



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS  
FACULDADE DE GEOFÍSICA

LEANDRO DA SILVA SADALA VALENTE

**ESTIMATIVA DE MODELO DE VELOCIDADE EM  
PROFUNDIDADE A PARTIR DE VELOCIDADES DE  
MIGRAÇÃO EM TEMPO**

BELÉM  
2008

LEANDRO DA SILVA SADALA VALENTE

**ESTIMATIVA DE MODELO DE VELOCIDADE EM  
PROFUNDIDADE A PARTIR DE VELOCIDADES DE  
MIGRAÇÃO EM TEMPO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Bacharel em Geofísica.

Orientador: Jessé Carvalho Costa

BELÉM  
2008

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação(CIP)  
Biblioteca Geól. Rdº Montenegro G. de Montalvão

---

- V154e Valente, Leandro da Silva Sadala  
Estimativa de modelo de velocidade em profundidade a partir de velocidades de migração em tempo. / Leandro da Silva Sadala Valente. – 2008  
55 f. : il.  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Geofísica) – Faculdade de Geofísica, Instituto de Geociências, Universidade Federal do Pará, Belém, Segundo Semestre de 2007.  
Orientador, Jessé Carvalho Costa
1. Prospecção sísmica. 2. Velocidade de migração em tempo. 3. Modelo de velocidade em profundidade. 4. Conversão tempo-profundidade. I. Universidade Federal do Pará II. Costa, Jessé Carvalho, Orient. III. Título.

CDD 20º ed.:622.1592

---

LEANDRO DA SILVA SADALA VALENTE

**ESTIMATIVA DE MODELO DE VELOCIDADE EM  
PROFUNDIDADE A PARTIR DE VELOCIDADES DE  
MIGRAÇÃO EM TEMPO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
à Faculdade de Geofísica do Instituto de Ge-  
ociências da Universidade Federal do Pará,  
em cumprimento às exigências para obtenção  
do grau de Bacharel em Geofísica.

Data de aprovação em \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

Conceito: \_\_\_\_\_

Banca examinadora:

---

Prof. Jessé Carvalho Costa - Orientador  
Doutor em Geofísica  
Universidade Federal do Pará

---

Prof. Lourenildo Willian Barbosa Leite - Membro  
Doutor em Geofísica  
Universidade Federal do Pará

---

Prof. Marcos Welby Corrêa Silva - Membro  
Doutor em Geofísica  
Universidade Federal do Pará

A mamãe, Mara, Pedro e Orlandina.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus, que me guiou e continua a me guiar na difícil caminhada na busca pelo sucesso.

Agradeço a minha mãe pelo incentivo dado aos meus estudos mesmo diante das maiores dificuldades.

Agradeço aos demais familiares que me ajudaram direta e indiretamente nessa conquista.

Agradeço a Coordenação da Faculdade de Geofísica pelo belo trabalho realizado com os alunos, principalmente a prof. Ellen Gomes que sempre nos apoiou e defendeu nossos direitos na Universidade.

Agradeço a meu orientador com quem adquiri enorme conhecimento intelectual, profissional e vivencial.

Ademais, agradeço a meus colegas de faculdade.

Finalmente, agradeço a todos aqueles que ajudaram de alguma forma na confecção deste trabalho.

## RESUMO

Um dos maiores desafios do imageamento sísmico em regiões geológicas complexas é a construção do modelo de velocidade em profundidade. Se a variação lateral na velocidade de propagação é moderada, um modelo de velocidade em profundidade pode ser construído a partir das velocidades de migração em tempo. A relação teórica entre essas velocidades é revista através da teoria paraxial do raio. A estimativa das velocidades em profundidade a partir das velocidades de migração em tempo é instável. Versões regularizadas da conversão tempo-profundidade baseadas nos métodos de *Dijkstra-like fast marching* foram implementadas. Duas outras variações eficientes do algoritmo original proposto recentemente na literatura são avaliados. A relação entre o grau do polinômio e o valor da regularização para o problema dos mínimos quadrados associado com a interpolação da frente de onda é determinada. Finalmente, estes algoritmos são testados em dados sintéticos 2D e os resultados obtidos com os algoritmos de traçamento de raios são comparados.

**Palavras Chaves:** Prospecção sísmica. Velocidades de migração em tempo. Modelo de velocidade em profundidade. Conversão tempo-profundidade.

## ABSTRACT

One of the major challenges to seismic imaging in complex geological regions is velocity model building in depth. If lateral variation in the propagation velocity is moderate, a depth velocity model can be build starting from time migration velocities. I review the theoretical relation between these velocities using the paraxial ray theory. The estimation of depth velocities from time migration velocities is unstable. I implement regularized versions of the time to depth conversion based on Dijkstra-like fast marching methods. Two more efficient variations from the original algorithm proposed recently in the literature are evaluated. The relation between the polynomial degree and the regularization value for the least-squares problem associated with the wavefront interpolation are determined. Finally, I test these algorithms on 2D synthetic data and compare the results obtained by three ray tracing algorithms.

**keywords:** Seismic Prospecting. Time Migration Velocities. Depth Velocity Model. Time to Depth Conversion.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	11
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTOS TEÓRICOS</b> . . . . .	14
2.1	MIGRAÇÃO EM TEMPO . . . . .	14
2.1.1	Raios-imagem . . . . .	14
2.1.2	As velocidades de migração . . . . .	16
2.1.3	Aproximação para o tempo de trânsito . . . . .	17
2.2	TEORIA PARAXIAL DO RAIOS . . . . .	19
2.3	RELAÇÃO ENTRE AS VELOCIDADES SÍSMICAS E DE MIGRAÇÃO EM TEMPO . . . . .	22
2.3.1	Inversão Dix . . . . .	22
2.3.2	Relação entre a matriz $\Omega$ e as velocidades da subsuperfície em 3D . . . . .	23
2.3.3	Relação entre as velocidades Dix e as velocidades da subsuperfície em 2D . . . . .	24
2.4	DETERMINAÇÃO DO MODELO DE VELOCIDADE EM PROFUNDIDADE . . . . .	24
2.4.1	Modelo de velocidade 3D . . . . .	24
2.4.2	Modelo de velocidade 2D . . . . .	25
2.4.3	A questão da estabilidade . . . . .	25
<b>3</b>	<b>ALGORÍTMOS EM 2D</b> . . . . .	26
3.1	ALGORÍTMO DE CONVERSÃO TEMPO-PROFUNDIDADE . . . . .	26
3.1.1	Formulação Euleriana do problema de fronteira . . . . .	26
3.1.2	Formulação numérica do algoritmo . . . . .	27
3.2	ALGORÍTMOS DE TRAÇAMENTO DE RAIOS . . . . .	29
3.2.1	O traçamento de raios-imagem . . . . .	29
3.2.2	Alternativas para o traçamento de raios . . . . .	31

3.2.2.1	Alternativa 1 . . . . .	31
3.2.2.2	Alternativa 2 . . . . .	31
<b>4</b>	<b>EXPERIMENTOS NÚMERICOS EM 2D . . . . .</b>	<b>32</b>
4.1	MODELO SINTÉTICO 1 . . . . .	32
4.2	MODELO SINTÉTICO 2 . . . . .	40
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>48</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>49</b>
	<b>APÊNDICE A - MÉTODO NEWTON-RAPHSON . . . . .</b>	<b>51</b>
	<b>APÊNDICE B - REGULARIZAÇÃO PARA OS MÍNIMOS QUADRA- DOS NO TRAÇAMENTO DE RAIOS . . . . .</b>	<b>52</b>
	<b>APÊNDICE C - DEMONSTRAÇÃO DA RELAÇÃO ENTRE AS VE- LOCIDADES EM SUBSUPERFÍCIE E DE MIGRAÇÃO . . . . .</b>	<b>53</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A necessidade da descoberta de novas riquezas energéticas tem ganho amplo espaço nas discussões político-econômicas de vários países, inclusive nas brasileiras. Energia solar, hidrogênio, hidrato de gás são algumas das novas possibilidades energéticas. A maioria dessas com custo-benefício ainda muito longe do ideal, o que as torna inaplicáveis mundialmente. Assim, o principal combustível da sociedade mundial continua sendo o petróleo. No entanto, encontrar novas reservas petrolíferas de dimensões consideráveis vem se tornando difícil. O desafio dos pesquisadores passou a ser a descoberta de reservas menores conhecidas como trapas estratigráficas. Na tentativa de encontrá-las, as empresas de petróleo investem milhões em pesquisa e tecnologia. Esse investimento se reflete em áreas como engenharia e geociências. Uma dessas áreas, cujo papel é fundamental na exploração do petróleo, é a geofísica. Através da sísmica, a geofísica imagea as camadas dispostas em subsuperfície de modo que um intérprete possa tirar as primeiras conclusões sobre a possível presença de petróleo na área estudada.

A obtenção de imagens sísmicas pode ser desempenhada de duas formas. A primeira produz imagens em tempo, denominada *migração em tempo*. Enquanto a segunda produz imagens em profundidade, denominada *migração em profundidade*.

A migração em tempo é um processo robusto e rápido, por isso é o mais comum. Ela é adequada para áreas com pouca variação lateral de velocidade, isto é, onde a velocidade dependa substancialmente da profundidade e o mínimo possível da distância. Isso só é possível se o meio não for muito heterogêneo, o que não pode ocorrer na realidade, portanto, não há garantia do posicionamento correto dos refletores no espaço. Uma característica da migração em tempo é a produção de imagens nas coordenadas  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ , cuja relação com as coordenadas cartesianas pode não ser tão trivial se a velocidade variar lateralmente. Outro produto, considerado adicional, gerado pela migração em tempo são as velocidades  $v_m(\mathbf{x}_0, t_0)$ , conhecidas como *velocidades de migração em tempo* ou simplesmente *velocidades de migração*. No caso em que as velocidades sísmicas dependem somente da profundidade, as velocidades de migração são aproximadamente as velocidades RMS (DIX, 1955). Mas em geral, as velocidades de migração estão relacionadas com o raio de curvatura da frente de onda emergente (HUBRAL; KREY, 1980). O que se deve salientar é que essas velocidades devem ser evitadas para outros propósitos como interpretação de litologia, conversão tempo-profundidade etc, pois elas não correspondem às velocidades reais em subsuperfície. Finalmente, o ponto mais importante na migração em tempo, é que este procedimento falha no imageamento de refletores sob condições

geológicas complexas, tais como domos de sal ou falhas de cavalgamento.

A migração em profundidade é um processo mais demorado, entretanto com um resultado mais eficaz. Ele é adequado para áreas onde a migração em tempo não funciona, ou seja, meios geológicos bastante complexos com forte variação lateral de velocidade. Mas, o maior problema com este processo é que sua implementação requer a construção de um *modelo de velocidade*  $v(\mathbf{x})$ . A construção de um modelo de velocidade acurado pode ser muito difícil e demorado, haja vista que a migração em profundidade é um processo iterativo complexo, no qual o modelo de velocidade é construído explicitamente enquanto os dados ainda estão sendo processados.

O objetivo deste trabalho é a construção de um modelo de velocidade  $v(\mathbf{x})$  a partir das velocidades de migração  $v_m(\mathbf{x}_0, t_0)$ . Com este modelo, pode-se realizar migração em profundidade para se obter rotineiramente uma imagem sísmica mais acurada com baixo custo computacional. Alternativamente, pode-se ainda converter a imagem migrada em tempo diretamente para profundidade utilizando as informações adicionais,  $\mathbf{x}_0(\mathbf{x})$  e  $t_0(\mathbf{x})$ , geradas na construção do modelo (Fig. 1.1). Para isso, foram validados e aplicados os algoritmos de traçamento de raios e conversão tempo-profundidade desenvolvidos por Cameron et al (2007).

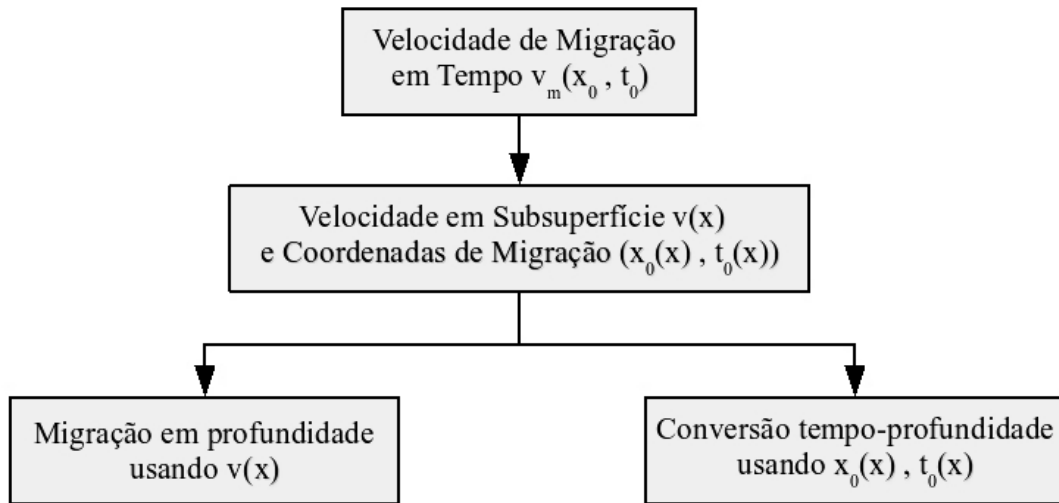


Figura 1.1: A idéia principal deste trabalho. Partindo das velocidades de migração em tempo  $v_m(\mathbf{x}_0, t_0)$ , chega-se às velocidades em subsuperfície  $v(\mathbf{x})$  e às coordenadas de migração  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ . Pode-se usar  $v(\mathbf{x})$  para migrar em profundidade ou usar  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  para conversão tempo-profundidade.

Em primeiro lugar, apresentamos alguns conceitos fundamentais sobre raio-imagem e teoria do raio, essenciais para o desenvolvimento das relações teóricas entre as velocidades de migração e as velocidades em profundidade em 2D e 3D. Assim como, destacamos que ambos os problemas direto e inverso, que descrevem essa relação são mal-postos. Posteriormente, introduzimos os algoritmos utilizados na resolução deste problema em

2D. Os algoritmos consistem em uma eficiente conversão tempo-profundidade, baseado nos métodos de *Dijkstra-like fast marching*, e em um traçamento de raios (Fig. 1.2). Sugerimos também variações de implementação para o algoritmo de traçamento de raios. Finalmente, apresentamos os testes feitos com os algoritmos em 2D, destacando a relação entre o grau do polinômio e o valor da regularização utilizados para resolver o problema dos mínimos quadrados envolvido no traçamento de raios.

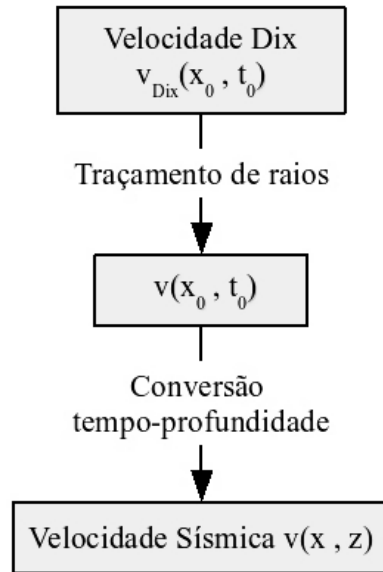


Figura 1.2: Processo de transformação das velocidades de migração em tempo para as velocidades em subsuperfície para o caso 2D. Primeiro, calculam-se as velocidades Dix em tempo  $v_{Dix}(x_0, t_0)$ , em seguida, traçam-se os raios para gerar a entrada  $v(x_0, t_0)$  da conversão tempo-profundidade.

## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo, apresentamos conceitos fundamentais sobre migração sísmica e teoria paraxial do raio utilizados no estabelecimento da relação entre as velocidades em subsuperfície e de migração em tempo.

### 2.1 MIGRAÇÃO EM TEMPO

Com a finalidade de produzir imagens da subsuperfície no domínio do tempo, aplica-se o processo denominado *migração em tempo*. Para entender esse processo, analisemos a migração de um ponto difrator em meio heterogêneo (Fig. 2.1). O primeiro ponto alcançado pela frente de onda é  $d_{RI}$ , que está localizado na posição  $X_{RI}$ . Neste ponto a frente de onda é tangente à superfície. Nota-se que a posição  $X_{vert}$  não está exatamente acima de  $d_{RI}$ , exceto quando não há variação lateral de velocidade, para o qual verifica-se o contrário. Quanto maior for a heterogeneidade em subsuperfície, mais  $X_{RI}$  se afasta de  $X_{vert}$ . Assim, podemos estabelecer que a migração em tempo não imagea um ponto difrator corretamente na sua posição lateral, ou no tempo vertical de propagação, na presença de variações laterais de velocidade, em vez disso, ela imagea o ponto difrator diretamente abaixo da posição  $X_{RI}$  em superfície, num tempo igual ao tempo de propagação do raio que chega nessa posição. Esta afirmação é análoga para refletores contínuos.

#### 2.1.1 Raios-imagem

O raio localizado na posição  $X_{RI}$  citado anteriormente é denominado *raio-imagem* (HUBRAL, 1977). Ele é essencial no estabelecimento da relação entre as coordenadas de migração  $\mathbf{x}_0$  e  $t_0$ , e as coordenadas cartesianas. Esta relação é estabelecida abaixo.

As características<sup>1</sup> da equação Eikonal  $|\nabla T(\mathbf{x})|^2 = s^2(\mathbf{x})$  (POPOV, 2002) podem ser vistas como raios. Dentre todos os raios saindo de um ponto P em subsuperfície e chegando na superfície da Terra (Fig. 2.2), alguns têm tempo de trânsito mínimo. Estes raios são chamados de raios-imagem. Eles caracterizam-se por chegarem perpendiculares à superfície. Logo, podemos identificar o ponto P pelas coordenadas cartesianas  $\mathbf{x}$  ou através do ponto P' na superfície, cujo raio-imagem sai de  $\mathbf{x}_0$  e viaja durante um determinado intervalo de tempo até alcançar o ponto P. Convencionalmente, as coordenadas

<sup>1</sup>Seja, por exemplo, a equação diferencial de primeira ordem  $a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$ . Denominam-se de características, as curvas que constituem a superfície solução dessa equação.

de migração são  $(x_0, t_0)$ , sendo  $x_0$  a posição de escape do raio-imagem e  $t_0$  o tempo de trânsito duplo ao longo do raio.

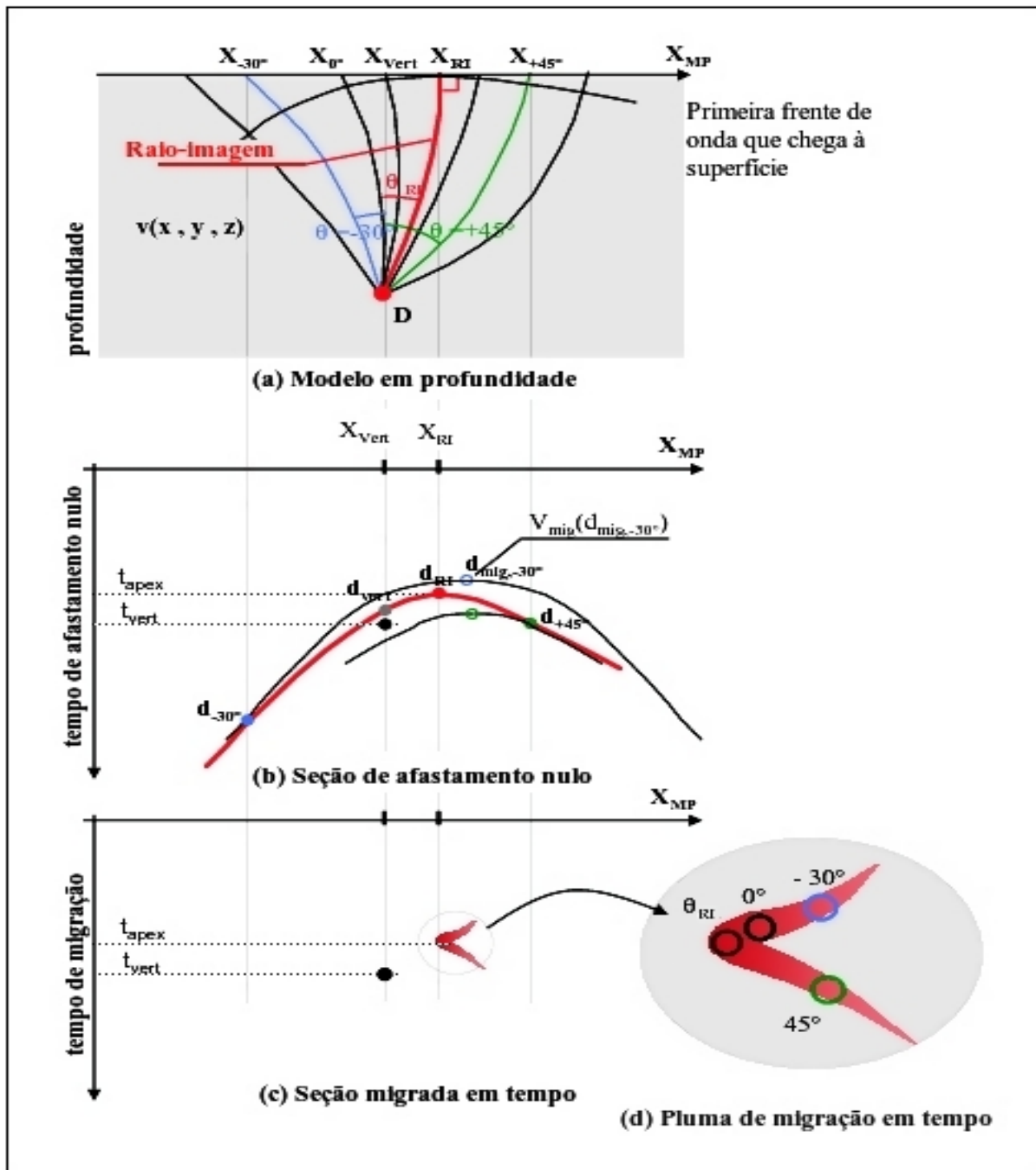


Figura 2.1: Migração em tempo de um ponto difrator em um meio heterogêneo. Representação esquemática do ponto difrator em profundidade (a). Seção de afastamento nulo (b), mostrando que a imagem de um ponto difrator é uma curva que tem seu ápice na linha vertical abaixo da posição de escape  $X_{RI}$  do raio-imagem. Seção migrada (c), destacando que a migração em tempo não focaliza a curva de difração perfeitamente. O resultado está contido em algum ponto da chamada *pluma de migração*.

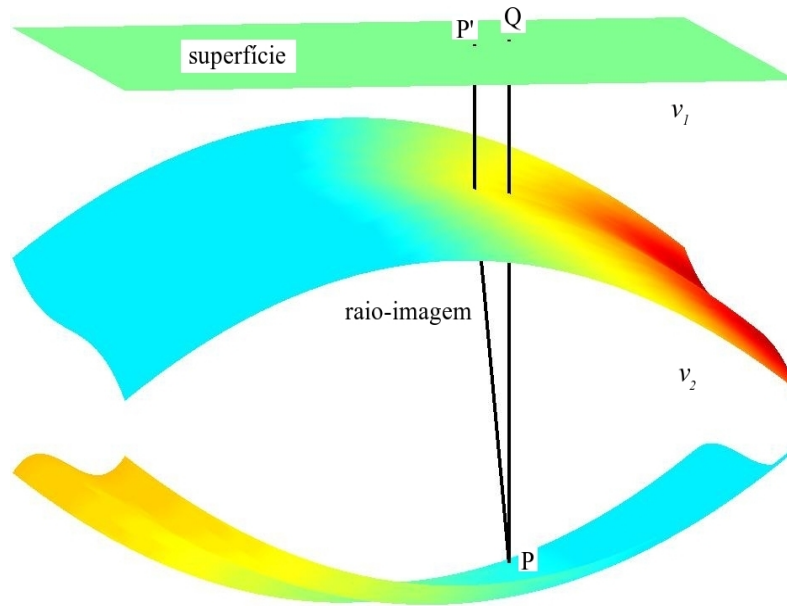


Figura 2.2: Desenho esquemático representando a subsuperfície em duas camadas de velocidades  $v_1$  e  $v_2$ , respectivamente. Observe a diferença entre a trajetória do raio-imagem  $PP'$  e a projeção  $Q$  de  $P$  na superfície.

### 2.1.2 As velocidades de migração

A migração em tempo leva em consideração que não haja variação lateral de velocidade. Para realizá-la é necessário conhecermos as velocidades de migração  $v_m$ . Essas velocidades podem ser aproximadas pelas velocidades RMS

$$v_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} v^2(z(\tau)) d\tau}, \quad (2.1)$$

quando o afastamento fonte-receptor é pequeno.

As velocidades RMS por sua vez podem ser obtidas através das velocidades de empilhamento após o processo de correção NMO (YILMAZ, 2001). A figura 2.3 ilustra esse processo.

O painel de velocidades de empilhamento é calculado para cada velocidade  $v_{NMO,i}$  como uma função do tempo de afastamento nulo  $t_0$ , somando as amostras na família de ponto comum ao longo da hipérbole correspondente. Uma vez que o painel está completo, pode-se fazer a marcação das velocidades de empilhamento, produzindo assim a função  $v_{stack}(t_0)$  nos pontos médios. Note o processo de silenciamento, necessário para remover traços estirados.

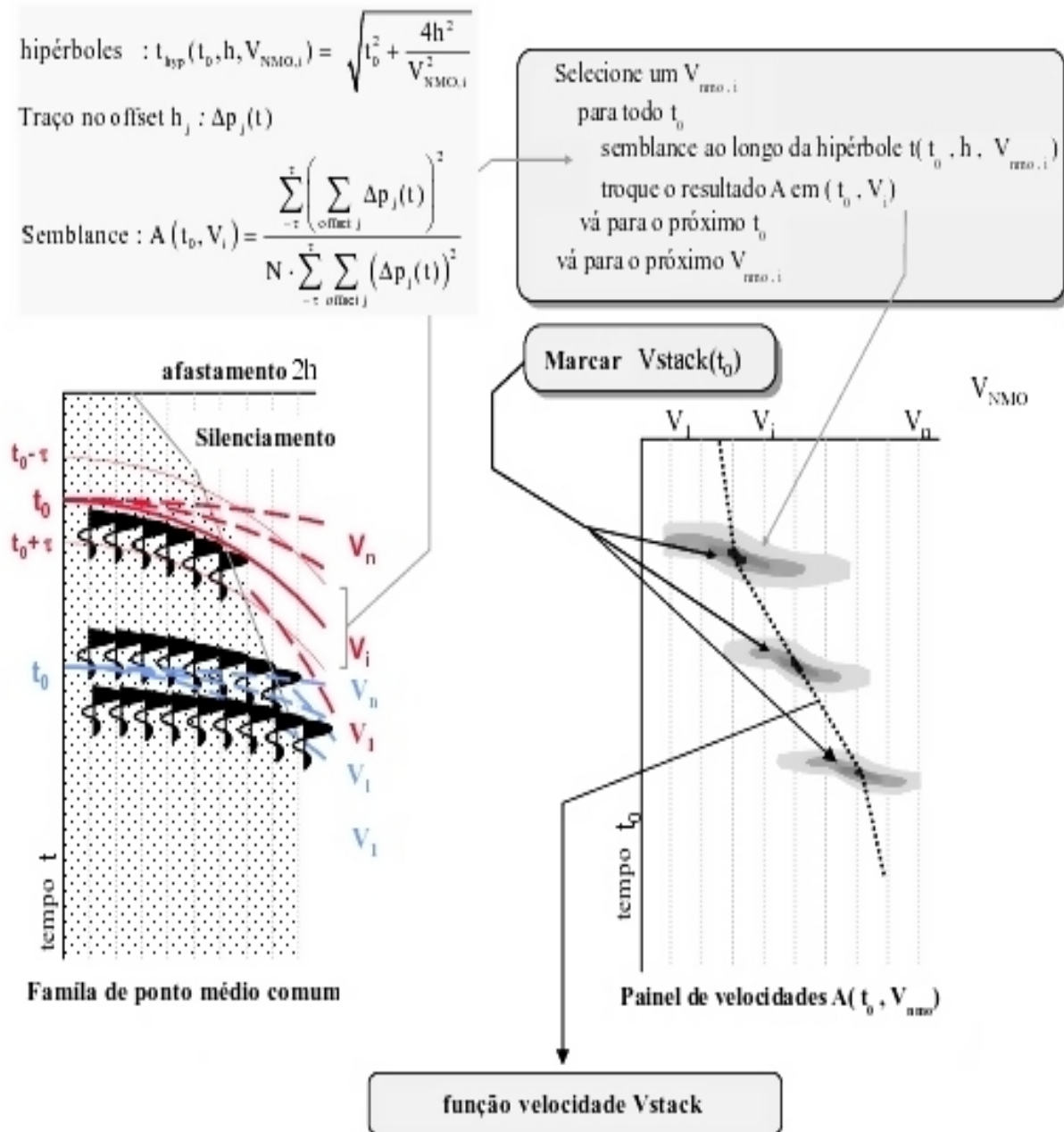


Figura 2.3: Forma de análise de velocidade para empilhamento. Com os dados organizados em famílias CMP, procuram-se encontrar as velocidades que melhor horizontalizam os eventos. Isto é realizado através da marcação de velocidades no painel de coerência denominado de *semblance*. Ao final das marcações, ter-se-á a função velocidade de empilhamento gerada com as velocidades que foram marcadas.

### 2.1.3 Aproximação para o tempo de trânsito

Outro subprocesso contido na migração é o cálculo da função hiperbólica de Green. Observando a figura 2.4 e considerando de modo simplificado que a velocidade  $v$  no em subsuperfície seja constante, é fácil ver que o tempo total de trânsito da fonte  $S$  para o

ponto P em subsuperfície e de P para o receptor G é

$$t_{SP} + t_{PG} = \sqrt{\frac{t_0^2}{4} + \frac{|\mathbf{x}_0 - S|^2}{v^2}} + \sqrt{\frac{t_0^2}{4} + \frac{|\mathbf{x}_0 - G|^2}{v^2}}, \quad (2.2)$$

sendo  $\mathbf{x}_0$  a posição de escape de um raio-imagem do ponto de reflexão P e  $t_0$  é o tempo de trânsito duplo ao longo deste raio. Substituindo a velocidade  $v$  pela velocidade de migração  $v_m(\mathbf{x}_0, t_0)$ , chegamos a

$$t(S, G, \mathbf{x}_0, t_0) \approx \sqrt{\frac{t_0^2}{4} + \frac{|\mathbf{x}_0 - S|^2}{v_m^2(\mathbf{x}_0, t_0)}} + \sqrt{\frac{t_0^2}{4} + \frac{|\mathbf{x}_0 - G|^2}{v_m^2(\mathbf{x}_0, t_0)}}. \quad (2.3)$$

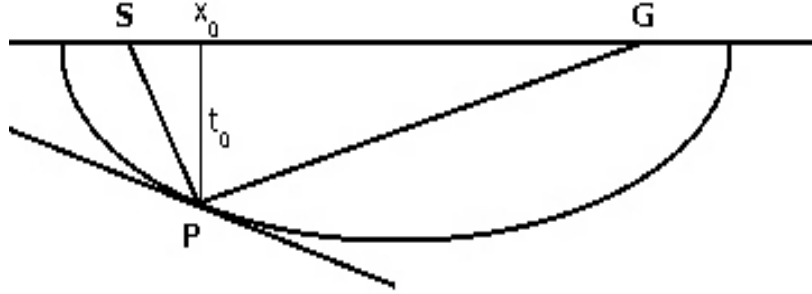


Figura 2.4: Desenho esquemático em profundidade da abertura de migração, representada por uma elipse. Note-se que a trajetória do raio  $SPG$  poderia ser qualquer outra onde ocorresse a interseção entre o refletor e a elipse, que a determinação da expressão hiperbólica de Green seria a mesma.

A substituição (2.3) é obtida pela expansão em série de Taylor do tempo de trânsito de raios próximos ao raio-imagem, dada por

$$t(x, y) = t_0 + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \mathbf{\Gamma} \Delta \mathbf{x} + O(\delta^3), \quad (2.4)$$

sendo  $t_0$  o tempo de trânsito ao longo do raio-imagem,  $\Delta \mathbf{x} = (x - x_0, y - y_0)^T$ ,

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} t_{xx} & t_{xy} \\ t_{yx} & t_{yy} \end{bmatrix}_{(x_0, y_0)}$$

a matriz das segundas derivadas de  $t(x, y)$  avaliadas no ponto  $(x_0, y_0)$  e  $\delta = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ . Note-se a ausência do termo de primeira ordem, que é nulo.

A matriz  $\mathbf{\Gamma}$  está relacionada a matriz  $\mathbf{R}$  dos raios de curvatura (HUBRAL; KREY, 1980), por

$$\mathbf{\Gamma}^{-1} = \mathbf{R}v(x_0, y_0) = \mathbf{\Omega}, \quad (2.5)$$

sendo  $v(x_0, y_0) = v(x = x_0, y = y_0, z = 0)$  a velocidade do ponto  $(x_0, y_0)$  na superfície.

Passaremos a tratar a partir de agora com a inversa da matriz  $\mathbf{\Gamma}$  denotada por  $\mathbf{\Omega}$ .

Se compararmos a expansão de Taylor (2.4) em 2D com o quadrado de (2.3), obtemos a relação entre a velocidade de migração em tempo e o raio de curvatura da frente de onda, dada por

$$t_0 v_m^2(x_0, t_0) = v(x_0) R(x_0, t_0). \quad (2.6)$$

Por outro lado, em 3D essa comparação não é direta, pois manipulando (2.3), (2.4) e (2.5) chegamos à

$$t(\mathbf{x}_0, t_0, S, G) = \sqrt{t_0^2 + t_0(S - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{\Omega}(\mathbf{x}_0, t_0)^{-1}(S - \mathbf{x}_0)} + \sqrt{t_0^2 + t_0(G - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{\Omega}(\mathbf{x}_0, t_0)^{-1}(G - \mathbf{x}_0)}. \quad (2.7)$$

## 2.2 TEORIA PARAXIAL DO RAIOS

Dado um raio qualquer propagando-se em um meio com velocidade suave, podemos denominá-lo de *central* e a ele acoplar o sistema de coordenadas  $(t_0, q_1, q_2)$  (ČERVENY, 2001). Consideremos  $t$  como sendo o tempo de trânsito ao longo do raio central. Para cada instante de  $t$ , um plano perpendicular ao raio central pode ser traçado. Adicionalmente, duas direções ortogonais neste plano podem ser identificadas, aos quais chamaremos  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$  (Fig. 2.5). Desse modo, a localização de um ponto M no espaço pode ser expresso por

$$\vec{r}_M(t) = \vec{r}_0(t) + q_1(t)\vec{e}_1(t) + q_2(t)\vec{e}_2(t) \quad (2.8)$$

para algum  $t$ ,  $q_1$  e  $q_2$ , sendo  $\vec{r}_0(t)$  a posição do raio central no tempo  $t$ . Se M está muito próximo do raio, sua localização pode ser descrita unicamente por  $(t, q_1, q_2)$ .

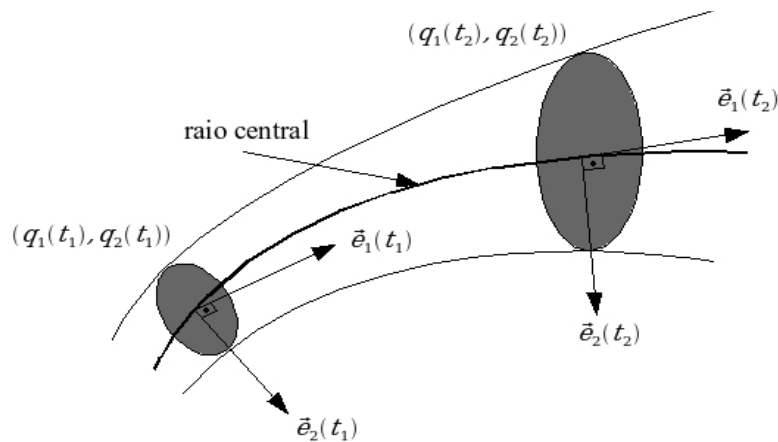


Figura 2.5: Representação gráfica do traçado paraxial de raios. Note-se a disposição entre os raios central e adjacentes. Além disso, observe as seções transversais que cortam o raio central em instantes distintos  $t_1$  e  $t_2$ , por cujos pontos centrais são traçadas as duas direções ortogonais  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$ .

Admitindo-se que haja uma família de raios muito próximos ao raio central e que queiramos escrever as equações destes raios em termos de  $q_1(t)$  e  $q_2(t)$ . Seguindo o formalismo Hamiltoniano, introduzimos os momentos  $p_1$  e  $p_2$  correspondentes às coordenadas  $q_1$  e  $q_2$ . Assim, as equações do raio na forma Hamiltoniana são (ČERVENÝ, 2001):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & v_0^2 \mathbf{I}_2 \\ -v_0^{-1} \mathbf{V}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Na qual  $v_0$  é a velocidade ao longo do raio central,

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é a matriz identidade  $2 \times 2$  e

$$\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} v_{q_1 q_1} & v_{q_1 q_2} \\ v_{q_2 q_1} & v_{q_2 q_2} \end{bmatrix}_{(t, q_1, q_2)}$$

é a matriz  $2 \times 2$  das segundas derivadas de  $v$  em relação a  $q_1$  e  $q_2$ .

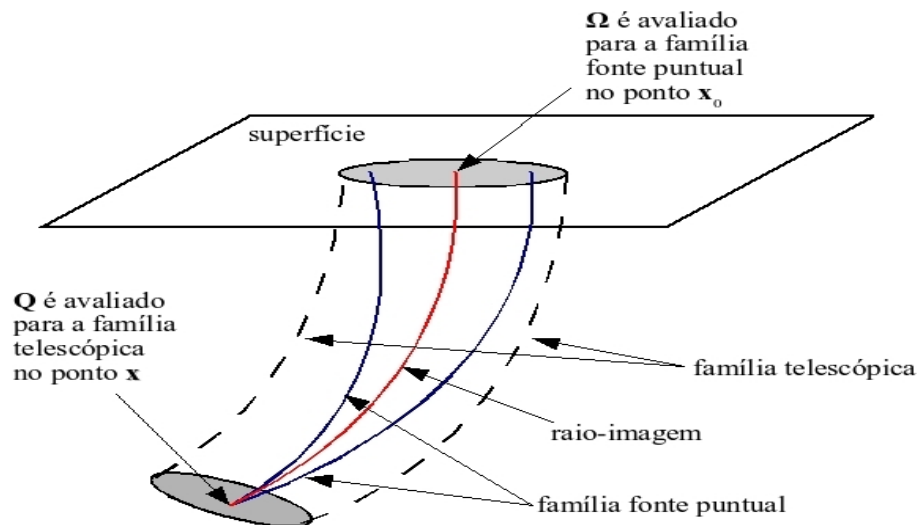


Figura 2.6: Representação gráfica da relação entre as velocidades de migração em tempo e de subsuperfície. Observam-se o raio-imagem que chega perpendicular a superfície, as famílias telescópica e fonte pontual de raios. A matriz  $\Omega$  é avaliada no ponto  $\mathbf{x}_0$ , enquanto que a matriz  $\mathbf{Q}$  é avaliada no ponto  $\mathbf{x}$ .

Supondo que a família de raios dependa dos parâmetros  $(\alpha_1, \alpha_2)$ , dois casos são destacados (Fig. 2.6)

- Todos os raios iniciam perpendiculares ao mesmo plano. Então  $(\alpha_1, \alpha_2)$  pode ser tomado como as coordenadas iniciais  $(x_0, y_0)$ . Esta família de raios é denominada *telescópica*.

- Todos os raios iniciam no mesmo ponto, mas em direções diferentes. Então  $(\alpha_1, \alpha_2)$  pode ser tomado como os momentos iniciais  $(p_1(0), p_2(0))$  dos raios. A esta família dá-se a denominação de *família fonte puntual*.

Considerando as seguintes matrizes  $2 \times 2$  (ČERVENY, 2001):

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{ij} &\equiv \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j}, \\ \mathbf{P}_{ij} &\equiv \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j},\end{aligned}\tag{2.10}$$

com  $i, j = 1, 2$ . Podemos escrever as equações das variações para  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{P}$  semelhantemente à equação (2.7) na forma

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & v_0^2 \mathbf{I}_2 \\ -\frac{1}{v_0} \mathbf{V} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix}.\tag{2.11}$$

As condições iniciais para a família de raios telescópicos em (2.11) são

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}(0) &= \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{P}(0) &= \mathbf{0},\end{aligned}\tag{2.12}$$

enquanto que para a família fonte puntual são

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}(0) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{P}(0) &= \frac{1}{v_0(0)} \mathbf{I}_2,\end{aligned}\tag{2.13}$$

sendo  $v_0(0)$  a velocidade na fonte.

Considerando agora que o raio central chegue ortogonal a algum plano em  $(x_0, y_0)$ . Tomemos como exemplo o raio que chega à superfície. Então a matriz  $\mathbf{\Gamma}$  das segundas derivadas dos tempos de trânsito da família fonte puntual dos raios ao redor do raio central é definida pela equação (2.5). Červený (2001) mostra que

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{PQ}^{-1}\tag{2.14}$$

e

$$\frac{d}{dt} \mathbf{\Gamma} = -v_0^2 \mathbf{\Gamma}^2 - \frac{1}{v_0} \mathbf{V}.\tag{2.15}$$

Mas como dito anteriormente, usamos  $\mathbf{\Omega}$ . Assim, temos

$$\mathbf{\Omega} = v_0 \mathbf{R} = \mathbf{QP}^{-1}.\tag{2.16}$$

Partindo de (2.15), facilmente chegamos à

$$\frac{d}{dt}\Omega = v_0^2 \mathbf{I}_2 + \frac{1}{v_0} \Omega \mathbf{V} \Omega. \quad (2.17)$$

A condição inicial para a matriz  $\Omega$  é

$$\Omega(0) = \mathbf{0}. \quad (2.18)$$

## 2.3 RELAÇÃO ENTRE AS VELOCIDADES SÍSMICAS E DE MIGRAÇÃO EM TEMPO

Nesta seção, apresentamos a relação entre as velocidades sísmicas e de migração estabelecidas por Dix. Em seguida, descrevemos uma nova visão desta relação, a qual é constituída por dois teoremas.

### 2.3.1 Inversão Dix

Dix (1955) estabeleceu a relação entre as velocidades de migração e de subsuperfície para o caso em que as velocidades dependem unicamente da profundidade. Ele mostrou que as velocidades de migração são as velocidades RMS, se as distâncias entre fontes e receptores são pequenas, e assim sugeriu o método de inversão que segue.

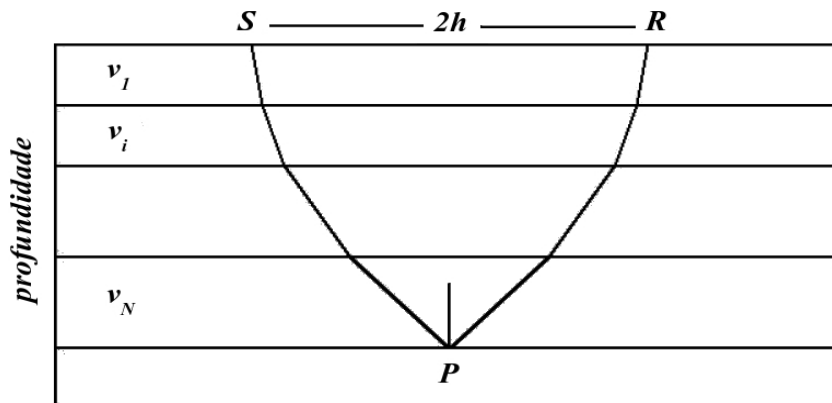


Figura 2.7: Modelo físico para inversão Dix. Perceba a distribuição da subsuperfície em intervalos homogêneos caracterizados por velocidades constantes. Observe também a trajetória de um raio desde S (fonte) à P (ponto em subsuperfície) e de P à R (receptor), com afastamento S-R de 2h, sendo h a profundidade da base do intervalo onde está localizado P.

Dado um modelo tal qual o da figura 2.7, com intervalos horizontais e velocidades constantes para cada um deles. Conhecem-se as velocidades  $V_i$  e os tempos  $t_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ , sendo  $V_i$  a velocidade RMS dos primeiros  $i$  intervalos em relação ao tempo e  $t_i$  o tempo de trânsito vertical duplo desde a superfície até a base do  $i$ -ésimo intervalo.

Desse modo, as velocidades nesses intervalos, denominadas velocidades intervalares  $v_i$  em tempo, podem ser encontradas sucessivamente de  $i = 2$  até  $n$ , por

$$v_i = \sqrt{\frac{V_i^2 t_i - V_{i-1}^2 t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}}, \quad (2.19)$$

e as profundidades das bases por

$$z_i = z_{i-1} + v_i \frac{t_i - t_{i-1}}{2}. \quad (2.20)$$

Embora essas equações sejam usadas quando as velocidades são constantes horizontalmente, na prática a inversão Dix é usada para encontrar as velocidades intervalares a partir das velocidades de migração em meios que a velocidade varia lateralmente. Nestes casos, a velocidade Dix em 2D é

$$v_{Dix}(x_0, t_0) = \sqrt{\frac{\partial}{\partial t_0}(t_0 v_m^2(x_0, t_0))}. \quad (2.21)$$

### 2.3.2 Relação entre a matriz $\Omega$ e as velocidades da subsuperfície em 3D

Cameron et al (2007) estabeleceram a relação entre a matriz  $\Omega$  e as velocidades sísmicas em 3D, cujo resultado é o teorema a seguir.  $\Omega$  é uma matriz de parâmetros que dependem de  $\mathbf{x}_0$  e  $t_0$ , os quais podem ser obtidos a partir das medições sísmicas.

**(Teorema 1)** *Seja um raio-imagem que sai de um ponto  $\mathbf{x}$  em subsuperfície e chega em um ponto  $\mathbf{x}_0$  na superfície no tempo  $t_0$ . Designa-se esse raio como central. Seja a matriz  $\Omega(\mathbf{x}_0, t_0)$  avaliada na superfície para uma família fonte puntual de raios ao redor do raio-imagem, partindo do mesmo ponto  $\mathbf{x}$ . Supõe-se que haja também uma família telescópica de raios ao redor do raio-imagem saindo perpendiculares da superfície, os quais são traçados de volta em relação ao raio-imagem num tempo  $t_0$ . Calculam-se as matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{P}$ , sendo  $\mathbf{Q}(\mathbf{x}_0, t_0)$  a matriz  $\mathbf{Q}$  para a família de telescópica de raios avaliados no tempo  $t_0$ , isto é, no ponto  $\mathbf{x}$ , no traçamento inverso. Assim, tem-se que*

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \Omega(\mathbf{x}_0, t_0) = v^2(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t_0)) (\mathbf{Q}(\mathbf{x}_0, t_0))^T \mathbf{Q}(\mathbf{x}_0, t_0)^{-1}. \quad (2.22)$$

### 2.3.3 Relação entre as velocidades Dix e as velocidades da sub-superfície em 2D

Em 2D, as matrizes  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{\Omega}$  se tornam os escalares  $Q$ ,  $P$  e  $\Omega$ , respectivamente. Desse modo, a evolução de  $Q$ ,  $P$  e  $\Omega$  é dada por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v_0^2 \\ -\frac{v_{qq}}{v_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix}, \quad \frac{d\Omega}{dt} = v^2 + \frac{v_{qq}}{v} \Omega^2. \quad (2.23)$$

Similarmente ao caso 3D, temos

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \Omega(x_0, t_0) = \frac{v^2(x(x_0, t_0), z(x_0, t_0))}{Q^2(x_0, t_0)}. \quad (2.24)$$

Levando em consideração as equações (2.21) e (2.6) se estabelece o seguinte teorema:

**(Teorema 2)** *Considere um raio-imagem que encontra  $x_0$  na superfície no tempo  $t_0$  saindo de um ponto  $(x, z)$  em subsuperfície. Suponha que haja uma família telescópica de raios ao redor do raio-imagem que sai perpendicular à superfície. Tracemos o raio-imagem de volta no tempo  $t_0$  e calculemos as quantidades  $Q$  e  $P$ , sendo  $Q(x_0, t_0)$  a quantidade  $Q$  para a família telescópica de raios avaliados no tempo  $t_0$ , isto é, no ponto  $(x, z)$ , neste traçamento inverso. Então, a velocidade  $v_{Dix}(x_0, t_0)$  é a razão entre a velocidade sísmica  $v(x, z)$  e o valor absoluto de  $Q(x_0, t_0)$ :*

$$v_{Dix}(x_0, t_0) = \frac{v(x(x_0, t_0), z(x_0, t_0))}{|Q(x_0, t_0)|}. \quad (2.25)$$

Nesta equação  $t_0$  representa o tempo de trânsito simples ao longo do raio-imagem.

## 2.4 DETERMINAÇÃO DO MODELO DE VELOCIDADE EM PROFUNDIDADE

### 2.4.1 Modelo de velocidade 3D

Suponhamos que haja um raio-imagem chegando em um ponto  $(x_0, y_0)$  na superfície da Terra, com  $x_{min} \leq x \leq x_{max}$  e  $y_{min} \leq y \leq y_{max}$ . Para cada  $0 \leq t_0 \leq t_{max}$ , tracemos o raio-imagem de volta no tempo  $t_0$  juntamente com uma pequena família telescópica de raios. Consideremos que o raio-imagem alcance um ponto  $(x, y, z)$  em subsuperfície após o tempo  $t_0$ . Seja  $v(x, y, z)$  a velocidade no ponto  $(x, y, z)$  e  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(x_0, y_0, t_0)$  para a pequena família telescópica de raios no ponto  $(x, y, z)$ . Sabemos que

$$\frac{\partial \Omega(x_0, y_0, t_0)}{\partial t_0} = v^2(x, y, z) (\mathbf{Q}^T(x_0, y_0, t_0) \mathbf{Q}(x_0, y_0, t_0))^{-1} \equiv \mathbf{F}(x_0, y_0, t_0). \quad (2.26)$$

Assim, fica estabelecido o problema inverso para encontramos a velocidade  $v(x, y, z)$  no domínio coberto pelos raios-imagem que chegam à superfície.

### 2.4.2 Modelo de velocidade 2D

Suponhamos que haja um raio-imagem chegando em um ponto  $x_0$  na superfície, com  $x_{min} \leq x \leq x_{max}$ . Para cada  $0 \leq t_0 \leq t_{max}$ , tracemos os raios de volta no tempo  $t_0$ , juntamente com uma pequena família telescópica de raios. Considere que o raio-imagem alcance um ponto  $(x, z)$  em subsuperfície no tempo  $t_0$ . Denotemos por  $v(x_0, t_0)$  a velocidade no ponto  $(x, z)$  e  $Q = Q(x_0, t_0)$  para a família telescópica correspondente no ponto  $(x, z)$ . Sabemos que

$$v_{Dix}(x_0, t_0) = \frac{v(x(x_0, t_0), z(x_0, t_0))}{|Q(x_0, t_0)|} \equiv f(x_0, t_0). \quad (2.27)$$

Desse modo, estabelecido o problema inverso para encontramos a velocidade  $v(x, z)$  no domínio coberto pelos raios-imagem que chegam à superfície.

### 2.4.3 A questão da estabilidade

Cameron et al (2007) provaram que os problemas direto e inverso em 2D para encontrar os modelos de velocidade são matematicamente instáveis, e este resultado pode ser estendido também para 3D. Eles observaram que no problema direto, pequenas variações na velocidade  $v(x, t)$  podem provocar variações significativas em  $v_{Dix}(x_0, t_0)$ , assim como, para o problema inverso, pequenas variações em  $v_{Dix}(x_0, t_0)$  podem resultar velocidades  $v(x, z)$  absurdas.

### 3 ALGORÍTMOS EM 2D

Neste capítulo apresentaremos os algoritmos utilizados para produzir  $v(x, z)$  a partir de  $v_{Dix}(x_0, t_0)$ . Em primeiro lugar, mostramos o eficiente algoritmo para conversão tempo-profundidade desenvolvido por Cameron et al. (2007). O dado de entrada para este algoritmo é  $v(x_0, t_0) \equiv v(x(x_0, t_0), z(x_0, t_0))$  e as saídas são  $v(x, z)$ ,  $x_0(x, z)$  e  $t_0(x, z)$ . Em segundo lugar, mostramos o algoritmo de traçamento de raios, cuja função é produzir  $v(x_0, t_0)$ , isto é, o dado de entrada na conversão tempo-profundidade.

#### 3.1 ALGORÍTMO DE CONVERSÃO TEMPO-PROFUNDIDADE

Nesta seção faremos algumas modificações com relação à notação de variáveis. Primeiro, trocaremos  $T$  na equação Eikonal por  $t_0$ , isso nos fornece maior clareza na formulação do algoritmo. Segundo, passaremos a tratar com o recíproco da velocidade,  $s(x, z)$ , denominado de *vagarosidade*.

##### 3.1.1 Formulação Euleriana do problema de fronteira

Seja  $(x, z)$  um ponto em subsuperfície, com vagarosidade  $s(x, z)$ . Considere que o raio-imagem que sai de  $(x, z)$  alcance a superfície em algum ponto  $x_0$ , e que  $t_0$  é o tempo de trânsito do ponto  $(x, z)$  até  $x_0$ . Considere também que  $x_{min} \leq x_0 \leq x_{max}$ ,  $0 \leq t_0 \leq t_{max}$ ,  $x_{min} \leq x \leq x_{max}$ ,  $0 \leq z \leq z_{max}$ .

Dado  $s(x_0, t_0)$ , nosso objetivo é encontrar  $s(x, z)$ ,  $x_0(x, z)$  e  $t_0(x, z)$ , ou seja, a vagarosidade e a posição de escape do raio-imagem em cada ponto  $(x, z)$  em subsuperfície, e o tempo de trânsito ao longo de cada raio-imagem. As funções  $s(x_0, t_0)$ ,  $x_0(x, z)$  e  $t_0(x, z)$  relacionam-se de acordo com o sistema:

$$\begin{aligned} |\nabla t_0|^2 &= s^2(x_0, t_0) \equiv s^2(x_0(x, z), t_0(x, z)), \\ \nabla t_0 \cdot \nabla x_0 &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

O segundo membro da primeira equação do sistema (3.1) é desconhecido. E a segunda equação indica que as curvas  $t_0$  constante são ortogonais ao raio-imagem. Para o sistema (3.1), temos as seguintes condições iniciais:

$$x_0(x, 0) = x, \quad t_0(x, 0) = 0, \quad s(x, 0) = s(x_0 = x, t_0 = 0). \tag{3.2}$$

### 3.1.2 Formulação numérica do algoritmo

Este algoritmo baseia-se no método de marcha-rápida (SETHIAN, 1996), o qual foi desenvolvido para solucionar o problema de fronteira da equação Eikonal com o segundo membro conhecido. A principal vantagem deste método é que ele avança a solução sistematicamente, partindo de valores conhecidos para valores desconhecidos sem a necessidade de iterações.

Com a finalidade de seguir a propagação física da informação, a solução é calculada no sentido crescente de  $t_0$ . Para isso, os pontos contendo as informações são divididos em: *aceitos*, para os quais  $t_0$  é calculado somente uma única vez, podendo ser utilizado na estimativa de  $t_0$  de pontos vizinhos; *considerados*, para os quais  $t_0$  é calculado, mas que posteriormente pode ser atualizado, além de também poder ser utilizado no cálculo de  $t_0$  em outros pontos; e *desconhecidos*, para os quais nenhum valor de  $t_0$  foi ainda estimado. Para cada passo no tempo, o ponto *considerado* com menor valor de  $t_0$ , o qual é determinado com organização de dados em forma de pilha (*heap sort*), torna-se *aceito*. Esta aproximação foi utilizada para calcular a solução da equação Eikonal com segundo membro conhecido em várias situações, veja (SETHIAN, 1996, 1999a, 1999b).

A principal diferença entre o algoritmo utilizado neste trabalho e o de Sethian (1996), é que o segundo membro da nossa equação Eikonal é desconhecido. Como não sabemos a direção de propagação da informação, surge a questão da causalidade, a qual é discutida em (CAMERON et al., 2007). Aqui, vamos apenas nos deter à descrição deste algoritmo.

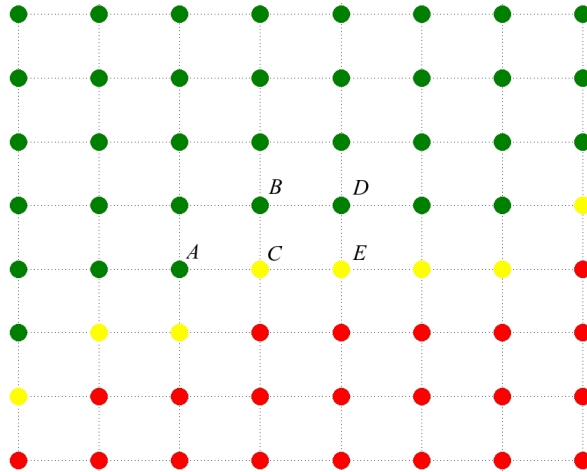


Figura 3.1: Método de marcha rápida. Os Pontos verdes, amarelos e vermelhos são os pontos *aceitos*, *considerados* e *desconhecidos*, respectivamente.

A entrada para este algoritmo é  $s(x_{0i}, t_{0k})$ , com  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ ,  $k = 0, 1, \dots, p - 1$ . Denotemos os passos em  $x_0$ ,  $t_0$ ,  $x$  e  $z$  por  $hx$ ,  $\Delta t$ ,  $h_x$  e  $h_z$ , respectivamente. Acha-se

$s(x_0, t_0)$  entre os pontos discretizados por interpolação bilinear. A saída do nosso algoritmo são as matrizes  $s(x_i, z_j)$ ,  $x_0(x_i, z_j)$  e  $t_0(x_i, z_j)$ , com  $i = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $j = 0, 1, \dots, m-1$ . O algoritmo é descrito a seguir:

- (1) Marcar como *aceitos* os pontos da superfície ( $x_i = x_{0i}, z = 0$ ). Assinale  $s(x_i, z_0 = 0) = s(x_0 = x_i, t_0 = 0)$ ,  $x_0(x, z = 0)$ ,  $t_0(x, z = 0) = 0$  de acordo com as condições de contorno. Depois, marque como *desconhecidos* os pontos  $(x_i, z_j)$  restantes;
- (2) Marcar como *considerados* os pontos *desconhecidos* adjacentes aos pontos *aceitos*.
- (3) Calcular ou atualizar os valores de  $s(x_i, z_j)$ ,  $x_0(x_i, z_j)$  e  $t_0(x_i, z_j)$  para os pontos assinalados como *considerados*. Para isso, deve-se considerar quatro casos:

- (a) Se um ponto *considerado* E tem apenas um vizinho *aceito* D como na figura 3.1, então os valores em E são encontrados a partir do sistema

$$\begin{aligned} x_0(E) &= x_0(D), & t_0(E) - t_0(D) &= hs(x_0(D), t_0(D)), \\ s(E) &= s(x_0(E), t_0(E)), & t_0(E) &> t_0(D). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Sendo que o valor de  $h$  pode assumir os valores  $h_x$  ou  $h_z$ , dependendo do arranjo de E e D;

- (b) Se um ponto *considerado* tem somente dois vizinhos *aceitos*, e tais ponto estão posicionados linearmente, então calculam-se o trio de valores  $s$ ,  $x_0$  e  $t_0$  para cada par formado entre um dos pontos *aceitos* e o ponto *considerado* usando (3.3), e posteriormente, escolhe-se o trio com menor valor de  $t_0$ ;
- (c) Se um ponto *considerado* C tem somente dois vizinhos *aceitos* A e B, os quais não estão posicionados de forma linear (Fig.3.1), os valores em C são encontrados a partir do sistema

$$\begin{aligned} \frac{(t_0(C) - t_0(A))^2}{h_x^2} + \frac{(t_0(C) - t_0(B))^2}{h_z^2} &= s^2(x_0(C), t_0(C)), \\ \frac{(t_0(C) - t_0(A))(x_0(C) - x_0(A))}{h_x^2} + \frac{(t_0(C) - t_0(B))(x_0(C) - x_0(B))}{h_z^2} &= 0, \\ s(C) &= s(x_0(C), t_0(C)), \\ x_0(A) &\leq x_0(C) \leq x_0(B), \\ t_0(C) &\geq \max(t_0(A), t_0(B)). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Resolvemos as duas primeiras equações deste sistema usando o método de Newton-Rhapson (apêndice A).

- (d) Se um ponto *considerado* tem três ou mais vizinhos *aceitos*, então calculamos o trio de valores  $s$ ,  $x_0$  e  $t_0$  para cada par formado por um ponto *aceito* e pelo

ponto *considerado* que formam um triângulo retângulo. E depois, escolhe-se o trio com o menor valor de  $t_0$ .

- (4) Encontrar um ponto *considerado* com o menor valor de  $t_0$  e marque-o como *aceito*. Usamos uma organização em forma de pilha (*heap sort*) para esta tarefa.
- (5) Se ainda houver algum ponto *considerado*, voltar ao passo 2.

## 3.2 ALGORÍTMOS DE TRAÇAMENTO DE RAIOS

O algoritmo de conversão tempo-profundidade necessita das velocidades  $v(x_0, t_0)$  como entrada e, pode-se usar as velocidades Dix  $v(x_0, t_0)$  como uma outra opção de entrada. No entanto, sabemos que as velocidades Dix são calculadas assumindo que as estruturas em subsuperfície são horizontais e que a velocidade depende somente da profundidade. Desse modo, utilizados o traçamento de raios com o objetivo de obter um modelo de velocidade  $v(x_0, t_0)$  mais próximo da realidade, para que então possa ser utilizado como entrada na conversão.

### 3.2.1 O traçamento de raios-imagem

O algoritmo de traçamento de raios mostrado em (CAMERON et al., 2007) é descrito a seguir:

- (1) Achar os raios-imagem

As condições de fronteira para este problema são  $v(x_{0i}, t_0 = 0) = f(x_{0i}, t_0 = 0)$ ,  $Q(x_{0i}, t_0 = 0) = 1$ ,  $P(x_{0i}, t_0 = 0) = 0$ . O sistema de equações para o  $i$ -ésimo raio e suas respectivas condições iniciais estão representadas na tabela a seguir.

equações	condições iniciais
$\dot{x} = v \operatorname{sen}\theta$	$x(0) = x_{0i}$
$\dot{z} = v \cos\theta$	$z(0) = 0$
$\dot{\theta} = -v_n = -v_l$	$\theta(0) = 0$
$\dot{Q} = v^2 P$	$Q(0) = 1$
$\dot{P} = -v_{nn}v^{-1}Q = -(v_{uv}v^{-1} + k\dot{v}v^{-2})$	$P(0) = 0$

Tabela 3.1: Equações e suas respectivas condições iniciais para o traçamento de raios.

Nas quais os pontos sobrescritos significam derivadas em relação a  $t_0$ ,  $v_n = v_x \cos\theta - v_z \operatorname{sen}\theta$  é a derivada de  $v$  na direção normal ao raio ( $v_n = v_q$ ),  $v_l$  a derivada de  $v$  em relação ao comprimento de arco da frente de onda,  $v_{nn} = v_{xx} \cos^2\theta - 2v_{xz} \cos\theta \operatorname{sen}\theta + v_{zz} \operatorname{sen}^2\theta$  a segunda derivada de  $v$  na direção

normal ao raio ( $v_{nn} = v_{qq}$ ),  $v_{ll}$  a segunda derivada de  $v$  em relação ao comprimento de arco da frente de onda e  $\kappa$  a curvatura da frente de onda. A relação entre a segunda derivada de alguma quantidade física em relação ao comprimento de arco da frente de onda e sua segunda derivada ao longo da tangente à frente de onda foram demonstrados em (ADALSTEINSSON; SETHIAN, 2003), cujo resultado foi:

$$g_{ll} = g_{zz} - (g_x n_x + g_z n_z) \kappa$$

no qual,  $n$  é vetor unitário normal à frente de onda. Substituindo  $g$  por  $v$  e notando que

$$v_x n_x + v_z n_z = v_t = \frac{v_{t_0}}{v}$$

é a derivada de  $v$  em relação ao comprimento do arco do raio, facilmente chega-se à última equação da tabela 3.1.

Utiliza-se o método direto de Euler para solucionar o sistema da tabela 3.1 simultaneamente para todos os raios da seguinte forma:

Considar um laço em  $k = 0, 1, \dots, p - 1$  e encontrar os mínimos quadrados para o conjunto de pontos  $(l_i, v_i(t_{0k}))$ , no qual  $l_i$  é o comprimento de arco da frente de onda entre os raios 0 e  $i$  no tempo  $t_{0k}$ ,  $v_i(t_{0k})$  é o valor da velocidade no  $i$ -ésimo raio no tempo  $t_{0k}$ . Avaliar  $v_l(t_{0k})$  e  $v_{ll}(t_{0k})$  derivando uma e duas vezes, respectivamente, esse polinômio. Além disso, substituir os valores da velocidade  $v_i(t_{0k})$  pelos valores desse polinômio. Avaliar a curvatura  $\kappa(t_{0k})$  encotrando o polinômio  $p_x$  e  $p_z$ , respectivamente, de mínimos quadrados para o conjunto de pontos  $(i, x_i(t_{0k}))$  e  $(i, z_i(t_{0k}))$ , sendo  $i$  o índice do raio,  $x_i$  e  $z_i$  as coordenadas do  $i$ -ésimo raio no temo  $t_{0k}$ . Em seguida, achar as primeira e segunda derivadas desses polinômios e calcular

$$\kappa = \frac{p'_x p''_z - p'_z p''_x}{(p'^2_x + p'^2_z)^{(3/2)}}.$$

Aproximar  $v_{t_0}(t_{0k})$  por

$$v_t(t_{0k}) = \frac{v(t_{0k}) - v(t_{0k-1})}{\Delta t_0}$$

caso  $k > 0$  e atribuir  $v_{t_0}(t_{0k=0}) = 0$ , uma vez que a curvatura da frente de onda é zero em  $t_0 = 0$ . Realizar um passo para cada um dos raios e encontrar  $v_i(t_{0k+1}) = f_i(t_{0k+1})Q(t_{0k+1})$ , no qual  $f_i(t_{0k+1}) \equiv f(x_{0i}, t_{0k+1})$ , com  $i = 0, \dots, n - 1$ .

- (2) Calcular o espalhamento geométrico  $|Q| = |dl/dx_0|$  dos raios-imagem e recalcular  $v(x_{0i}, t_{0k})$ .

### 3.2.2 Alternativas para o traçamento de raios

Durante a implementação do algoritmo de traçamento de raios, encontramos duas alternativas de implementação. Assim, passamos a ter três formas diferentes de traçamento de raios. As descrições dos dois últimos são dadas a seguir.

#### 3.2.2.1 Alternativa 1

Aqui utilizamos apenas as três primeiras equações da tabela 3.1 e suas respectivas condições iniciais para encontrar os raios-imagem. Diferentemente do algoritmo original, calculamos o polinômio de mínimos quadrados para  $(i, v_i(t_{0k}))$  e avaliamos a primeira derivada desse polinômio e o substituímos em  $v_l(t_{0k})$ , além de substituir os valores de velocidade  $v_i(t_{0k})$  pelos valores do polinômio. Não precisamos calcular a curvatura  $\kappa$ . Conseqüentemente, passamos diretamente para o cálculo de  $|Q| = |dl/dx_0|$ , para então recalcularmos a velocidade  $v(x_{0i}, t_{0k})$ .

#### 3.2.2.2 Alternativa 2

Nesta variação utilizamos todas as equações da tabela 3.1 e suas respectivas condições iniciais. Calculamos o polinômio de mínimos quadrados para  $(i, v_i(t_{0k}))$  e suas primeira e segunda derivadas, e substituímos os valores de  $v_i(t_{0k})$  pelos valores do polinômio. Novamente não calculamos  $\kappa$ . Como no algoritmo original, fazemos para cada um dos raios  $v_i(t_{0k+1}) = f_i(t_{0k+1})Q(t_{0k+1})$ . Finalmente, recalculamos  $v(x_{0i}, t_{0k})$  com  $Q(t_{0k+1})$  já encontrado anteriormente na resolução do sistema da tabela 3.1, ou seja, não precisamos calcular  $|Q| = |dl/dx_0|$ .

## 4 EXPERIMENTOS NÚMERICOS EM 2D

Os algoritmos apresentados no capítulo anterior foram implementados em JAVA (DEITEL; DEITEL, 2007) e aplicados em 2 dados sintéticos. Em ambos os dados, analisamos a relação entre o grau do polinômio e o valor da regularização para o problema dos mínimos quadrados envolvido no traçamento de raios. Adicionalmente comparamos os resultados obtidos usando o algoritmo de traçamento de raios descrito por Cameron com as alternativas que foram sugeridas anteriormente.

### 4.1 MODELO SINTÉTICO 1

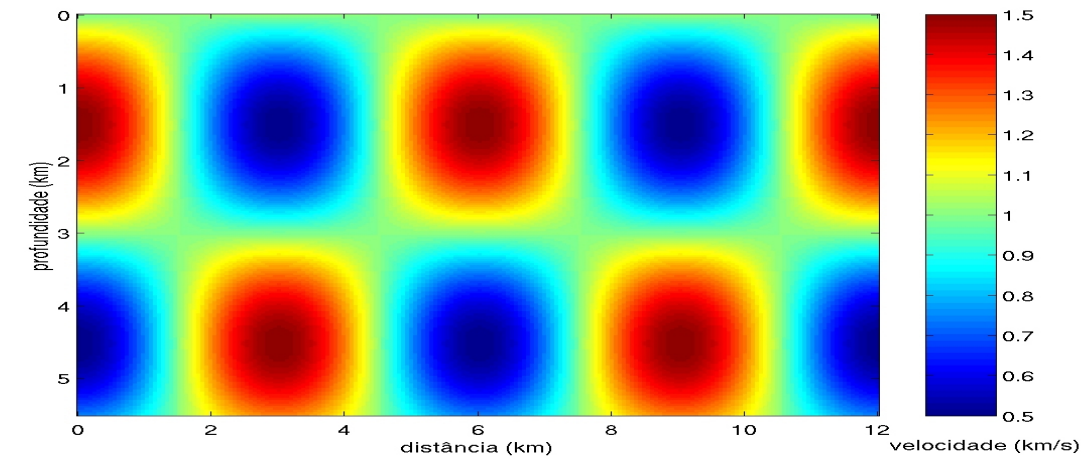
Nosso primeiro modelo para representar a subsuperfície é dado pelo campo de velocidade

$$v(x, z) = 1 + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi x}{3} \sin \frac{\pi z}{3}. \quad (4.1)$$

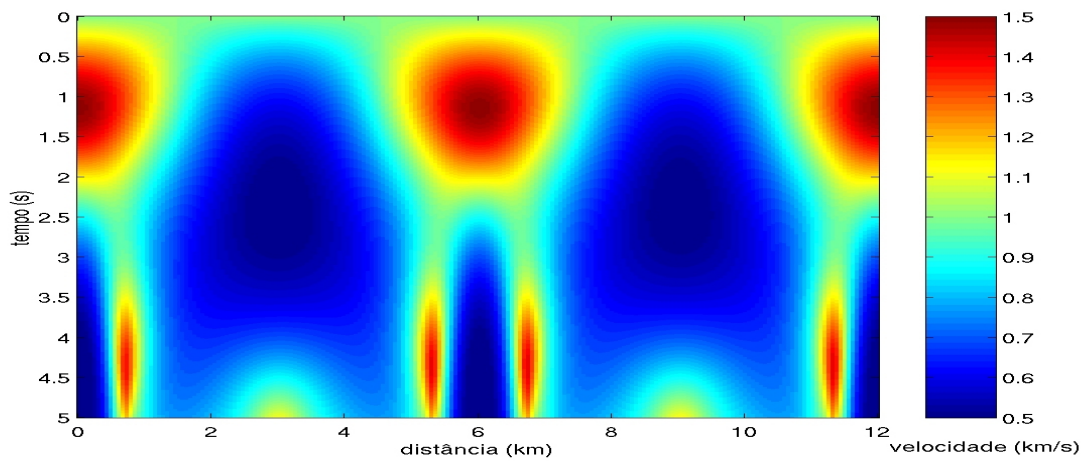
com  $x \in [0, 12]$  e  $z \in [0, 5, 5]$ , o qual foi gerado em uma malha de  $200 \times 200$ . O dado de entrada  $f(x_0, t_0) \equiv v_{Dix}(x_0, t_0)$  foi construído com intervalos de amostragem em  $t_0$  de 2 ms e em  $x_0$  de 0,06 km, cujo domínio é  $x_0 \in [0, 12]$  e  $t_0 \in [0, 5, 5]$ . Os modelos de velocidade da subsuperfície e Dix em tempo podem ser visualizados na figura 4.1.

Inicialmente, comparamos os modelos de velocidades obtidos com polinômio cúbico sem regularização, como em (CAMERON et al., 2007), e com regularizações de 0,01 e 0,1 (Fig. 4.2), uma vez que esse é o grau máximo no qual o polinômio permanece estável sem o uso de regularização. Os resultados mostram que a aplicação da regularização fornece modelos mais acurados. Isso pode ser verificado analisando a figura 4.3, na qual são apresentados os erros relativos para cada um desses experimentos, calculados por  $E = v_{ob}(x, z) - v_{sub}(x, z)/v_{sub}(x, z)$ , sendo  $v_{ob}$  o modelo obtido e  $v_{sub}$  o modelo original. Verifica-se, que o aumento no valor da regularização implica a diminuição do erro. O erro máximo obtido sem regularização é de aproximadamente 15%, enquanto que para regularizações de 0,01 e 0,1 é cerca de 10% e 6%, respectivamente.

As figuras 4.4 e 4.6, mostram os modelos de velocidade obtidos, aplicando as diferentes formas de traçamento de raios e utilizando polinômios de graus 6 e 9 com valor fixo igual a 1,0 para a regularização. Nota-se, que não há diferença visual entre os três modelos, os quais foram gerados cada um com um tipo de diferente de algoritmo de traçamento de raios. Esta afirmação pode ser justificada, comparando-se os erros relativos para esses experimentos, apresentados nas figuras 4.5 e 4.7, os quais são praticamente indiferenciáveis.



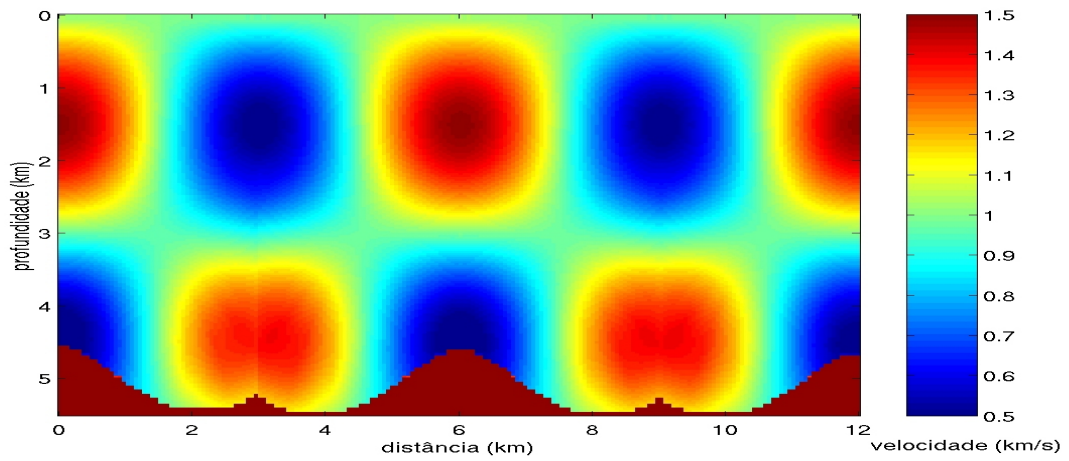
(a)



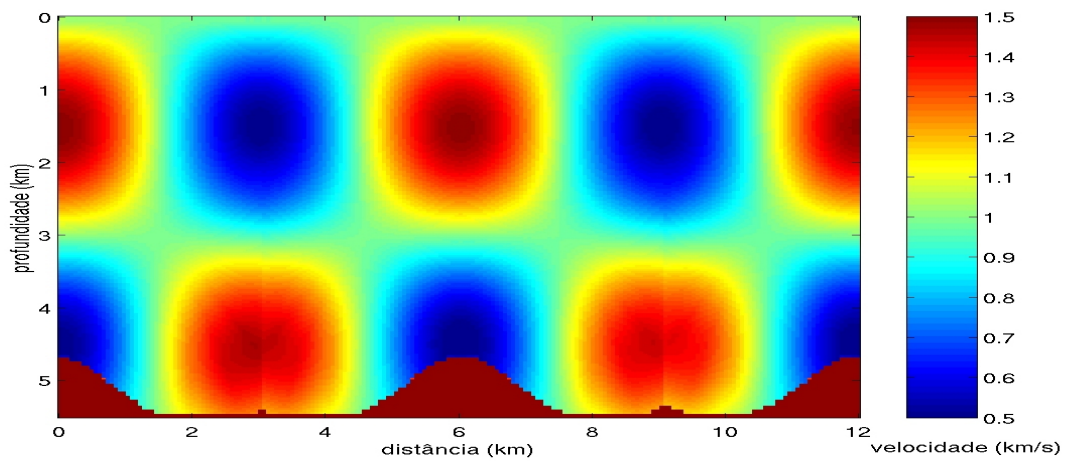
(b)

Figura 4.1: Modelos de velocidade da subsuperfície (a) e Dix em tempo (b) para o modelo 1. Perceba a grande diferença existente entre os modelos.

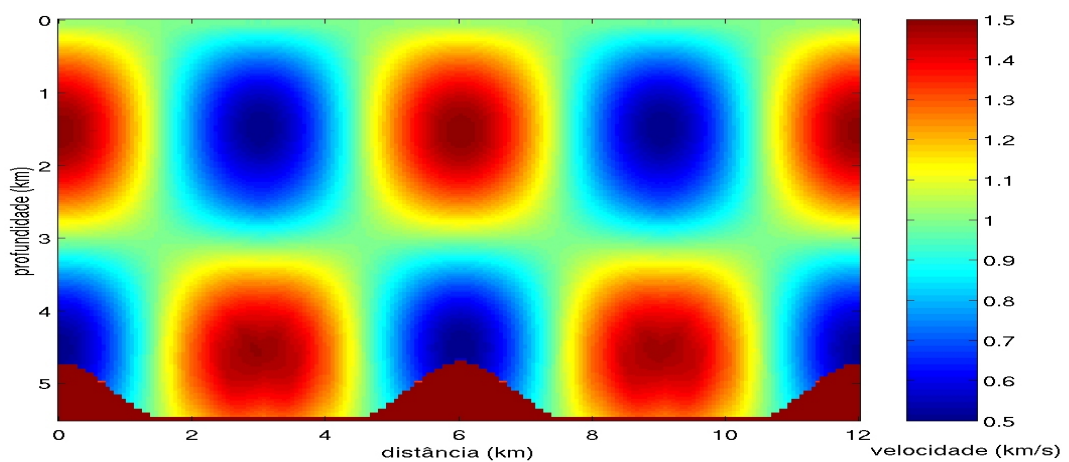
O erros máximos obtidos nos experimentos utilizando o polinômio de grau 6 foram de aproximadamente 6,5%, enquanto que para aqueles utilizando grau 9 foram de aproximadamente 7,5%. Além disso, observa-se que o aumento no grau do polinômio pede concomitantemente o aumento no valor da regularização, com o objetivo de diminuir o erro. Assim a regularização nos permitiu maior liberdade para escolher polinômios de graus mais elevados.



(a)

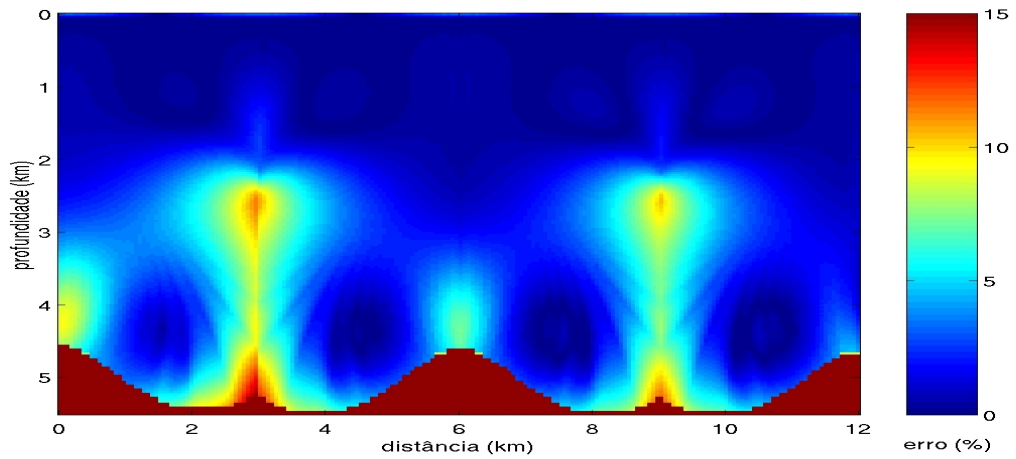


(b)

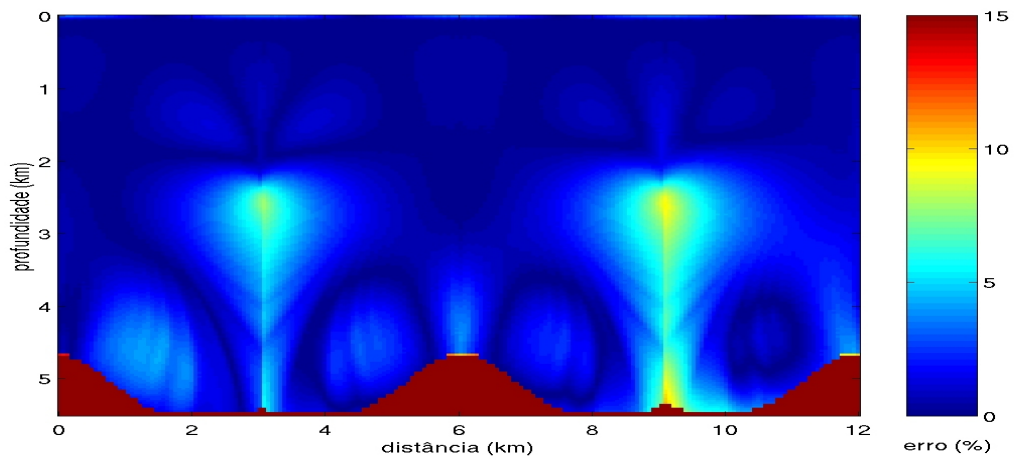


(c)

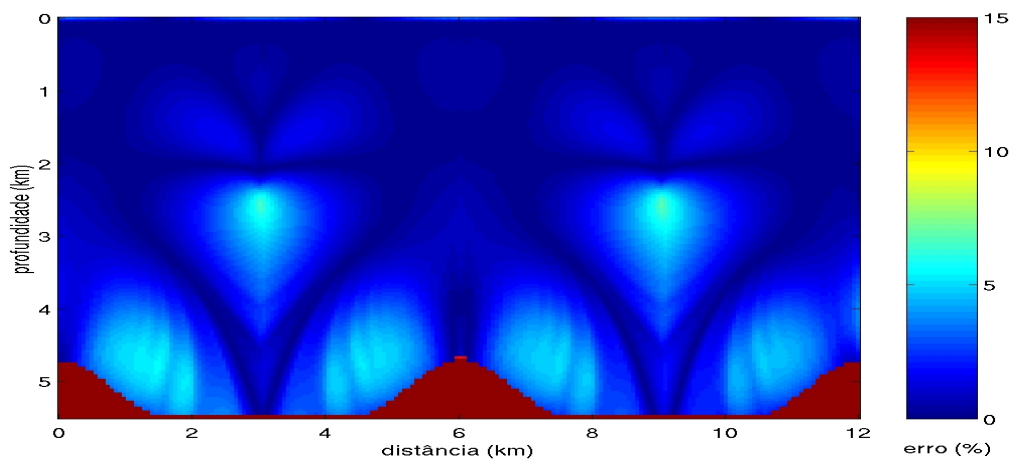
Figura 4.2: Modelos de velocidade obtidos utilizando traçamento de raios original com polinômio cúbico e regularizações 0,0 (a), 0,01 (b), 0,1 (c) para o modelo 1. Observam-se truncamentos em (a) e (b), os quais são provocados pelo baixo valor de regularização utilizado. Esse efeito não é observado em (c), visto que o valor de regularização é suficiente para estabilizar o traçamento de raios.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.3: Erros relativos dos modelos de velocidade obtidos para o traçamento de raios original com polinômio cúbico e regularizações 0,0 (a), 0,01 (b), 0,1 (c) para o modelo 1. Observe-se a diminuição do erro conforme o aumento no valor da regularização, indicando a relação  $E_{(a)} > E_{(b)} > E_{(c)}$ .

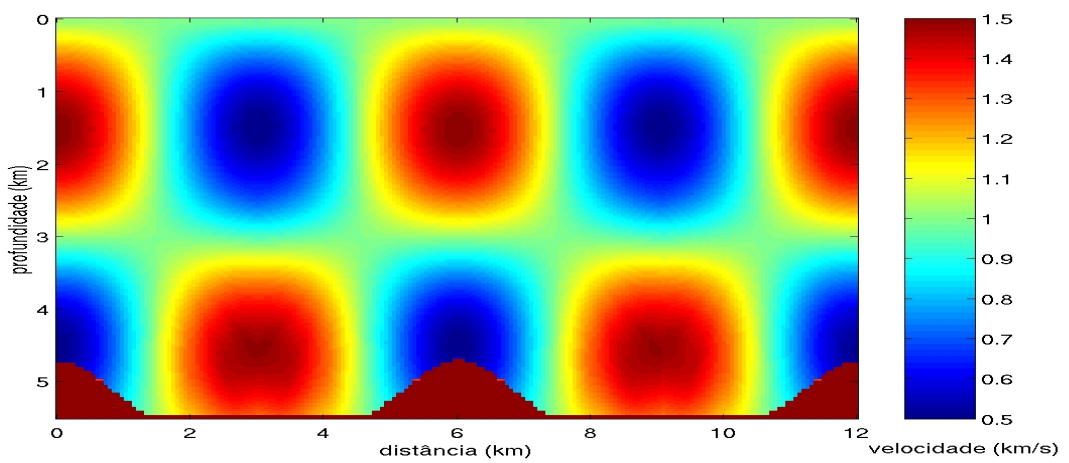
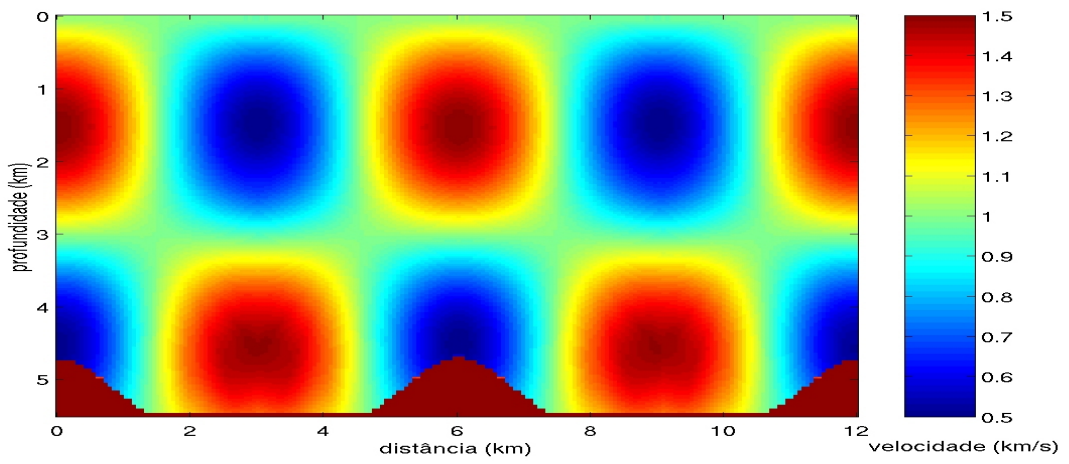
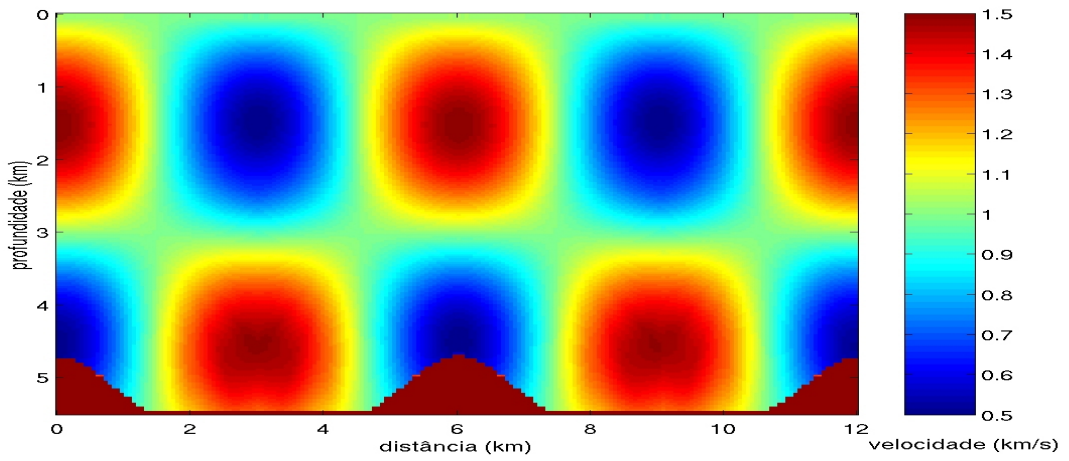
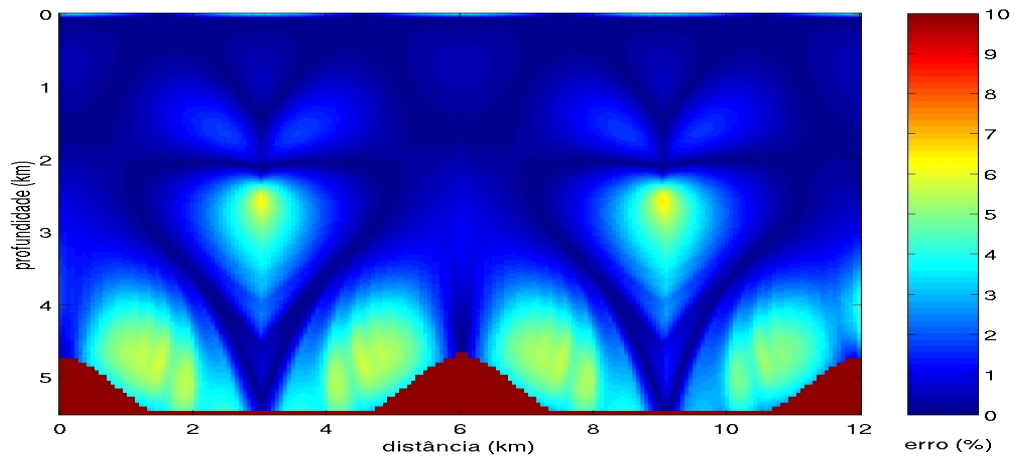
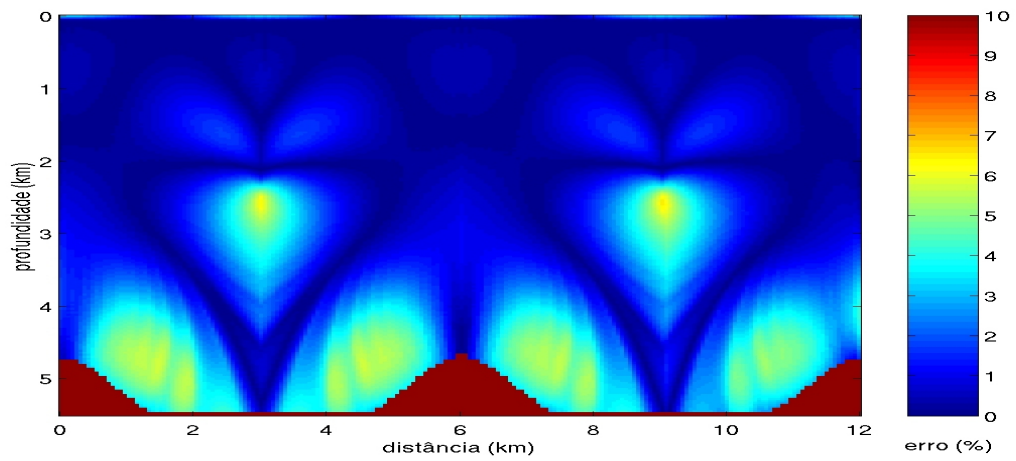


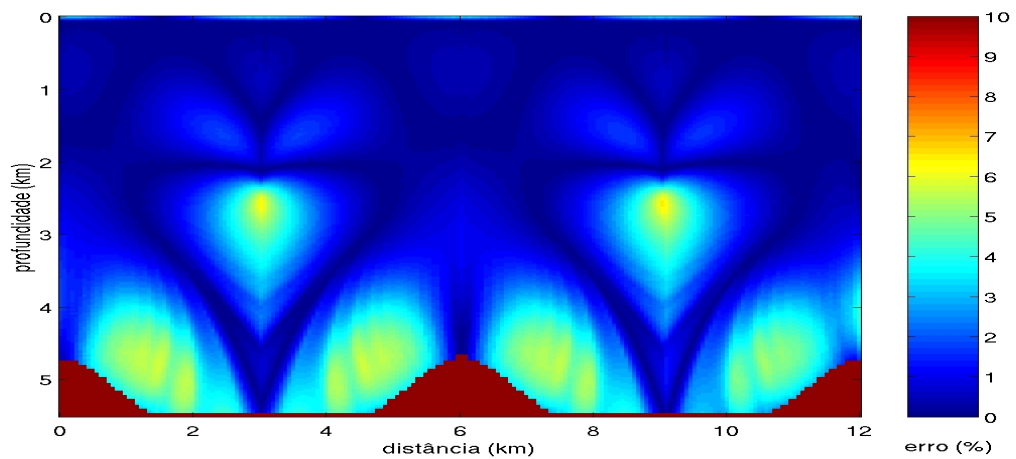
Figura 4.4: Modelos de velocidade obtidos com polinômio de 6<sup>o</sup> grau, regularização 1,0, utilizando traçamento de raios original (a), alternativa 1 (b) e alternativa 2 (c) para o modelo 1. Os modelos são praticamente idênticos, mostrando que os diferentes tipos de traçamento de raios produzem os mesmos resultados.



(a)

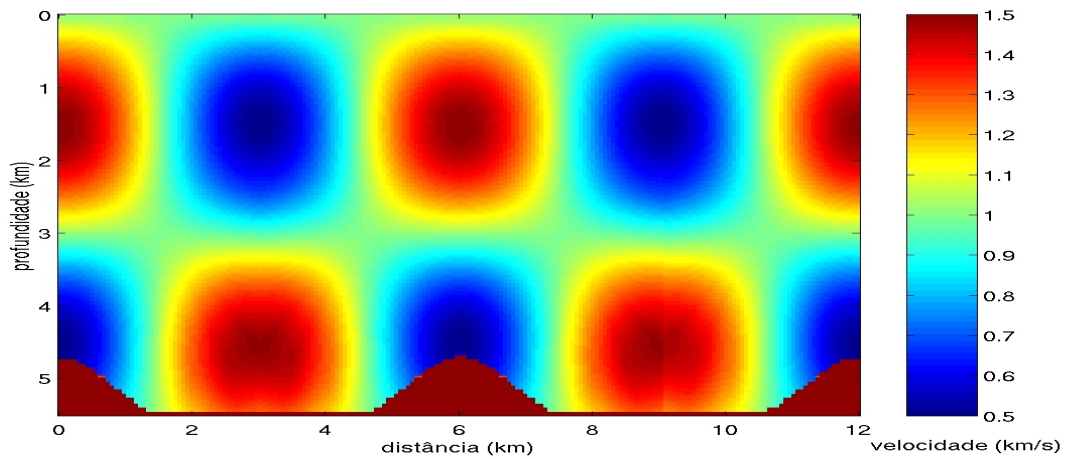


(b)

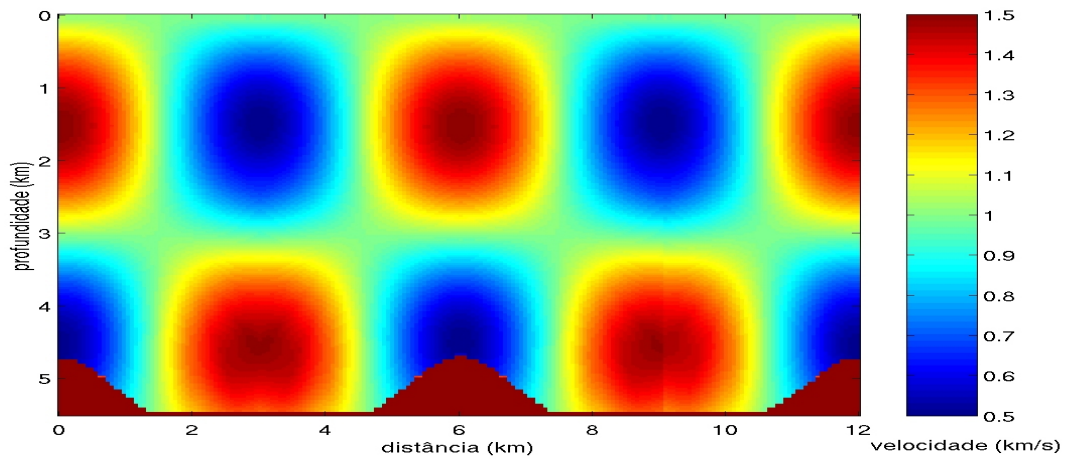


(c)

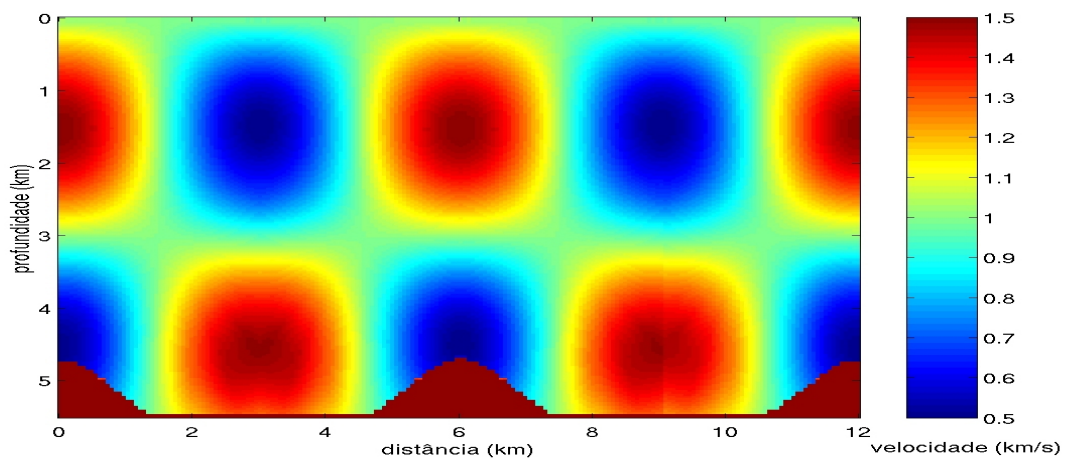
Figura 4.5: Erros relativos dos modelos de velocidade obtidos com polinômio de 6<sup>o</sup> grau, regularização 1,0, utilizando traçamento de raios original (a), alternativa 1 (b) e alternativa 2 (c) para o modelo 1. Os erros são praticamente equivalentes, implicando a relação  $E_{(a)} \equiv E_{(b)} \equiv E_{(c)}$ .



(a)

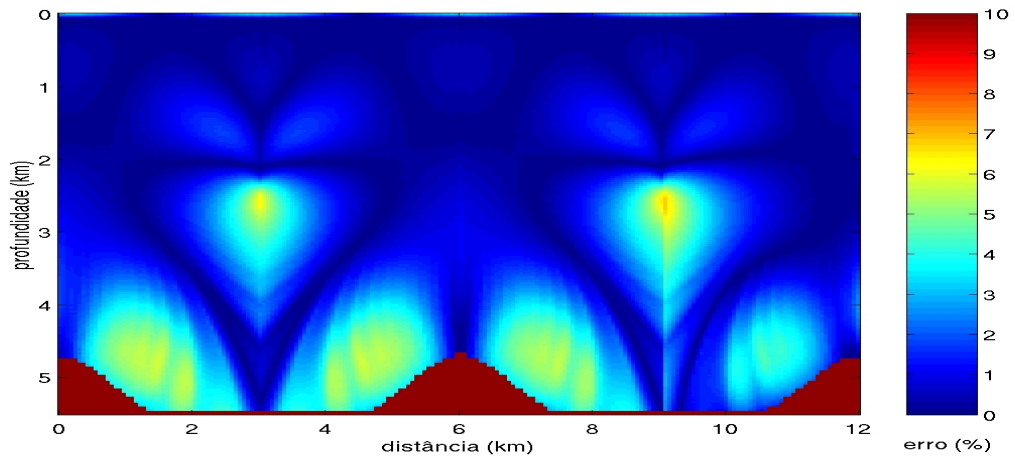


(b)

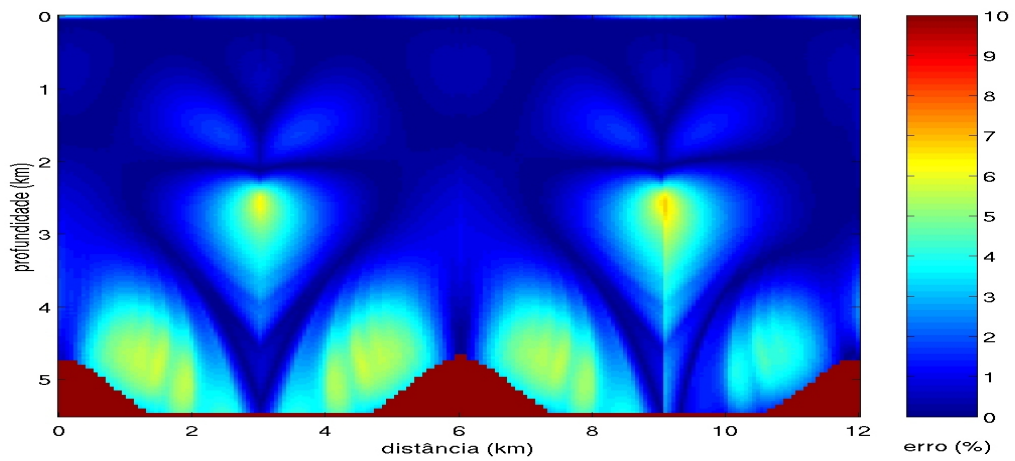


(c)

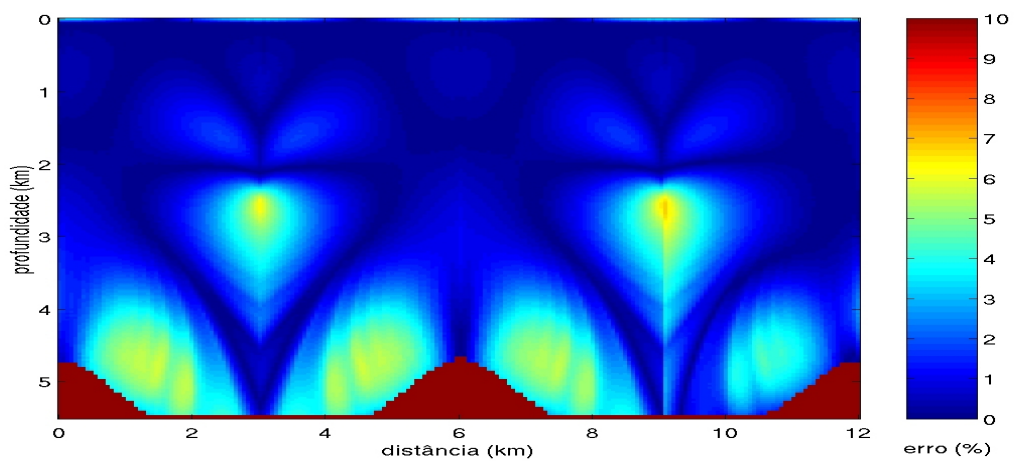
Figura 4.6: Modelos de velocidade obtidos com polinômio de 9º grau, regularização 1,0, utilizando traçamento de raios original (a), alternativa 1 (b) e alternativa 2 (c) para o modelo 1. Os modelos são praticamente idênticos, indicando a equivalência entre os diferentes tipos de traçamento de raios. Perceba também o truncamento contido nos três modelos, mostrando que o valor da regularização está baixo, produzindo assim, modelos não tão acurados.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.7: Erros relativos dos modelos de velocidade obtidos com polinômio de 9º grau, regularização 1,0, utilizando traçamento de raios original (a), alternativa 1 (b) e alternativa 2 (c) para o modelo 1. Os erros são praticamente equivalentes, ou seja,  $E_{(a)} \equiv E_{(b)} \equiv E_{(c)}$ . Observam-se também truncamentos que indicam baixo valor de regularização.

## 4.2 MODELO SINTÉTICO 2

Como segundo modelo para representar a subsuperfície usamos uma anomalia gaussiana dada pelo campo de velocidade

$$v(x, z) = 2 + 2 \exp(-x^2 + (z - 2)^2), \quad (4.2)$$

com  $x \in [-3, 3]$  e  $z \in [0, 2]$ , o qual também foi gerado numa malha de  $200 \times 200$ . Produzimos o dado de entrada  $f(x_0, t_0) \equiv v_{Dix}(x_0, t_0)$  com intervalo de amostragem em  $t_0$  de 2 ms e em  $x_0$  de 0,03 km, cujo domínio foi dado por  $x_0 \in [-3, 3]$  e  $t_0 \in [0, 0, 7]$ . A figura 4.8 mostra os modelos de velocidade da subsuperfície e Dix em tempo que foram gerados.

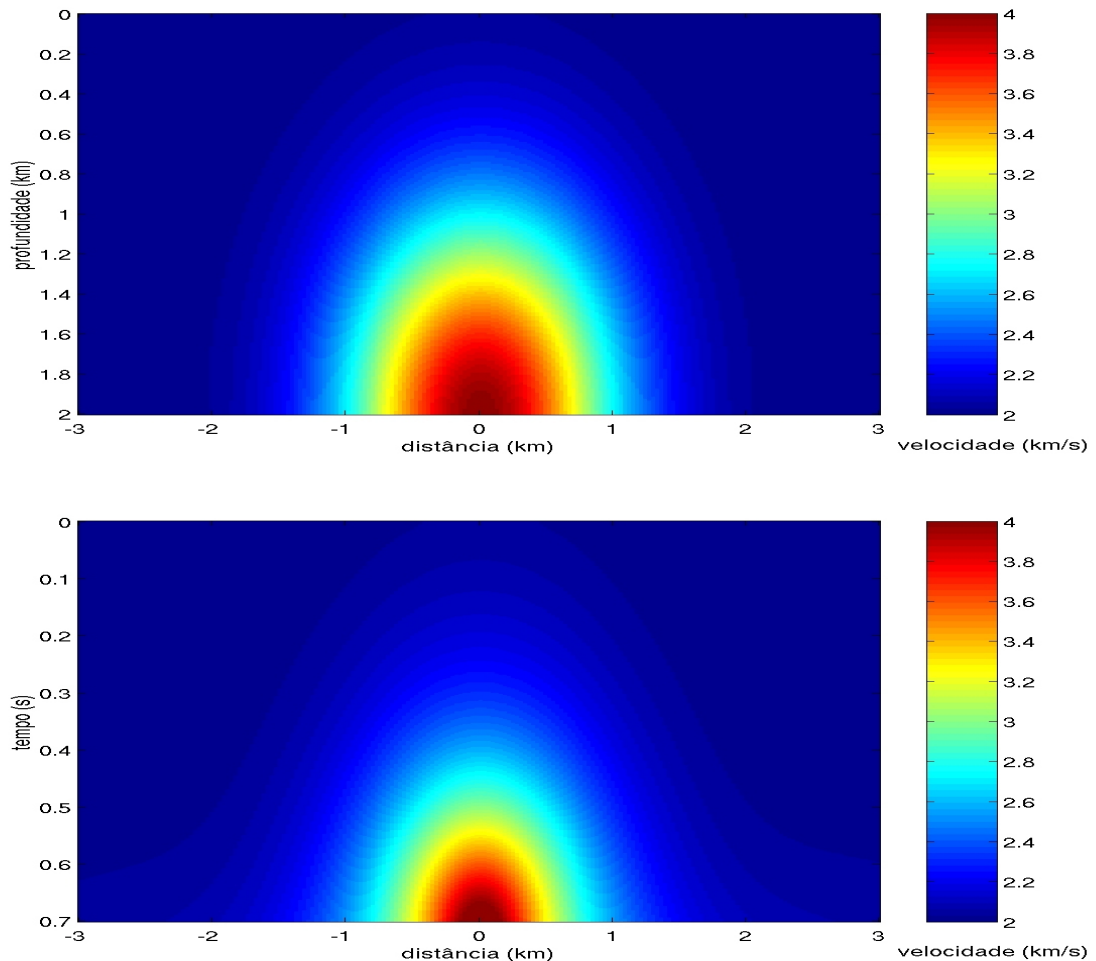


Figura 4.8: Modelos de velocidade da subsuperfície (a) e Dix em tempo (b) para o modelo 2. Perceba a diferença entre os modelos, principalmente nas bordas.

Em primeiro lugar, foi feita a comparação entre os modelos de velocidades obtidos, com polinômio cúbico, sem regularização, assim como é mostrado em

(CAMERON et al., 2007), e com regularizações de 0,003 e 0,03 (Fig. 4.9). Como no modelo anterior, este é grau máximo no qual se obtém resultados coerentes sem a regularização. Observa-se que aplicação das regularizações novamente melhoram os modelos, deixando-os mais acurados. Isso pode ser verificado na figura 4.10, na qual são mostrados os erros relativos de cada um desses experimentos, calculados como no modelo anterior. Verifica-se mais uma vez, que o aumento no valor da regularização provoca a diminuição do erro. O erro máximo sem regularização é de menos de 4%, enquanto que para 0,003 e 0,03 é de 3,5% e mais ou menos 1,25%, respectivamente.

As figuras 4.10 e 4.12 mostram os modelos de velocidades obtidos, com variação do algoritmo de traçamento de raios, para os polinômios de 10° e 13° graus, com valor fixo de regularização igual 0,75. Nota-se pouca diferença visual entre os modelos. Entretanto, a análise dos erros relativos contidos nas figuras 4.12 e 4.14, revela uma sutil diferença entre eles. Os modelos obtidos com o traçamento de raios original demonstraram menor erro com relação às alternativas sugeridas anteriormente. Mas os erros máximos relativos permaneceram em torno de 2,5% à 3% para os modelos obtidos com polinômio de 10° grau e 3% à 3,5% para aqueles obtidos com polinômio de 13° grau. Adicionalmente, reafirmamos que o aumento do grau do polinômio requer o aumento do valor da regularização, com a finalidade da diminuição do erro.

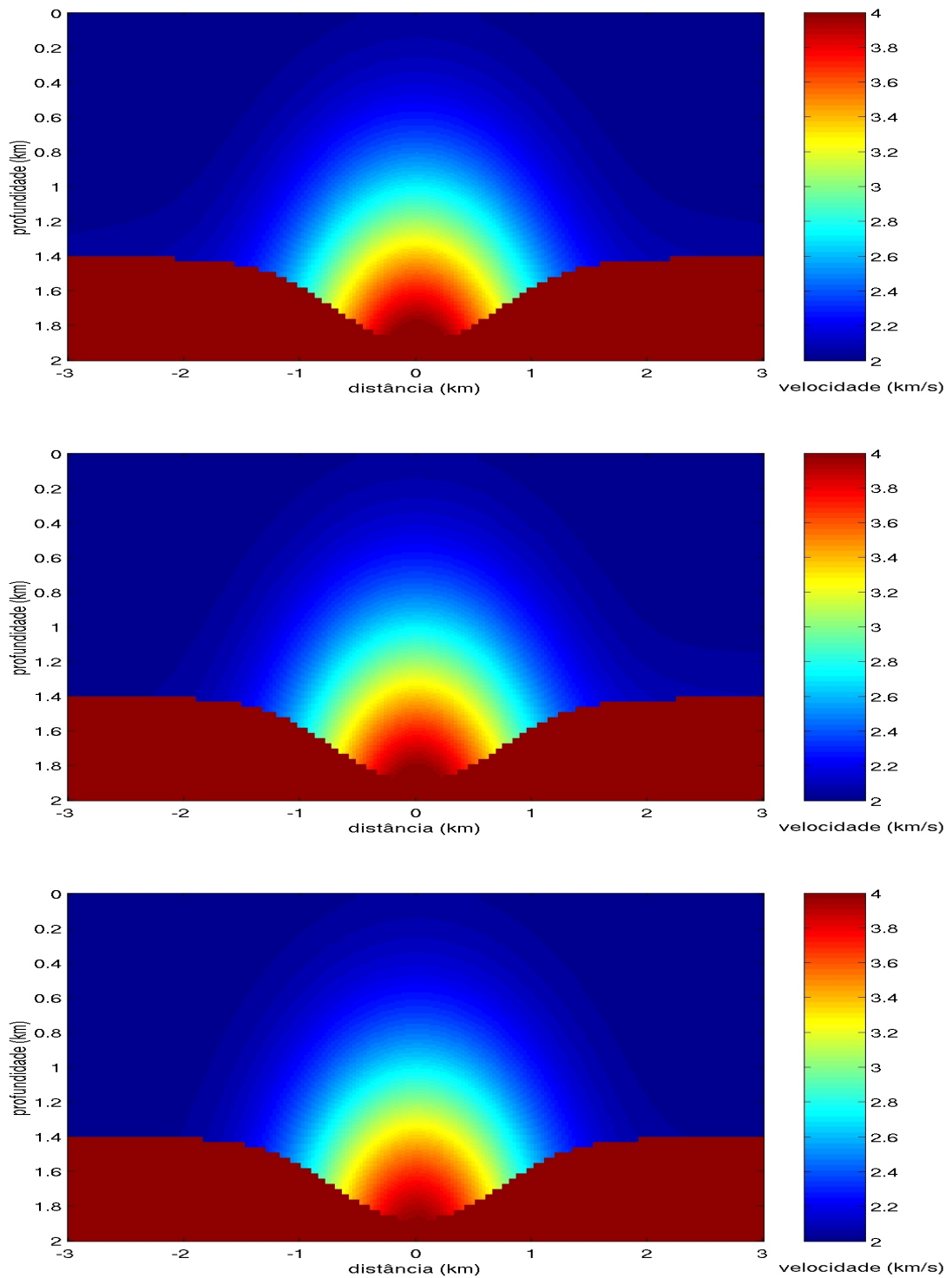


Figura 4.9: Modelos de velocidade obtidos utilizando traçamento de raios original, com polinômio cúbico e regularizações 0,0 (a), 0,003 (b), 0,3 (c) para o modelo 2. A principal diferença entre os modelos é observada em suas bordas, as quais passam a ter valores de velocidade mais altos conforme o aumento no valor da regularização aplicada.

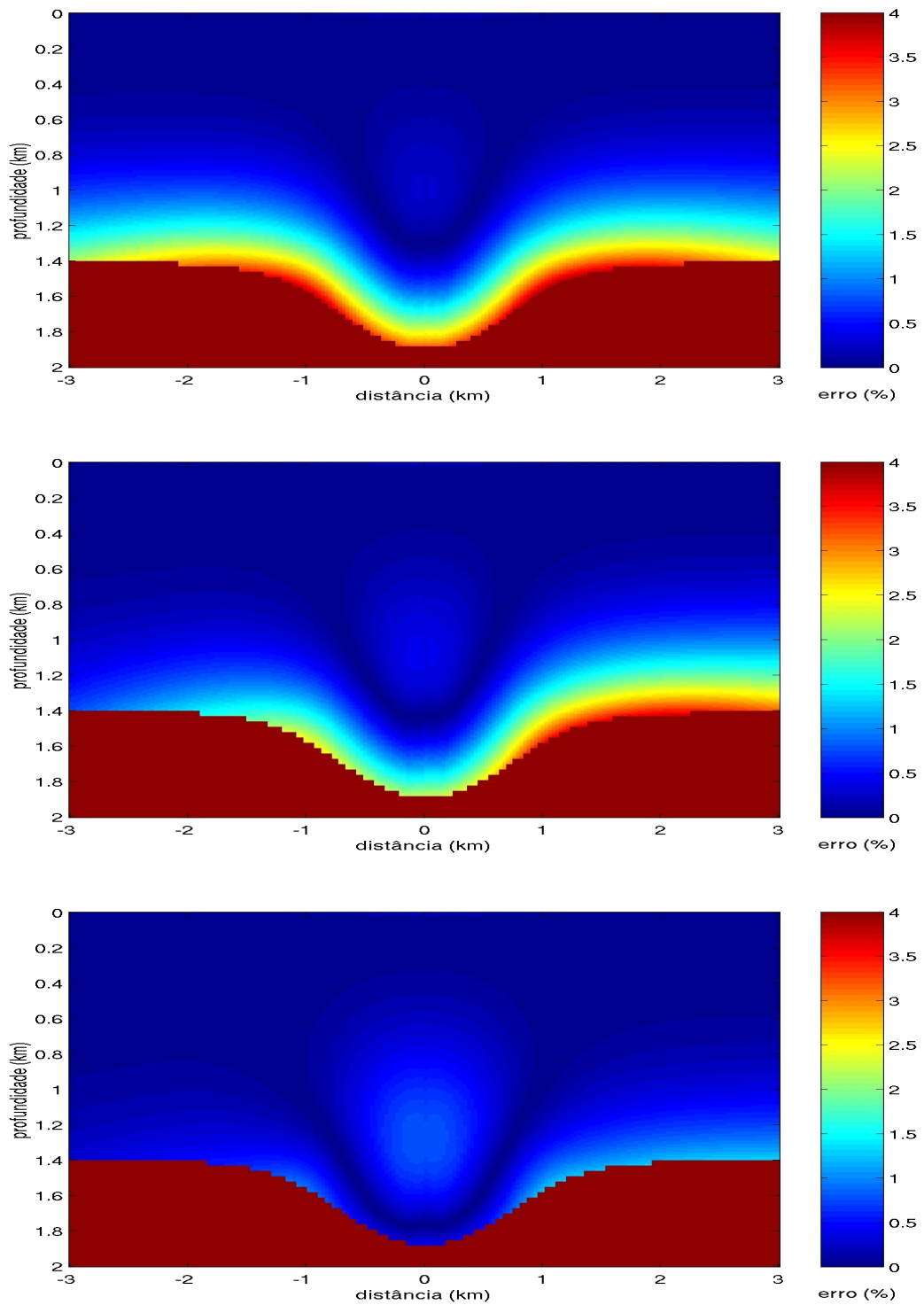


Figura 4.10: Erros relativos dos modelos de velocidade obtidos utilizando traçamento de raios original, com polinômio cúbico e regularizações 0,0 (a), 0,003 (b), 0,3 (c) para o modelo 2. Observa-se que há diminuição do erro devido ao aumento no valor da regularização, sugerindo a relação  $E_{(a)} > E_{(b)} > E_{(c)}$ .

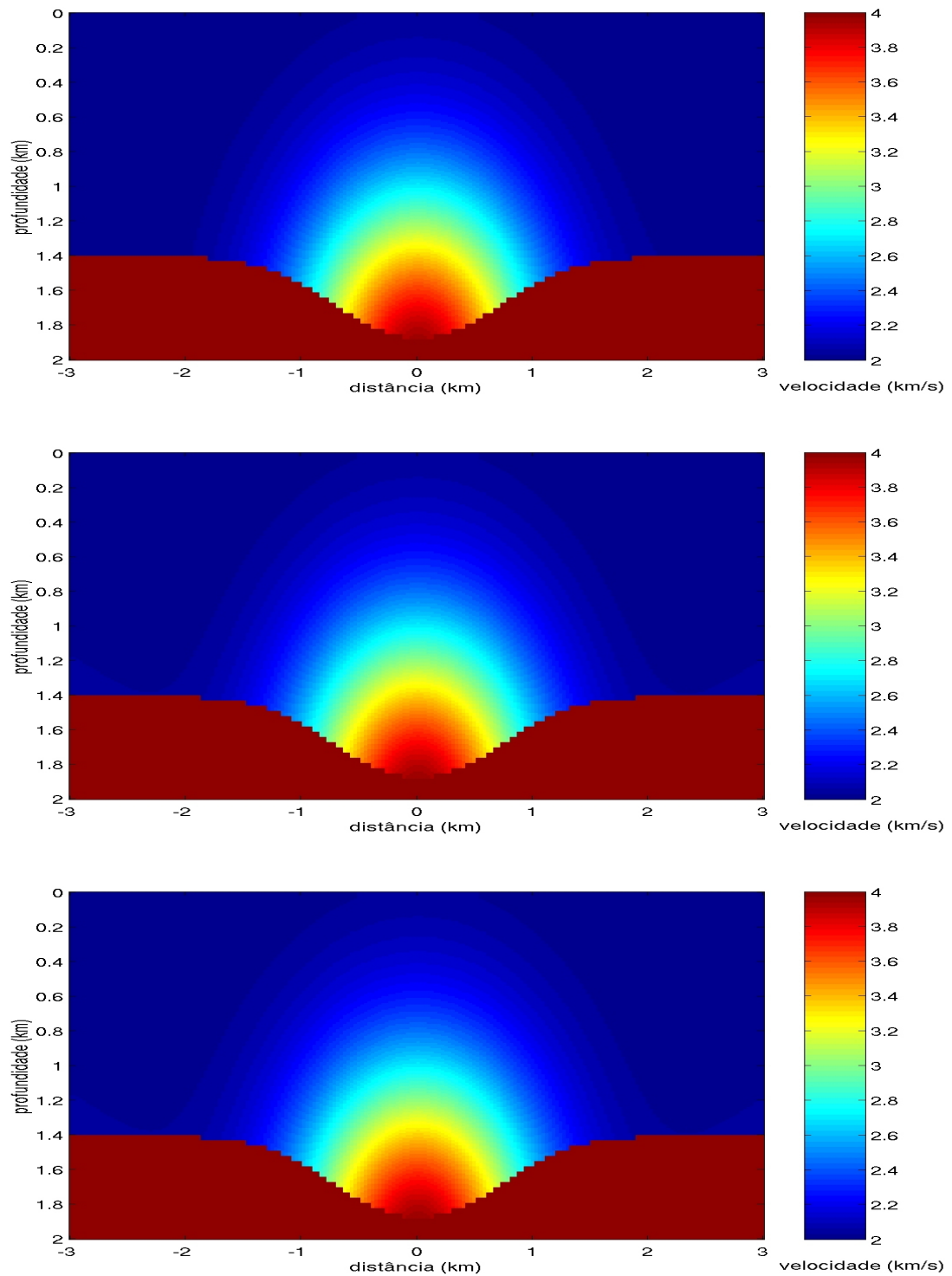


Figura 4.11: Modelos de velocidade obtidos com polinômio de  $10^{\circ}$  grau, regularização 0,75, utilizando traçamento de raios original (a), alternativa 1 (b) e alternativa 2 (c) para o modelo 2. Os modelos são quase idênticos, a não ser por uma pequena diferença nas bordas.

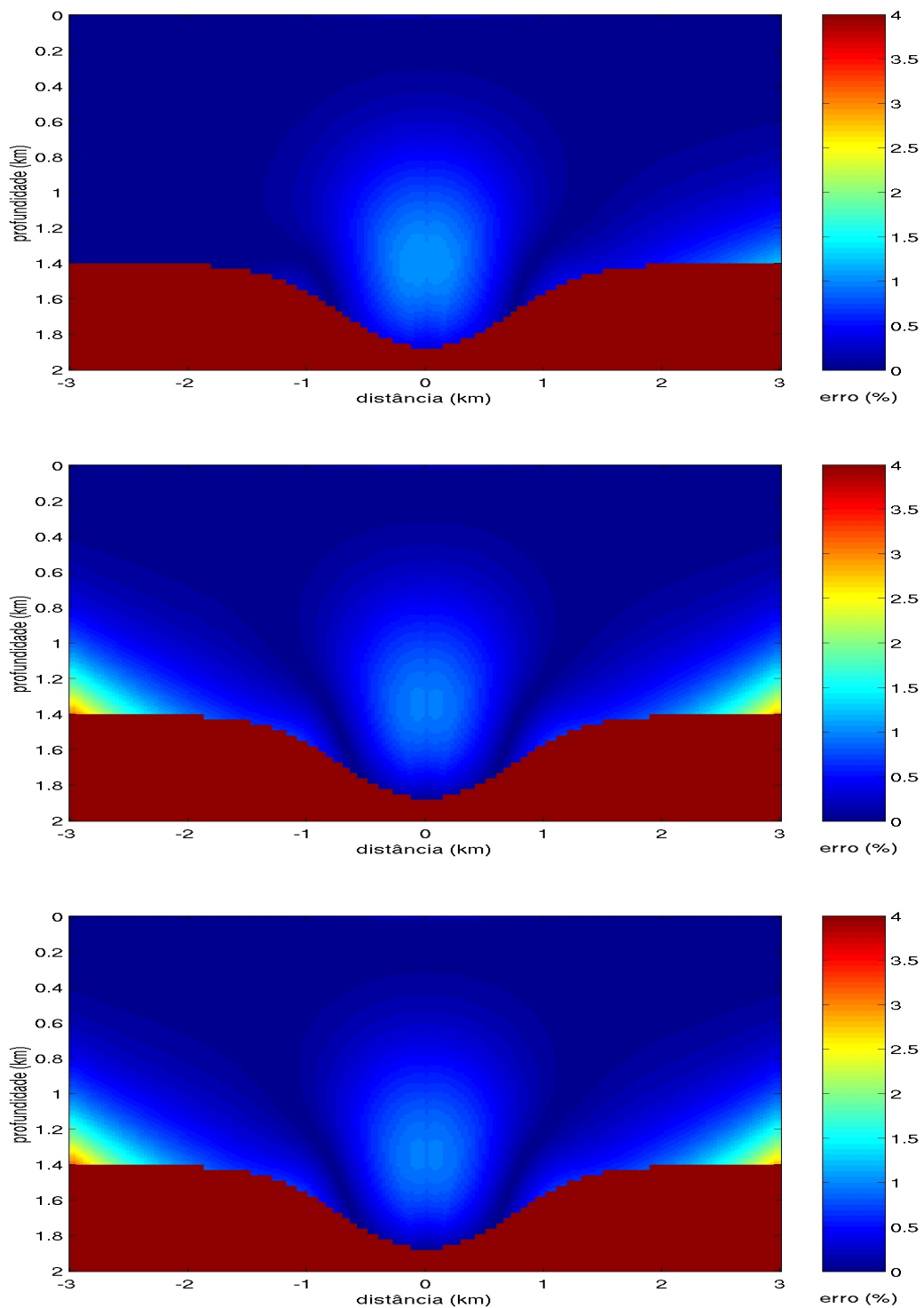


Figura 4.12: Erros relativos dos modelos de velocidade obtidos com polinômio de  $10^{\circ}$  grau, regularização 0,75, utilizando traçamento de raios original (a), alternativa 1 (b) e alternativa 2 (c) para o modelo 2. O erro relativo de (a) é menor que em (b) e (c), mas a diferença entre eles não ultrapassa 1,5%. Além disso, os modelos (b) e (c) são praticamente iguais, o que sugere a relação  $E_{(a)} < E_{(b)} \equiv E_{(c)}$ .

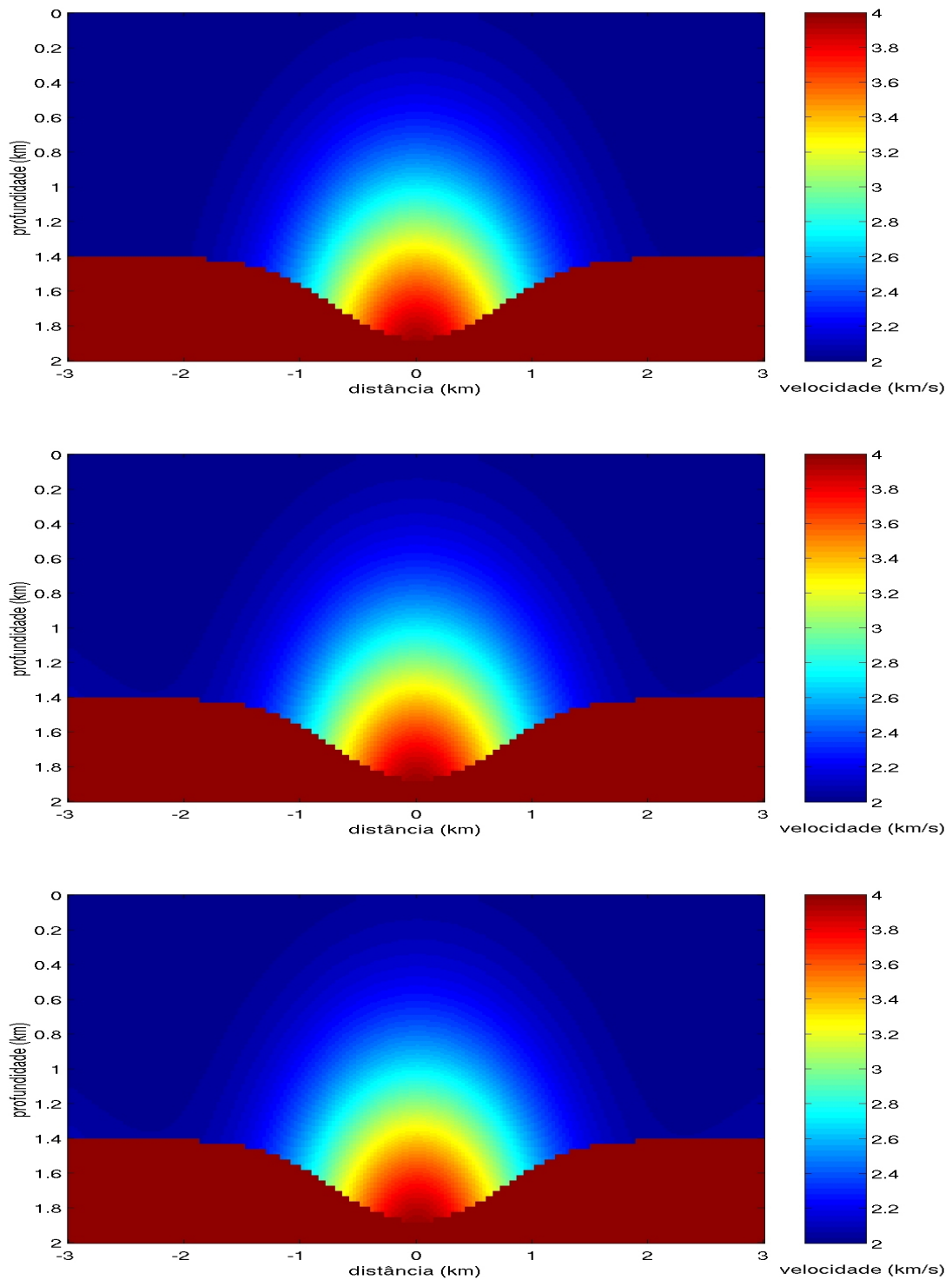


Figura 4.13: Modelos de velocidade obtidos com polinômio de 13<sup>o</sup> grau, regularização 0,75, utilizando traçamento de raios original (a), alternativa 1 (b) e alternativa 2 (c) para o modelo 2. Novamente, os modelos são bastante parecidos, mas não idênticos. A diferença entre os modelos está contida principalmente nas bordas.

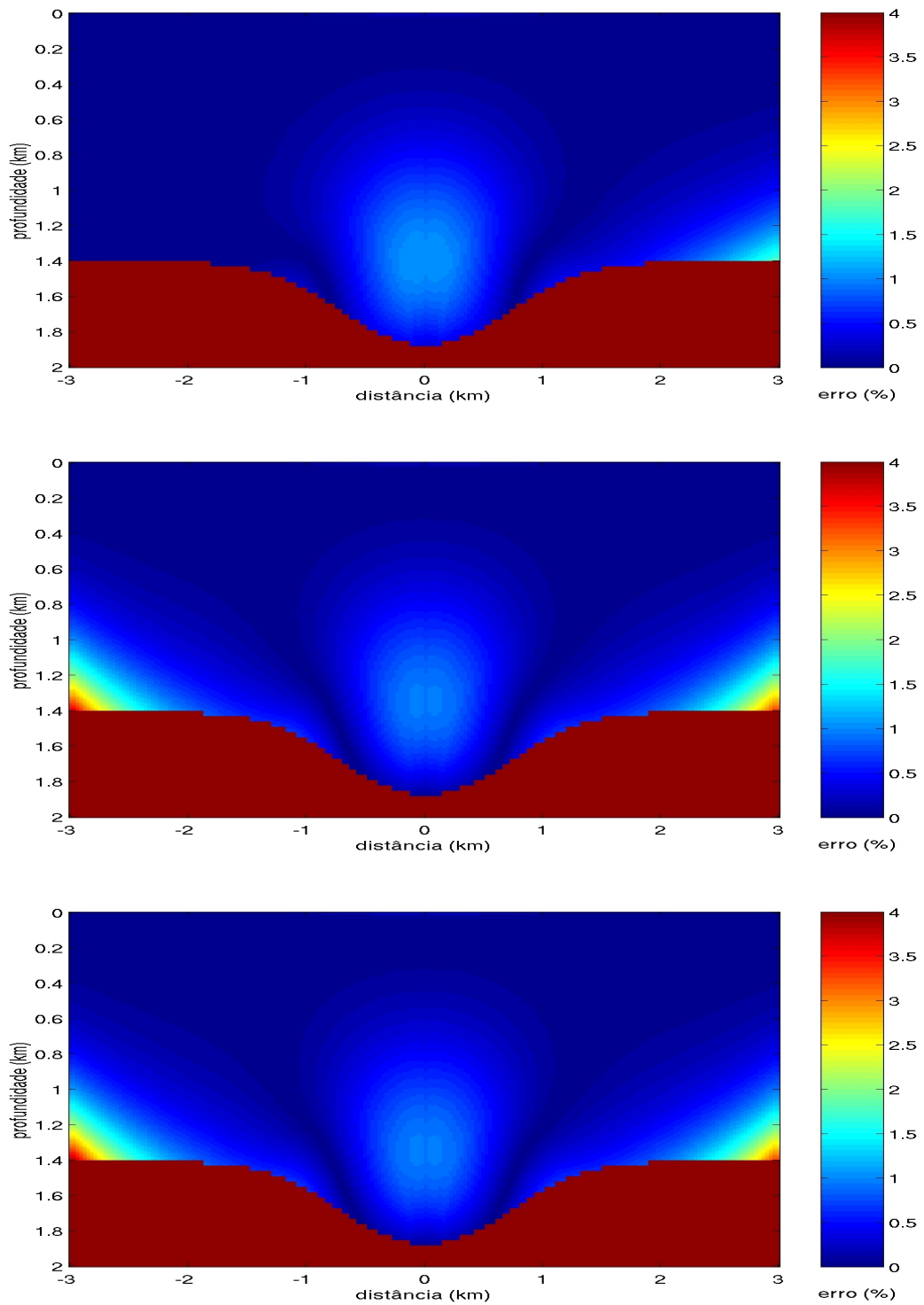


Figura 4.14: Erros relativos dos modelos de velocidade obtidos com polinômio de 13<sup>o</sup> grau, regularização 0,75, utilizando traçamento de raios original (a), alternativa 1 (b) e alternativa 2 (c) para o modelo 2. Observa-se a semelhança entre os erros, mas há uma pequena diferença entre (a) e os outros dois, principalmente, nas bordas, indicando a relação  $E_{(a)} < E_{(b)} \equiv E_{(c)}$ .

## 5 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como finalidade a geração de modelos de velocidades em profundidade com o auxílio das velocidades de migração. Para isso, estabelecemos a relação entre essas velocidades através de dois teoremas, um dedicado ao caso 3D e o outro ao 2D. A construção desses modelos foi realizada basicamente por dois algoritmos, um de traçamento de raios e um de conversão tempo-profundidade, os quais foram implementados para o caso 2D. Para se obter um modelo de velocidade 2D em profundidade, primeiramente, encontram-se as velocidades de Dix em tempo através das velocidades de migração. Em seguida, aplica-se o traçamento de raios com a finalidade de gerar o dado de entrada para a conversão tempo-profundidade. A conversão retorna três resultados: o modelo de velocidade  $v(x, z)$ , as coordenadas  $x_0(x, z)$  e os tempos  $t_0(x, z)$  dos raios-imagem. O primeiro é utilizado para migração dos dados sísmicos em profundidade, enquanto que os dois últimos são usados para conversão de imagens sísmicas em tempo para profundidade.

A metodologia apresentada neste trabalho foi aplicada a dados sintéticos 2D. Avaliemos principalmente a relação entre o grau do polinômio e o valor da regularização no problema de mínimos quadrados envolvido no traçamento de raios. Os testes mostraram que o grau do polinômio está diretamente ligado ao valor da regularização, uma vez que o aumento no grau do polinômio requer também um aumento no valor da regularização. A violação desta regra produz resultados totalmente espúrios. Além disso, verificou-se que dificilmente podem ser usados polinômios de graus maiores que 3 sem a aplicação da regularização, a não ser para casos em que o modelo de velocidade é bastante suave lateralmente. Outra análise feita, foi a comparação entre o algoritmo de Cameron para o traçamento de raios e as sugestões apresentadas para esse mesmo algoritmo no capítulo 3. Em geral, não há muita diferença entre os resultados obtidos por eles, haja vista que os erros entre um e outro são muito pequenos, em torno de 1% à 2%. Finalmente, pôde-se verificar a eficiência do algoritmo de conversão tempo-profundidade, caracterizado pelo baixo custo computacional.

Os experimentos podem ser facilmente aplicados a dados reais 2D, principalmente em regiões de alta complexidade geológica, nas quais se torna muito difícil o imageamento sísmico em tempo. Nestas regiões é necessário o imageamento em profundidade, cuja única condição é a de conhecer o modelo de velocidade em subsuperfície, e aí, então, a estimativa apresentada aqui fica como alternativa para o processo iterativo comumente utilizado.

## REFERÊNCIAS

- ADALSTEINSSON, D.; SETHIAN, J. A. Transport and diffusion of material quantities on propagating interfaces via level set methods. *Journal of Computational Physics*, Academic Press Professional, Inc., San Diego, CA, USA, v. 185, n. 1, p. 271–288, 2003. ISSN 0021-9991.
- CAMERON, M. K.; FOMEL, S. B.; SETHIAN, J. A. Seismic velocity estimation from time migration. IOP Publishing, v. 23, p. 1329–1369, 2007.
- ČERVENÝ, V. *Seismic ray theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- DEITEL, P. J.; DEITEL, H. M. *Java how to program*. New Jersey: Pearson Education, 2007.
- DIX, C. H. Seismic velocities from surface measurements. *Geophysics*, v. 20, p. 1662–1672, 1955.
- HUBRAL, P. Some ray theoretical aspects. *Geophysics Prospecting*, v. 25, p. 738–745, 1977.
- HUBRAL, P.; KREY, T. *Interval velocities from seismic reflection time measurements*. Tulsa, OK: Society of Exploration Geophysicists, 1980.
- POPOV, M. M. *Ray theory and gaussian beam method for geophysicists*. Salvador: EDUFBA, 2002.
- QUARTERONI, A.; SACCO, R.; SALERI, F. *Numerical mathematics*. New York: Springer, 2000.
- ROBEIN, E. *Velocities, time-imaging and depth-imaging in reflection seismics – Principles and methods*. The Netherlands: EAGE Publications, 2003.
- SETHIAN, J. A. A fast level set method for monotonically advancing fronts. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, v. 93, n. 4, p. 1591–1595, Feb 1996.
- SETHIAN, J. A. Fast marching methods. *SIAM Review*, v. 41, n. 2, p. 199–235, 1999a.
- SETHIAN, J. A. *Level set methods and fast marching methods*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999b.
- YILMAZ, O. *Seismic data analysis*. Tulsa, OK: Society of Exploration Geophysicists, 2001.

## APÊNDICE

## APÊNDICE A – MÉTODO NEWTON-RAPHSON

O método de Newton-Raphson é uma técnica para encontrar a raiz de uma função escalar  $f(x)$  de uma variável. O qual pode ser facilmente estendido para uma função de dimensão  $n$ , o qual é descrito a seguir.

Dadas as funções  $f_i(\mathbf{x})$ , com  $i = 1, 2, \dots, N$ , devemos encontrar o vetor  $\mathbf{x}$  tal que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ . Assumimos que as funções  $f_i(\mathbf{x})$  sejam contínuas e que tenham derivadas parciais também contínuas. Estabelecemos a aproximação inicial  $\mathbf{x}_0$  para a raiz, além de calcular o jacobiano  $\mathbf{J}(\mathbf{f})(\mathbf{x})$ . Acharmos a raiz de modo iterativo da seguinte forma:

Dada a aproximação  $\mathbf{x}_n$ , resolvemos o sistema linear definido por

$$\mathbf{J}(\mathbf{f})(\mathbf{x}_n)\Delta\mathbf{x}_n = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \quad (\text{A.1})$$

para  $\Delta\mathbf{x}_n$  e então calculamos

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta\mathbf{x}_n. \quad (\text{A.2})$$

O processo acaba quando ocorre uma das 4 situações abaixo:

1. O passo entre as iterações é suficientemente pequeno, ou seja,  $\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\| < \varepsilon_{passo}$ , sendo  $\varepsilon_{passo}$  um número real positivo;
2. A função avaliada na posição  $\mathbf{x}_{n+1}$  é suficientemente pequena, ou seja,  $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1})\| < \varepsilon_{abs}$ , sendo  $\varepsilon_{abs}$  um número real positivo;
3. O jacobiano é indeterminado, isto é, o determinante  $|\mathbf{J}(\mathbf{f})(\mathbf{x}_n)| = 0$ ;
4. Realizou-se um número máximo  $N$  de iterações sem alcançar as condições 1 e 2;

Se as iterações pararem devida as condições 1 ou 2, estabelecemos  $\mathbf{x}_{n+1}$  como a aproximação para a raiz. Caso contrário, estabelecemos outro valor inicial  $\mathbf{x}_0$  ou dizemos que a solução não existe.

## APÊNDICE B – REGULARIZAÇÃO PARA OS MÍNIMOS QUADRADOS NO TRAÇAMENTO DE RAIOS

O papel da regularização é solucionar a instabilidade nos mínimos quadrados para um problema mal-posto.

A aproximação padrão para resolver um sistema sobredeterminado de equações lineares dado por

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \tag{B.1}$$

é conhecido como mínimos quadrados linear e tenta minimizar  $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2$ . No entanto, a matriz  $\mathbf{A}$  pode ser mal condicionada ou singular, fazendo que haja um vasto número de soluções. Afim de encontrar uma solução particular o termo de regularização é incluído na minimização, que nos dá

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{\Lambda x}\|^2, \tag{B.2}$$

sendo  $\mathbf{\Lambda}$  a matrix diagonal com os valores de regularização. Esta regularização melhora o condicionamento do problema, isto é, fornece uma solução para o problema. Uma solução explícita  $\hat{\mathbf{x}}$  para o problema é dada por

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}. \tag{B.3}$$

O efeito da regularização pode ser verificado, aplicando um fator de escala  $\alpha$  à matriz  $\mathbf{\Lambda}$ .

## APÊNDICE C – DEMONSTRAÇÃO DA RELAÇÃO ENTRE AS VELOCIDADES EM SUBSUPERFÍCIE E DE MIGRAÇÃO

Seja um raio-imagem que chega à superfície no ponto  $\mathbf{x}_0$  no tempo tempo  $t_1$ . Fixemos um intervalo de tempo  $t_0 < t_1$  e consideremos uma família de raios ponto-fonte saindo de um ponto  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t_0)$  em subsuperfície, no qual o raio-imagem passa no tempo  $t_0$ . Introduzimos as seguintes notações:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \\ P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & v_0^2 \mathbf{I}^2 \\ -\frac{1}{v_0} \mathbf{V} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Seja  $\mathbf{X}^*$  a matriz  $4 \times 4$  de derivadas de  $X$  com relação às condições iniciais

$$\mathbf{X}(t_0) = \begin{bmatrix} Q_{110} & Q_{120} \\ Q_{210} & Q_{220} \\ P_{110} & P_{120} \\ P_{210} & P_{220} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_{11}}{\partial Q_{110}} & \frac{\partial Q_{11}}{\partial Q_{210}} & \frac{\partial Q_{12}}{\partial Q_{120}} & \frac{\partial Q_{12}}{\partial Q_{220}} \\ \frac{\partial Q_{21}}{\partial Q_{110}} & \frac{\partial Q_{21}}{\partial Q_{210}} & \frac{\partial Q_{22}}{\partial Q_{120}} & \frac{\partial Q_{22}}{\partial Q_{220}} \\ \frac{\partial P_{11}}{\partial P_{110}} & \frac{\partial P_{11}}{\partial P_{210}} & \frac{\partial P_{12}}{\partial P_{120}} & \frac{\partial P_{12}}{\partial P_{220}} \\ \frac{\partial P_{21}}{\partial P_{110}} & \frac{\partial P_{21}}{\partial P_{210}} & \frac{\partial P_{22}}{\partial P_{120}} & \frac{\partial P_{22}}{\partial P_{220}} \end{bmatrix}.$$

Note que cada uma das colunas de  $\mathbf{X}$  é uma solução linearmente independente da equação (2.9), as derivadas não incluídas em  $\mathbf{X}^*$  são nulas.  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{X}^*(t)$  são soluções dos seguintes problemas:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(t_0) = \frac{1}{v(t_0)} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

sendo  $v(t_0) = v(\mathbf{x}_0, t_0)$ , e

$$\frac{d\mathbf{X}^*}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}^*, \quad \mathbf{X}^*(t_0) = \mathbf{I}_4. \quad (\text{C.2})$$

Denotemos a solução da equação (C.2) por  $\mathbf{B}(t_0; t_1)$  (ČERVENY, 2001):

$$\mathbf{B}(t_0, t_1) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix},$$

sendo  $\mathbf{Q}_i, \mathbf{P}_i, i = 1, 2$  são matrizes  $2 \times 2$ .  $[\mathbf{Q}_1, \mathbf{P}_1]^T$  satisfaz as condições iniciais correspondentes a um ponto telescópico, e  $[\mathbf{Q}_2, \mathbf{P}_2]^T$  satisfaz as condições iniciais correspondentes

a um ponto normalizado.  $\mathbf{B}(t_0; t_1)$  é denominada *matriz de propagação*. Logo, a solução de (C.1) é

$$\mathbf{X}(t) = \frac{1}{v(t_0)} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{P}_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

Retornemos à matrix  $\mathbf{\Omega}$ . Temos que  $\mathbf{\Omega}(t_0; t_1) = \mathbf{Q}(t_0; t_1)\mathbf{P}(t_0; t_1)^{-1} = \mathbf{Q}_2\mathbf{P}_2^{-1}$ . Desloquemos o tempo inicial  $t_0$  por  $-\Delta t$ . Desse modo, de acordo com C.1 no tempo  $t_0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t_0 - \Delta t; t_0) &= \mathbf{0} + \Delta t v^2(t_0) \frac{1}{v(t_0)} \mathbf{I}_2 + O((\Delta t)^2) \\ \mathbf{P}(t_0 - \Delta t; t_0) &= \frac{1}{v(t_0)} \mathbf{I}_2 + O((\Delta t)^2). \end{aligned}$$

Assim, as mudanças nas condições iniciais para a equação (C.1) são

$$\Delta \mathbf{Q}_0 = v_0 \Delta t \mathbf{I}_2 + O((\Delta t)^2) \quad \Delta \mathbf{P}_0 = \mathbf{0} + O((\Delta t)^2). \quad (\text{C.4})$$

Desse modo,

$$\mathbf{\Omega}(t_0 - \Delta t; t_1) = \mathbf{\Omega}(t_0; t_1) + \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial Q_{ij0}} \Delta Q_{ij0} + \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial P_{ij0}} \Delta P_{ij0} + O((\Delta t)^2) \quad (\text{C.5})$$

$$= \mathbf{\Omega}(t_0; t_1) + \left( \frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial Q_{110}} + \frac{\mathbf{\Omega}}{\partial Q_{220}} \right) v(t_0) \Delta t + O((\Delta t)^2). \quad (\text{C.6})$$

Encontrando as derivadas parciais da expressão acima

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial Q_{ii0}} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial Q_{ii0}} \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{Q} \mathbf{P}^{-1} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Q_{ii0}} \mathbf{P}^{-1}, \quad (\text{C.7})$$

com  $i = 1, 2$ . Escrevendo (C.7) em termos das entradas da matrix  $\mathbf{B}(t_0; t_1)$ :

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial Q_{110}} + \frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial Q_{220}} = v_0 (\mathbf{Q}_1 \mathbf{P}_2^{-1} - \mathbf{Q}_2 \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2^{-1}). \quad (\text{C.8})$$

Em Červený (2001), é mostrado que

$$\mathbf{B}^T \mathbf{J} \mathbf{B} = \mathbf{J}, \quad (\text{C.9})$$

na qual  $\mathbf{J}$  é a matrix  $4 \times 4$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Para simplificar a equação (C.9), usamos as propriedades

$$\mathbf{P}_2^T \mathbf{Q}_1^T - \mathbf{Q}_2^T \mathbf{P}_1, \quad \mathbf{P}_2^T \mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_2^T \mathbf{P}_2. \quad (\text{C.10})$$

Desse modo, a expressão (C.9) reduz-se à

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_1 \mathbf{P}_2^{-1} - \mathbf{Q}_2 \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2^{-1} &= (\mathbf{P}_2^T)^{-1} \mathbf{P}_2^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{P}_2^{-1} - (\mathbf{P}_2^T)^{-1} \mathbf{P}_2^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2^{-1} \\
&= (\mathbf{P}_2^T)^{-1} (\mathbf{P}_2^T \mathbf{Q}_1 - \mathbf{P}_2^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{P}_1) \mathbf{P}_2^{-1} \\
&= (\mathbf{P}_2^T)^{-1} (\mathbf{P}_2^T \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{P}_1) \mathbf{P}_2^{-1} \\
&= (\mathbf{P}_2^T)^{-1} (\mathbf{P}_2^T \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2^T \mathbf{P}_1) \mathbf{P}_2^{-1} \\
&= (\mathbf{P}_2^T)^{-1} \mathbf{P}_2^{-1}.
\end{aligned} \tag{C.11}$$

Substituindo (C.11) em (C.8), e depois em (C.5), chegamos à

$$\mathbf{\Omega}(t_0 - \Delta t; t_1) = \mathbf{\Omega}(t_0; t_1) + \Delta t v^2(t_0) (\mathbf{P}_2^T)^{-1} \mathbf{P}_2^{-1} + O((\Delta t)^2). \tag{C.12}$$

Portanto, a derivada de  $\mathbf{\Omega}$  em relação ao tempo inicial é

$$-\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t_0} = v^2(t_0) (\mathbf{P}_2^T)^{-1} \mathbf{P}_2^{-1}. \tag{C.13}$$

Aplicando a propriedade de reciprocidade (ČERVENY, 2001)

$$\mathbf{P}_2^T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{Q}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \tag{C.14}$$

na equação (C.13) e levando em consideração o tempo reverso, obtemos a equação (2.22).