \# \dots \# T^2) \# T^2),$$

temos

$$\begin{aligned} \chi(S_{k+1}) &= \chi(T^2 \# \dots \# T^2) + \chi(T^2) - 2 \\ &= 2 - 2k + 0 - 2 \\ &= -2k \\ &= 2 - 2(k + 1). \end{aligned}$$

Portanto, usando o princípio da indução finita, a característica de Euler da soma conexa de n -toros é $2 - 2n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

- (ii) Seja
- $S = (P^2 \# \dots \# P^2) \# P^2$
- a soma conexa de
- n
- planos projetivos, com
- $n \geq 1$
- . Se
- $n = 1$
- então
- $\chi(S) = \chi(P^2) = 2 - 1 = 1$
- .

Vamos supor que essa afirmação também é válida para um inteiro positivo $n = k$, então $\chi(S_k) = 2 - k$. Seja S_{k+1} a soma conexa de $(k+1)$ planos projetivos. Vamos provar que a fórmula também é verdadeira para $n = k + 1$.

De fato, uma vez que

$$\chi(S_{k+1}) = \chi((P^2 \# \dots \# P^2) \# P^2),$$

temos

$$\begin{aligned}
 \chi(S_{k+1}) &= \chi(P^2 \# \dots \# P^2) + \chi(P^2) - 2 \\
 &= 2 - k + 1 - 2 \\
 &= -k + 1 \\
 &= 2 - (k + 1).
 \end{aligned}$$

Portanto, usando o princípio da indução finita, a característica de Euler da soma conexa de n -planos projetivos é $2 - n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

- (iii) Seja $S = (T^2 \# \dots \# T^2) \# P^2$ a soma conexa de n toros e um plano projetivo, com $n \geq 1$. Se $n = 1$ então $\chi(S) = \chi(T^2 \# P^2) = 1 - 2 \cdot 1 = -1$.

Vamos supor que essa afirmação também é válida para um inteiro positivo $n = k$, isto é, $\chi(S_k) = 1 - 2k$. Seja S_{k+1} a soma conexa de $(k + 1)$ -toros e um plano projetivo. Vamos provar que a fórmula também é verdadeira para $n = k + 1$.

De fato,

$$\begin{aligned}
 \chi[(T^2 \# T^2 \# \dots \# T^2) + P^2] &= \chi[T^2 + (T^2 \# \dots \# T^2 + P^2)] \\
 &= \chi(T^2) + \chi[(T^2 \# \dots \# T^2) + P^2] - 2 \\
 &= \chi(T^2) + \chi(S_k) - 2 \\
 &= 0 + (1 - 2k) - 2 \\
 &= 1 - 2(k + 1).
 \end{aligned}$$

Portanto, usando o princípio da indução finita, a característica de Euler da soma conexa de n -toros e um plano projetivo é $1 - 2n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

- (iv) Seja $S = (T^2 \# \dots \# T^2) \# KB$ a soma conexa de n toros e uma garrafa de Klein, com $n \geq 1$. Se $n = 1$ então $\chi(S) = \chi(T^2 \# KB) = -2 \cdot 1 = -2$.

Vamos supor que essa afirmação também é válida para um inteiro positivo $n = k$, isto é, $\chi(S_k) = -2k$. Seja S_{k+1} a soma conexa de $(k + 1)$ -toros e uma garrafa de Klein. Vamos provar que a fórmula também é verdadeira para $n = k + 1$.

De fato,

$$\begin{aligned}
\chi[(T^2 \# T^2 \# \dots \# T^2) + KB] &= \chi[T^2 + (T^2 \# \dots \# T^2 + KB)] \\
&= \chi(T^2) + \chi[(T^2 \# \dots \# T^2) + KB] - 2 \\
&= \chi(T^2) + \chi(S_k) - 2 \\
&= 0 - 2k - 2 \\
&= -2(k + 1).
\end{aligned}$$

Portanto, usando o princípio da indução finita, a característica de Euler da soma conexa de n -toros e uma garrafa de Klein é $-2n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$. \square

Usando os resultados da proposição anterior e a proposição (3.14) podemos calcular a soma conexa de n toros e m planos projetivos.

Exemplo 9 *Seja $2 - 2n$ a soma conexa de n toros e $2 - m$ a soma conexa de m planos projetivos, então*

$$\begin{aligned}
\chi(nT^2 \# mP^2) &= \chi(nT^2) + \chi(mP^2) - 2 \\
&= 2 - 2n + 2 - m - 2 \\
&= 2 - 2n - m.
\end{aligned}$$

Portanto, a soma conexa n toros e m planos projetivos é $2 - 2n - m$.

Conclusão

Inicialmente, situamos o leitor no contexto histórico acerca do Teorema de Euler. Diante da relevância histórica, expusemos os principais resultados da nossa pesquisa com estudo do Teorema de Euler para poliedros convexos e uma demonstração para esse teorema fornecida pelo matemático Legendre usando artifícios da geometria esférica.

Também estudamos a definição de superfície regular, o processo de triangulação de uma superfície e a característica de Euler das superfícies trianguladas da Esfera, Toro e da garrafa de Klein. Por fim, exploramos as somas conexas de superfícies, destacando a sua aplicação na construção de novas superfícies a partir de operações de soma.

Ao término deste trabalho, esperamos ter proporcionado uma visão abrangente sobre o tema. Esperamos, ainda, que este trabalho sirva como ponto de partida para novas investigações e discussões, estimulando o aprofundamento e a ampliação do conhecimento sobre a temática abordada.

Referências Bibliográficas

- [1] BARROS, R. L. D.
Classificação das superfícies compactas sem bordo.
UFSCar, São Carlos (2010).
- [2] CROOM, F. H.
Basic concepts of algebraic topology.
Springer Science & Business Media, 2012.
- [3] DO CARMO, M. P.
Geometria diferencial de curvas e superfícies.
Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.
- [4] EVES, H.
Introdução à história da matemática (trad. domingues, hh), 2004.
- [5] FERREIRA, E. L. C.
Geometria Básica.
Fundação CECIERJ, 2007.
- [6] KINSEY, L. C.
Topology of surfaces.
Springer Science & Business Media, 2012.
- [7] LIMA, E. L.
Ainda sobre o teorema de euler para poliedros convexos.
RPM no5. IMPA: Rio de Janeiro (1984).
- [8] LIMA, E. L.

Curso de análise vol. 1–15^a edição.

Rio de Janeiro: IMPA–Projeto Euclides (2022).

[9] MARAR, W. L.

Modelos do plano projetivo no espaço tridimensional.

Revista Matemática Universitária 1 (2021), 47–55.

[10] MASSEY, W. S.

A basic course in algebraic topology, vol. 127.

Springer, 2019.

[11] MUNKRES, J. R.

Elements of algebraic topology.

CRC press, 2018.

[12] OTONI, L. M. V.

A característica de euler de objetos no espaço.

Universidade Federal de Viçosa (2015).

[13] RICHESON, D. S.

Euler’s gem: the polyhedron formula and the birth of topology.

Princeton University Press, 2019.

[14] SAMPAIO, J. C. V.

Uma introdução à topologia geométrica: passeios de Euler, superfícies, e o teorema das quatro cores.

EDUFScar, 2008.

[15] STILLWELL, J., ET AL.

Mathematics and Its History: A Concise Edition, vol. 41.

Springer, 2020.