SISTEMAS DINÂMICOS: DINÂMICA DA FERRADURA DE SMALE.

Benedito Guimarães Do Carmo Junior[1]
Universidade Federal do Pará

Dalmi Gama dos Santos[2]
Universidade Federal do Pará

RESUMO

Sistemas Dinâmicos na matemática, é uma área ativa que estuda o movimento de partículas ao longo do tempo. Ela é utilizada em diversas áreas do conhecimento, atraindo matemáticos, físicos, epidemiologistas, economistas e biólogos. A pesquisa é de caráter Bibliográfica cuja foi desenvolvida durante um projeto de iniciação científica em 2020/2021, com base em estudos de diversos autores, incluindo Villate (2007), Silva (2018), Ferreira (2007) e Gelfert (2017). O objetivo da pesquisa é abordar a teoria dos Sistemas Dinâmicos deterministas, com ênfase na Ferradura de *Smale*, uma forma geométrica que ajuda a descrever a imprevisibilidade em sistemas dinâmicos, especialmente caóticos. Os objetivos específicos incluem a definição de conceitos introdutórios, a apresentação da construção da Ferradura de *Smale* e a explicação da conexão topológica entre a ferradura e a dinâmica simbólica. A primeira seção da pesquisa aborda definições importantes da teoria dos Sistemas Dinâmicos, como transformações, órbitas, pontos fixos, atratores e repulsores, preparando o leitor para a seção subsequente. Por fim, a pesquisa explora o Sistema Dinâmico Ferradura e sua relação com a dinâmica simbólica.

Palavras-Chave: Sistemas Dinâmicos; Ferradura de Smale; Dinâmica Simbólica.

INTRODUÇÃO

A teoria dos Sistemas Dinâmicos tornou-se um dos ramos da matemática mais ativos atualmente, ela visa descrever e entender o movimento de partículas com o passar do tempo, o estudo trata-se de uma área de pesquisa com pouco mais de um século, mas desde os trabalhos sobre o movimento das órbitas desenvolvido por *Johannes Kepler*, ou até mesmo sobre a mecânica de *Isaac Newton* os fundamentos da dinâmica já estavam presentes. Como se ver, desde os séculos precedentes ao século XX, quando *Henri Poincaré* criou a teoria qualitativa dos Sistemas Dinâmicos, até os resultados por seguintes tratando sobre a teoria do caos, os conceitos da área são bastantes utilizados para estudar seja uma dinâmica de crescimento populacional ou fenômenos meteorológicos. Este ramo vem chamando atenção não apenas de matemáticos, mas de físicos, epidemiologistas, economistas e biólogos. Uns dos fatos notório de aplicação direta do objeto, foram as pesquisas que descreveram as previsões dos picos de contágio durante a pandemia causada pelo Corona Vírus, qual se mostrou muito eficaz para o controle da expansão do vírus, o que nos motivou continuar a pesquisa na área em vista do grande potencial de aplicação que ela remete.

Este, foi desenvolvido durante a iniciação cientifica no ano 2020/2021 no projeto Produtor-renovação, no qual, a pesquisa aqui realizada é de caráter Bibliográfico. Onde baseia-se nos estudos de Villate (2007), Baraviera e Franco, qual traz para o trabalho as primeiras noções de Sistemas Dinâmicos, com os complementos de Silva (2018) e nas perspectivas do que se trata a Ferradura de *Smale* buscamos apoio teórico nas abordagens de Ferreira (2007) e Gelfert (2017).

O objetivamos fazer uma abordagem à teoria dos Sistemas Dinâmicos deterministas, recorrendo a uma forma geométrica capaz de descrever a imprevisibilidade em uma dinâmica e que fornece base para o entendimento de sistemas caóticos chamada de Ferradura de *Smale*, Introduzida *Stephen Smale* que nos anos 60 propôs investigar a teoria de *Poincaré* e fez uma

[1]UFPA. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0487-2167. Lattes: http://lattes.cnpq.br/8595567192980545
E-mail: benedito.junior@cameta.ufpa.br .

[2]UFPA. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6391-9426. Lattes: http://lattes.cnpq.br/3556920128741553
E-mail: dalmi@ufpa.br.

conjectura que no final esta era falsa, mas deu origem ao objeto de estudo. No que se trata os objetivos específicos buscamos definir elementos introdutórios aos Sistemas Dinâmicos, apresentar a construção da Ferradura de *Smale* e definir a conjunção topológica entre a ferradura e a dinâmica simbólica.

Com a finalidade de traçar os objetivos estabelecidos, em nossa primeira seção abordaremos inicialmente algumas definições e resultados importantes da teoria dos Sistemas Dinâmicos tais como transformação, órbita, ponto fixo, atratores e repulsores que seriam um pré-requisito para entendimento do que será tratado na seção seguinte.

Por fim, tratamos do estudo de Sistema Dinâmico Ferradura e a relação com uma dinâmica simbólica, esta dinâmica é definida no espaço de sequência binarias de símbolos – “0” “1” – tal que, a evolução desse sistema é dada pelo Operador *Shift*. Em seguida, foi estabelecida uma relação entre a Ferradura e o espaço *Shift* mostrando que são topologicamente conjugados para entendermos a Dinâmica da Ferradura de *Smale*.

NOÇÕES PRELIMINARES

O que são Sistemas Dinâmicos? Em termos gerais, a teoria dos Sistemas Dinâmicos tem objetivo de descrever para a maioria dos sistemas, o comportamento típico das trajetórias, especialmente quando o tempo vai para infinito, entender como esse comportamento varia quando o sistema é perturbado, e até que ponto é estável sob pequenas perturbações, ou seja, compreender a evolução do sistema a longo prazo.

Definição 1 (Transformação) Seja $f : X \to X$, f é a lei de evolução dos pontos de $x \in X$ com o tempo.

Definição 2 (Iterado) Sendo f uma transformação e $x \in X$ um ponto inicial, a sequência obtida pela transformação $x, f(x), f(f(x)), \ldots f(f(\ldots(f(x)))$ são chamados de iterados.

Para não escrevermos expressões enormes como a anterior, usamos a simples notação, $x, f^1(x), f^2(x), \ldots f^n(x), \ldots$ tal que para $n > 0$ denotamos por $f^n(x)$ o $n-$ ésimo iterado de x por f, isto é $f^n = f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f$. Se f admite inversa f^{-1}, para $n < 0$ denotamos $f^n(x)$ o $n-$ ésimo iterado de x pela inversa de f.

Definição 3 (Órbita) O conjunto formado pelos iterados denotamos órbita de x por f

$O_f(x) = \{\ldots, f^{-n}(x), \ldots, f^{-2}(x), f^{-1}(x), x, f^1(x), f^2(x), \ldots f^n(x), \ldots\} = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$

As órbitas positivas são denotadas pelo conjunto $O_f^+(x)$, se f tem inversa f^{-1}, definimos o conjunto formado pelos iterados de f^{-1} como órbita negativa de x, é dada por

$$O_f^-(x) = \{x, f^{-1}(x), f^{-2}(x), \ldots f^{-n}(x), \ldots\} = \{f^{-n}(x) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Exemplo 1: Seja a transformação $f(x) = x + 1$ sendo x um número real positivo. Assumindo $x_0 = 0,3$ temos e aplicando na transformação $f(x)$ o primeiro iterado

$$f(0,3) = 0,3 + 1 = 1,3$$

iterando novamente

$$f(f(0,3)) = f^2(0,3) = 1,3 + 1 = 2,3$$

repetindo o processo sucessivas vezes temos a dinâmica da transformação cuja sua órbita é descrita por $f(x) = x + 1$, sendo $O_f(x) = \{0,3; 1,3; 2,3; \ldots; f^n(0,3)\}$.

Uma das primeiras questões é saber se uma órbita é finita ou não. Mesmo se o parâmetro variar em $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, a órbita pode ser finita pois os pontos podem se repetir. Este é o tipo mais simples de órbita, dita periódica.

Definição 4 (Ponto Periódico) Dizemos que x é ponto periódico de período n se $f^n(x) = x$ denotamos o conjunto do pontos periódicos de f por $Per_n(f)$.

No estudo dos Sistemas Dinâmicos podemos também verificar quando a órbita que descreve a dinâmica ela permanece inalterada após sucessivas iterações.

Definição 5 (Ponto Fixo) Dizemos que x e um ponto fixo de f se $f(x) = x$, denotamos o conjunto do pontos fixos de f por $Fix(f)$.

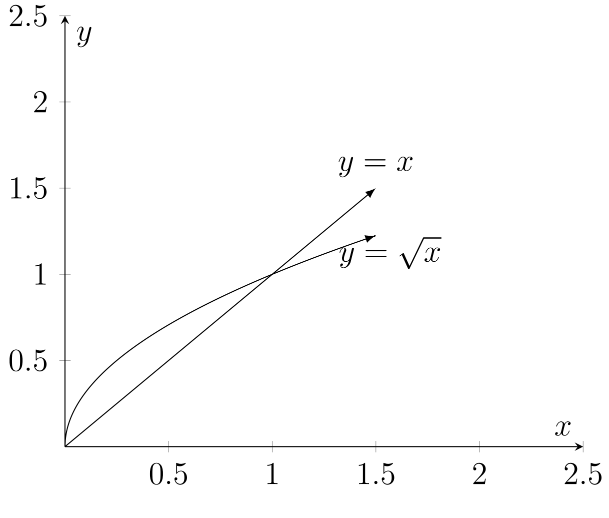
Em outras palavras, a definição acima diz que x é um ponto fixo quando seu estado não é alterado após sucessivas iterações. Mais precisamente, se f é uma transformação $f : X \to X$, um ponto fixo de f é todo ponto $x \in X$ tal que; $f(x) = x$.

Exemplo 2: Seja a transformação $f(x) = \sqrt{x}$, tal que f está definida em X, vamos observa seus pontos periódicos e pontos fixos.

$$f(x) = \sqrt{x}, \forall x \in \mathbb{N}$$

Assumindo um ϵ suficientemente pequeno, tal que $0 < \epsilon < 1$, vamos notar os pontos periódicos da órbita dentro do intervalo aberto $(0, 1)$, pois se assumimos $x = 0$ e $x = 1$, íamos observa que os pontos 0(zero) e 1(um) são pontos fixos da órbita.

Figura 1: Gráfico da transformação $f(x) = \sqrt{x}$.



Fonte: Autoria própria, criado pelo software GeoGebra.

Definição 6 (Ponto de acumulação) Diz-se que $x \in X$ é ponto de acumulação do conjunto $\omega(x) \subset X$ quando toda vizinhança $V = \{x - \epsilon, x + \epsilon\}$ de x contém algum ponto de $\omega(x)$ diferente do próprio x. (Isto é, $V \cap (\omega(x) - \{x\}) = \emptyset$). Equivalentemente: para todo $\epsilon > 0$ tem-se $(x - \epsilon, x + \epsilon) \bigcap (\omega(x) - \{x\}) = \emptyset$. Indica-se com $\omega^{'}(x)$ o conjunto dos pontos de acumulação de $\omega(x)$.

Também podemos descrever se a órbita possui algum limite, se não tem, verificar ao menos seus pontos de acumulação pontos qual a $O(x)$ se aproxima infinitas tanto para o futuro quanto para o passado. Quando uma órbita assume seus pontos de acumulação para o futuro, pontos qual a órbita passara infinitas vezes, denotamos esse conjunto como $\omega(x)$ ou $\omega - limite$, se a órbita assumi pontos de acumulação para o passado $O_f^-(x)$, de forma análoga ao conjunto $\omega(x)$, denotamos esse conjunto de $\alpha(x)$ ou $\alpha - limite$.

Nas órbitas podemos também analisar se ela tem pontos atratores e repulsores.

Definição 7 Dizemos que um conjunto $A \subset M$ é invariante se $f(A) \subset A$.

Exemplo 3: Note que órbitas periódicas e pontos fixos são exemplos de conjunto invariantes.

Definição 8 (Atratores) Dizemos que um conjunto $A \subset X$ é atrator para um ponto x se $f(A) = A$, ou seja, é um conjunto invariante para f, e a órbita de x se aproxima de pontos de A.

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), A) \to 0$$

Exemplo 4: Seja a transformação $f(x) = \sqrt{x}$, tal que f está definida em X, vamos observa se a órbita de f tem atratores ou repulsores.

$$f(x) = \sqrt{x}, \forall x \in [0, 1]$$

Como foi observado no exemplo (2), 0 e 1 são pontos fixos da órbita da transformação f. Se admitimos um $0 < x < 1$, vamos notar que a órbita está convergindo para um limite após um certo período n quando $n \to +\infty$, note que, a órbita vai convergindo para o ponto fixo 1(um). E se admitimos $x > 1$, também vamos notar que a órbita é atraída pelo ponto fixo 1(um), ou seja, o ponto fixo 1 é atrator da órbita da transformação. Dessa forma classificamos o ponto 1 como um atrator da órbita da transformação f.

Definição 9 O conjunto de pontos cuja as órbitas aproximam-se de A é chamado de bacia de atração.

$$B(A) = \{x \in X : \lim_{n\to\infty} d(f^n(x), A) \to 0\}$$

Se f tem inversa, podemos de forma análoga observar se a órbita tem atratores quando a órbita vai para o passado. Se $\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), A)$ não existe dizemos que a sequência de $f^n(x)$ diverge para $\pm\infty$, ou seja, temos que x é um ponto repulsor. De forma generalizada todas as órbitas converge para um ponto fixo atrator, mas nem sempre isso é verdade, temos o seguinte resultado.

Definição 10 Seja x um ponto periódico de primeiro período igual a n. O ponto x é hiperbólico se $|(f^n)'(x)| \neq 1$.

Definição 11 Dizemos que x um ponto periódico hiperbólico de período n é:

1. ponto atrator, se $0 \leq f'(x) < 1$
2. ponto repulsor, se $f'(x) > 1$
3. Foco atrator, se $-1 < f'(x) < 0$
4. Foco repulsor, se $f'(x) < -1$

Quando $f'(x) = \pm 1$ não podemos afirmar nada pois nesse ponto ele pode assumir as característica tanto de atrator como repulsor. Seguindo esse resultado no exemplo anterior para determinar a natureza do ponto fixo 1, basta tomar sua derivada para dizer se é ponto atrator ou repulsor em vez de fazer n iterações.

A parti dessas noções iniciais é possível entender exemplos básicos de Sistemas Dinâmicos e até algumas aplicações como a que será abordada a seguir.

FERRADURA DE *SMALE*

A Ferradura de *Smale* trata-se de uma transformação topológica que fornece uma base para o entendimento das propriedades caóticas dos sistemas dinâmicos a motivação para Ferradura de *Smale* foram resultado da conjectura de Poincaré (**método da seção de Poincaré**) na qual, se supomos uma superfície $M \subset \mathbb{R}^n$ e tendo uma transformação $f : M \to M$ da superfície que vai nela mesmo.

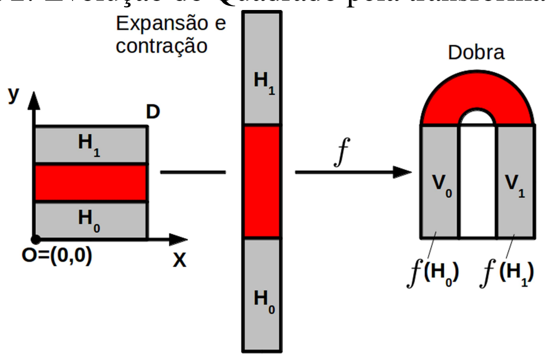
Definição 12 Uma função $f : X \to Y$ é uma transformação topológica se, para todo o conjunto aberto $U \subset Y$, o conjunto $f^{-1}(U)$ é um conjunto aberto em X. Em outras palavras, uma transformação entre dois espaços topológicos X e Y é uma transformação que preserva a estrutura topológica.

A seção de Poincaré é uma transformação do tipo $P : \sum_0 \to \sum$, ela também pode ser chamada de **mapa de retorno**, de forma que, adotando um ponto qualquer de uma órbita periódica e passa uma seção transversal na direção do fluxo da órbita, na qual, se assumir uma vizinhança $\sum$ contida dentro da Seção transversal, qualquer ponto de $\sum$ se aproxima da órbita periódica, em algum iterado ela retorna na seção transversal, dessa forma, Poincaré observou que em um sistema é possível recuperar diversas propriedades do sistema estudado através do mapa de retorno.

Com isso *Smale* usando a ideia supôs, se dado um quadrado e iterando ele vamos observar a seguinte dinâmica.

Sejam H_j, para todo $j \in [0, 1]$ duas faixas horizontais e V_j, para todo $j \in [0, 1]$ duas faixas verticais. A transformação Ferradura $f : M \to M$ ela contrai linearmente o quadrado que na direção horizontal por um fator $\delta < \frac{1}{2}$ e expande na direção vertical por um fator $\frac{1}{\delta}$ assim obtemos um retângulo que é dobrado na forma de ferradura e colocado sobre o quadrado Q de forma que, $f(Q) \subset B$ e que f seja uma contração de A tal que $f(A), f(B) \subset A$.

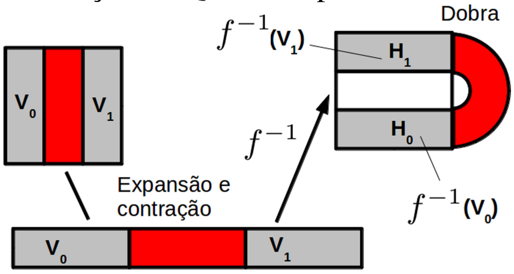
Figura 2: Evolução do Quadrado pela transformação f.



Fonte: Martins; Tiago Carvalho(2015, p. 9).

Portanto, a transformação Ferradura de *Smale* transforma a região M dentro de si própria. Observe que $f(M) \subset M$ e que $f(D) \cap D = V_0 \cup V_1$ e f é injetiva desse modo f^{-1} com vista da transformação $f : M \to M$ tem pré-imagem $D \cap f^{-1}(D)$ que consiste de dois retângulos H_0 e H_1 sem perda de generalidade ao serem transformadas nas faixas V_0 e V_1 ou seja $f(H_j) = V_j$, para todo $j \in [0, 1]$. A largura de V_0 e V_1 é δ de tal modo como a largura de H_0 e H_1.

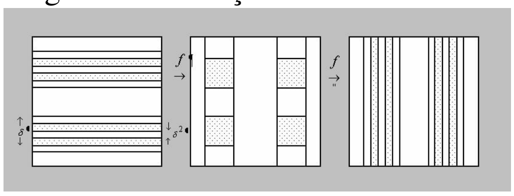
Figura 3: Evolução do Quadrado pela transformação f^{-1}.



Fonte: Martins; Tiago Carvalho(2015, p. 9).

E iterando sucessivamente, teremos $f^2(M) \subset Q$ consiste de quatro faixas verticais de largura δ^2 já $f^3(M) \subset Q$ terá oito faixas verticais de largura δ^3, e prosseguindo essa construção indutivamente teremos $f^n(Q) \cap Q$ consistindo de n faixas verticais de largura δ^n e de forma análoga obtemos a $f^{-n}(M) \cap Q$.

Figura 4: Interseção das faixa H e V.



Fonte: Ferreira; Fernanda Amélia;(2007, p. 190).

Fazendo a interseção das faixas horizontais e verticais obtemos um conjunto K chamado de **Conjunto invariante** que é o produto cartesiano do conjunto de Cantor $C_{-}^{+} \times [0,1]$ por um intervalo de segmentos horizontais e verticais e se assemelhá a construção do conjunto de Cantor de modo que, todas as interseções são encaixadas, logo pelo teorema dos intervalos encaixados $K = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{Z}} f^n(Q) \neq \emptyset$.

Seja $\sum = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ o espaço das sequências infinitas bilaterais com entradas 0 ou 1 (esse espaço tem sequências indexadas pelos inteiros), os elementos deste conjunto:

$$(\ldots, 0, 0, 0, \widehat{0}, 0, \ldots); (\ldots, 1, \widehat{1}, 1, 1, 1, \ldots); (\ldots, 1, 0, \widehat{1}, 0, 1, 0, \ldots)$$

qual o acento circunflexo marcar qual é o 0-ésimo elemento da sequência, *Smale* fez a seguinte construção usando uma conjugação topológica entre a transformação Ferradura e a transformação de deslocamento (Shift) σ.

Definição 13 Sejam (X, f) e (Y, g) sistemas dinâmicos e X, Y espaços métricos. Dizemos que uma função $\pi : X \to Y$ é uma semi-conjugação do sistema (X, f) para o sistema (Y, g) se é uma função sobrejetiva, contínua e satisfaz a relação comutativa $\pi \circ f = g \circ \pi$, caso π seja também é investível e sua inversa seja contínua, dizemos que é uma conjugação.

Proposição 1 Sejam (X, f) e (Y, g) sistemas dinâmicos e $\pi : X \to Y$ uma função satisfazendo $\pi \circ f = g \circ \pi$. Então para todo natural $n \geq 1$, vale a relação $\pi \circ f^n = g^n \circ \pi$.

Demonstração: A propriedade claramente vale para $n = 1$ então, por indução matemática, supondo que vale para $n - 1$ temos que, por hipótese $\pi \circ f^{n-1} = g^{n-1} \circ \pi$.

$$
\begin{aligned}
\pi \circ f^n &= g^n \circ \pi \\
&= \pi \circ (f^{n-1} \circ f) \\
&= (\pi \circ f^{n-1}) \circ f \\
&= (g^{n-1} \circ \pi) \circ f \\
&= g^{n-1} \circ (\pi \circ f) \\
&= g^{n-1} \circ (g \circ \pi) \\
&= (g^{n-1} \circ g) \circ \pi \\
\pi \circ f^n &= g^n \circ \pi
\end{aligned}
$$

■

Um fator a se observa na conjugação entre dois sistemas é se o sistema inicial tem órbita periódica, então sua imagem pela conjugação também terá órbita periódica.

Proposição 2 Sejam (X, f) e (Y, g) sistemas dinâmicos e $\pi : X \to Y$ uma conjugação entre eles considere $x \in X$. Se x tem órbita periódica de período n em X então $\pi(x)$ também terá órbita periódica de n em Y.

Demonstração: Seja $x \in X$ tal que $x = f^n(x)$

$$
\begin{aligned}
\pi(x) &= \pi(f^n(x)) \\
&= (\pi \circ f^n)(x) \\
&= (g^n \circ \pi)(x) \\
&= g^n \circ (\pi(x)) \\
\pi(x) &= g^n(\pi(x))
\end{aligned}
$$

■

Definição 14 A transformação deslocamento é a função

$$\sigma = \sum_1 \to \sum_2 \quad \text{definida por}$$

$$\sigma(\ldots s_0 s_1 s_2 \ldots) = \sigma(s_1 s_2 \ldots).$$

Exemplo 5: Note os iterados pela transformação deslocamento:

$$(\ldots, \widehat{0}, 0, 0, \ldots) = (\ldots, 0, \widehat{0}, 0, 0, \ldots)$$
$$(\ldots, 0, 1, \widehat{0}, 1, 0, 1, 0, \ldots) = (\ldots, 0, 1, 0, \widehat{1}, 0, 1, 0, \ldots)$$

veja que $(\ldots, \widehat{0}, 0, 0, \ldots)$ é ponto fixo enquanto $(\ldots, 0, 1, \widehat{0}, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ é um ponto de período 2.

Segue dois resultados importantes:

Proposição 3 $\sigma = \sum_1 \to \sum_2$ é contínua.

Demonstração: A demonstração pode ser verificada em Gelfert (2017, p. 4). ■

Proposição 4 segue

a) $p^n(\sigma) = 2^n, p^n(\sigma) =$ pontos periódicos de período n.

b) $\overline{p(\sigma)} = \sum_2$.

c) Existe uma órbita densa em $\sum_2$.

Demonstração: A demonstração pode ser verificada em Gelfert (2017, p. 4). ∎

Definição 15 Seja $x \in [0,1] = I$. Considere os intervalos $I_0 = [0, \frac{1}{2}), I_1 = [\frac{1}{2}, 1)$. Observe que I_0 e I_1 dão uma partição, pois $I_0 \cup I_1 = [0,1]$ e $I_0 \cap I_1 = \emptyset$. Definimos o Itinerário como $i : K \to \sum$, pega um ponto no conjunto invariante e associa a uma sequência.

$$i : K \to \sum$$
$$x \to i(x) = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \quad \text{onde} \quad x_n = \begin{cases} 0 \text{ se} & f^n \in I_0 \\ \\ 1 \text{ se} & f^n \in I_1. \end{cases}$$

Exemplo 6: então

$$x_{-1} = \begin{cases} 0 \text{ se} & f^{-1}(x) \in I_0 \\ \\ 1 \text{ se} & f^{-1}(x) \in I_1. \end{cases}$$
$$x_0 = \begin{cases} 0 \text{ se} & x \in I_0 \\ \\ 1 \text{ se} & x \in I_1. \end{cases}$$
$$x_1 = \begin{cases} 0 \text{ se} & f(x) \in I_0 \\ \\ 1 \text{ se} & f(x) \in I_1. \end{cases}$$
$$x_2 = \begin{cases} 0 \text{ se} & f^2(x) \in I_0 \\ \\ 1 \text{ se} & f^2(x) \in I_1. \end{cases}$$

Dessa maneira, os ponto de Q nunca sai fora do conjunto desde que esta em K, então *Smale* associa esse mapa e denomina de Itinerário. Entender a dinâmica de f analisando o mapa itinerário surge a seguinte pergunta

$$i(x) = x_n \qquad \text{e} \qquad i(f(x)) = ?$$

$$i(f(x_0)) = \begin{cases} 0 \text{ se} & f(x) \in I_0 \\ \\ 1 \text{ se} & f(x) \in I_1. \end{cases} = x_1 = i(x_1)$$
$$i(f(x_1)) = \begin{cases} 0 \text{ se} & f(f(x)) \in I_0 \\ \\ 1 \text{ se} & f(f(x)) \in I_1. \end{cases} = f^2(x) = x_2 = i(x_2)$$

e portanto temos que

$$i(f(x)) = (x_{n+1}) \Rightarrow \sigma(x)(\text{operrador } \textit{Shift})$$

Sendo assim a equação ela tem a seguinte relação $i \circ p = \sigma \circ i$, e chama-se equação de conjugação.

Observação: Se existe uma órbita periódica para $p^n(x) = x$, quando aplicamos o itinerário, teremos uma órbita periódica para *shift* $\sigma^n(i(x))$.

Observação: Se i admite inversa $j(x) = i^{-1}(x)$ temos

$$p \circ j = j \circ \sigma$$

isso nos diz que, se temos uma órbita periódica para *shift* então

$$\sigma^n(x) = x \Rightarrow j(x) = p^n(j(x))$$

portanto se mostrarmos i que é inversível então a busca por infinitas orbitas perióticos para ferradura é equivalente a infinitas periódicas para *shift*.

Exemplo 7: Órbita periódica de período $n = 1$

$$(\dots, \widehat{0}, 0, 0, \dots) \quad \xrightarrow{\sigma(x)} \quad (\dots, 0, \widehat{0}, 0, 0, \dots)$$

Exemplo 8: Órbita periódica de período $n = 2$

$$(\dots, 0, 1, \widehat{0}, 1, 0, 1, 0, \dots) \quad \xrightarrow{p(\sigma(x))} \quad (\dots, 0, 1, 0, \widehat{1}, 0, 1, 0, \dots)$$

$$(\dots, 0, 1, \widehat{0}, 1, 0, 1, 0, \dots) \quad \xrightarrow{p^2(\sigma(x))} \quad (\dots, 0, 1, 0, 1, \widehat{0}, 1, 0, \dots)$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

De um modo geral, neste trabalho fizemos um estudo sobre uma classe de Sistemas Dinâmicos apresentando uma teoria com potencial de descrever a imprevisibilidade e fornece base para o entendimento de sistemas caóticos através de uma forma geométrica. Neste contexto, a partir da dinâmica simbólica, conseguimos extrair propriedades importantes sobre a Ferradura de *Smale* como existência de pontos periódicos, órbitas densas e sensibilidade as condições inicias (caoticidade do sistema).Em contextos mais complicados a construção da dinâmica simbólica é útil e em muitos casos imprescindível para podermos analisar as dinâmicas em questão, como é o caso da própria Ferradura, especialmente se tratando de propriedades básicas como transitividade e existência (ou número) de pontos periódicos, pois uma vez tendo estabelecido uma conjugação topológica entre dois espaços, sendo um deles um espaço *shift*, de forma que, todas as propriedades e resultados obtidos na dinâmica simbólica podem ser transportados para o outro sistema dinâmico em questão via conjugação, neste caso para a Ferradura, o que torna a dinâmica simbólica uma ótima ferramenta para o entendimento de certos Sistemas Dinâmicos.

Portanto, o estudo presente vem abordar um pouco da noção de uma teoria nem tanto trivial que pode ser eficiente para aplicações de forma que um sistema desconhecido pode ser estudado através de um já existente, além de ser rico, para o entendimento inicial de sistemas caóticos.

REFERÊNCIAS

BARAVIERA, A. T.; FRANCO, F. M. **Sistemas dinâmicos: uma primeira visão**. Porto Alegre - RS: UFRGS.

FERREIRA, F. A. Dinâmica simbólica e ferradura de Smale. **Revista de Estudos Politécnicos**, Porto, 2007, Vol V, nº 8, 183-199.

GELFERT, Katrin. **INTRODUÇÃO SISTEMAS DINÂMICOS**. Rio de Janeiro: UFRJ, 2017. Disponível: ⟨http://im.ufrj.br/~gelfert/cursos/2017-1-SisDin/2017-1-SisDin.pdf⟩. Acesso em: 30 de outubro 2023.

SILVA, R. S. V. **Um estudo sobre alguns tópicos em sistemas dinâmicos unidimensionais e aplicações ao calculo de raızes de uma equação**. João Pessoa: Dissertação - Universidade Federal da Paraíba, 2018.

VILLATE, J. E. **Introdução aos sistemas dinâmicos: Uma abordagem prática com Maxima**. Porto: Universidade do Porto, 2007

REFERÊNCIAS CONSULTADAS

MARTINS, T. C. Desenvolvimento de um aplicativo para a análise de circuito de Chua-matsumoto. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Marabá-PA,2015, vol. 38, nº 1, 1302.

MATTOS, P. G; VARÃO, R. **Dinâmica Simbólica: uma Introdução via Exemplos Hiperbólicos**. Relatório Final de Iniciação Científica - FAPESP, 2016.

VIANA, M.; OLIVEIRA, K. **Fundamentos da teoria ergódica**. 2014. v. 90.