UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SALINÓPOLIS

Gleidson Guimarães de Souza

Séries de Taylor aplicada à função exponencial

SALINÓPOLIS-PA
FEVEREIRO/2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SALINÓPOLIS

Gleidson Guimarães de Souza

Séries de Taylor aplicadas à função exponencial

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Matemática, Campus Salinópolis da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para a obtenção do grau de licenciado pleno em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. LUIZ GUTEMBERG ROSÁRIO MIRANDA - Universidade Federal do Pará

SALINÓPOLIS-PA
FEVEREIRO/2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SALINÓPOLIS

Gleidson Guimaraes de Souza

Séries de Taylor aplicadas à função exponencial

Trabalho de conclusão de curso apresentado a Faculdade de Matemática, Campus Salinópolis da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para a obtenção do grau de licenciado pleno em Matemática.

Banca examinadora:

Luiz Gutemberg R. Miranda

Prof. Dr. Luiz Gutemberg Rosário Miranda (Orientador)
UFPA/Salinópolis

Carlos ARCunha

Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha
UFPA/Salinópolis

Jociane dos Santos Fonseca

Prof. Drª. Jociane dos Santos Fonseca
UAB/Salinópolis

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, causa primordial de todas as coisas e sem Ele nada seria possível, ao meu pai, Francino Marques de Souza e em memória de minha mãe, Ana Rosa Guimarães de Souza, cuja força foi a mola propulsora que permitiu o meu avanço, mesmo nos momentos mais difíceis. Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Luiz Gutemberg, por toda orientação e atenção.

Resumo

Neste trabalho, realizamos um estudo sobre séries de potências, destacando que estas são séries de funções especiais que se comportam como “polinômios infinitos” (ou somas finitas), uma vez que a derivada e a integral de uma série de potência, são ainda série de potência, e, além disso podemos derivar e integrar estas séries termo a termo. Além disso, tais séries representam as chamadas funções analíticas que tem fundamental importância, uma vez que as funções elementares do Cálculo Diferencial, por exemplo, são funções analíticas.

Palavras-chave: Série de potências, polinômio de Taylor, série de Taylor.

Abstract

In this work, we carry out a study on power series, highlighting that these are series of special functions that behave like “infinite polynomials” (or finite sums) since the derivative and integral of a power series are still a power series, and in addition we can derive and integrate these series term by term. Furthermore, such series represent the so-called analytical functions, which are of fundamental importance, since the elementary functions of Differential Calculus, for example, are analytical functions.

Key-words: Power series, Taylor polynomial, Taylor series.

Conteúdo

Introdução

A importância das séries infinitas em Análise, em especial das séries de potências, remonta às origens do Cálculo com as ideias de Newton de representar as funções como séries infinitas, nas quais ele observou que estas séries possuem a mesma consistência interior e estão sujeitas ás mesmas leis gerais da álgebra de quantidades finitas, dando um novo significado às séries, além de aproximações de funções.

O estudo de séries de potências permite abordar diversos tipos de situações-problema fornecendo ferramentas para soluções de problemas tais como limites indeterminados, valores aproximados para integrais definidas em que não é possível encontrar uma primitiva elementar da função envolvida, como por exemplo, $\displaystyle\int e^{x^2}\mathrm{d}t$, resoluções de equações diferenciais, aproximações de funções bem como podemos a partir delas representar as chamadas funções analíticas, que são as funções mais usuais do Cálculo Diferencial e Integral, como por exemplo, a função exponencial, logarítmica, as funções trigonométricas, entre outras.

Neste texto trataremos desta classe tão especial de séries de funções, como ja foi dito este tipo de abordagem é útil para integrar funções que não possuem primitivas elementares e para aproximar funções por polinômios, o que facilita a representação de funções em calculadoras e computadores. Assim, falaremos das séries de números reais que correspondem a somas infinitas associadas aos termos de uma sequência de números reais,estudaremos sua convergência ou divergência com base na sequência de somas parciais ou a partir da aplicação de testes adequados. Estudaremos ainda séries de funções, observando agora como aplicar o conceito de série na representação e aproximação de funções, principalmente no caso das séries de Taylor e observaremos que com isso podemos construir aproximações para funções com a possibilidade, em alguns casos, de avaliar os erros associados a elas.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos os conceitos básicos e resultados conhecidos sobre sequências numéricas, os quais serão utilizados ao longo deste trabalho. Além disso, assumiremos a veracidade de resultados sobre derivadas e integrais de funções reais.

1.1 Sequências

O objeto de estudo desta seção é uma classe especial de funções reais, as chamadas sequências (ou sucessões) reais.

Definição 1.1. *Uma sequência de números reais (ou simplesmente sequência) é uma função* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*, definida no conjunto* $\mathbb{N} = 1, 2, 3, \ldots$ *dos números naturais e tomando valores no conjunto* $\mathbb{R}$ *dos números reais, isto é,* x *associa a cada número natural* n *um número real* $x(n)$ *que representaremos por* x_n*.*

Chamaremos o número x_n de o termo de ordem n, ou n-ésimo termo da sequência e indicaremos a sequência $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou simplesmente (x_n). Representaremos ainda, o conjunto formado por seus termos por $\{x_n\}$ ou $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$.

Em outras palavras, uma sequência é uma lista de números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ em uma ordem determinada, em que n é chamado de índice de x_n e indica a posição que x_n ocorre na lista. Ressaltamos que a ordem é importante.

Exemplo 1.1. *A sequência* $(1, 3, 5, \ldots, 2n+1, \ldots)$ *tem primeiro termo* $x_1 = 1$*, o segundo termo* $x_2 = 3$*, e* n*-ésimo termo* $x_n = 2n+1$*, logo a função* x *associa o número natural 1 ao número* $x_1 = 1$*, 2 com* $x_2 = 3$*, e assim por diante. O comportamento geral dessa sequência é descrito pela fórmula* $x_n = 2n+1$*.*

É importante não confundir a sequência (x_n) com o conjunto $\{x_n\}$ de seus termos.

Exemplo 1.2. *A sequência* $(2, 2, \ldots, 2, \ldots)$ *não é o mesmo que o conjunto* $\{2\}$.

Exemplo 1.3. *As sequências* $(0, 2, 0, 2, \ldots)$ *e* $(0, 0, 2, 0, 0, 2, \ldots)$ *são diferentes mas o conjunto de seus termos é o mesmo, a saber,* $\{0, 2\}$. *Note que a primeira sequência tem primeiro termo igual a 0, segundo igual a 2 e terceiro termo igual a 0 enquanto que a segunda sequência tem primeiro termo igual 0, segundo igual a 0 e terceiro termo igual a 2.*

Exemplo 1.4. *Sejam* $a, r \in \mathbb{N}$. *Considere* $x_1 = a, x_2 = a + r, x_3 = a + 2r$, *de maneira geral,* $x_n = a + (n-1)r$. *A sequência* (x_n) *é uma* **Progressão Aritmética** *de primeiro termo* a *e razão* r.

Algumas sequências (x_n) são denotadas por uma expressão matemática em função de n, que chamaremos termo geral da sequência (x_n).

Exemplo 1.5. *A sequência* $(1, -1, 1, -1, \ldots)$ *tem termo geral* $x_n = (-1)^{n+1}$ *e seu conjunto de termos é* $\{-1, 1\}$.

Graficamente, temos duas maneiras de representar uma sequência (x_n). A primeira forma consiste em representar a sequência no eixo real marcando os primeiros termos da sequência (x_n). Já a segunda forma utiliza o gráfico da função que define a sequência, assim, marcamos os pontos $(1, x_1), (2, x_2), (3, x_3), \ldots, (n, x_n), \ldots$ no plano.

Exemplo 1.6. *A sequência dada por* $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$ *tem termo geral* $x_n = \frac{1}{n}$ *e* $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$ *é o seu conjunto de termos. Além disso, suas representações gráficas são dadas a seguir.*

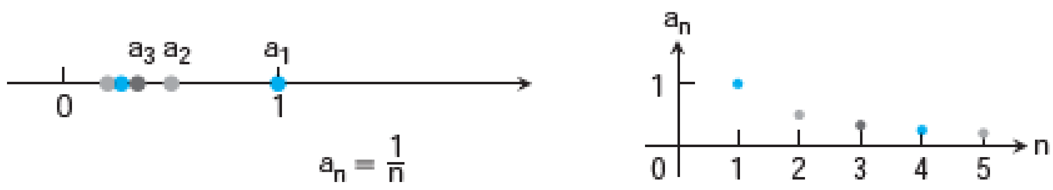

Figura 1.1: Exemplo gráfico de sequência

Fonte: (THOMAS, 2013)

A seguir, apresentamos os conceitos de limitação e monoticidade que são fundamentais na determinação da convergência (ou não) das sequências.

Definição 1.2. *Seja (x_n) uma sequência. Dizemos que (x_n) é limitada quando o conjunto de seus termos é limitado, isto é, quando existem números reais a e b tais que $a \leqslant x_n \leqslant b$ para todo n, ou seja, todos os termos da sequência (x_n) pertencem ao intervalo $[a, b]$.*

Quando uma sequência (x_n) não é limitada, dizemos que ela é ilimitada.

Observe que considerando $c = \max\{|a|, |b|\}$ temos que $[a, b] \subset [-c, c]$. Assim, a condição $a \leqslant x_n \leqslant b$ torna-se $-c \leqslant x_n \leqslant c$ donde segue que $|x_n| \leqslant c$. Portanto, dizer que a sequência (x_n) é limitada equivale a dizer que existe $c > 0$ tal que $|x_n| \leqslant c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 1.3. *Uma sequência (x_n) é dita limitada superiormente quando existe um número real b tal que $x_n \leqslant b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em outros palavras, todos os termos da sequência pertencem a semi-reta $(-\infty, b]$. Analogamente, dizemos que (x_n) é limitada inferiormente quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leqslant x_n$ (ou seja, $x_n \in [a, +\infty)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Note que, uma sequência é limitada se, e somente se, ela é limitada superior e inferiormente.

Definição 1.4. *Uma sequência (x_n) é dita crescente quando $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$, ou seja, quando $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência é dita não-decrescente. Analogamente, (x_n) é dita decrescente quando $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots$, ou seja, quando $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. E se $x_n \geqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência é dita não-crescente.*

As sequências crescentes, não-decrescentes, decrescentes e não-crescentes são chamadas de sequências monótonas.

Observamos que toda sequência não-decrescente é sempre limitada inferiormente pelo seu primeiro termo, por exemplo. Do mesmo modo, uma sequência não-crescente é sempre limitada superiormente.

Definição 1.5. *Dizemos que $x' = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de $x = (x_n)$ quando existe uma sequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ estritamente crescente tal que $y_k = x_{n_k}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Em outras palavras, uma subsequência $x' = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de (x_n) é a restrição da função x a um subconjunto infinito $N' = \{n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots\}$ de $\mathbb{N}$. E podemos escrever $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$, ou $(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$ para indicar a subsequência $x' = x|_{\mathbb{N}'}$.

Exemplo 1.7. *Seja (x_n) a progressão aritmética de termo inicial a e razão r. A progressão aritmética $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de termo inicial a e razão $2r$ é uma subsequência de (x_n). De fato, tomando $n = n_k = 2k - 1$ $(n \in \mathbb{N})$, obtemos*

$$x_{n_k} = a + (n_k - 1)r = a + (2k - 2)r = a + (k - 1)2r = y_k.$$

Proposição 1.1. *Uma condição necessária e suficiente para que uma sequência monótona seja limitada é que ela possua uma subsequência limitada.*

Prova: Com efeito, claramente, se a sequência é limitada então toda subsequência dela também o é. Assim, sem perda de generalidade, consideremos uma sequência (x_n) não-decrescente, ou seja, $x_n \leqslant x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Seja (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n) tal que (x_{n_k}) é limitada, isto é, existe $c > 0$ tal que $|x_k| \leqslant c, \forall k \in \mathbb{N}$. Como (x_n) é não-decrescente segue-se que $x_{n_1} \leqslant x_{n_2} \leqslant x_{n_3} \leqslant \ldots \leqslant x_{n_k} \leqslant \ldots \leqslant c$. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $n_k > n$, e portanto, $x_n \leqslant x_{n_k} \leqslant c$. Logo, $x_n \leqslant c$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que toda sequência não-decrescente é sempre limitada inferiormente, concluímos que a sequência (x_n) é limitada.

■

Agora, falaremos de um tipo especial de sequências: as sequências convergentes. Que são sequências para o qual existe um número que funciona como uma espécie de "imã", atraindo para perto de si os termos da sequência quando n cresce indefinidamente, tal número será chamado limite da sequência, quando existir. Sequências para o qual não existe um número com tal propriedade de atração será chamada de sequência divergente. Essas noções serão de fundamental importância neste trabalho.

Definição 1.6. *Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite da sequência (x_n) se para todo $\epsilon > 0$ dado, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow |x_n - L| < \epsilon.$$

Escreve-se então $\lim_{n\to+\infty} x_n = L$, ou simplesmente, $\lim x_n = L$, ou ainda, $x_n \to L$.

Simbolicamente, temos que

$$\lim x_n = L \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N};\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow |x_n - L| < \epsilon.$$

Definição 1.7. *Uma sequência que possui limite chama-se convergente. Do contrário, ela é dita divergente.*

Observe que a condição de convergência de uma sequência (x_n) pode ser reescrita da seguinte forma: Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in (L - \epsilon, L + \epsilon) \text{ se } n > n_0,$$

ou seja, para qualquer intervalo aberto centrado em torno do limite L, sempre pode-se encontrar um índice $n_0 \in \mathbb{N}$, que aqui chamaremos de N, tal que a partir de N todos os termos de (x_n) estarão dentro desse intervalo, conforme mostra a seguinte figura.

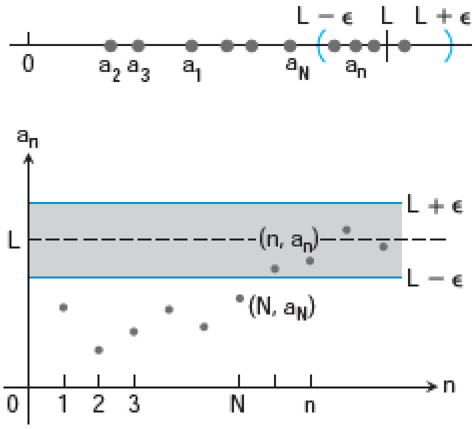

Figura 1.2: Exemplos gráficos de sequência convergente
Fonte: (THOMAS, 2013)

Teorema 1.1. *O limite de uma sequência, quando existe, é único.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente. Suponhamos $\lim x_n = L_1$ e $\lim x_n = L_2$ tais que $L_1 \neq L_2$. Sem perda de generalidade consideramos $L_1 \leqslant L_2$, assim, tomando $\epsilon = \frac{L_2-L_1}{2}$ existem n_1 e n_2 tais que

$$|x_n - L_1| < \frac{L_2 - L_1}{2} \text{ sempre que } \quad n > n_1 \tag{1.1}$$

e

$$|x_n - L_2| < \frac{L_2 - L_1}{2} \text{ sempre que } \quad n > n_2. \tag{1.2}$$

Assim

$$x_n \in \left(\frac{3L_1 - L_2}{2}, \frac{L_2 + L_1}{2}\right) \text{ sempre que } \quad n > n_1 \tag{1.3}$$

e

$$x_n \in \left(\frac{L_2 + L_1}{2}, \frac{3L_2 - L_1}{2}\right) \text{ sempre que } \quad n > n_2. \tag{1.4}$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, segue de (1.3) e (1.4) que

$$x_n \in \left(\frac{3L_1 - L_2}{2}, \frac{L_2 + L_1}{2}\right) \cap \left(\frac{L_2 + L_1}{2}, \frac{3L_2 - L_1}{2}\right) \text{ sempre que } \quad n > n_0. \tag{1.5}$$

Absurdo, pois $\left(\frac{3L_1-L_2}{2}, \frac{L_2+L_1}{2}\right) \cap \left(\frac{L_2+L_1}{2}, \frac{3L_2-L_1}{2}\right) = \phi$

□

A seguir, temos alguns resultados importantes para provar a divergência das sequências.

Teorema 1.2. *Se* $\lim x_n = a$*, então toda subsequência de* (x_n) *converge para o limite* a*.*

Demonstração. Seja (x_{n_i}) uma subsequência de (x_n). Como $\lim x_n = a$, temos que dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \epsilon$ sempre que $n > n_0$. Assim, como $\mathbb{N}' = \{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto infinito, existe $n_{i_0} \in \mathbb{N}'$ tal que $n_{i_0} > n_0$, logo, sempre que $n_i > n_{i_0}$ temos que $n_i > n_0$ implicando que $|x_{n_i} - a| < \epsilon$. Portanto, pela definição temos que $\lim x_{n_i} = a$. □

Teorema 1.3. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Como $\lim x_n = a$, temos que, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \epsilon$ sempre que $n > n_0$, ou seja, $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ sempre $n > n_0$. Assim, tomando $c = \max\{|x_1|, \cdots, |x_{n_0}|, |a - \epsilon|, |a + \epsilon|\}$ concluímos que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $|x_n| \leqslant c$. □

Observamos que a recíproca do Teorema1.3 é falsa, visto que a sequência $(1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots)$ é limitada mas não é convergente pois possui duas subsequências $(1, 1, 1, 1, \ldots)$ e $(2, 2, 2, 2, \ldots)$ que convergem para limites diferentes, a saber 1 e 2, respectivamente. No entanto, apresentaremos algumas recíprocas parciais deste resultado.

Sendo que o próximo resultado além de ser uma recíproca parcial do Teorema 1.3, fornece um critério de convergência, isto é permite concluir que uma sequência (x_n) converge, mesmo sem conhecermos, a priori seu limite.

Teorema 1.4. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência monótona limitada. Temos que (x_n) possui supremo denotado por $a = \sup x_n$.

Afirmamos que $\lim x_n = a$. De fato, dado $\epsilon > 0$ temos que $a - \epsilon < a$, isto é, $a - \epsilon$ não é cota superior do conjunto dos x_n. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \epsilon < x_{n_0} < a$, pela monotocidade da sequência (x_n), $n > n_0$ implica que $a - \epsilon < x_{n_0} \leqslant x_n$. Além disso, como $|x_n| \leqslant a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$ sempre que $n > n_0$. Portanto, $\lim x_n = a$. □

Outrossim, entre as sequências divergentes temos aquelas que tem um comportamento de certa forma regular, onde os valores de seus termos se tornam e se mantêm arbitrariamente grande positivamente ou arbitrariamente grande negativamente. Nesses casos temos as seguintes definições.

Definição 1.8. *Seja* (x_n) *uma sequência. Dizemos que "*x_n *tende para mais infinito"e denotamos por* $\lim x_n = +\infty$*, quando dado* $A > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n > A$ *sempre que* $n > n_0$*. Por outro lado, Dizemos que "*x_n *tende para menos infinito"e denotamos por* $\lim x_n = -\infty$*, quando dado* $A > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n < -A$ *sempre que* $n > n_0$*.*

Para finalizar esta seção, trouxemos os enunciados de algumas propriedades de limites, onde suas demonstrações podem ser encontradas em [2].

Teorema 1.5. *Se* $\lim x_n = 0$ *e* (y_n) *é uma sequência limitada então* $\lim (x_n.y_n) = 0$.

Teorema 1.6. *Se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim y_n = b$*, então*

1. $\lim (x_n \pm y_n) = a \pm b$*;*
2. $\lim (x_n.y_n) = a.b$*;*
3. $\lim \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{a}{b}$.

Teorema 1.7. *Seja* $\lim x_n = +\infty$.

1. *Se* (y_n) *é uma sequência limitadada inferiormente, então* $\lim (x_n \pm y_n) = +\infty$*;*
2. *Se* (y_n) *é uma sequência, tal que para algum* $c > 0$ *tem-se que* $y_n > c$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, então* $\lim (x_n \cdot y_n) = +\infty$.

Teorema 1.8. *Seja* $x_n > 0$. *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Então* $\lim\ x_n = 0 \ \Leftrightarrow\ \lim\ \frac{1}{x_n} = +\infty$.

Teorema 1.9 (Teorema do Confronto)**.** *Se* $\lim x_n = \lim y_n = a$ *e* $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *suficientemente grande então* $\lim\ x_n = a$.

1.2 Séries Numéricas

Nesta seção, definiremos somas infinitas através de limites, que são as chamadas séries numéricas, ou simplesmente séries.

O problema principal da teoria das séries é determinar quais são convergentes e quais não são. A questão de calcular o valor da soma das séries é melhor abordada através da teoria das séries de funções, como séries de Taylor e séries de Fourier.

Definição 1.9. *Uma série é uma soma* $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$ *com um número infinito de parcelas, em que* (x_n) *é uma sequência. Denotamos uma série por* $\sum x_n$.

Definição 1.10. *Dada uma sequência* (x_n)*. A partir dela, formamos uma nova sequência* (s_n) *cujos elementos são somas*

$$s_1 = x_1,\ s_2 = x_1 + x_2,\ s_3 = x_1 + x_2 + x_3, \ldots,\ s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n,$$

que chamaremos somas parciais (ou reduzidas) da série $\sum x_n$.

A parcela x_n *é chamada o* n*-ésimo termo ou termo geral da série.*

Definição 1.11. *Se existir o limite*

$$s = \lim s_n = \lim_{n\to+\infty}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n),$$

diremos que a série é convergente e o limite s será chamado a soma da série. Escrevemos então

$$s = \sum x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$$

Se a sequência das somas parciais não convergir, diremos que a série $\sum x_n$ é divergente.

Um exemplo muito interessante e que será muito útil para os nossos objetivos nesse trabalho é o seguinte.

Exemplo 1.8. *Uma série da forma $\sum_{n=0}^{\infty} x_0 r^n$, em que x_0 e r são números reais diferentes de zero, é denominada de série geométrica. A série pode ainda ser escrita como $\sum_{n=1}^{\infty} x_0 r^{n-1}$. Se $r = 1$, a n-ésima soma parcial da série geométrica é dada por*

$$s_n = x_0 + x_0.1 + x_0.1^2 + \ldots + x_0.1^n = n.x_0,$$

neste caso temos que $\lim s_n = +\infty$ se $x_0 > 0$ e $\lim s_n = -\infty$ se $x_0 < 0$, logo a série diverge. Se $r = -1$, a série diverge porque a n-ésima soma parcial oscila entre x_0 e 0.

Para o caso em que $|r| \neq 1$, determinamos a convergência ou divergência da série da seguinte forma. Sabendo que

$$s_n = x_0 + x_0.r + x_0.r^2 + \ldots + x_0 r^{n-1}, \tag{1.6}$$

a multiplicação de (1.6) por r resulta em

$$rs_n = x_0.r + x_0.r^2 + \ldots + x_0 r^{n-1} + x_0 r^n. \tag{1.7}$$

Subtraindo (1.6)-(1.7), obtemos:

$$s_n - rs_n = x_0 - x_0 r^n,$$

fatorando,

$$s_n(1-r) = x_0(1-r^n),$$

o que implica que

$$s_n = x_0\frac{1-r^n}{1-r}, \quad |r| \neq 1.$$

Assim, sabendo que se $-1 < r < 1$ então $\lim_{n\to+\infty} r^n = 0$, temos:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} x_0\frac{1-r^n}{1-r} = \frac{x_0}{1-r}.$$

Logo, acabamos de verificar que se $-1 < r < 1$, ou seja, $|r| < 1$ então a série geométrica é convergente e sua soma $s = \dfrac{x_0}{1-r}$.

Em resumo, a série geométrica é convergente somente para $|r| < 1$, *e, neste caso, sua soma é*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_0 r^n =, \frac{x_0}{1-r}$$

e diverge para $|r| \geqslant 1$.

Neste exemplo de série geométrica foi possível determinar quando a série converge ou diverge diretamente usando a definição de somas parciais, além de calcular seu valor. No entanto, mais geralmente, podemos determinar a convergência ou divergência de uma série sem necessariamente saber o valor para o qual ela converge, sendo estes os chamados critérios de convergência para séries.

A primeira condição necessária para a convergência de uma série é dada a seguir.

Teorema 1.10. *Se* $\sum x_n$ *é uma série convergente, então* $\lim x_n = 0$.

Demonstração. Seja $\sum x_n = s$. Por definição, tomando as somas parcias s_n e s_{n-1} temos que $\lim s_n = \lim s_{n-1} = s$. Note que $s_n - s_{n-1} = x_n$, assim, $0 = s - s = \lim s_n - \lim s_{n-1} = \lim x_n$. $\square$

A recíproca deste Teorema é falsa. O contra-exemplo clássico é dado pelo exemplo a seguir.

Exemplo 1.9. *A série harmônica* $\sum \frac{1}{n}$ *tem termo geral* $\frac{1}{n}$ *tende a zero mas a série diverge. Com efeito, temos*

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{2^n} \\ &= 1 + \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Assim, temos que $\lim s_{2^n} = +\infty$, *de onde decorre que* $\lim s_n = +\infty$.

Este resultado não é útil para determinarmos o limite de uma série, porém é uma forte ferramenta para estudarmos sua divergência, uma vez que, se $\lim x_n \neq 0$ então a série diverge.

Exemplo 1.10. *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ *diverge, pois*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{1}{n}\right] = 1 \neq 0.$$

Exemplo 1.11. *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ *diverge, pois* $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$ *não existe.*

Das propriedades de limites de sequências decorrem as seguintes propriedades de séries numéricas.

Teorema 1.11. *Sejam $x = \sum x_n$ e $y = \sum y_n$ séries convergentes então*

1- Regra da soma:$\sum(x_n + y_n) = \sum x_n + \sum y_n = x + y$;

2- Regra da diferença: $\sum(x_n - y_n) = \sum x_n - \sum y_n = x - y$;

3- Regra da multiplicação por uma constante: $\sum kx_n = k\sum x_n = kx, \forall k \in \mathbb{R}$.

Observamos que a série $\sum x_n + y_n$ pode convergir mesmo quando as séries $\sum x_n$ e $\sum y_n$ divergem.

Exemplo 1.12. *Consideremos as séries* $\sum x_n = 1+1+1+\ldots$ *e* $\sum y_n = (-1)+(-1)+(-1)+\ldots$ *que são divergentes. E observemos que a série* $\sum x_n + y_n = 0 + 0 + 0 + \ldots$ *é convergente para 0.*

Observamos ainda que podemos adicionar ou remover um número finito de termos a uma série sem alterar a convergência ou divergência da série, ainda que em caso de convergência isso geralmente altere a soma. Tal como podemos reindexar qualquer série sem alterar sua convergência desde que preservemos a ordem de seus termos.

Uma série $\sum x_n$ pode divergir se:

- as somas parciais $s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ não são limitadas;
- as somas parciais $s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ oscilam em torno de alguns valores de aderência.

No caso, que as somas parciais formam uma sequência monótona temos o seguinte resultado:

Teorema 1.12. *Seja $x_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A série $\sum x_n$ converge se, e somente se, as somas parciais $s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ formam uma sequência limitada, isto é, se, e somente se, existe $k > 0$ tal que $x_1 + x_2 + \ldots + x_n < k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Vejamos o teste da comparação cuja a ideia é comparar uma série dada com uma que sabemos ser convergente ou divergente.

Corolário 1.1 (Critério de Comparação). *Sejam $\sum x_n$ e $\sum y_n$ séries de termos não-negativos. Se existem $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $x_n \leqslant cy_n$ para todo $n > n_0$ então a convergência de $\sum y_n$ implica a convergência de $\sum x_n$, enquanto que a divergência de $\sum x_n$ acarreta a de $\sum y_n$.*

Exemplo 1.13. *Vamos estudar a convergência ou divergência da seguinte série*

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}},$$

comparando-a com a série harmônica

$$\sum \frac{1}{n}.$$

Inicialmente, observe que $\sqrt{n} \leqslant n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Assim,*

$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. *Usando o critério de comparação, concluímos que,* $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ *diverge pois a série harmônica diverge.*

Apresentaremos agora outros critérios de convergência para séries numéricas. O primeiro critério que veremos é designado às séries alternadas definida a seguir.

Definição 1.12. *Uma série da forma*

$$\sum (-1)^{n+1} x_n = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots$$

em que os termos x_n *são não-negativos para todo* $n \in \mathbb{N}$, *é chamada de série alternada.*

O Teorema a seguir nos diz que, se os termos de uma série alternada decrescem para 0 em valor absoluto, então a série é convergente.

Teorema 1.13 (Teste de Leibniz)**.** *A série alternada* $\sum (-1)^{n+1} x_n$ *é convergente se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) *os termos* x_n *forem todos positivos, isto é,* $x_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) *os termos* x_n *são não-crescentes, ou seja,* $x_n > x_{n+1}$ *para todo* $n \geqslant N$, *para algum* $N \in \mathbb{N}$.

(iii) $\lim x_n = 0$.

Exemplo 1.14. *Como aplicação imediata do Teste de Leibniz, temos que a série* $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, *chamada de série harmônica alternada é convergente, pois satisfaz as três condições do Teorema acima.*

Teorema 1.14 (Estimativa do Resto para Séries Alternadas)**.** *se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *for um serie alternada convergente, então o resto* R_n *é dado por*

$|R_n| = |s - s_n| \leqslant a_n + 1$

Demonstração. Sabemos pela prova do Teste de Series Alternadas que s está entre duas somas parciais consecutivas quaisquer s_n e $s_n + 1$. Segue que

$|s - s_n| \leqslant |s_n + 1 - s_n| = a_n + 1.$ □

Teorema 1.15 (Critério de Cauchy para séries)**.** *A fim de que a série* $\sum x_n$ *seja convergente é necessário e suficiente que, para cada* $\epsilon > 0$, *exista* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|s_{n+p} - s_n| < \epsilon$ *quaisquer que sejam* $n > n_0$ *e* $p \in \mathbb{N}$.

Este Teorema é de interesse principalmente teórico e utilizado para mostrar que se $\sum |x_n|$ converge então $\sum x_n$ também converge. Este fato merece destaque, por isso damos a seguinte definição.

Definição 1.13. *Uma série $\sum x_n$ chama-se absolutamente convergente quando $\sum |x_n|$ é uma série convergente.*

Teorema 1.16. *Toda série absolutamente convergente é convergente.*

Observamos que a recíproca do Teorema 1.16 é falsa, pois como vimos no Exemplo 1.14 a série harmônica alternada é convergente, no entanto a série harmônica diverge.

Corolário 1.2 (Teste da raiz)**.** *Se existe c tal que $\sqrt[n]{|x_n|} \leqslant c < 1$ para todo $n > n_0$ então $\sum x_n$ é (absolutamente) convergente. Em outras palavras, se $\limsup \sqrt[n]{|x_n|} < 1$ então a série $\sum x_n$ converge (absolutamente).*

Exemplo 1.15. *Vamos estudar a convergência da série*

$$\sum \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n.$$

Seja $x_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$. Observe que

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{2}{n}},$$

assim, $\lim \sqrt[n]{|x_n|} = \frac{2}{3}$, que é menor do que 1. Então, pelo teste da raiz, concluímos que a série dada é convergente.

Passamos agora ao teste da razão que mede a taxa de crescimento (ou decrescimento) de uma série examinando a razão $\frac{x_{n+1}}{x_n}$. Para a série geométrica $\sum x_0 r^n$, essa taxa é uma constante

$$\frac{x_0 r^{n+1}}{x_0 r^n} = r,$$

e a série converge se, e somente se, sua razão é menor que 1 em valor absoluto. O teste da razão é uma regra poderosa que estende esse resultado.

Teorema 1.17 (Teste da razão)**.** *Sejam $\sum x_n$ uma série de termos não-nulos e $\sum y_n$ uma série convergente com $y_n > 0$ para todo n. Se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \leqslant \frac{y_{n+1}}{y_n}$ para todo $n > n_0$ então a série $\sum x_n$ é absolutamente convergente.*

Corolário 1.3. *Se existe uma constante c tal que $0 < c < 1$ e $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \leqslant c$ para todo $n \geqslant n_0$, então a série $\sum x_n$ é absolutamente convergente. Em outras palavras, se $\limsup \left(\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\right) < 1$, a série $\sum x_n$ converge absolutamente.*

Corolário 1.4. *Se* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < 1$*, então a série* $\sum x_n$ *é absolutamente convergente.*

Exemplo 1.16. *Estudaremos a convergência da série* $\sum \dfrac{n^n}{n!}$*. Com efeito, seja* $x_n = \dfrac{n^n}{n!}$*, como todos os termos* x_n *são positivos temos que* $|x_n| = x_n$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, temos que,*

$$\begin{aligned}
\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{n^n} \\
&= \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!}.\frac{n!}{n^n} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\
&= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.
\end{aligned}$$

Logo, $\lim \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = e > 1$*. E pelo, Teste da razão, concluímos que a série diverge.*

Teorema 1.18. *Seja* (x_n) *uma sequência limitada. Então*

$$\liminf \frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \liminf \sqrt[n]{x_n} \leqslant \limsup \sqrt[n]{x_n} \leqslant \limsup \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Em particular, se existir $\lim x_{n+1}/x_n$ *existirá também* $\lim \sqrt[n]{x_n}$ *e os dois limites serão iguais.*

Capítulo 2

Séries de Funções

Depois de estudarmos sequências e séries de números reais, neste capítulo, consideraremos sequências e séries cujos termos são funções. Levando em consideração que alguns conceitos básicos de topologia de conjuntos, derivadas e integrais são necessários, assumiremos como verdade tais conceitos.

2.1 Convergência pontual

Definição 2.1. *Uma função $f : A \to B$ é um conceito matemático que consta de três elementos: um conjunto A, chamado o domínio da função (ou o conjunto onde a função está definida), um conjunto B, chamado o contradomínio (ou o conjunto onde a função toma valores) e uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$, chamado o valor que a função assume em x (ou no ponto x).*

Quando $B = \mathbb{R}$, dizemos que a função é uma função real, ou que assume valores reais.

Definição 2.2. *Seja X um conjunto de números reais. Uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ é uma correspondência que associa a cada número natural n uma função f_n, definida em X e tomando valores reais.*

Exemplo 2.1. $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *definida por* $f_n(x) = x^n, n = 1, 2, 3, \ldots$ *é uma sequência de funções.*

Ao contrário das sequências de números reais que admitem apenas uma noção de limite, para sequências de funções existem muitos modos de definir convergência de funções: simples ou pontual, uniforme, quase todo ponto, em L^p, etc. Neste trabalho, estamos interessados na convergência pontual e na convergência uniforme que definiremos a seguir.

Observe que dada uma sequência (f_n) de X em $\mathbb{R}$, para cada $x \in X$, podemos formar uma sequência de números reais $(f_n(x))$, formada pelos correspondentes valores das funções. Denotando o conjunto dos pontos x para os quais $(f_n(x))$ é uma sequência convergente por S. Podemos definir em S, a função $f : S \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \lim f_n(x), \text{ se } x \in S,$$

que é chamada de função limite da sequência (f_n) e dizemos que a sequência (f_n) converge pontualmente para f no conjunto S. Formalmente, temos

Definição 2.3. *Seja (f_n) uma sequência de funções de X em $\mathbb{R}$. Dizemos que (f_n) converge simplesmente ou converge pontualmente para uma função $f : S \to \mathbb{R}$ e indicamos por $f_n \to f$ pontualmente em S, quando para todo $x \in S$ fixo tem-se*

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x).$$

Equivalentemente, f_n converge pontualmente para f em S se para qualquer $\epsilon > 0$ dado e para cada $x \in S$, existe $n_0 = n_0(\epsilon, x) \in \mathbb{N}$, que depende ϵ e de x, tal que

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Quando estudamos séries de funções nosso interesse principal são questões do seguinte tipo: se cada uma das funções de uma sequência possui uma certa propriedade, como continuidade, diferenciabilidade ou integrabilidade, até que ponto essa propriedade é transferida para a função limite? Por exemplo, se cada função f_n for contínua em x. Sua função limite f também é continua em x? Veremos nos exemplos a seguir que, em geral, não é esse o caso.

Exemplo 2.2. *Considere a sequência de funções dada no Exemplo 2.1. Se $x \in [0, 1)$ então $x^n \to 0$ e se $x = 1$ então $x^n \to 1$ portanto a sequência (f_n) é pontualmente converge para a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \neq 1 \\ 1, & se\ x = 1. \end{cases}$$

Assim, temos uma sequência de funções contínuas convergindo pontualmente para uma função descontínua.

2.2 Convergência uniforme

Inicialmente, observemos o seguinte exemplo

Exemplo 2.3. *Seja $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$. Observe que se $x = 0$, então $\lim f_n(x) = 0$. Se $x \in (0,1]$ então $x = \dfrac{1}{b}$, com $b \in \mathbb{Z}_+, b \neq 0$. Temos que,*

$$\lim f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{n}{b}.\left(1 - \frac{1}{b^2}^n\right)\right] = 0.$$

Assim, $\lim f_n(x) = 0,\ \forall x \in [0,1]$. *Temos ainda que*

$$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = n\int_0^1 x(1-x^2)^n\mathrm{d}x = -\frac{n}{2}\frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^1 = \frac{n}{2(n+1)}.$$

Portanto, temos que $\lim \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ mas $\displaystyle\int_0^1 \lim f_n(x)\mathrm{d}x = 0$. Em outras palavras, o limite da integral não é igual a integral do limite. Este exemplo mostra que duas operações "passagem do limite" e "integração" nem sempre são permutáveis.

Assim, verificamos que a convergência pontual não é forte o suficiente para transferir as propriedades mencionadas acima dos termos f_n, para a função limite f. Consequentemente, somos convidados a estudar métodos de convergência mais fortes que preservem estas propriedades. O mais importante deles é a noção de convergência uniforme.

Aqui é importante observar que, na Definição 2.3, n_0 depende de ϵ e de x. Quando n_0 depender apenas de ϵ, temos outro sentido de convergência, a convergência uniforme que definiremos a seguir.

Definição 2.4. *Sejam uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ e uma função $f : S \to \mathbb{R}$. Dizemos que f_n converge uniformemente para f em S quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,\ \forall x \in S.$$

Agora, faremos a interpretação geométrica da convergência uniforme. Consideraremos a partir daqui, $S = X$. Seja uma função $f : X \to \mathbb{R}$ e chamemos de faixa de raio ϵ (e amplitude 2ϵ) em torno do gráfico de f ao conjunto dos pontos (x,y) do plano tais que $x \in X$ e $|y - f(x)| < \epsilon$, isto é, $f(x) - \epsilon < y < f(x) + \epsilon$, sendo ϵ um número real positivo.

Graficamente, a condição $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ significa que o gráfico de f_n está contido na faixa de raio ϵ em torno do gráfico de f, como na figura a seguir.

Em outras palavras, f_n convergir uniformemente para f significa que para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todas as funções f_n, com índices $n \geqslant n_0$ têm seus gráficos contidos na faixa de raio ϵ em torno do gráfico de f.

Assim,

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \Longleftrightarrow f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon.$$

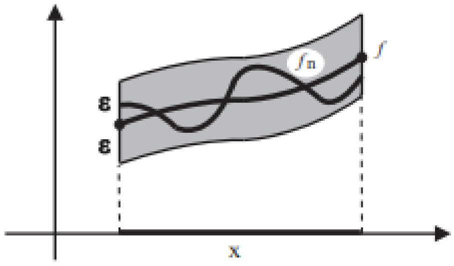

Figura 2.1: Convergência uniforme
Fonte: (ELON, 2013)

Exemplo 2.4. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = x/n$ para todo $x \in [0,1]$. Dado $\epsilon > 0$ tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > 1/\epsilon$, assim, $1/n_0 < \epsilon$. Logo, se $n \geqslant n_0$ e $x \in [0,1]$, então*

$$\left|\frac{x}{n} - 0\right| = \frac{|x|}{n} \leqslant \frac{1}{n_0} < \epsilon.$$

Observe que $x \in [0,1]$ implica $|x| \leqslant 1$. Portanto, (f_n) converge uniformemente para a função nula.

É imediato que a convergência uniforme implica na convergência pontual. A recíproca, entretanto, é falsa como veremos adiante.

Como vimos no Exemplo 2.2 na convergência pontual podemos ter uma sequência de funções convergindo para uma função descontínua. Todavia, o resultado a seguir nos assegura que o mesmo não ocorre na convergência uniforme. Ou seja, a convergência uniforme transmite a continuidade dos termos da sequência (f_n) à função limite f.

Teorema 2.1. *Seja (f_n) uma sequência de funções de X em $\mathbb{R}$, que converge uniformemente para uma função $f : X \to \mathbb{R}$. Se f_n é contínua em x_0 para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é contínua em x_0.*

Demonstração. Seja $x_0 \in X$. Como $f_n \to f$ uniformemente então dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x \in X \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{2.1}$$

Por outro lado, uma vez que f_n é contínua em x_0, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \tag{2.2}$$

De (2.1) e (2.2) segue-se que se $x \in X$ e $|x - x_0| < \delta$, então

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.\end{aligned}$$

Portanto, f é contínua.

□

Assim, segue da Teorema 2.1 que a convergência pontual não implica na convergência uniforme, visto que no Exemplo 2.2, a sequência (f_n) converge pontualmente para f, no entanto, tal convergência não pode ser uniforme pois f é descontínua em $x = 1$.

Uma aplicação fundamental do Teorema anterior é dado no estudo das séries infinitas de funções.

Definição 2.5. *Dada uma sequência (u_n) de funções definidas em um conjunto X, para cada $x \in X$ consideramos*

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \quad (n = 1, 2, ...).$$

Se existe uma função f tal que $f_n \to f$ pontualmente em X e

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x).$$

Dizemos que a série $\sum u_k$ converge para função soma f. Se $f_n \to f$ uniformemente em X, dizemos que a série $\sum u_k$ converge uniformemente para f.

Se cada termo u_k é uma função contínua em um ponto $x_0 \in X$, cada soma parcial f_n também é contínua em x_0 e segue do Teorema 2.1, o seguinte resultado.

Teorema 2.2. *Se uma série de funções $\sum u_k$ converge uniformemente para a função soma f em X e se cada termo u_k é contínuo em $x_0 \in X$, a soma f também é contínua em x_0, ou seja,*

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_k(x).$$

Demonstração. Seja $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$, tal que f_n uniformemente convergente para f. Logo

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Pela continuidade de cada f_n, obtemos o resultado.

□

A seguir temos um resultado importante sobre limite e integração.

Teorema 2.3. *Suponha que $f_n \to f$ uniformemente em um intervalo $[a, b]$ e que cada função f_n é contínua em $[a, b]$. Sejam*

$$g_n(x) = \int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t \quad \textit{se} \quad x \in [a, b] \quad \textit{e}$$
$$g(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Então $g_n \to g$ uniformemente em $[a, b]$. Ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^x \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t.$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant n_0$ implica que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}, \quad \forall t \in [a, b].$$

Logo, se $x \in [a, b]$ e se $n \geqslant n_0$, temos

$$\begin{aligned}
|g_n(x) - g(x)| &= \left| \int_a^x (f_n(t) - f(t))\mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t \\
&< \int_a^x \frac{\epsilon}{b-a}\mathrm{d}t \\
&= \epsilon,
\end{aligned}$$

de onde segue $g_n \to g$ uniformemente em $[a, b]$.

□

Ainda como consequência do Teorema 2.1, temos

Teorema 2.4. *Considere uma série de funções $\sum u_k$ uniformemente convergente para uma função soma f num intervalo $[a, b]$, com cada u_k uma função contínua em $[a, b]$. Se $x \in [a, b]$ definimos*

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_a^x u_k(t)\mathrm{d}t \quad \textit{e} \quad g(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Então $g_n \to g$ uniformemente em $[a, b]$. Ou seja,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^x u_k(t)\mathrm{d}t = \int_a^x \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k(t)\mathrm{d}t$$

ou

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x u_k(t)\mathrm{d}t = \int_a^x \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\mathrm{d}t.$$

Demonstração. Aplicamos o Teorema 2.3 à sequência de somas parciais (f_n) dadas por

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t),$$

e observamos que $\displaystyle\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int_a^x u_k(t)\mathrm{d}t.$

$\square$

Em outras palavras, o Teorema 2.4 diz que uma série uniformemente convergente pode ser integrada termo a termo.

Observamos que a convergência uniforme de (f_n) é suficiente, mas não necessária, para transmitir a continuidade dos termos individuais à função limite. No exemplo 2.3, tivemos uma sequência convergente, mas não uniformemente convergente, de funções contínuas com função limite contínua. Para enunciar um critério de convergência uniforme damos a seguinte definição.

Definição 2.6. *Uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ chama-se uma sequência de Cauchy se, para qualquer $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, existir*

$$n_0 \in X \text{ tal que } m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon, \text{ para todo } x \in X.$$

Teorema 2.5. *Uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ é uniformemente convergente se, e somente se, é uma sequência de Cauchy.*

Corolário 2.1. *Se as funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ são contínuas e (f_n) converge uniformemente em X, então a sequência (f_n) converge (uniformemente) em X.*

Teorema 2.6. *(Condição de Cauchy para convergência uniforme de séries) A série $\sum f_n(x)$ converge uniformemente em X se e somente se para cada $\epsilon > 0$, existe um n_0 tal que $n > n_0$ implica*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \epsilon, \quad \text{para} \quad p = 1, 2, \ldots \text{ e cada } x \in X.$$

A demonstração deste resultado é uma aplicação direta do Teorema 2.5.

Weierstrass estabeleceu um critério para provar que certas séries são uniformemente convergentes. O critério é aplicável sempre que a série dada possa ser majorada por uma série convergente de números reais positivos.

Teorema 2.7 (Critério M de Weierstrass)**.** *Seja (x_n) uma sequência de números reais não-negativos tal que*

$$0 \leqslant |f_n(x)| \leqslant x_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$. Então $\sum f_n(x)$ converge uniformemente em X se $\sum x_n$ converge.

A derivação termo a termo duma série arbitrária de funções é ainda mais delicada que a integração termo a termo.

Exemplo 2.5. *Considere a série* $\sum \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$. *Pelo Teorema 2.7 concluímos que ela converge para todo* $x \in \mathbb{R}$ *pois é majorada por* $\sum \frac{1}{n^2}$. *Além disso a convergência é uniforme em todo o eixo real. Porém, a série obtida por derivação termo a termo é* $\sum \frac{\cos nx}{n}$ *a qual diverge quando* $x = 0$.

Este exemplo mostra que a derivação termo a termo pode destruir a convergência, muito embora a série original seja uniformemente convergente. Para efetuarmos a derivação termo a termo, precisamos supor a convergência uniforme das derivadas. Em compensação basta, admitir que a sequência (f_n) convirja num único ponto do intervalo de definição.

Teorema 2.8. *Seja* (f_n) *uma sequência de funções deriváveis no intervalo* $[a, b]$. *Se, para um certo* $c \in [a, b]$, *a sequência numérica* $(f_n(c))$ *converge e as derivadas* f_n' *convergem uniformemente em* $[a, b]$ *para uma função* g, *então* (f_n') *converge uniformemente em* $[a, b]$ *para uma função derivável* f *tal que* $f' = g$.

Em resumo, se D *é o operador derivada então* $D(\lim f_n) = \lim D(f_n)$, *desde que as derivadas* Df_n *convirjam uniformemente.*

Corolário 2.2. *Uma sequência (ou uma série) de funções deriváveis num intervalo arbitrário* I *pode ser derivada termo a termo desde que convirja num ponto* $c \in I$ *e a sequência (ou série) convirja uniformemente em cada subintervalo compacto de* I.

Assim, justificar a permutação das operações de derivação e soma é, em geral, mais complicado do que no caso da integração. e isto nos leva a imaginar que os cálculos usuais com somas finitas nem sempre se estendem para séries infinitas, mesmo que as séries consideradas sejam uniformemente convergentes. Neste sentido, estamos interessados numa classe especial de séries especiais de funções, conhecidas por séries de potências, que podem ser tratadas como se fossem somas finitas, que veremos no próximo capítulo.

Capítulo 3

Séries de Taylor

Estudaremos neste capítulo as séries de funções mais importante da Análise, as séries de potências, que recebem este nome por serem definidas como séries infinitas de potências de alguma variável, em nosso caso x. Estas possuem propriedades que não são válidas para séries de funções gerais. Podemos entender séries de potências como "polinômios infinitos", uma vez que ao realizarmos a adição, subtração, multiplicação, derivação e integração de séries de potências o resultado ainda é uma tal série.

3.1 Séries de Potências

Definição 3.1. *Polinômios são expressões compostas pela adição de várias potências inteiras de x, que podem ser multiplicadas por um número real qualquer. De forma geral, um polinômio $p_n(x)$ de uma única variável pode ser representado algebricamente por:*

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n,$$

em que os $a_n's$ são os coeficientes e x é a variável.

O grau do polinômio é dado pelo valor do maior expoente.

Definição 3.2. *Uma função polinomial é uma função cuja a lei de formação é dada por um polinômio.*

Definição 3.3. *Uma série de funções reais $\sum(f_n)$ é chamada uma série de potências em torno de $x = x_0$ se a função f_n tem a forma*

$$f_n(x) = a_n(x - x_0)^n,$$

em que $a_n, x_0 \in \mathbb{R}, n = 0, 1, 2, \ldots$, ou seja, são da forma

$$\sum a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots, \tag{3.1}$$

A fim de simplificar a notação, muitas vezes é tratado apenas o caso $x_0 = 0$, ou seja, as séries de potências da forma

$$\sum a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{3.2}$$

uma vez que o caso geral se reduz a este pela mudança de variável $y = x - x_0$.

Exemplo 3.1. *Tomando* $a_n = 1$ *em* (3.2)*, obtemos a série de potências geométrica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots.$$

Essa é a série geométrica com o primeiro termo 1 e a razão x*, que converge para* $\frac{1}{1-x}$ *para* $|x| < 1$*. Expressamos esse fato escrevendo*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \qquad -1 < x < 1. \tag{3.3}$$

É importante ressaltar que podemos pensar somas parciais de uma série como polinômios $P_n(x)$ que aproximam a função soma s.

Observe que no caso do Exemplo 3.1 para valores próximos de zero, conseguimos uma boa aproximação com um número relativamente pequeno de termos. Conforme x se aproxima de -1 ou 1, devemos tomar mais termos para uma boa aproximação. Para ilustrar tal fato temos a figura a seguir:

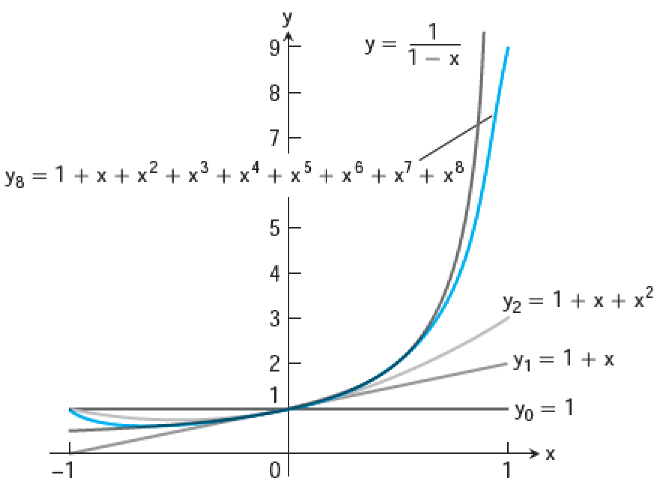

Figura 3.1: Gráfico de $f(x) = 1/(1-x)$ e quatro de suas aproximações polinomiais, $s_0 = y_0, s_1 = y_1, s_2 = y_2$ e $s_8 = y_8$

Fonte: (THOMAS, 2013)

Mesmo que as funções que aparecem em (3.2) sejam definidas sobre todo $\mathbb{R}$, não é de se esperar que a série (3.2) convirja para todo x pertencente a $\mathbb{R}$. Por exemplo usando o teste da razão, podemos mostrar que as séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n, \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!,$$

convergem para x nos conjuntos

$$\{0\}, \{x \in \mathbb{R}; |x| < 1\}, \mathbb{R},$$

respectivamente.

Assim, o conjunto para o qual uma série de potências converge pode ser pequeno, médio ou grande, isto é, associado a toda série de potências tem-se um intervalo, chamado intervalo de convergência, tal que a série é absolutamente convergente em todo elemento pertencente ao interior do intervalo e divergente fora dele. O centro do intervalo é x_0 e seu raio é chamado de raio de convergência da série de potências (o raio pode assumir os valores 0 e $+\infty$ nos casos extremos).

O próximo resultado estabelece a existência do intervalo de convergência e nos proporciona um método para calcular seu raio.

Teorema 3.1. *Dada uma série de potências* $\sum a_n(x - x_0)^n$*. Sejam* $\lambda = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *e* $r = 1/\lambda$ *(em que* $r = 0$ *se* $\lambda = +\infty$ *e* $r = +\infty$ *se* $\lambda = 0$*). Então a série converge absolutamente se* $|x - x_0| < r$ *e diverge se* $|x - x_0| > r$*.*

Demonstração. Aplicando o teste da raiz (Corolário 1.2), temos:

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = \frac{|x - x_0|}{r},$$

então $\sum a_n(x - x_0)^n$ converge absolutamente se $|x - x_0| < r$ e diverge se $|x - x_0| > r$.

□

Exemplo 3.2. *Considere a série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x - 2)^n.$$

Note que

$$\limsup \left[\left|-\frac{1}{2}\right|^n\right]^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Assim, $r = 2$*. E do Teorema 3.1 temos que a série dada é convergente se* $|x - 2| < 2$*, isto é,* $-2 < x - 2 < 2$*, o que implica que* $0 < x < 4$*. Observe ainda que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x - 2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-2}{2}\right)^n,$$

logo a série dada é uma série geométrica de primeiro termo 1 e razão $r = -\dfrac{x-2}{2}$*, e portanto, sua soma* s *é dada por*

$$s = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1+\frac{x-2}{2}} = \frac{2}{x}.$$

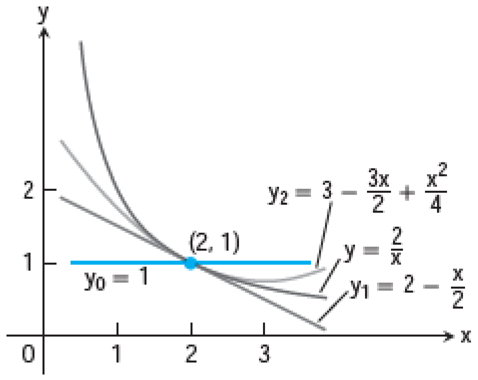

Figura 3.2: Gráfico de $y = f(x) = 2/x$ e suas três primeiras aproximações polinomiais
Fonte: (THOMAS, 2013)

Corolário 3.1. *A função* $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n$ *é contínua no intervalo de convergência* $(-r, r)$*.*

3.2 Propriedades das funções representadas por séries de potências

Definição 3.4. *Cada série de potências define uma função soma cujo valor em cada* x *do intervalo de convergência é dado por*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n.$$

Dizemos que a série representa uma função no intervalo de convergência e chama-se o desenvolvimento de f *em séries de potências de* a*.*

Neste trabalho, estamos interessados em dois problemas fundamentais sobre o desenvolvimento de funções em séries de potências que são determinar as propriedades da função soma f e determinar quando uma função pode ser representada como série de potências.

Do Teorema 3.1 segue que a série de potências converge absolutamente para todo $x \in (a-r, a+r)$ e que converge uniformemente em $[a-R, a+R]$ com $0 < R < r$. Sabendo-se que cada termo da série de potências é uma função contínua em todo o eixo real, resulta do Teorema 2.2 que a função soma f é contínua em $[a-R, a+R]$ e em $(a-r, a+r)$. Além disso, segue-se do Teorema 2.4 que podemos integrar termo a termo a série de potências em $[a-R, a+R]$. Formalmente, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.2. *Se uma função $f : X \to \mathbb{R}$ admite desenvolvimento em série de potências*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \tag{3.4}$$

num intervalo aberto $(a-r, a+r)$, então f é contínua nesse intervalo e para todo $x \in (a-r, a+r)$ tem-se

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}.$$

Demonstração. Seja $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$, note que $f(x) = \lim f_n(x)$. Como $a_k(x-a)^k$ é contínua, para todo $k = 1, \cdots, n$, em $(a-r, a+r)$ então $f_n(x)$ é contínua em $(a-r, a+r)$. Portanto, pelo Teorema (2.1) f também o é. Alem disso, temos que f_n converge uniformemente para f em $(a-r, a+r)$, assim, pelo Teorema (2.4)

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \int_a^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^x (t-a)^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}.$$

$\square$

O próximo resultado mostra que o intervalo de convergência da série que está sendo integrada e da série original é o mesmo e que podemos derivar esta série termo a termo no interior do respectivo intervalo de convergência.

Teorema 3.3. *[Derivação termo a termo] A função $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, definida por uma série de potências, é derivável em cada ponto x do seu intervalo de convergência $(a-r, a+r)$ e tem-se*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n.a_n(x-a)^{n-1}$$

e a série de potências da derivada também tem raio de convergência r.

Demonstração. Por simplicidade, consideraremos nesta demonstração $a = 0$. Do Corolário 2.2 sabemos que podemos derivar termo a termo uma série convergente, desde que a série das derivadas convirja uniformemente. Como o Teorema 3.1 nos garante que toda série de potências converge uniformemente em todo intervalo compacto contido no seu intervalo de convergência. Resta mostrar que os intervalos de convergência das séries $\sum a_n x^n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ coincidem. Claramente, a segunda destas séries converge se, e somente se, $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ converge. Assim, o raio de convergência da série das derivadas é o mesmo da série $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n$, que é o inverso do número

$$\limsup \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim \sqrt[n]{n}. \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|},$$

pois $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. Assim, $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ tem o mesmo raio de convergência que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

$\square$

Observamos que como cada série de potências $\sum a_n(x-a)\ n$ pode ser obtida por derivação da correspondente integrada, $\sum \dfrac{a_n(x-a)^{n+1}}{n+1}$, o teorema da derivação termo a termo nos garante que ambas as séries terão o mesmo raio de convergência.

3.3 Séries de Taylor

Nesta seção, mostraremos como construir, através da conhecida séries de Taylor, uma série de potências para funções com um certo grau de regularidade, a saber, uma função de classe C^n.

Definição 3.5. *Seja $I \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita de classe C^n quando f é n vezes derivável em I, ou seja, quando existe a n-ésima derivada de f para todo $x \in I$ denotada por $f^{(n)}$, e também $f^{(n)}$ é uma função contínua em I.*

Começamos os nossos estudos sobre série de Taylor definindo uma importante função polinomial.

Definição 3.6. *Seja uma função $f : I \to \mathbb{R}$ n vezes derivável no ponto $a \in I$. Definimos por Polinômio de Taylor de ordem n de f no ponto a o seguinte polinômio*

$$P(x) = f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n. \tag{3.5}$$

Observamos que $P(0) = f(a)$ e $P^{(n)}(0) = f^{(n)}(a)$ para todo n. Assim, este é o único polinômio de grau menor ou igual a n cuja as suas derivadas no ponto zero coincidem com as derivadas correspondente de f no ponto a.

Teorema 3.4 (Fórmula de Taylor infinitesimal). *Se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função n vezes derivável em $a \in I$. Então, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $a + x \in I$, tem-se que*

$$f(x+a) = P(x) + r(x), \tag{3.6}$$

onde $\lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{x^n} = 0$.

Demonstração. Inicialmente, é fácil verificar que $r(x) = f(x+a) - P(x)$ define uma função, cujo o domínio é o conjunto $J = \{x \in \mathbb{R};\ a + x \in I\}$, isto é, temos que

$$f(x+a) = P(x) + r(x). \tag{3.7}$$

Agora, vamos mostrar que $\lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{x^n} = 0$. Note que $0 \in J$, pois $a + 0 \in I$, alem disso, como P e f são n vezes deriváveis no ponto a então r é n vezes derivável em zero. Resultando que

$$r^{(n)}(x) = f^{(n)}(x+a) - P^{(n)}(x),\ \ \forall\, n.$$

logo $r(0) = r^{(n)}(0) = 0$ para todo n, pois $P(0) = f(a)$ e $P^{(n)}(0) = f^{(n)}(a)$ para todo n.

Para mostrar que $\lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{x^n} = 0$ usaremos o princípio de indução. Para $n = 1$ temos $r'(0) = r(0) = 0$, logo

$$\lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{x} \lim_{x\to 0} \frac{r(x) - r(0)}{x - 0} = r'(0) = 0.$$

Supondo que a proposição seja verdadeira para $n - 1$, $(n > 1)$, ou seja, $\lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{x^{n-1}} = 0$. Considerando que $r(0) = r^{(n)}(0) = 0$ para todo n e aplicando a hipótese de indução na derivada r' $\lim_{x\to 0} \frac{r'(x)}{x^{n-1}} = 0$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x| < \delta$ implica que $\left|\frac{r'_n(x)}{x^{n-1}}\right| < \epsilon$. Pelo teorema do valor médio existe c tal que $0 < |c| < |x|$ e $r'(c) = \frac{r(x)-r(0)}{x-0}$, como $r(0) = 0$ resulta que $r(x) = r'(c)x$, logo, para $0 < |x| < \delta$ segue que

$$\left|\frac{r(x)}{x^n}\right| = \left|\frac{r'(c)x}{x^n}\right| = \left|\frac{r'(c)}{x^{n-1}}\right| = \left|\frac{r'(c)}{c^{n-1}}\right| \cdot \left|\frac{c}{x}\right|^{n-1} < \epsilon.$$

Portanto, $\lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{x^n} = 0$. □

Nosso próximo resultado expressará a função r em relação a função f, isso será bastante útil para mostrarmos convergência das séries.

Teorema 3.5 (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange)**.** *Se $f : [a, x] \to \mathbb{R}$ é de classe C^n em $[a, x]$ e possui $n + 1$ derivadas em (a, x). Então, existe $c \in (a, x)$ tal que*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{3.8}$$

Demonstração. Pelo Teorema anterior temos que, para todo $t \in [a, x]$ segue que

$$f(y+t) = P(y) + r(y), \tag{3.9}$$

onde $\lim_{y\to 0} \frac{r(y)}{y^n} = 0$, sempre que $t + y \in [a, x]$. Dessa forma, tomando $y = x - t$ temos que $t + y = t + x - t = x \in [a, x]$, logo

$$f(x) = P(x-t) + r(x-t), \tag{3.10}$$

onde $\lim_{x \to t} \frac{r(x-t)}{(x-t)^n} = 0$ para todo $t \in [a, x]$. Tomando $r(x-t) = \frac{K}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}$ podemos definir $\varphi : [a, x] \to \mathbb{R}$, pondo

$$\varphi(t) = f(x) - P(x-t) - \frac{K}{(n+1)!}(x-t)^{n+1},$$

onde K será uma constante determinada posteriormente.

Desde que f, P e r são contínuas em $[a, x]$ e deriváveis em (a, x) então temos que φ também é contínua em $[a, x]$ e derivável em (a, x) e um cálculo direto resulta que $\varphi(a) = \varphi(x) = 0$. Assim, pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a, x)$ tal que $\varphi'(c) = 0$.

Agora, aplicando a regra da cadeia obtemos

$$\varphi'(t) = [f(x)]' - [P(x-t)]' - [r(x-t)]' = -[P(x-t)]' + r'(x-t). \tag{3.11}$$

Note que

$$\begin{aligned} [P(x-t)]' &= \left[f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right]' \\ &= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n, \end{aligned} \tag{3.12}$$

logo

$$\varphi'(t) = \frac{K - f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n. \tag{3.13}$$

Resultando que

$$0 = \frac{K - f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Assim, tomando $K = f^{(n)}(c)$ e usando $\varphi(a) = 0$ finalizamos a demonstração do Teorema.

$\square$

Por fim, assumindo que $f^{(0)} = f$, chamamos a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ de série de Taylor da função f em torno do ponto a.

Uma observação a ser feita que sai diretamente do teorema acima é o fato de que para termos $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ é necessário e suficiente que tenhamos $\lim_{n \to +\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = 0$. Em caso afirmativo, dizemos que f é uma função analítica.

Capítulo 4

Aplicações de Séries de Taylor em Funções do tipo exponencial

Neste capítulo, faremos algumas aplicações da teoria até aqui apresentada em relação a alguns tipos de funções exponenciais.

4.1 Série de Taylor da Função e^x, Raio de convergência e estimativa do valor de e

Do Cálculo Diferencial, sabemos que $f^{(n)}(x) = e^x, \forall n \in \mathbb{N}$, isto é, f é C^∞ em $\mathbb{R}$, logo pelo Teorema (3.5) podemos escrever f da seguinte forma

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}. \tag{4.1}$$

Além disso, temos que

$$f(0) = f^{(n)}(0) = e^0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Segue-se

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!} \tag{4.2}$$

Assim, para cada x fixado, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

. Portanto, f é analítica, ou seja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{4.3}$$

Agora vamos calcular o raio de convergência. Para este propósito, notamos que

$$\lambda = \limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0.$$

Logo, o raio de convergência é infinito, ou seja, a série é convergente para qualquer valor de $x \in \mathbb{R}$.

Dessa forma, podemos tomar $x = 1$ para obtermos o seguinte resultado

$$e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \ldots = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \tag{4.4}$$

E então podemos usar esta série para estimar o valor de e. Com efeito, considerando os 11 primeiros termos de (4.4), obtemos o seguinte valor aproximado para e

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} = \frac{9864101}{3628800} = 2,71828180\ldots$$

4.2 Derivada e integral da Função Exponencial

Seja $f(x) = e^x$. Já sabemos que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, assim, segue-se do Teorema 3.3 que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e^x.$$

pois $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ converge uniformemente para f.

Portanto, $f'(x) = e^x$. Isto é, a derivada da função exponencial é ela mesma.

Por outro lado, para cada intervalo $[a, b]$ obtemos do teorema (2.4) que

$$\int_a^b e^x dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \frac{x^n}{n!} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = e^b - e^a.$$

4.3 Estimando o valor da integral da função $\frac{e^x}{x}$

A função $f(x) = \frac{e^x}{x}$ é contínua no intervalo $[a, b]$, onde $a > 0$, com isso, sua integral neste intervalo existe, no entanto, calcular esse valor não é possível, pois não conhecemos sua primitiva. Dessa forma, o que podemos fazer é estima uma aproximação para esse valor. Nesta seção usaremos a serie de Taylor da função e^x para estimar este valor através da teoria de series de funções.

Segue-se

$$f(x) = \frac{1}{x} e^x = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}. \tag{4.5}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{1}{x}e^x dx &= \int_a^b \left(\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}\right) dx \\ &= \int_a^b \frac{1}{x}dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \frac{x^{n-1}}{n!}dx \\ &= \ln(b) - \ln(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n!n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!n}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Em particular, considerando o intervalo $[0, \infty]$ temos que

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x}e^x dx &= \ln(2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!n} \\ &= \ln(2) + 2 - 1 + 1 - \frac{1}{4} + \frac{4}{9} - \frac{1}{18} + \frac{1}{6} - \frac{1}{96} + \frac{4}{75} - \frac{1}{600} + \cdots \\ &= \ln(2) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n,\end{aligned} \tag{4.7}$$

onde $c_{2n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!(n+1)}$ e $c_{2n+1} = \frac{1}{(n+1)!(n+1)}$.

Afirmamos que a série alternada $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_n$ é convergente. De fato, pois $c_n > 0$ para todo n, além disso, é fácil verificar que

$$\lim c_{2n+1} = \lim \frac{1}{(n+1)!(n+1)} = 0.$$

Por outro lado, usando pelo princípio de indução temos que

$$2^n \leqslant (n+1)!, \ \forall\ n \geqslant 1, \tag{4.8}$$

resultando que

$$0 \leqslant \frac{2^{n+1}}{(n+1)!(n+1)} \leqslant \frac{2}{n}, \ \forall\ n \geqslant 1. \tag{4.9}$$

Portanto, pelo Teorema do confronto segue-se que

$$\lim c_{2n} = \lim \frac{2^{n+1}}{(n+1)!(n+1)} = 0.$$

Dessa forma, pela estimava do erro de série alternada (Teorema (1.14)) concluimos que

$$\int_1^2 \frac{1}{x}e^x dx \approx ln(2) + 2 - 1 + 1 - \frac{1}{4} + \frac{4}{9} - \frac{1}{18} + \frac{1}{6} - \frac{1}{96} + \frac{4}{75} \approx 3,0416194, \tag{4.10}$$

tem uma precisão de duas casas decimais, pois

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_n - \sum_{n=0}^{8}(-1)^n c_n\right| < c_9 = \frac{1}{600} \approx 0,0016666.$$

4.4 Estimando o valor da integral da função e^{x^2}

A função $f(x) = e^{x^2}$ por exemplo é contínua no intervalo $[a, b]$. Com isso, sua integral neste intervalo existe, no entanto, calcular esse valor não é possível, pois não conhecemos sua primitiva. Dessa forma, o que podemos fazer é estima uma aproximação para esse valor. Nesta seção usaremos a serie de Taylor da função e^{x^2} para estimar este valor através da teoria de series de funções.

Segue-se

$$f(x) = e^{x^2} = e^{x^2+0} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n!} + \frac{e^c x^{2(n+1)}}{(n+1)!} \tag{4.11}$$

Assim, para cada x fixado, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^c x^{2(n+1)}}{(n+1)!} = 0$$

. Portanto, f é analítica, ou seja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}. \tag{4.12}$$

Portanto,

$$\int_a^b e^{x^2} dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b \frac{x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{2n+1}}{n!(2n+1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{n!(2n+1)}. \tag{4.13}$$

Em particular, considerando o intervalo $[1, 2]$ temos que

$$\begin{aligned} \int_1^2 e^{x^2} dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{n!(2n+1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(2n+1)} \\ &= 2 - 1 + \frac{8}{3} - \frac{1}{3} + \frac{16}{5} - \frac{1}{10} + \frac{128}{42} - \frac{1}{42} + \frac{512}{216} - \frac{1}{216} + \frac{2048}{1320} - \frac{1}{1320} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n, \end{aligned} \tag{4.14}$$

onde $c_{2n} = \frac{2^{2n+1}}{n!(2n+1)}$ e $c_{2n+1} = \frac{1}{n!(2n+1)}$.

Afirmamos que a série alternada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n$ é convergente. De fato,, pois, $c_n > 0$ para todo n, além disso, é fácil verificar que

$$\lim c_{2n+1} = \lim \frac{1}{n!(2n+1)} = 0.$$

Por outro lado, usando pelo princípio de indução temos que

$$4^n \leqslant n!, \ \forall \ n \geqslant 9, \tag{4.15}$$

resultando que

$$0 \leqslant \frac{2^{2n+1}}{n!(2n+1)} \leqslant \frac{4^n}{n!n} \leqslant \frac{1}{n}, \ \forall \ n \geqslant 9. \tag{4.16}$$

Portanto, pelo Teorema do confronto segue-se que

$$\lim c_{2n} = \lim \frac{2^{2n+1}}{n!(2n+1)} = 0.$$

Dessa forma, pela estimava do erro de série alternada concluimos que

$$\int_1^2 e^{x^2} dx \approx 2 - 1 + \frac{8}{3} - \frac{1}{3} + \frac{16}{5} - \frac{1}{10} + \frac{128}{42} - \frac{1}{42} + \frac{512}{216} - \frac{1}{216} + \frac{2048}{1320} \approx 13,3743987493, \tag{4.17}$$

tem uma precisão de três casas decimais, pois

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n - \sum_{n=0}^{10} (-1)^n c_n \right| < c_{11} = \frac{1}{1320} \approx 0,000757575.$$

Capítulo 5

Conclusões e trabalhos futuros

Neste trabalho realizamos um estudo sobre séries de potências, destacando que estas são séries de funções especiais com propriedades importantes que não são próprias de séries de funções gerais. A saber, vimos que os cálculos usuais com somas infinitas, como derivada da soma é a soma das derivadas e integral da soma é a soma das integrais, que podem ser chamadas de derivação e integração termo a termo, respectivamente, nem sempre se estendem para séries infinitas, mesmo que as séries consideradas sejam uniformemente convergentes. Neste sentido as séries de potências tornam-se imprescindíveis, uma vez que se comportam de maneira similar as somas finitas, ou podemos dizer que se assemelham a polinômios infinitos, preservando a derivação e integração termo a termo, além de outras propriedades. Além disso, vimos ainda que tais séries definem as as chamadas funções analíticas que aparecem de maneira frequente no Cálculo e na Análise como a função exponencial, as funções seno e cosseno, por exemplo.

Com respeito à trabalhos futuros, motivados por [7] podemos realizar um estudo de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) utilizando a teoria aqui abordada de série de potências. Uma vez que EDOs de segunda ordem lineares com coeficientes constantes podem ser resolvidas analiticamente e a solução pode ser expressa em termos de funções elementares, como exponencial, seno e cosseno. De maneira geral o método de solução por séries de potências é bastante versátil e pode ser utilizado para obter a solução de praticamente qualquer EDO linear, de qualquer ordem. Tornando este método imensamente aplicado no uso de software na resolução de EDOs.

Bibliografia

[1] G. B. Thomas,et. al. Cálculo. Volume 2. 12a edição. tradução Carlos Scalici; revisão técnica Cláudio Hirofume Asano. São Paulo: Pearson Education do Brasil,2012.

[2] E. L. Lima. Curso de Análise, Volume 1. 14a edição. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 286. (2013).

[3] C.Neri, & M. A. Cabral, Curso de análise real. (2011).

[4] J. Stewart, & J. H. Romo, Cálculo. Cengage Learning. 2017.

[5] T. M. Apostol, Análisis matemático. Reverté. 2020.

[6] G. B. Thomas et al., Cálculo, volume 2, 2012.

[7] L. Seco, & M. Pratão, Equações diferenciais ordinárias e séries de potências. Brasília : Editora Universidade de Brasília, 2018

[8] J.A. White, & Elza F. Gomide. Análise real: uma introdução. 1973.

[9] L.N. Andrade, "Séries e Equações Diferenciais Ordinárias."