



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SALINÓPOLIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

GIZANDRA NUNES DA SILVA

APLICAÇÃO DA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA NA ROTAÇÃO DAS
CÔNICAS

SALINÓPOLIS

2024

GIZANDRA NUNES DA SILVA

**APLICAÇÃO DA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA NA ROTAÇÃO DAS
CÔNICAS.**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
à Faculdade de Matemática, do Campus Uni-
versitário de Salinópolis, da Universidade Fe-
deral do Pará, como requisito para obtenção
do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Amilcar Montalban
Sayago

SALINÓPOLIS

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586a Silva, Gizandra Nunes da.
Aplicação da integração numérica na rotação das cônicas /
Gizandra Nunes da Silva. — 2024.
61 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Amilcar Montalban Sayago
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade
Federal do Pará, Campus Universitário de Salinópolis, Curso de
Licenciatura em Matemática, Salinópolis, 2024.

1. Cônicas. 2. Integração numérica. 3. Integração analítica.
I. Título.

CDD 518.54

GIZANDRA NUNES DA SILVA

APLICAÇÃO DA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA NA ROTAÇÃO DAS CÔNICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática, do Campus Universitário de Salinópolis, da Universidade Federal do Pará, como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Dr. Amilcar Montalban Sayago

Data da aprovação: 22/02/2024

Conceito: Excelente

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
 AMILCAR MONTALBAN SAYAGO
Data: 08/03/2024 16:25:53-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Amilcar Montalban Sayago (Orientador)
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Documento assinado digitalmente
 LINDOMAR MIRANDA RIBEIRO
Data: 11/03/2024 18:36:01-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Lindomar Miranda Ribeiro
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Documento assinado digitalmente
 RAMZ LUIZ FRAIHA LOPES
Data: 11/03/2024 19:33:12-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Ramz Luiz Fraiha Lopes
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Dedico este trabalho aos meu pais Eliziete e Gilberto por todo amor, carinho e cuidado que sempre tiveram por mim. Ao meu Esposo Leandro, por sempre está ao meu lado, me ajudando e incetivando a não desistir dos meus sonhos. À memória do meu tio Osmar Nunes, por todo carinho e apoio.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus por iluminar meu caminho e me abençoar durante esse ciclo.

Ao meu orientador Prof. Dr. Amilcar Montalban Sayago, por ter guiado meu trabalho. Pela excelente orientação, paciência, "puxões de orelha" e apoio ao longo de toda minha vida acadêmica. Suas orientações foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Sou grata pela oportunidade de aprender sob sua orientação.

À minha família, meu porto seguro, em especial meus pais Eliziete e Gilberto, meus irmãos Elizandra e Gilberto, meu sobrinho João Levi e meus cunhados Ailton e Thainara por todo apoio e compreensão nos momentos de ausência.

Ao meu esposo Leandro, por todo amor, carinho e dedicação. Por entender os momentos que precisei me afastar por conta dos estudos. Suas palavras de incentivo foram importantes para que eu não desistisse.

Às minhas amigas, Marilena e Ana Tereza, por sonharem junto comigo, e me apoiarem incondicionalmente.

Aos meus amigos de trabalho, por tornarem minhas manhãs mais felizes, em especial, minha amiga Antônia e meu chefe Emilio, por serem pessoas iluminadas, que com suas sábias palavras me ajudaram nos momentos difíceis.

Aos professores participantes da banca examinadora Prof. Dr. Lindomar Miranda Ribeiro e Prof. Dr. Ramz Luiz Fraiha Lopes pelas valiosas colaborações e sugestões.

A todos professores e colegas do Campus Universitário de Salinópolis que, de alguma forma, contribuíram para a minha formação acadêmica, expresso minha gratidão.

Por fim, a todos que contribuíram para este TCC, meus sinceros agradecimentos. Cada palavra de incentivo, conselhos e suporte foi fundamental para o meu crescimento acadêmico e pessoal.

Esta conquista é o resultado de um esforço coletivo, e sou grata por ter atravessado esta jornada ao lado de pessoas incríveis. Levo comigo todas as lições aprendidas e as memórias construídas ao longo do caminho.

RESUMO

Mostra-se que, a resolução de problemas relacionados a cônicas pela 2ª regra composta de Simpson, é um método de integração numérica eficiente. Este trabalho teve como objetivo mostrar a precisão desse método em comparação com a utilização de problemas resolvidos analiticamente, já que alguns problemas possuem soluções analíticas complexa. Durante os estudos, foram explorados os conceitos fundamentais da teoria e aplicada a 2ª regra composta de Simpson para aproximar integrais definidas associadas as cônicas, fazendo a divisão do intervalo em subintervalos menores, para obter um resultado preciso. Ao aplicar esse método em problemas de áreas, volume de revolução, áreas de superfície de revolução e áreas de comprimento nota-se que os resultados foram satisfatórios, pois os erros obtidos ficaram dentro de um valor aceitável para os problemas analisados e à medida que aumentava-se o número de subintervalos a função aproximava-se mais ainda da solução analítica, comprovando assim a confiabilidade do método numérico empregado.

Palavras-chave: Cônicas. Integração Numérica. Integração Analítica.

ABSTRACT

It is shown that solving problems related to conics using Simpson's 2nd compound rule is an efficient numerical integration method. This work aimed to show the accuracy of this method compared to the use of analytically solved problems, since some problems have complex analytical solutions. During the studies, the fundamental concepts of the theory were explored and Simpson's 2nd compound rule was applied to approximate definite integrals associated with conics, dividing the interval into smaller subintervals, to obtain a precise result. When applying this method to problems of areas, volume of revolution, surface areas of revolution and areas of length, it was noted that the results were satisfactory, as the errors obtained were within an acceptable value for the problems analyzed and as they increased -the number of subintervals brought the function even closer to the analytical solution, thus proving the reliability of the numerical method used.

Keywords: Conical. Numerical Integration. Analytical Integration.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	9
I REFERENCIAIS TEÓRICOS	10
1 CÔNICAS	10
1.1 Cônicas na origem	10
1.2 Parábola	10
1.3 Elipse	14
1.4 Hipérbole	18
2 ROTAÇÃO	23
3 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA	26
3.1 2ª Regra de Simpson (ou regra de 3/8)	26
3.2 2ª Regra composta de Simpson (ou regra composta 3/8)	28
4 CURVAS PARAMÊTRICAS	29
4.1 Parametrização de curvas em $\mathbb{R}^2$	29
4.2 Comprimento de arco da curva dada por equações paramétricas	30
4.3 Área de uma superfície de revolução quando a curva é dada em forma paramétrica	31
II APLICAÇÕES	33
5 APLICAÇÕES	33
5.1 Cálculo de área aproximado por integração numérica.	33
5.2 Cálculo de volume	41
5.3 Cálculo de áreas de superfícies	44
5.4 Cálculo de comprimento	49
III CONCLUSÃO	52
6 CONCLUSÃO	52
REFERÊNCIAS	53
A Polinômios interpolantes	54
B Programação	55
C Cálculo de área e volume de revolução	59

INTRODUÇÃO

O estudo das cônicas se sistematizou através do matemático e astrônomo Apolônio de Perga (262-190 a.C), em sua obra intitulada *Secções Cônicas*. Através desse estudo mostrou-se que a obtenção de uma cônica ocorre a partir da secção de um plano e um cone reto. Ao tentarmos obter soluções analíticas para problemas envolvendo essas curvas, podemos nos deparar com integrais complexas. Este é o ponto chave para utilização da integração numérica na resolução dos problemas aqui apresentados.

A integração numérica fornece resultados precisos quando cálculos analíticos são complicados e complexos. Por este motivo, o objetivo deste trabalho é estudar as cônicas e resolver aplicações por meio da 2ª regra composta de Simpson, mostrando a eficácia desse método e fazendo a comparação entre as soluções analíticas e as soluções aproximadas de cada problema.

Em (1) estão descritas as cônicas, bem como suas definições, elementos principais e características. Em seguida, o estudo da rotação dessas cônicas onde a transformação das antigas coordenadas para as novas são dadas pelas equações:

$$\begin{cases} x = u\cos\theta - v\sin\theta \\ y = u\sin\theta + v\cos\theta \end{cases}$$

e com isso eliminar o termo misto da equação geral das cônicas $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ fazendo a redução para a forma $A_\theta u^2 + C_\theta v^2 + D_\theta u + E_\theta v + F_\theta = 0$ tornando a equação mais simples de ser resolvida. Continuando, temos a integração numérica, nessa parte estudaremos a 2ª regra de simpson. Logo em seguida, temos o estudo das curvas paramétricas. Esses dois últimos tópicos apresentados aqui, são de extrema importância para obtenção dos resultados dos problemas apresentados.

Em (5) estão descritas as aplicações. Esta é composta de 8 problemas envolvendo cônicas, que serão resolvidos por meio da integração numérica, são eles: cálculo de área, cálculo de volume, cálculo de área de superfície e cálculo de comprimento.

Para a obtenção dos resultados desses problemas foi feita uma programação no Software Wolfram Mathematica, utilizando integração numérica, especificamente a 2ª regra composta de Simpson para intervalos de $n = 3, 6, 9$, mas que pode ser utilizada para qualquer n . Fazendo a comparação entre as soluções analítica e aproximada notou-se que erro foi muito pequeno o que comprovou a eficácia desse método.

Parte I

REFERENCIAIS TEÓRICOS

1 CÔNICAS

1.1 Cônicas na origem

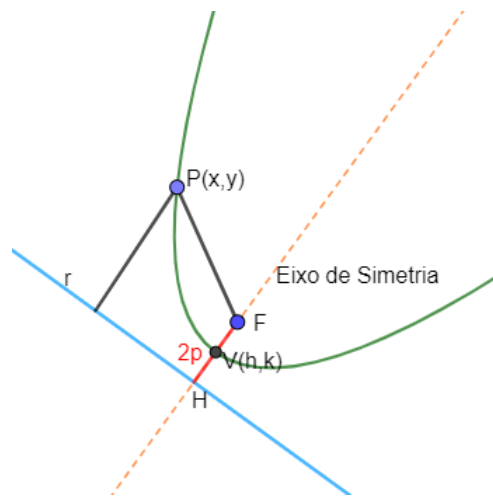
Uma cônica pode ser obtida da intersecção de um plano em um cone reto. A representação da cônica em coordenadas cartesianas é uma equação do segundo grau. Essa cônica pode ser uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole.

Em [3] temos o estudo das cônicas (parábola, elipse e hipérbole)

1.2 Parábola

Definição 1.1. Consideremos num plano Π um ponto F e uma reta diretriz r fixos, ao conjunto dos pontos $P(x,y)$ de Π equidistantes de F e r se dá o nome de parábola. Isto é, $d(F,P) = d(P,r)$.

Figura 1: Forma geral da Parábola.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Elementos da parábola

F : Foco

r : diretriz

$2p$: distância do foco ao eixo de simetria

Eixo de simetria: reta passa por F e perpendicular a r .

V : vértice (ponto médio de HF , Figura 1)

Teorema 1.1. Dado o foco F , $p > 0$ e o vértice $v(h,k)$ da parábola:

(i) Eixo focal vertical se e somente se;

(a) equação da parábola é $(y - k) = \frac{1}{4p}(x - h)^2$, com $\frac{1}{4p} > 0$.

(b) equação da parábola é $(y - k) = -\frac{1}{4p}(x - h)^2$, com $-\frac{1}{4p} < 0$.

(ii) Eixo focal horizontal se e somente se

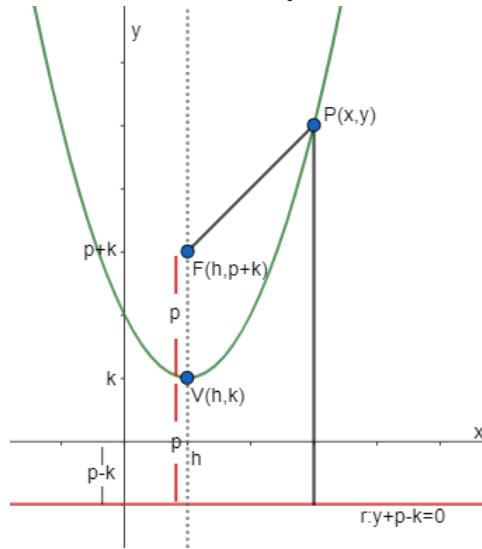
(a) equação da parábola é $(x - h) = \frac{1}{4p}(y - k)^2$, com $\frac{1}{4p} > 0$.

(b) equação da parábola é $(x - h) = -\frac{1}{4p}(y - k)^2$, com $-\frac{1}{4p} < 0$.

Demonstração(i)-(a)

Da Figura 2 a seguir. Seja $F(h, p+k)$ o foco e a reta directriz $r : y + p - k = 0$.

Figura 2: Parábola de eixo focal vertical com $\frac{1}{4p} > 0$.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Usando a definição da parábola temos $d(P, F) = d(P, r)$, isto é,

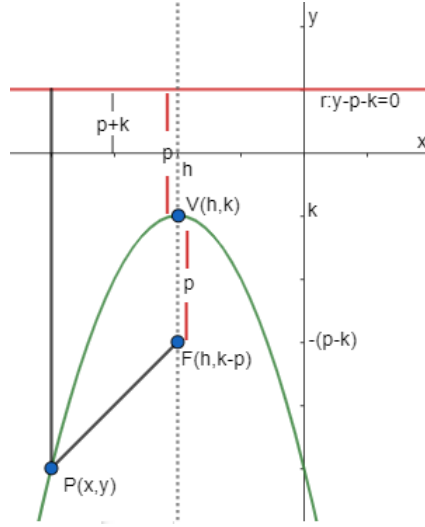
$$\begin{aligned} \sqrt{(x-h)^2 + (y-(p+k))^2} &= |y+p-k| \Leftrightarrow (x-h)^2 + (y-(p+k))^2 = (y+p-k)^2 \\ &\Leftrightarrow (x-h)^2 = (y+p-k)^2 - (y-(p+k))^2 \\ &\Leftrightarrow (x-h)^2 = (p-k+p+k)(2y-2k) \\ &\Leftrightarrow 4p(y-k) = (x-h)^2 \\ &\Leftrightarrow (y-k) = \frac{1}{4p}(x-h)^2 \end{aligned}$$

□

Demonstração(i)-(b)

Da Figura 3 a seguir. Seja $F(h, k-p)$ o foco e a reta directriz $r : y - p - k = 0$.

Figura 3: Parábola de eixo focal vertical com $-\frac{1}{4p} < 0$.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Usando a definição da parábola temos $d(P, F) = d(P, r)$, isto é:

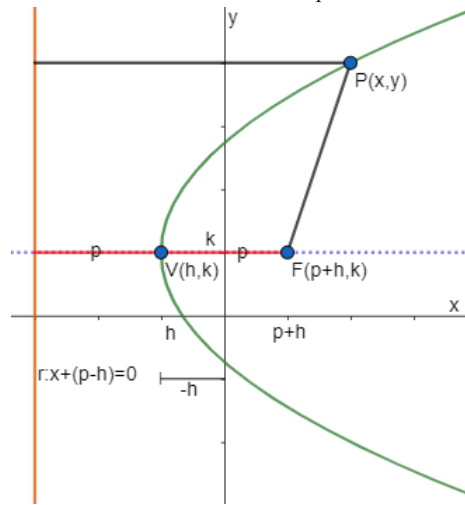
$$\begin{aligned}
 \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-p))^2} &= |y-p-k| \\
 \Leftrightarrow (x-h)^2 + (y-(k-p))^2 &= (y-p-k)^2 \\
 \Leftrightarrow (x-h)^2 &= (y-p-k)^2 - (y-(k-p))^2 \\
 \Leftrightarrow (x-h)^2 &= (y-p-k - (y-(k-p)))(y-p-k + (y-(k-p))) \\
 \Leftrightarrow (x-h)^2 &= (-2p)(2y-2k) \\
 \Leftrightarrow (x-h)^2 &= -4py + 4pk \\
 \Leftrightarrow (x-h)^2 &= -4p(y-k) \\
 \Leftrightarrow (y-k) &= -\frac{1}{4}(x-h)^2
 \end{aligned}$$

□

Demonstração(ii)-(a)

Da Figura 4 a seguir. Seja $F(p+h, k)$ o foco e a reta diretriz $r : x+p-h=0$.

Figura 4: Parábola de eixo focal horizontal com $\frac{1}{4p} > 0$.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Usando a definição da parábola temos $d(P, F) = d(P, r)$, isto é:

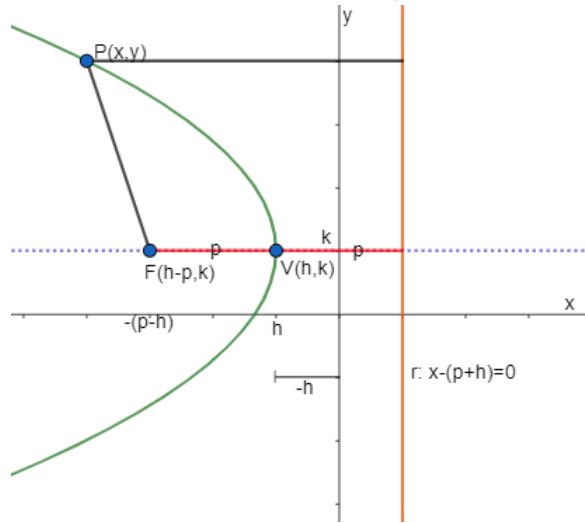
$$\begin{aligned}
 \sqrt{(x - (p + h))^2 + (y - k)^2} &= |x + (p - h)| \\
 \Leftrightarrow (x - (p + h))^2 + (y - k)^2 &= (x + (p - h))^2 \\
 \Leftrightarrow (y - k)^2 &= (x + (p - h))^2 - (x - (p + h))^2 \\
 \Leftrightarrow (y - k)^2 &= (x + (p - h) - (x - (p + h)))(x + (p - h) + (x - (p + h))) \\
 \Leftrightarrow (y - k)^2 &= (2p)(2x - 2h) \\
 \Leftrightarrow (y - k)^2 &= 4px - 4ph \\
 \Leftrightarrow (y - k)^2 &= 4p(x - h) \\
 \Leftrightarrow (x - h) &= \frac{1}{4}(y - k)^2.
 \end{aligned}$$

□

Demonstração(ii)-(b)

Da Figura 5 a seguir. Seja $F(h - p, k)$ o foco e a reta diretriz $r : x - (p + h) = 0$.

Figura 5: Parábola de eixo focal horizontal com $-\frac{1}{4p} > 0$.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Usando a definição da parábola temos $d(P, F) = d(P, r)$, isto é:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{(x - (h - p))^2 + (y - k)^2} &= |x - (p + h)| \\
 \Leftrightarrow (x - (h - p))^2 + (y - k)^2 &= (x - (p + h))^2 \\
 \Leftrightarrow (y - k)^2 &= (x - (p + h))^2 - (x - (h - p))^2 \\
 \Leftrightarrow (y - k)^2 &= (x - (p + h) - (x - (h - p)))(x - (p + h) + (x - (h - p))) \\
 \Leftrightarrow (y - k)^2 &= (-2p)(2x - 2h) \\
 \Leftrightarrow (y - k)^2 &= -4px + 4ph \\
 \Leftrightarrow (y - k)^2 &= -4p(x - h) \\
 \Leftrightarrow (x - h) &= -\frac{1}{4}(y - k)^2.
 \end{aligned}$$

□

1.3 Elipse

Definição 1.2. Consideremos em um plano Π dois pontos F_1 e F_2 , $2c > 0$ entre si. Seja $a > c$. Ao conjunto dos pontos $P \in \Pi$, tais que,

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

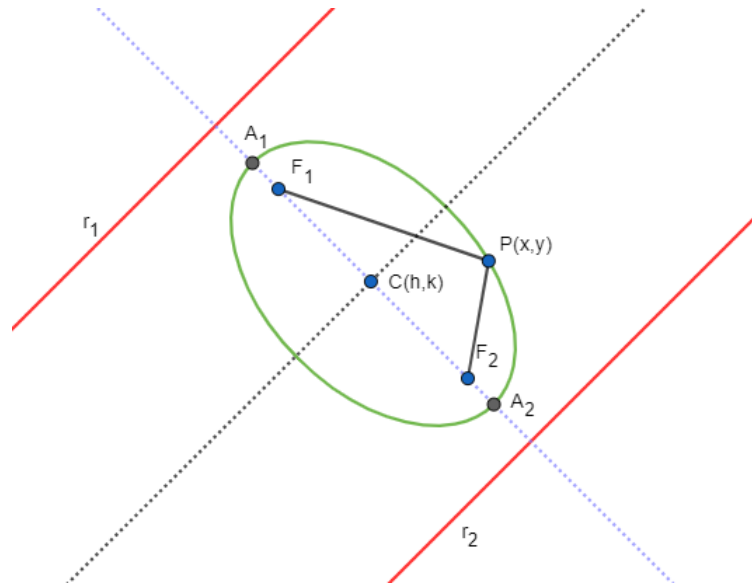
Se dá o nome de *elipse*.

Elementos da Elipse

F_1, F_2 são focos;

$\overline{A_1 A_2} = 2a$: Eixo maior;

Figura 6: Forma geral da Elipse.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

$\overline{B_1B_2} = 2b$: Eixo menor;

$d(F_1, F_2) = 2c$

r_1, r_2 reta diretriz; $d(F_1, P) = e \cdot d(P, r_1)$; $e = \frac{c}{a}$;

e : excentricidade;

$C = (h, k)$: Centro da Elipse;

$a^2 = b^2 + c^2$.

Teorema 1.2. Dado os focos F_1, F_2 e centro $C(h, k)$ da elipse, temos que:

(i) Eixo focal horizontal se e somente se; a equação da elipse é $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$; $a > b$.

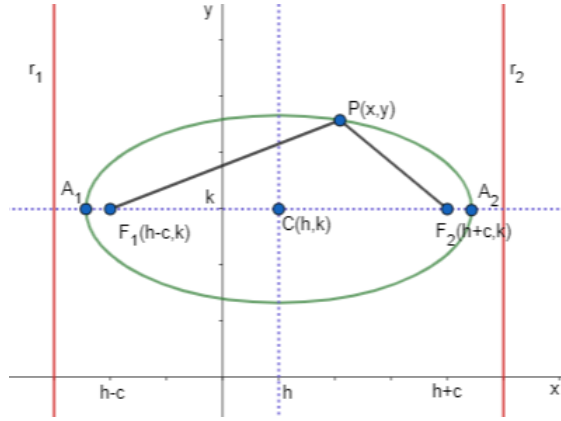
(ii) Eixo focal vertical se e somente se; a equação da elipse é $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$; $a > b$.

Demonstração. (i)

Da Figura 7 a seguir. Usando a definição da elipse, temos

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Figura 7: Elipse com eixo focal horizontal.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

, isto é:

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{(x-h+c)^2 + (y-k)^2} + \sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} = 2a \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{(x-h+c)^2 + (y-k)^2} = 2a - \sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} \\
 \Leftrightarrow & (\sqrt{(x-h+c)^2 + (y-k)^2})^2 = (2a - \sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2})^2 \\
 \Leftrightarrow & (x-h+c)^2 + (y-k)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} + (\sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2})^2 \\
 \Leftrightarrow & (x-h+c)^2 + (y-k)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} + (x-h-c)^2 + (y-k)^2 \\
 \Leftrightarrow & 4c(x-h) = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} \\
 \Leftrightarrow & (c(x-h) - a^2)^2 = (-a\sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2})^2 \\
 \Leftrightarrow & (c(x-h) - a^2)^2 = a^2((x-h-c)^2 + (y-k)^2) \\
 \Leftrightarrow & c^2(x-h)^2 - 2ca^2(x-h) + a^4 = a^2(x-h)^2 - 2a^2c(x-h) + a^2c^2 + a^2(y-k)^2 \\
 \Leftrightarrow & (a^2 - c^2)(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^4 - a^2c^2 \\
 \Leftrightarrow & b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2b^2
 \end{aligned}$$

Como $(a^2 - c^2) \neq 0$, pois $a^2 - c^2 > 0$ porque $a > c > 0$. Mas $a^2 - c^2 = b^2$. Portanto $a^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Dividindo a equação por a^2b^2 , temos .

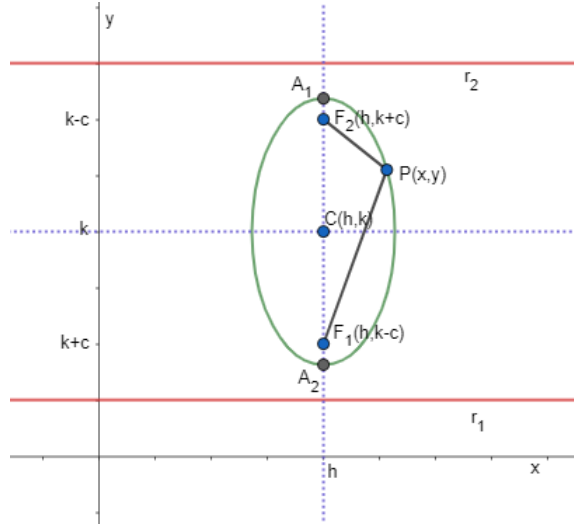
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

□

Demonstração(i)-(b)

Da Figura 8 a seguir. Usando a definição da elipse temos $d(P, F) + d(P, r) = 2a$,

Figura 8: Elipse com eixo focal vertical.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

isto é:

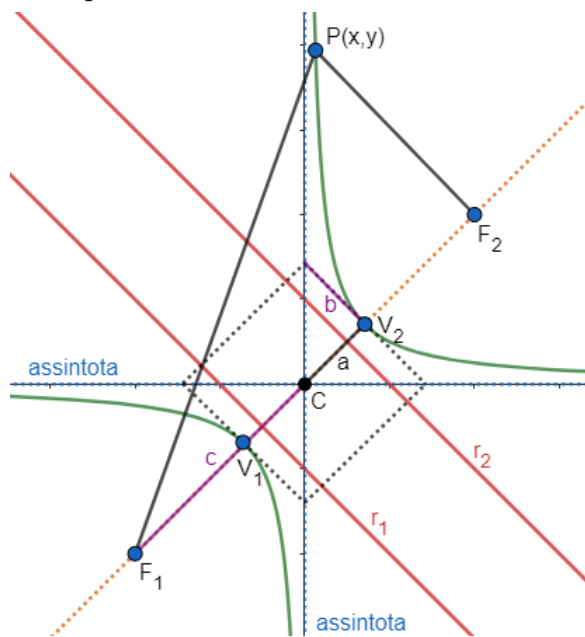
$$\begin{aligned}
& \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2} + \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} = 2a \\
& \Leftrightarrow \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2} = 2a - \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} \\
& \Leftrightarrow (x-h)^2 + (y-(k-c))^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} + (x-h)^2 + (y-(k+c))^2 \\
& \Leftrightarrow (y-(k-c))^2 - (y-(k+c))^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} \\
& \Leftrightarrow ((y-(k-c)) - (y-(k+c)))(y-(k-c) + (y-(k+c))) = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} \\
& \Leftrightarrow 2c(2y-2k) = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} \\
& \Leftrightarrow 4c(y-k) = 4(a^2 - a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2}) \\
& \Leftrightarrow c(y-k) = a^2 - a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} \\
& \Leftrightarrow (c(y-k) - a^2)^2 = (-a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2})^2 \\
& \Leftrightarrow c^2(y-k)^2 - 2a^2c(y-k) + a^4 = a^2((x-h)^2 + (y-k-c)^2) \\
& \Leftrightarrow c^2(y-k)^2 - 2a^2c(y-k) + a^4 = a^2(x-h)^2 + a^2((y-k)-c)^2 \\
& \Leftrightarrow c^2(y-k)^2 - 2a^2c(y-k) + a^4 = a^2((x-h)^2 + a^2((y-k)^2 - 2a^2c(y-k) + c^2)) \\
& \Leftrightarrow c^2(y-k)^2 - 2a^2c(y-k) + a^4 = a^2((x-h)^2 + a^2(y-k)^2 - 2a^2c(y-k) + a^2c^2) \\
& \Leftrightarrow c^2(y-k)^2 - a^2(y-k)2 - a^2(x-h)^2 = a^2c^2 - a^4 \\
& \Leftrightarrow (c^2 - a^2)(y-k)^2 - a^2(x-h)^2 = a^2(c^2 - a^2) \\
& \Leftrightarrow -b^2(y-k)^2 - a^2(x-h)^2 = -a^2b^2 \\
& \Leftrightarrow \frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \\
& \Leftrightarrow \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1
\end{aligned}$$

1.4 Hipérbole

Definição 1.3. *Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano cujo valor absoluto das diferenças das distâncias a dois pontos fixos (Focos) é constante e menor do que a distância entre os focos, Ou seja, se P é um ponto da hipérbole que tem por focos os pontos F_1 e F_2 , então:*

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

Figura 9: Forma geral da Hipérbole.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Elementos da hipérbole

F_1, F_2 : são os focos

V_1, V_2 : são os vértices

C : É o centro

$$\overline{CF_1} = \overline{CF_2} = c$$

$$\overline{CV_2} = \overline{CV_1} = a$$

Eixo de simetria: reta passa por F e perpendicular as diretrizes r_1 e r_2 .

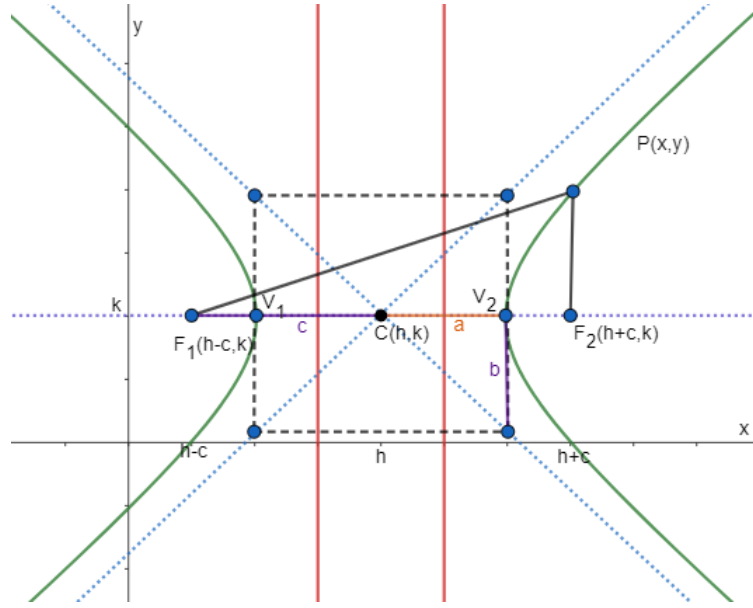
Teorema 1.3. *Dado os focos F_1, F_2 e centro $C(h, k)$ da hipérbole, temos que:*

(i) *Eixo focal horizontal se e somente se; a equação da hipérbole é $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$*

(ii) *Eixo focal vertical se e somente se; a equação da hipérbole é $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$*

Demonstração. (i) Da Figura 10 a seguir. Usando a definição da hipérbole temos:

Figura 10: Hipérbole de Eixo Focal Horizontal.



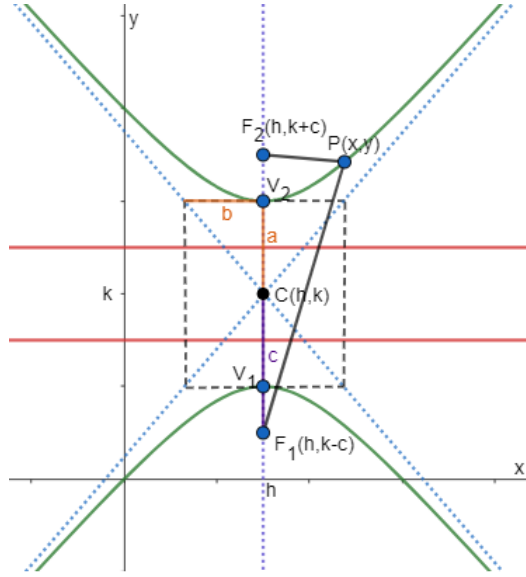
Fonte: Elaborado pelo Autor.

$$\begin{aligned}
 d(P, F_1) - d(P, F_2) &= 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x-h+c)^2 + (y-k)^2} - \sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} = 2a \\
 &\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-h+c)^2 + (y-k)^2} \right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} \right)^2 \\
 &\Leftrightarrow (x-h+c)^2 + (y-k)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} + (x-h-c)^2 + (y-k)^2 \\
 &\Leftrightarrow (x-h+c)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} + (x-h-c)^2 \\
 &\Leftrightarrow 4(x-h)c = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} \\
 &\Leftrightarrow \left(c(x-h) - a^2 \right)^2 = \left(a\sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} \right)^2 \\
 &\Leftrightarrow c^2(x-h)^2 - 2a^2c(x-h) + a^4 = a^2(x-h-c)^2 + a^2(y-k)^2 \\
 &\Leftrightarrow c^2(x-h)^2 - 2a^2c(x-h) + a^4 = a^2(x-h)^2 - 2a^2c(x-h) + a^2c^2 \\
 &\Leftrightarrow (c^2 - a^2)(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = a^2(c^2 - a^2) \\
 &\Leftrightarrow \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.
 \end{aligned}$$

□

Demonstração. (ii) Da Figura 11 a seguir. Usando a definição da hipérbole temos:

Figura 11: Hipérbole de Eixo Focal Vertical.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2} - \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2} = 2a + \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-h)^2 + (y-(k-c))^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} + (x-h)^2 + (y-(k+c))^2$$

$$\Leftrightarrow (y-(k-c))^2 - (y-(k+c))^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2}$$

$$\Leftrightarrow (y-(k-c) - (y-(k+c)))(y-(k-c) + (y-(k+c))) = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2}$$

$$\Leftrightarrow 2c(2y-2k) = 4(a^2 + a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2})$$

$$\Leftrightarrow 4c(y-k) = 4(a^2 + a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2})$$

$$\Leftrightarrow c(y-k) = a^2 + a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2}$$

$$\Leftrightarrow c(y-k) - a^2 = a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2}$$

$$\Leftrightarrow (c(y-k) - a^2)^2 = a^2((x-h)^2 + (y-(k+c))^2)$$

$$\Leftrightarrow c^2(y-k)^2 - 2a^2c(y-k) + a^4 = a^2((x-h)^2 + (y-(k+c))^2)$$

$$\Leftrightarrow c^2(y-k)^2 - 2a^2c(y-k) + a^4 = a^2(x-h)^2 + a^2((y-k)-c)^2$$

$$\Leftrightarrow c^2(y-k)^2 - 2a^2c(y-k) + a^4 = a^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 - 2a^2c(y-k) + a^2c^2$$

$$\Leftrightarrow c^2(y-k)^2 - a^2(y-k)^2 - a^2(x-h)^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$\Leftrightarrow (c^2 - a^2)(y-k)^2 - a^2(x-h)^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$\Leftrightarrow b^2(y-k)^2 - a^2(x-h)^2 = a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

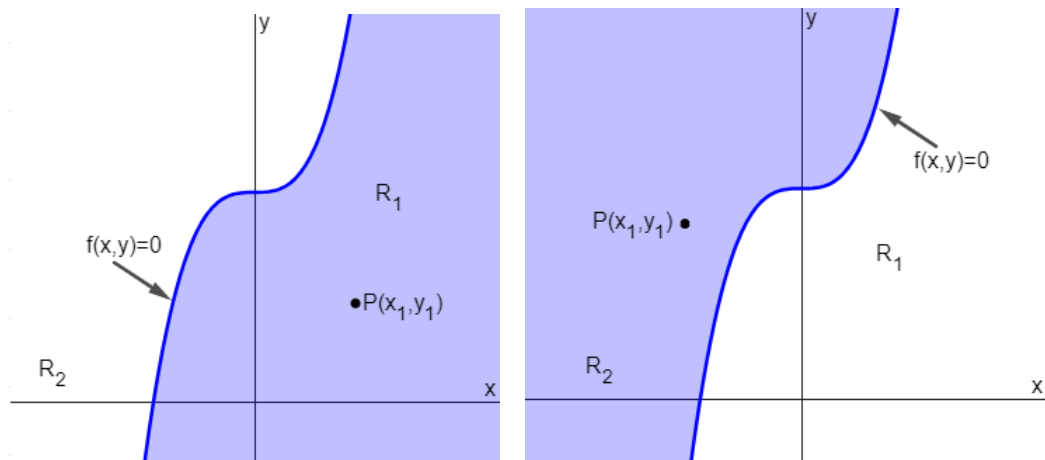
$$\Leftrightarrow \frac{(x-h)^2}{b^2} - \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1.$$

□

Observação 1.1. Seja $f(x, y) \leq 0$ uma inequação, quando $f(x, y) = 0$ divide em duas regiões R_1 e R_2 .

- (i) $P(x_1, y_1) \in R_1$, então $f(x_1, y_1) \leq 0$ é verdadeiro e tem-se a solução da inequação (geometricamente a região hachurada). Caso contrário: geometricamente a região hachurada em R_2 .
- (ii) $P(x_1, y_1) \in R_2$, então $f(x_1, y_1) \leq 0$ é verdadeiro e tem-se a solução da inequação (geometricamente a região hachurada). Caso contrário: geometricamente a região hachurada em R_1 .

Figura 12: Regiões R_1 e R_2 .



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Exemplo 1. Esboce o gráfico da inequação

$$y \geq x^2.$$

Solução :

$$\underbrace{y - x^2}_{f(x, y)} \geq 0$$

$$f(x, y) = y - x^2$$

$$f(x, y) = 0 = y - x^2$$

$$y = x^2$$

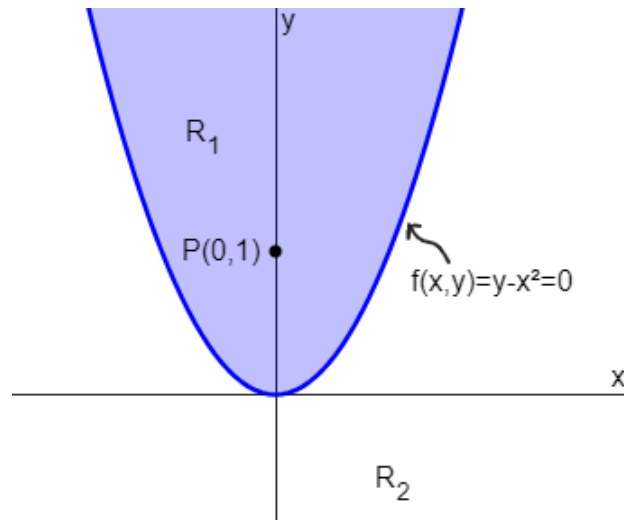
$$P(0, 1) \in R_1(0, 1) \geq 0$$

$$1 - 0^2 \geq 0$$

$$1 \geq 0$$

é verdadeiro, então a região hachurada é R_1 .

Figura 13: Parábola hachurada em R_1



Fonte: Elaborado pelo Autor

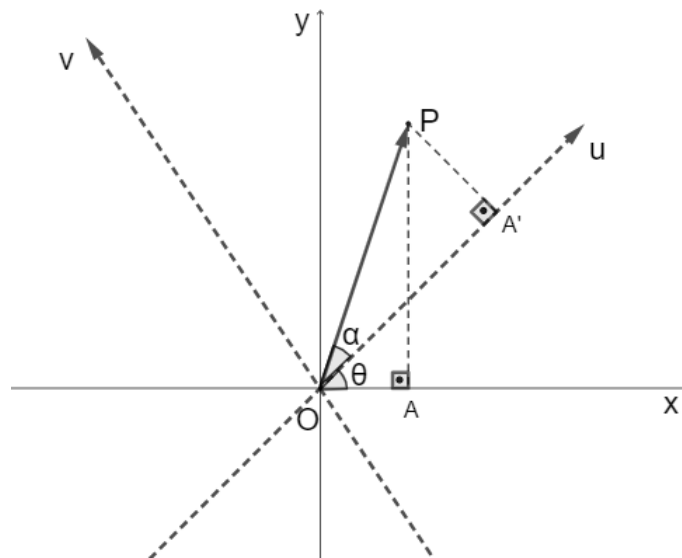
2 ROTAÇÃO

De [4], tem-se o seguinte Teorema:

Teorema 2.1. *Se os eixos coordenados são girados de um ângulo θ em torno de sua origem O como ponto fixo e se as coordenadas de qualquer ponto P são (x, y) e (u, v) antes e depois da rotação, respectivamente, então as equações de transformações das antigas para as novas coordenadas são dadas por:*

$$\begin{cases} x = u\cos(\theta) - v\sin(\theta) \\ y = u\sin(\theta) + v\cos(\theta) \end{cases} \quad (2.1)$$

Figura 14: Rotação.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Demonstração. Na Figura 14 estão representados os dois sistemas coordenados, xOy (antigo) e uOv (novo) oriundos da rotação por um ângulo θ . Seja P um ponto qualquer deste plano e considere as perpendiculares PA (baixada sobre o eixo x), PA' (baixada sobre o eixo x') e o segmento OP de comprimento r . Seja α ângulo POA' . Obtemos, a partir das relações trigonométricas nos triângulo retângulo $OA'P$, tem-se as seguintes equações:

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = \frac{u}{r} \Rightarrow u = r\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) = \frac{v}{r} \Rightarrow v = r\sin(\alpha) \end{cases} \quad (2.2)$$

e do triângulo retângulo OAP , tem-se as seguintes equações:

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \theta) = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos(\alpha + \theta) \\ \sin(\alpha + \theta) = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin(\alpha + \theta) \end{cases} \quad (2.3)$$

Usando as identidades trigonométricas de arcos compostos na equação (2.3), tem-se que;

$$\begin{cases} x = r \cos(\alpha) \cos(\theta) - r \sin(\alpha) \sin(\theta) \\ y = r \sin(\alpha) \cos(\theta) + r \sin(\theta) \cos(\alpha) \end{cases} \quad (2.4)$$

Substituindo equação (2.2) em (2.4)

$$\begin{cases} x = u \cos(\theta) - v \sin(\theta) \\ y = u \sin(\theta) + v \cos(\theta). \end{cases}$$

□

Teorema 2.2. *Se a equação geral do segundo grau $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ quando $B \neq 0$ pode ser transformada na equação $A_\theta(u)^2 + C_\theta(v)^2 + D_\theta u + E_\theta v + F_\theta = 0$ elimina-se o termo $B_\theta uv$, com $B_\theta = 0$, por rotação dos eixos coordenados do ângulo agudo positivo θ , então*

- $\theta = 45^\circ$, se $A = C$.

-

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{1 + \left| \sqrt{\frac{(A-C)^2}{(A-C)^2 + (B)^2}} \right|}{2}},$$

$$\sin(\theta) = \sqrt{\frac{1 - \left| \sqrt{\frac{(A-C)^2}{(A-C)^2 + (B)^2}} \right|}{2}},$$

$$\text{onde } A \neq C, \left| \sqrt{\frac{(A-C)^2}{(A-C)^2 + (B)^2}} \right| = \begin{cases} \sqrt{\frac{(A-C)^2}{(A-C)^2 + (B)^2}}, & \text{se } \frac{B}{A-C} > 0, \\ -\sqrt{\frac{(A-C)^2}{(A-C)^2 + (B)^2}}, & \text{se } \frac{B}{A-C} < 0 \end{cases}$$

Demonstração. Usando a equação (2.1) em $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, temos:

$$\begin{aligned} & A(u \cos(\theta) - v \sin(\theta))^2 + B(u \cos(\theta) - v \sin(\theta))(u \sin(\theta) + v \cos(\theta)) + C(u \sin(\theta) \\ & \quad + v \cos(\theta))^2 + D(u \cos(\theta) - v \sin(\theta)) + E(u \sin(\theta) + v \cos(\theta)) + F = 0 \\ & A(u^2 \cos^2(\theta) - 2uv \cos(\theta) \sin(\theta) + v^2 \sin^2(\theta)) + B(u^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + uv \cos^2(\theta) \\ & \quad - uv \sin^2(\theta) - v^2 \sin(\theta) \cos(\theta)) + C(u^2 \sin^2(\theta) + 2uv \sin(\theta) \cos(\theta) + v^2 \cos^2(\theta)) \\ & \quad + D(u \cos(\theta) - v \sin(\theta)) + E(u \sin(\theta) + v \cos(\theta)) + F = 0 \end{aligned}$$

Colocando u e v em evidência, temos:

$$\begin{aligned}
 & (A\cos^2(\theta) + B\cos(\theta)\sin(\theta))u^2 + (-2A\cos(\theta)\sin(\theta) + B\cos^2(\theta) - B\sin^2(\theta) \\
 & \quad + 2\sin(\theta)\cos(\theta))uv + (A\sin^2(\theta) - B\sin(\theta)\cos(\theta) + C\cos^2(\theta))v^2 \\
 & \quad + (D\cos(\theta) + E\sin(\theta))u + (-D\sin(\theta) + E\cos(\theta))v + F = 0 \\
 & (A\cos^2(\theta) + B\cos(\theta)\sin(\theta) + C\sin^2(\theta))u^2 + (b(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \\
 & \quad - 2(A - C)\cos(\theta)\sin(\theta))uv + (A\sin^2(\theta) - B\sin(\theta)\cos(\theta) + C\cos^2(\theta))v^2 \\
 & \quad + (D\cos(\theta) + E\sin(\theta))u + (-D\sin(\theta) + E\cos(\theta))v + F = 0
 \end{aligned}$$

Usando:

$$\begin{aligned}
 \sin(2\theta) &= 2\sin(\theta)\cos(\theta) \\
 \cos(2\theta) &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (A\cos^2(\theta) + B\cos(\theta)\sin(\theta) + C\sin^2(\theta))u^2 + (B(\cos^2(2\theta) - (A - C)\sin(2\theta))uv \\
 & \quad + (A\sin^2(\theta) - B\sin(\theta)\cos(\theta) + C\cos^2(\theta))v^2 + (D\cos(\theta) + E\sin(\theta))u \\
 & \quad + (-D\sin(\theta) + E\cos(\theta))v + F = 0
 \end{aligned}$$

Determinemos agora o ângulo θ , $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, para o qual o coeficiente B_θ da equação nas variáveis u e v é igual a zero. Sendo

$$B_\theta = B\cos(2\theta) - (A - C)\sin(2\theta) = 0. \quad (2.5)$$

Se $A = C$ tem-se de (2.5) que:

$$\begin{aligned}
 B\cos(2\theta) &= 0 \\
 \Rightarrow 2\theta &= 90^\circ \\
 \Rightarrow \theta &= 45^\circ.
 \end{aligned}$$

Se $A \neq C$ de (2.5) tem-se: $\tan(2\theta) = \frac{B}{A-C}$, pela relação $1 + \tan^2(2\theta) = \sec^2(2\theta)$, e pelo fato que $\tan(2\theta)$ e $\sec(2\theta)$ têm o mesmo sinal, já que $0 < 2\theta < 180^\circ$, obtemos que:

$$\cos 2\theta = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 2\theta}}, \text{ se } \frac{B}{A-C} > 0$$

e

$$\cos 2\theta = -\sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 2\theta}}, \text{ se } \frac{B}{A-C} < 0.$$

Além disso, como $\cos 2\theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$ e $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, temos que:

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

e

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta.$$

Ou seja:

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 2\theta}}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \left| \sqrt{\frac{(A-C)^2}{(A-C)^2 + (B)^2}} \right|}{2}}$$

e

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 2\theta}}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \left| \sqrt{\frac{(A-C)^2}{(A-C)^2 + (B)^2}} \right|}{2}}$$

$$\text{onde } \left| \sqrt{\frac{(A-C)^2}{(A-C)^2 + (B)^2}} \right| = \begin{cases} \sqrt{\frac{(A-C)^2}{(A-C)^2 + (B)^2}}, & \text{se } \frac{B}{A-C} > 0, \\ -\sqrt{\frac{(A-C)^2}{(A-C)^2 + (B)^2}}, & \text{se } \frac{B}{A-C} < 0 \end{cases}$$

□

3 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Em [1] tem-se:

3.1 2ª Regra de Simpson (ou regra de 3/8)

Teorema 3.1. Se $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$ com $i = 0, 1, 2, 3$ e $n = 3$, então a 2ª regra de Simpson ou regra de $\frac{3}{8}$ é

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3h}{8} [f(a) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(b)].$$

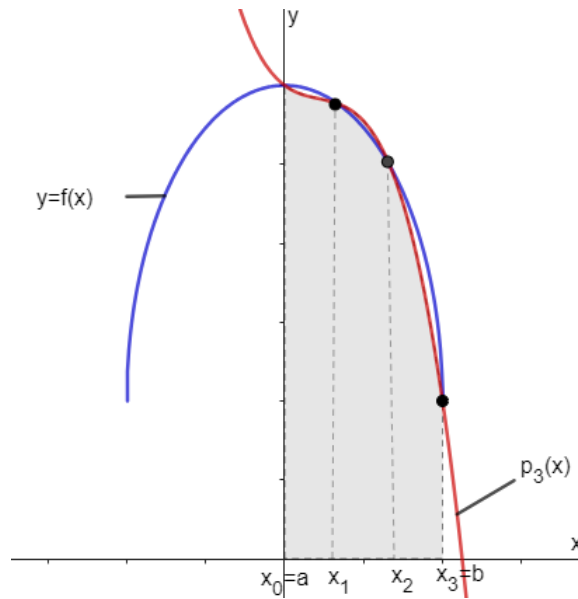
Demonstração. Fazendo uma aproximação a $f(x)$, com um polinômio interpolador $p_3(x)$

de 3º grau conforme a Figura 15.

$$f(x) \approx p_3(x) \\ = y_0 + z\Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \frac{x-x_0}{h} \rightarrow dx = h dz \\ x = x_0 = a \rightarrow z = 0 \\ x = x_3 = b \rightarrow z = 3 \\ \Delta y_0 = y_1 - y_0 \\ \Delta y_1 = y_2 - y_1 \\ \Delta y_2 = y_3 - y_2 \\ \Delta^2 y_0 = \Delta(\Delta y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0 \\ \Delta^3 y_0 = \Delta(\Delta^2 y_0) = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 \end{array} \right.$$

Figura 15: Representação da 2ª regra de Simpson.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Agora integrando,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\approx \int_0^3 p_3(x)h dz \\
&= h \int_0^3 \left(y_0 + z\Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{3!}\Delta^3 y_0 \right) dz \\
&= h \int_0^3 \left[y_0 + z\Delta y_0 + \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z}{2!} \right) \Delta^2 y_0 + \left(\frac{z^3}{3!} - \frac{3z^2}{3!} + \frac{2z}{3!} \right) \Delta^3 y_0 \right] dz \\
&= h \left[zy_0 + \frac{z^2}{2}\Delta y_0 + \left(\frac{z^3}{6} - \frac{z^2}{4} \right) \Delta^2 y_0 + \left(\frac{z^4}{24} - \frac{3z^3}{18} + \frac{2z^2}{12} \right) \Delta^3 y_0 \right]_0^3 \\
&= h \left[zy_0 + \frac{z^2}{2}\Delta y_0 + \left(\frac{z^3}{6} - \frac{z^2}{4} \right) \Delta^2 y_0 + \left(\frac{z^4}{24} - \frac{z^3}{6} + \frac{z^2}{6} \right) \Delta^3 y_0 \right]_0^3 \\
&= h \left[3y_0 + \frac{9}{2}\Delta y_0 + \left(\frac{27}{6} - \frac{9}{4} \right) \Delta^2 y_0 + \left(\frac{81}{24} - \frac{27}{6} + \frac{9}{6} \right) \Delta^3 y_0 \right] \\
&= h \left[3y_0 + \frac{9}{2}\Delta y_0 + \left(\frac{54-27}{12} \right) \Delta^2 y_0 + \left(\frac{81-108+36}{24} \right) \Delta^3 y_0 \right] \\
&= h \left[3y_0 + \frac{9}{2}\Delta y_0 + \left(\frac{27}{12} \right) \Delta^2 y_0 + \left(\frac{9}{24} \right) \Delta^3 y_0 \right] \\
&= h \left[3y_0 + \frac{9}{2}\Delta y_0 + \frac{9}{4}\Delta^2 y_0 + \frac{3}{8}\Delta^3 y_0 \right] \\
&= h \left[3y_0 + \frac{9}{2}(y_1 - y_0) + \frac{9}{4}(y_2 - 2y_1 + y_0) + \frac{3}{8}(y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0) \right] \\
&= h \left[\left(3 - \frac{9}{2} + \frac{9}{4} - \frac{3}{8} \right) y_0 + \left(\frac{9}{2} - \frac{9}{2} + \frac{9}{8} \right) y_1 + \left(\frac{9}{4} - \frac{9}{8} \right) y_2 + \frac{3}{8} y_3 \right] \\
&= h \left[\left(\frac{24-36+18-3}{8} \right) y_0 + \frac{9}{8} y_1 + \left(\frac{18-9}{8} \right) y_2 + \frac{3}{8} y_3 \right] \\
&= h \left[\frac{3}{8} y_0 + \frac{9}{8} y_1 + \frac{9}{8} y_2 + \frac{3}{8} y_3 \right] \\
&= \frac{3h}{8} [y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3] \\
&= \frac{3h}{8} [f(a) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(b)].
\end{aligned}$$

□

3.2 2ª Regra composta de Simpson (ou regra composta 3/8)

Teorema 3.2. Se $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$ com $i = 0, 1, 2, \dots, n$ e n é múltiplo de 3, então a 2ª regra composta de Simpson $\frac{3}{8}$ é

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8} \left[f(a) + f(b) + 3 \sum_{i=1}^{\frac{n}{3}} f(x_{3i-2}) + 3 \sum_{i=1}^{\frac{n}{3}} f(x_{3i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{3}-1} f(x_{3i}) \right].$$

Demonstração. Fazendo uma aproximação a $f(x)$, com um polinômio interpolador $p_3(x)$ de 3º grau.

$$\begin{aligned} f(x) &\approx p_3(x) \\ &= y_0 + z\Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{3!}\Delta^3 y_0. \end{aligned}$$

Agora integrando,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_6} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-3}}^{x_n} f(x)dx \\ &\approx \frac{3h}{8} \left[f(a) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3) \right] + \frac{3h}{8} \left[f(x_3) + 3f(x_4) + 3f(x_5) + f(x_6) \right] \\ &\quad + \dots + \frac{3h}{8} \left[f(x_{n-3}) + 3f(x_{n-2}) + 3f(x_{n-1}) + f(x_n) \right] \\ &= \frac{3h}{8} \left[f(a) + f(b) + 3 \sum_{i=1}^{\frac{n}{3}} f(x_{3i-2}) + 3 \sum_{i=1}^{\frac{n}{3}} f(x_{3i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{3}-1} f(x_{3i}) \right]. \end{aligned}$$

□

Observação 3.1. O erro absoluto é $|v_e - \bar{v}_a|$, onde v_e é o valor exato e $\bar{v}_a$ é o valor aproximado.

4 CURVAS PARAMÊTRICAS

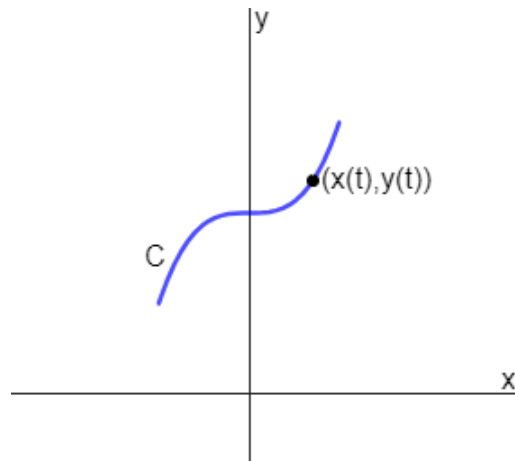
Em [6], tem-se:

4.1 Parametrização de curvas em $\mathbb{R}^2$

Consideremos uma curva C definidas mediante as equações paramétricas:

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha, \beta]. \quad (4.1)$$

Figura 16: Curva C



Fonte: Elaborado pelo Autor.

4.2 Comprimento de arco da curva dada por equações paramétricas

Se a equação (4.1) da curva C é dada em forma paramétrica através de um par de funções com derivadas contínuas, quer dizer:

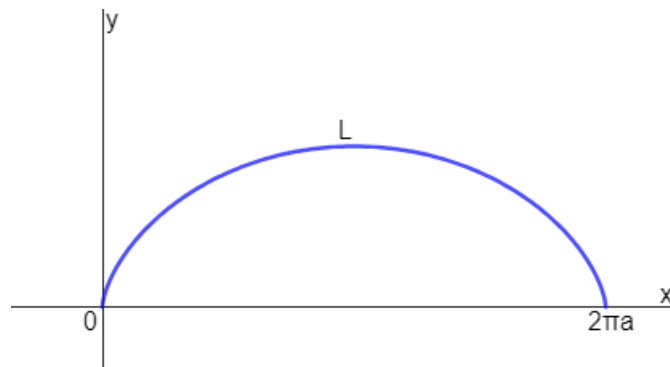
$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta].$$

Então o comprimento da curva C é:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt. \quad (4.2)$$

Exemplo 2. Calcular o comprimento de um arco completo da cicloide $\begin{cases} x = a(t - \sin(t)) \\ y = a(1 - \cos(t)) \end{cases}$.

Figura 17: Cicloide.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Solução :

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \operatorname{sen}(t)) \\ y(t) = a(1 - \cos(t)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = a(1 - \cos(t)) \\ y'(t) = a \operatorname{sen}(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos(t)) + a^2 \operatorname{sen}^2(t)} dt \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)} dt \\ &= a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos(t)} dt \\ &= a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) dt \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) dt \\ &= 2a \left[2\cos\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^{2\pi} \\ &= -4a[-1 - 1] \\ &= 8a \\ \therefore L &= 8a. \end{aligned}$$

4.3 Área de uma superfície de revolução quando a curva é dada em forma paramétrica

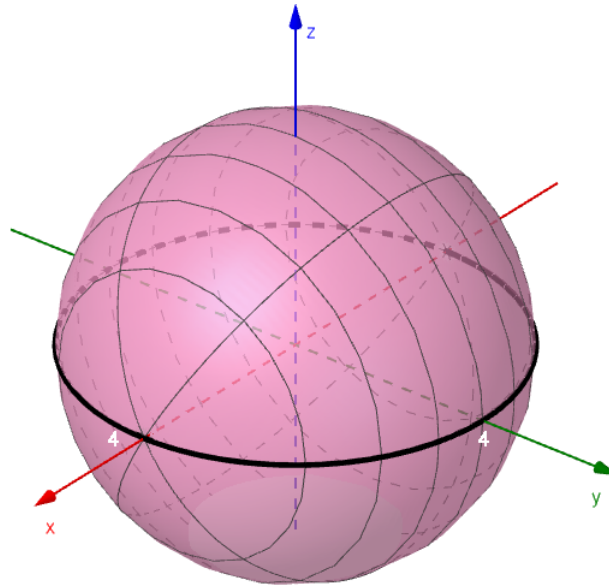
Se a curva C é dada pelas equações paramétricas (4.1). Onde as derivadas $x'(t)$, $y'(t)$ são contínuas em $\alpha \leq t \leq \beta$, então a área da superfície obtida por rotação em volta do eixo x , do arco da curva de $t = \alpha$ até $t = \beta$ é expressado pela fórmula:

$$A_x = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} dt. \quad (4.3)$$

Exemplo 3. Calcular a área da superfície da esfera gerada pela rotação de um círculo de raio 4 em torno de um diâmetro.

Solução :

Figura 18: Superfície da esfera



Fonte: Elaborado pelo Autor

Com respeito a um sistema de coordenadas cartesianas a equação do círculo de raio 4 é:

$x^2 + y^2 = 16$, cujas equações paramétricas são $x = 4\cos(t)$, $y = 4\sin(t)$ então:

$x'(t) = -4\sin(t)$, $y'(t) = 4\cos(t)$, onde a área da superfície é dada por:

$$\begin{aligned}
 A_x &= 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} dt \\
 &= 2\pi \int_0^{\pi} 4\sin(t) \sqrt{16\cos^2(t) + 16\sin^2(t)} dt \\
 &= 2\pi \int_0^{\pi} \sin(t) dt \\
 &= -32\pi \cos(t) \Big|_0^{\pi} \\
 \therefore A_x &= 64\pi u^2.
 \end{aligned}$$

Parte II

APLICAÇÕES

5 APLICAÇÕES

5.1 Cálculo de área aproximado por integração numérica.

Problema 5.1. Calcular a área do conjunto de todos os pontos (x, y) , com aproximação numérica para $n = 3, 6, 9$ e o erro absoluto para cada um:

$$\frac{32}{25}x^2 + \frac{48}{25}xy + \frac{18}{25}y^2 - \frac{13}{5}x - \frac{16}{5}y + 3 \leq 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{73}{25}x^2 + \frac{72}{25}xy + \frac{52}{25}y^2 + \frac{6}{5}x - \frac{8}{5}y - 3 \leq 0 \quad (5.2)$$

Solução : Reduzindo por uma rotação dos eixos coordenados. Da inequação (5.1), destacando os coeficientes $A = \frac{32}{25}$, $B = \frac{48}{25}$, $C = \frac{18}{25}$. Usando o Teorema 2.2, calculando seno e cosseno com o ângulo de rotação θ , como $A \neq C$, temos que

$$\frac{B}{A - C} = \frac{\frac{48}{25}}{\frac{32}{25} - \frac{18}{25}} = \frac{24}{7} > 0,$$

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\frac{\left(\frac{14}{25}\right)^2}{\left(\frac{14}{25}\right)^2 + \left(\frac{48}{25}\right)^2}}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{14}{50}}{2}} = \frac{4}{5} \quad (5.3)$$

e

$$\sin(\theta) = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{\frac{\left(\frac{14}{25}\right)^2}{\left(\frac{14}{25}\right)^2 + \left(\frac{48}{25}\right)^2}}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{14}{50}}{2}} = \frac{3}{5} \quad (5.4)$$

Substituindo os valores de (5.3) e (5.4) na equação (2.1), temos:

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}u - \frac{3}{5}v \\ y = \frac{3}{5}u + \frac{4}{5}v \end{cases} \quad (5.5)$$

Substituindo (5.5) em (5.1), temos:

$$\begin{aligned}
& \frac{32}{25} \left(\frac{4}{5}u - \frac{3}{5}v \right)^2 + \frac{48}{25} \left(\frac{4}{5}u - \frac{3}{5}v \right) \left(\frac{3}{5}u + \frac{4}{5}v \right) + \frac{18}{25} \left(\frac{3}{5}u + \frac{4}{5}v \right)^2 \\
& \quad - \frac{13}{5} \left(\frac{4}{5}u - \frac{3}{5}v \right) - \frac{16}{5} \left(\frac{3}{5}u + \frac{4}{5}v \right) + 2 \leq 0 \\
& \frac{32}{25} \left(\frac{16}{25}u^2 - \frac{24}{25}uv + \frac{9}{25}v^2 \right) + \frac{48}{25} \left(\frac{12}{25}u^2 + \frac{16}{25}uv - \frac{9}{25}uv - \frac{12}{25}v^2 \right) \\
& + \frac{18}{25} \left(\frac{9}{25}u^2 + \frac{24}{25}uv + \frac{16}{25}v^2 \right) - \frac{13}{5} \left(\frac{4}{5}u - \frac{3}{5}v \right) - \frac{16}{5} \left(\frac{3}{5}u + \frac{4}{5}v \right) + 2 \leq 0 \\
& \left(\frac{512}{625} + \frac{576}{625} + \frac{162}{625} \right) u^2 + \left(\frac{288}{625} - \frac{576}{625} + \frac{288}{625} \right) v^2 - \left(\frac{52}{25} + \frac{48}{25} \right) u + \left(\frac{39}{25} - \frac{64}{25} \right) v + 3 \leq 0 \\
& \quad 2u^2 - 4u - v + 2 + 1 \leq 0 \\
& \quad v \geq 2(u^2 - 2u + 1) + 1.
\end{aligned}$$

$$v \geq 2(u - 1)^2 + 1. \quad (5.6)$$

Logo temos a função da fronteira da inequação (5.6)

$$f(u) = 2(u - 1)^2 + 1. \quad (5.7)$$

Reduzindo por uma rotação dos eixos coordenados: Da inequação (5.2), destacando os coeficientes da equação $A = \frac{73}{25}$, $B = \frac{72}{25}$, $C = \frac{52}{25}$, Calculando o ângulo de rotação θ , como $A \neq C$, temos que,

$$\begin{aligned}
\frac{B}{A - C} &= \frac{\frac{72}{25}}{\frac{73}{25} - \frac{52}{25}} = \frac{24}{7} > 0, \\
\cos(\theta) &= \sqrt{\frac{1 + \left| \frac{\left(\frac{21}{25} \right)^2}{\left(\frac{21}{25} \right)^2 + \left(\frac{72}{25} \right)^2} \right|}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{21}{75}}{2}} = \frac{4}{5}
\end{aligned} \quad (5.8)$$

e

$$\begin{aligned}
\sin(\theta) &= \sqrt{\frac{1 - \left| \frac{\left(\frac{21}{25} \right)^2}{\left(\frac{21}{25} \right)^2 + \left(\frac{72}{25} \right)^2} \right|}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{21}{75}}{2}} = \frac{3}{5}
\end{aligned} \quad (5.9)$$

Substituindo os valores de (5.8) e (5.9) na equação (2.1), temos:

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}u - \frac{3}{5}v \\ y = \frac{3}{5}u + \frac{4}{5}v. \end{cases} \quad (5.10)$$

Substituindo (5.10) em (5.2), temos:

$$\begin{aligned} & \frac{73}{25} \left(\frac{4}{5}u - \frac{3}{5}v \right)^2 + \frac{72}{25} \left(\frac{4}{5}u - \frac{3}{5}v \right) \left(\frac{3}{5}u + \frac{4}{5}v \right) + \frac{52}{25} \left(\frac{3}{5}u + \frac{4}{5}v \right)^2 \\ & \quad + \frac{6}{5} \left(\frac{4}{5}u - \frac{3}{5}v \right) - \frac{8}{5} \left(\frac{3}{5}u + \frac{4}{5}v \right) - 3 \leq 0 \\ & \frac{73}{25} \left(\frac{16}{25}u^2 - \frac{24}{25}uv + \frac{9}{25}v^2 \right) + \frac{72}{25} \left(\frac{12}{25}u^2 + \frac{16}{25}uv - \frac{9}{25}uv - \frac{12}{25}v^2 \right) \\ & + \frac{52}{25} \left(\frac{9}{25}u^2 + \frac{24}{25}uv + \frac{16}{25}v^2 \right) + \frac{6}{5} \left(\frac{4}{5}u - \frac{3}{5}v \right) - \frac{8}{5} \left(\frac{3}{5}u + \frac{4}{5}v \right) - 3 \leq 0 \\ & \left(\frac{1168}{625} + \frac{864}{625} + \frac{468}{625} \right) u^2 + \left(\frac{657}{625} - \frac{864}{625} + \frac{832}{625} \right) v^2 + \left(\frac{24}{25} - \frac{24}{25} \right) u + \left(\frac{-18}{25} - \frac{32}{25} \right) v - 3 \leq 0 \\ & \quad 4u^2 + v^2 - 2v + 1 - 4 \leq 0 \\ & \quad 4u^2 + (v-1)^2 \leq 4. \end{aligned}$$

$$u^2 + \frac{(v-1)^2}{4} \leq 1. \quad (5.11)$$

Logo temos a função da fronteira da inequação (5.11)

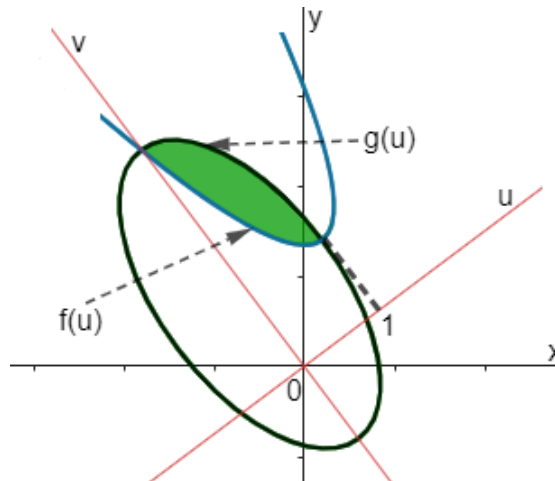
$$g(u) = 2\sqrt{1-u^2} + 1 \quad (5.12)$$

calculando a interseção da equação (5.7) e (5.12) temos:

$$\begin{aligned} f(u) &= g(u) \\ 2(u-1)^2 + 1 &= 2\sqrt{1-u^2} + 1 \\ (u-1)^2 &= \sqrt{1-u^2} \\ (u-1)^4 &= (1-u^2) \\ (u-1)^4 + (u^2-1) &= 0 \\ (u-1)^4 + (u-1)(u+1) &= 0 \\ (u-1)((u-1)^3 + (u+1)) &= 0 \\ \Rightarrow u-1 &= 0 \Rightarrow u=1 \\ (u-1)^3 + (u+1) &= 0 \Rightarrow u=0. \end{aligned}$$

Para obter a Figura 19 usando a Observação 1.1

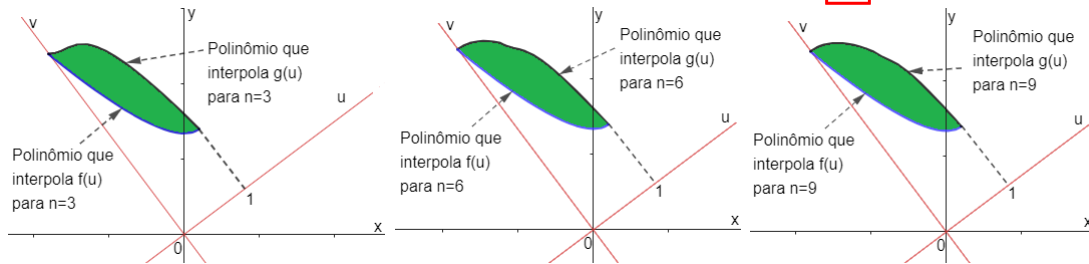
Figura 19: Área limitada pela elipse e parábola.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

A Figura 20 é construída com os polinômios interpolantes das equações (5.7), (5.12) em apêndice A.

Figura 20: Polinômios que interpolam $f(u)$, $g(u)$ do Problema 5.1.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Em apêndice B, tem-se a construção da Tabela 1 construída com 2ª regra composta de Simpson (ou regra composta 3/8) e usando a fórmula (C.1) em apêndice C, isto é: Área é

$$A_1 = \int_0^1 (2\sqrt{1-u^2} + 1 - (2(u-1)^2 + 1)) du$$

usando o software Wolfran Mathematica.

Tabela 1: Cálculo de área Problema 5.1.

n	Área Analítica Figura 19 (u^2)	Área Aproximada Figura 20 (u^2)	Erro absoluto (u^2)
3	0,90413	0,8495	0,0546726
6	0,90413	0,8849	0,0191841
9	0,90413	0,8937	0,0104141

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Problema 5.2. Calcular a área do conjunto de todos os pontos (x, y) , com aproximação

numérica para $n = 3, 6, 9$ e o erro absoluto para cada um:

$$\frac{11}{4}x^2 - \frac{7\sqrt{3}}{2}xy + \frac{25}{4}y^2 + (\sqrt{3} + 8)x + (1 - 8\sqrt{3})y \leq 0 \quad (5.13)$$

$$\frac{-1}{2}x^2 + 3\sqrt{3}xy - \frac{7}{2}y^2 + (3\sqrt{3} - 5)x + (3 + 5\sqrt{3})y \geq 0 \quad (5.14)$$

Solução : Reduzindo por uma rotação dos eixos coordenados: Da inequação (5.13), destacando os coeficientes da equação $A = \frac{11}{4}$, $B = -\frac{7\sqrt{3}}{2}$, $C = \frac{25}{4}$. Usando o Teorema 2.2, calculando seno e cosseno com o ângulo de rotação θ , como $A \neq C$, temos que

$$\frac{B}{A - C} = \frac{-\frac{7\sqrt{3}}{2}}{\frac{11}{4} - \frac{25}{4}} = \sqrt{3} > 0,$$

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{1 + \left| \frac{\left(\frac{-7}{2}\right)^2}{\left(\frac{-7}{2}\right)^2 + \left(\frac{-7\sqrt{3}}{2}\right)^2} \right|}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (5.15)$$

e

$$\sin(\theta) = \sqrt{\frac{1 - \left| \frac{\left(\frac{-7}{2}\right)^2}{\left(\frac{-7}{2}\right)^2 + \left(\frac{-7\sqrt{3}}{2}\right)^2} \right|}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}} = \frac{1}{2} \quad (5.16)$$

Substituindo os valores de (5.15) e (5.16) na equação (2.1), temos:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v \\ y = \frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v \end{cases} \quad (5.17)$$

Substituindo (5.17) em (5.13), temos:

$$\begin{aligned}
& \frac{11}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v \right)^2 - \frac{7\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v \right) \left(\frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v \right) + \frac{25}{4} \left(\frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v \right)^2 \\
& \quad + (\sqrt{3} + 8) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v \right) + (1 - 8\sqrt{3}) \left(\frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v \right) \leq 0 \\
& \frac{11}{4} \left(\frac{3}{4}u^2 - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}uv} + \frac{1}{4}v^2 \right) - \frac{7\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{4}u^2 + \cancel{\frac{3}{4}uv} - \cancel{\frac{1}{4}uv} - \frac{\sqrt{3}}{4}v^2 \right) + \frac{25}{4} \left(\frac{1}{4}u^2 + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}uv} + \frac{3}{4}v^2 \right) \\
& \quad + (\sqrt{3} + 8) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v \right) + (1 - 8\sqrt{3}) \left(\frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v \right) \leq 0 \\
& \left(\frac{33}{16} - \frac{21}{8} + \frac{25}{16} \right) u^2 + \left(\frac{11}{16} + \frac{21}{8} + \frac{75}{16} \right) v^2 + \left(\frac{3}{2} + \cancel{\frac{8\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{8\sqrt{3}}{2}} \right) u \\
& \quad + \left(-\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} - 4 + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} - 12 \right) v \leq 0 \\
& \quad u^2 + 8v^2 + 2u - 16v \leq 0 \\
& \quad u^2 + 2u + 8v^2 - 16v + 9 \leq 9 \\
& \quad u^2 + 2u + 1 + 8v^2 - 16v + 8 \leq 9 \\
& \quad (u + 1)^2 + 8(v^2 - 2v + 1) \leq 9 \\
& \quad (u + 1)^2 + 8(v - 1)^2 \leq 9
\end{aligned}$$

$$\frac{(u + 1)^2}{9} + 8 \frac{(v - 1)^2}{9} \leq 1. \quad (5.18)$$

Logo temos a função da fronteira da inequação (5.18)

$$f(u) = 1 \pm \frac{\sqrt{9 - (u + 1)^2}}{2\sqrt{2}}. \quad (5.19)$$

Reduzindo por uma rotação dos eixos coordenados: Da equação (5.14), destacando os coeficientes da equação $A = -\frac{1}{2}$, $B = 3\sqrt{3}$, $C = -\frac{7}{2}$. Usando o Teorema 2.2, calculando seno e cosseno com o ângulo de rotação θ , como $A \neq C$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{B}{A - C} &= \frac{3\sqrt{3}}{-\frac{1}{2} - \left(-\frac{7}{2}\right)} = \sqrt{3} > 0, \\
\cos(\theta) &= \sqrt{\frac{1 + \left| \sqrt{\frac{(3)^2}{(3)^2 + (3\sqrt{3})^2}} \right|}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (5.20)
\end{aligned}$$

e

$$\operatorname{sen}(\theta) = \sqrt{\frac{1 - \left| \sqrt{\frac{(3)^2}{(3)^2 + (3\sqrt{3})^2}} \right|}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}} = \frac{1}{2} \quad (5.21)$$

Substituindo os valores de (5.20) e (5.21) na equação (2.1), temos:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v \\ y = \frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v. \end{cases} \quad (5.22)$$

Substituindo (5.22) em (5.14), temos:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v\right)^2 + 3\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v\right)\left(\frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v\right) - \frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v\right)^2 \\ & + (3\sqrt{3} - 5)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v\right) + (3 + 5\sqrt{3})\left(\frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v\right) \geq 0 \\ & -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}u^2 - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}uv} + \frac{1}{4}v^2\right) + 3\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}u^2 + \cancel{\frac{3}{4}uv} - \cancel{\frac{1}{4}uv} - \frac{\sqrt{3}}{4}v^2\right) - \frac{7}{2}\left(\frac{1}{4}u^2 + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}uv} + \frac{3}{4}v^2\right) \\ & + (3\sqrt{3} - 5)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v\right) + (3 + 5\sqrt{3})\left(\frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v\right) \geq 0 \\ & \left(-\frac{3}{8} + \frac{9}{4} - \frac{7}{8}\right)u^2 + \left(-\frac{1}{8} - \frac{9}{4} - \frac{21}{8}\right)v^2 + \left(\frac{9}{2} - \cancel{\frac{5\sqrt{3}}{2}} + \frac{3}{2} + \cancel{\frac{5\sqrt{3}}{2}}\right)u \\ & + \left(\cancel{-\frac{3\sqrt{3}}{2}} + \frac{5}{2} + \cancel{\frac{3\sqrt{3}}{2}} + \frac{15}{2}\right)v \geq 0 \\ & u^2 - 5v^2 + 6u + 10v \geq 0 \\ & u^2 + 6u - 5v^2 + 10v + 4 \geq 4 \\ & u^2 + 6u + 9 - 5v^2 + 10v - 5 \geq 4 \\ & (u + 3)^2 - 5(v^2 - 2v + 1) \geq 4 \\ & (u + 3)^2 - 5(v - 1)^2 \geq 4 \\ & \frac{(u + 3)^2}{4} - 5\frac{(v - 1)^2}{4} \geq 1. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Logo temos a função da fronteira da inequação (5.23)

$$g(u) = 1 \pm \frac{\sqrt{-4 + (u + 3)^2}}{\sqrt{5}}. \quad (5.24)$$

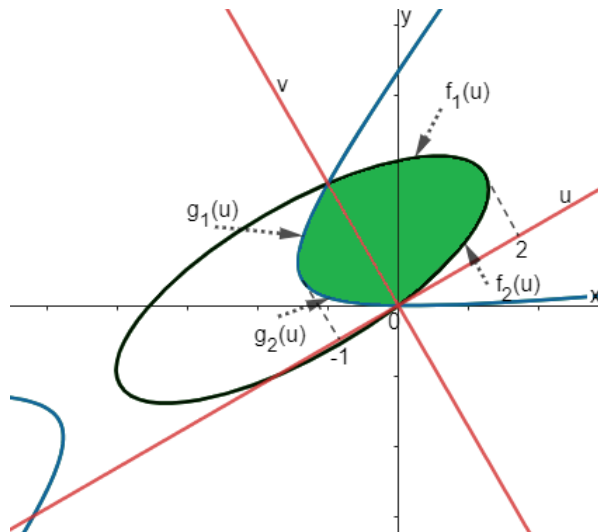
Calculando a interseção da equação (5.19) e (5.24), temos:

$$\begin{aligned}
 f_1(u) &= g_1(u) \\
 1 + \frac{\sqrt{9 - (u+1)^2}}{2\sqrt{2}} &= 1 + \frac{\sqrt{-4 + (u+3)^2}}{\sqrt{5}} \\
 \sqrt{5 \cdot (9 - (u+1)^2)} &= 2\sqrt{2 \cdot (-4 + (u+3)^2)} \\
 5 \cdot (9 - (u+1)^2) &= 4(2 \cdot (-4 + (u+3)^2)) \\
 -5u^2 - 10u + 40 &= 8u^2 + 48u + 40 \\
 13u^2 + 58u &= 0 \\
 u(13u + 58) &= 0 \\
 \Rightarrow u &= 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2(u) &= g_2(u) \\
 1 - \frac{\sqrt{9 - (u+1)^2}}{2\sqrt{2}} &= 1 - \frac{\sqrt{-4 + (u+3)^2}}{\sqrt{5}} \\
 \sqrt{5 \cdot (9 - (u+1)^2)} &= 2\sqrt{2 \cdot (-4 + (u+3)^2)} \\
 5 \cdot (9 - (u+1)^2) &= 4(2 \cdot (-4 + (u+3)^2)) \\
 -5u^2 - 10u + 40 &= 8u^2 + 48u + 40 \\
 13u^2 + 58u &= 0 \\
 u(13u + 58) &= 0 \\
 \Rightarrow u &= 0.
 \end{aligned}$$

Para obter a Figura 21 usando a observação 1.1

Figura 21: Área limitada pela elipse e hiperbole.

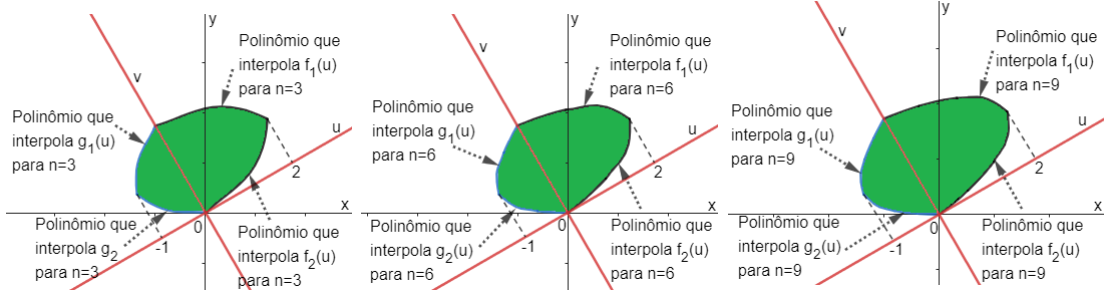


Fonte: Elaborado pelo Autor.

A Figura 22 é construída com os polinômios interpolantes das equações (5.19),

(5.24) em apêndice A

Figura 22: Polinômios que interpolam $f(u), g(u)$ para o Problema (5.2).



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Em apêndice B, tem-se a construção da Tabela 2 construída com 2ª regra composta de Simpson (ou regra composta 3/8) e usando a fórmula (C.1) em apêndice C, isto é: Área é

$$A_2 = \int_{-1}^0 \left(1 + \frac{\sqrt{-4 + (u+3)^2}}{\sqrt{5}} - \left(1 - \frac{\sqrt{-4 + (u+3)^2}}{\sqrt{5}}\right)\right) du + \int_0^2 \left(1 + \frac{\sqrt{9 - (u+1)^2}}{2\sqrt{2}} - \left(1 - \frac{\sqrt{9 - (u+1)^2}}{2\sqrt{2}}\right)\right) du$$

usando o software Wolfram Mathematica.

Tabela 2: Cálculo de área do Problema 5.2

n	Área Analítica (u^2) Figura 21	Área Aproximada (u^2) Figura 22	Erro Absoluto (u^2)
3	4,19525	4,0676	0,127657
6	4,19525	4,1502	0,0450939
9	4,19525	4,1707	0,0245294

Fonte: Elaborado pelo Autor

5.2 Cálculo de volume

Problema 5.3. Determinar o volume do sólido obtido pela rotação em torno a $y = \frac{3}{4}x$, do conjunto de todos os pontos (x, y) , com aproximação numérica para $n = 3, 6, 9$ e o erro absoluto para cada um:

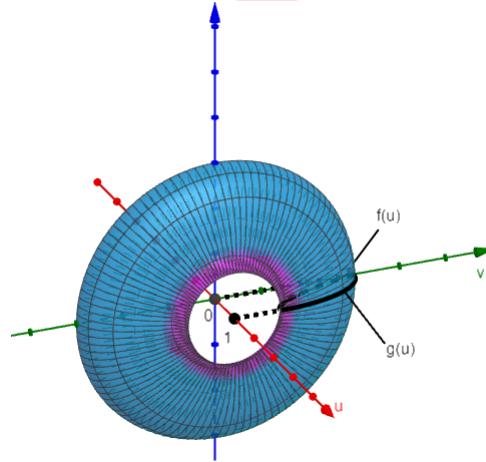
$$\frac{32}{25}x^2 + \frac{48}{25}xy + \frac{18}{25}y^2 - \frac{13}{5}x - \frac{16}{5}y + 3 \leq 0 \quad (5.25)$$

$$\frac{73}{25}x^2 + \frac{72}{25}xy + \frac{52}{25}y^2 + \frac{6}{5}x - \frac{8}{5}y - 3 \leq 0 \quad (5.26)$$

Solução

As inequações (5.25), (5.26) são as mesmas do Problema 5.1, logo considerando as equações (5.7), (5.12). Para obter a Figura 23 usando a observação 1.1.

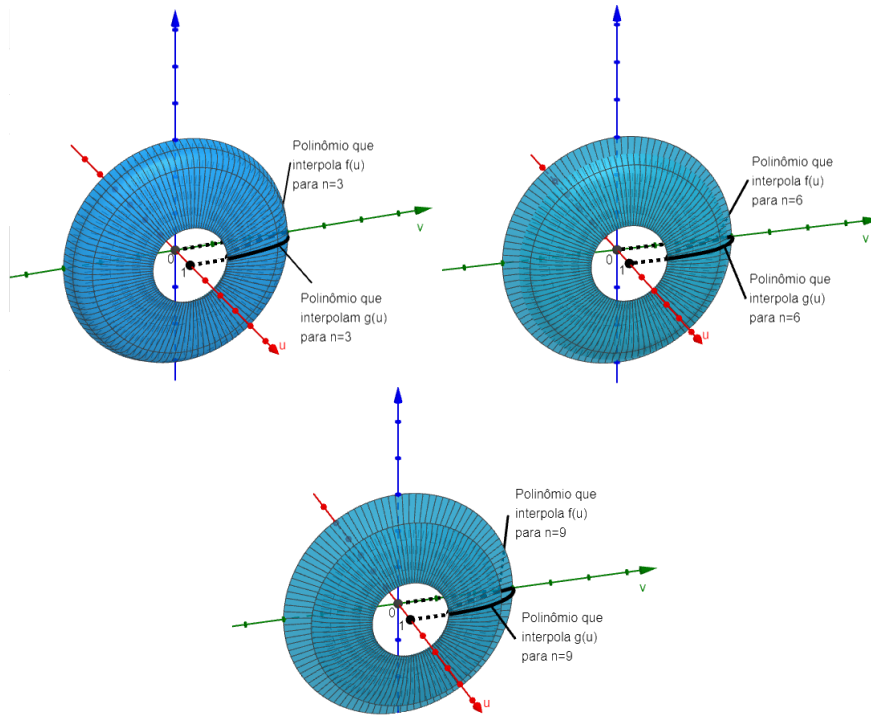
Figura 23: Volume do sólido do problema (5.25).



Fonte: Elaborado pelo Autor.

A Figura 24 é construída com os polinômios interpolantes das equações (5.7), (5.12) em apêndice A

Figura 24: Polinômios que interpolam $f(u)$, $g(u)$ para o volume do Problema (5.3).



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Em apêndice B, tem-se a construção da Tabela 3 construída com 2ª regra composta de Simpson (ou regra composta 3/8) e usando a fórmula (C.2) em apêndice C, isto é: o volume é

$$V_1 = \int_0^1 ((2\sqrt{1-u^2} + 1)^2 - (2(u-1)^2 + 1)^2) du$$

usando o software Wolfram Mathematica.

Tabela 3: Cálculo de volume de revolução do problema 5.3.

n	Volume Analítico (u^3) Figura 23	Volume Aproximado (u^3)	Figura 24	Erro absoluto (u^3)
3	11,5451	11,155		0,39006
6	11,5451	11,422		0,123446
9	11,5451	11,479		0,0660085

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Problema 5.4. Determinar o volume do sólido obtido pela rotação em torno a $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, do conjunto de todos os pontos (x, y) , com aproximação numérica para $n = 3, 6, 9$ e o erro absoluto para cada um:

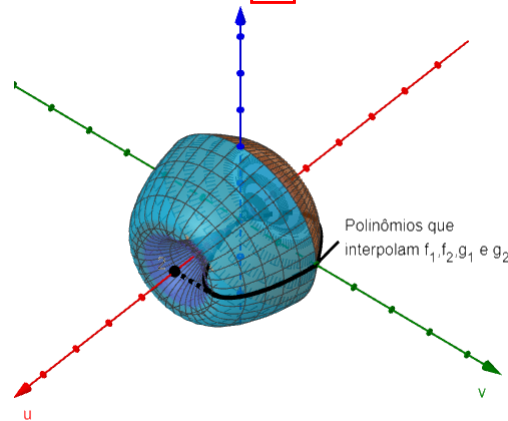
$$\frac{11}{4}x^2 - \frac{7\sqrt{3}}{2}xy + \frac{25}{4}y^2 + (\sqrt{3} + 8)x + (1 - 8\sqrt{3})y \leq 0 \quad (5.27)$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + 3\sqrt{3}xy - \frac{7}{2}y^2 + (3\sqrt{3} - 5)x + (3 + 5\sqrt{3})y \geq 0 \quad (5.28)$$

Solução

As inequações (5.27), (5.28) são as mesmas do Problema 5.2, logo considerando as equações (5.19), (5.24). Para obter a Figura 25 usando a observação 1.1.

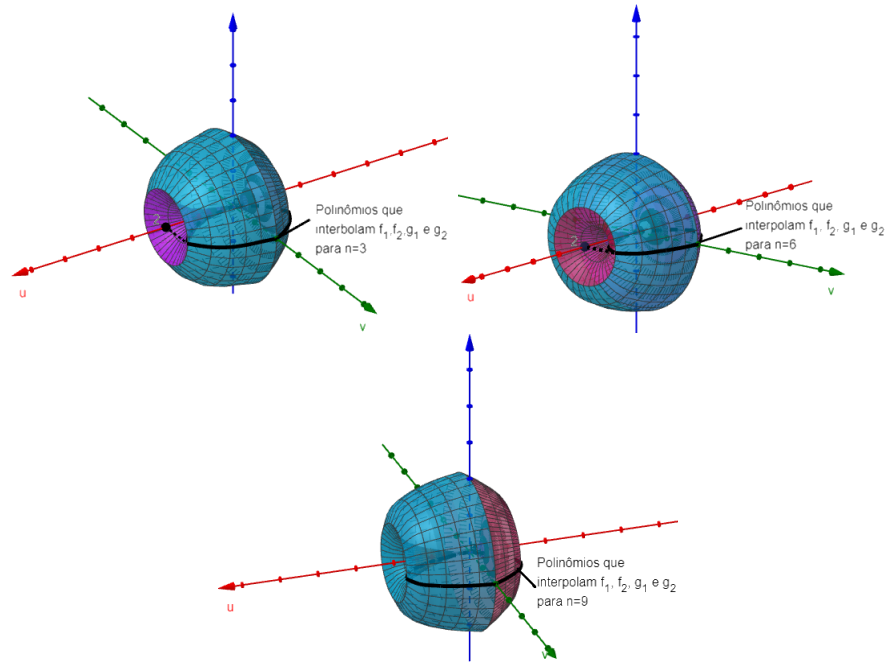
Figura 25: Volume do sólido do Problema 5.4).



Fonte: Elaborado pelo Autor.

A Figura 26 é construída com os polinômios interpolantes das equações (5.19), (5.24) em apêndice A.

Figura 26: Polinômios que interpolam $f(u), g(u)$ para o volume do Problema 5.4.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Em apêndice B, tem-se a construção da Tabela 4 construída com 2ª regra composta de Simpson (ou regra composta 3/8) e usando a fórmula (C.2) em apêndice C, isto é: o volume é

$$V_2 = \int_{-1}^0 \left(\left(1 + \frac{\sqrt{-4 + (u+3)^2}}{\sqrt{5}} \right)^2 - \left(1 - \frac{\sqrt{-4 + (u+3)^2}}{\sqrt{5}} \right)^2 \right) du + \int_0^2 \left(\left(1 + \frac{\sqrt{9 - (u+1)^2}}{2\sqrt{2}} \right)^2 - \left(1 - \frac{\sqrt{9 - (u+1)^2}}{2\sqrt{2}} \right)^2 \right) du$$

usando o software Wolfram Mathematica.

Tabela 4: Cálculo de Volume de revolução do Problema 5.4.

n	Volume Analítico (u^3) Figura 25	Volume Aproximado (u^3) Figura 26	Erro Absoluto (u^3)
3	26,3596	25,557	0,80209
6	26,3596	26,076	0,283333
9	26,3596	26,205	0,154123

Fonte: Elaborado pelo Autor.

5.3 Cálculo de áreas de superfícies

Problema 5.5. Determinar a área da superfície gerada pela rotação, em torno a $y = \frac{3}{4}x$, do conjunto de todos os pontos (x, y) da fronteira, com aproximação numérica para $n =$

3,6,9 e o erro absoluto para cada um:

$$\frac{32}{25}x^2 + \frac{48}{25}xy + \frac{18}{25}y^2 - \frac{13}{5}x - \frac{16}{5}y + 3 \leq 0 \quad (5.29)$$

$$\frac{73}{25}x^2 + \frac{72}{25}xy + \frac{52}{25}y^2 + \frac{6}{5}x - \frac{8}{5}y - 3 \leq 0 \quad (5.30)$$

Solução As inequações (5.29), (5.30) são as mesmas do Problema 5.1, logo considerando a igualdade das inequações (5.6), (5.11) tem-se:

$$v = 2(u - 1)^2 + 1. \quad (5.31)$$

$$u^2 + \frac{(v - 1)^2}{4} = 1 \quad (5.32)$$

parametrizando as curvas (5.31), (5.32) com a equação (4.1) tem-se:

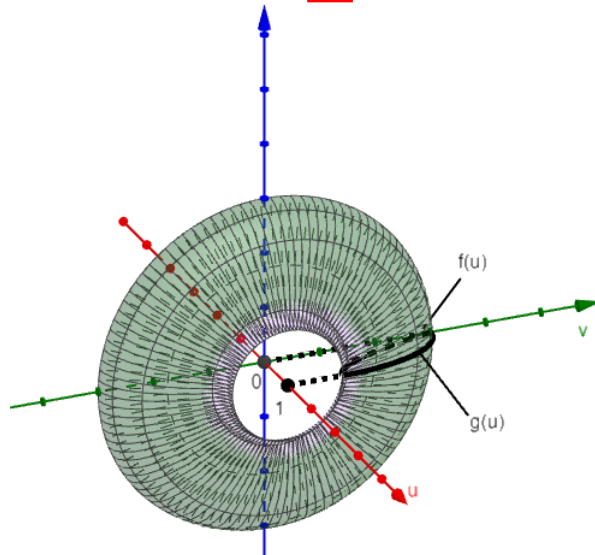
$$C_1 : \begin{cases} u(t) = t \rightarrow u'(t) = 1 \\ v(t) = 2(t - 1)^2 + 1 \rightarrow v'(t) = 4(t - 1) \end{cases}, t \in [0, 1] \quad (5.33)$$

e

$$C_2 : \begin{cases} u(t) = \cos(t) \rightarrow u'(t) = -\sin(t) \\ v(t) = 2\sin(t) + 1 \rightarrow v'(t) = 2\cos(t) \end{cases}, t \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad (5.34)$$

Para obter a Figura 27 usando a observação 1.1

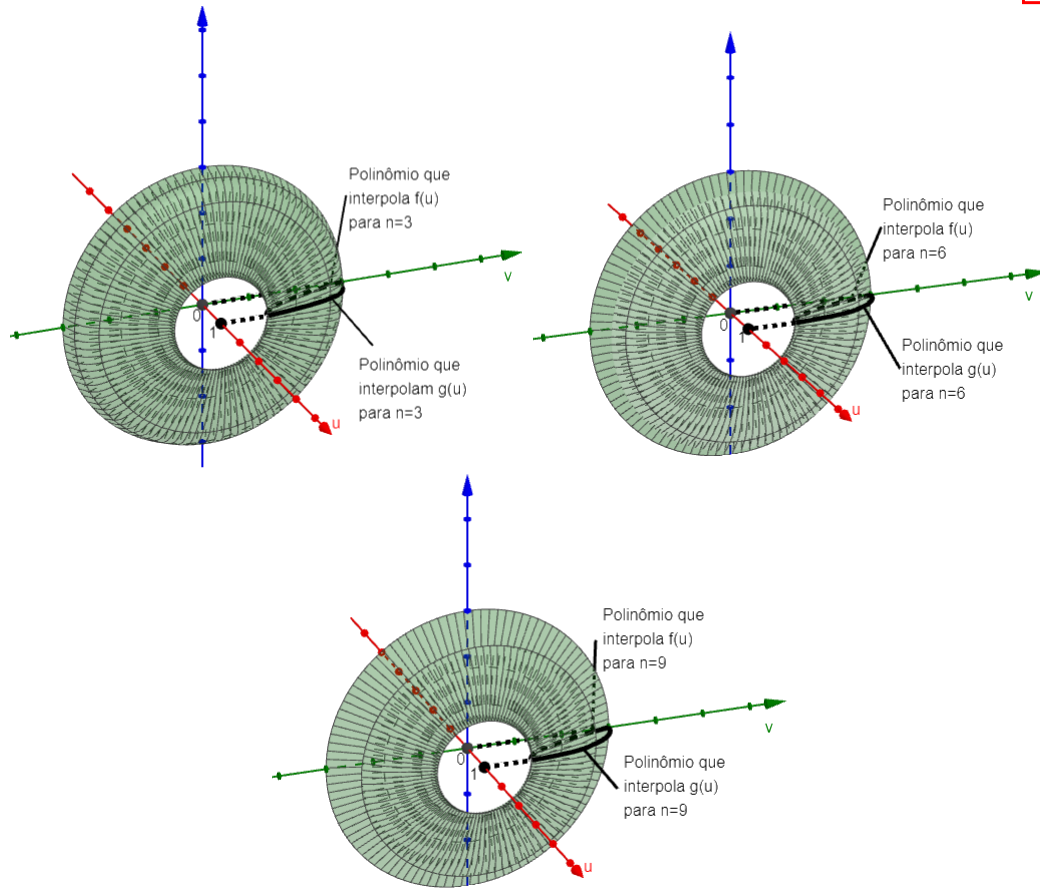
Figura 27: Área da superfície do Problema (5.5).



Fonte: Elaborado pelo Autor.

A Figura 28 é construída com os polinômios interpolantes das equações (5.7), (5.12) em apêndice A

Figura 28: Polinômios que interpolam $f(u)$, $g(u)$ para a superfície do Problema (5.5).



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Em apêndice B tem-se a construção da Tabela 5 construída com 2ª regra composta de Simpson (ou regra composta 3/8) e usando a fórmula (4.3), isto é: Área de superfície de revolução é

$$A_{1x} = 2\pi \int_0^1 (2(t-1)^2+1)\sqrt{(1)^2 + 4(t-1)^2}dt + 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\text{sen}(t)+1)\sqrt{(\text{sen}(t))^2 + 2(\cos(t))^2}dt$$

usando o software Wolfran Mathematica.

Tabela 5: Cálculo de área de superfície de revolução Problema 5.5.

n	Área de superfície de revolução Analítica (u^2)	Área de superfície de revolução Aproximada (u^2)	Erro absoluto (u^2)
3	60,467	60,8644	0,3974
6	60,467	60,4848	0,0178
9	60,467	60,4697	0,0027

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Problema 5.6. Determinar a área da superfície gerada pela rotação, em torno a $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, do conjunto de todos os pontos (x, y) da fronteira, com aproximação numérica para $n = 3, 6, 9$ e o erro absoluto para cada um:

$$\frac{11}{4}x^2 - \frac{7\sqrt{3}}{2}xy + \frac{25}{4}y^2 + (\sqrt{3} + 8)x + (1 - 8\sqrt{3})y \leq 0 \quad (5.35)$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + 3\sqrt{3}xy - \frac{7}{2}y^2 + (3\sqrt{3} - 5)x + (3 + 5\sqrt{3})y \geq 0 \quad (5.36)$$

Solução As inequações (5.35), (5.36) são as mesmas do Problema 5.2, logo considerando a igualdade das inequações (5.18), (5.23) tem-se:

$$\frac{(u+3)^2}{4} - 5\frac{(v-1)^2}{4} = 1. \quad (5.37)$$

$$\frac{(u+1)^2}{9} + 8\frac{(v-1)^2}{9} = 1 \quad (5.38)$$

parametrizando as curvas (5.37), (5.38) com a equação (4.1) tem-se:

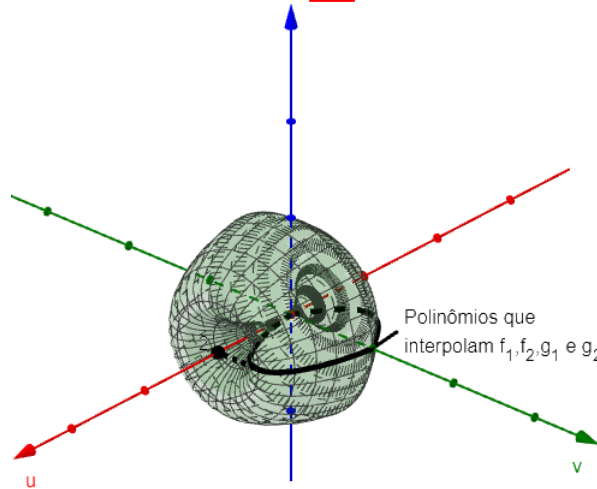
$$C_3 : \begin{cases} u(t) = 2\sec(t) - 3 \rightarrow u'(t) = 2\sec(t)\tan(t) \\ v(t) = \frac{2}{\sqrt{5}}\tan(t) + 1 \rightarrow v'(t) = \frac{2}{\sqrt{5}}\sec^2(t) \end{cases}, t \in [-\arctan(\frac{\sqrt{5}}{2}), \arctan(\frac{\sqrt{5}}{2})] \quad (5.39)$$

e

$$C_4 : \begin{cases} u(t) = 3\cos(t) - 1 \rightarrow u'(t) = -3\sin(t) \\ v(t) = \frac{3}{\sqrt{8}}\sin(t) + 1 \rightarrow v'(t) = \frac{3}{\sqrt{8}}\cos(t) \end{cases}, t \in [-\arcsen(\frac{\sqrt{8}}{3}), \arcsen(\frac{\sqrt{8}}{3})] \quad (5.40)$$

Para obter a Figura 29 usando a Observação 1.1.

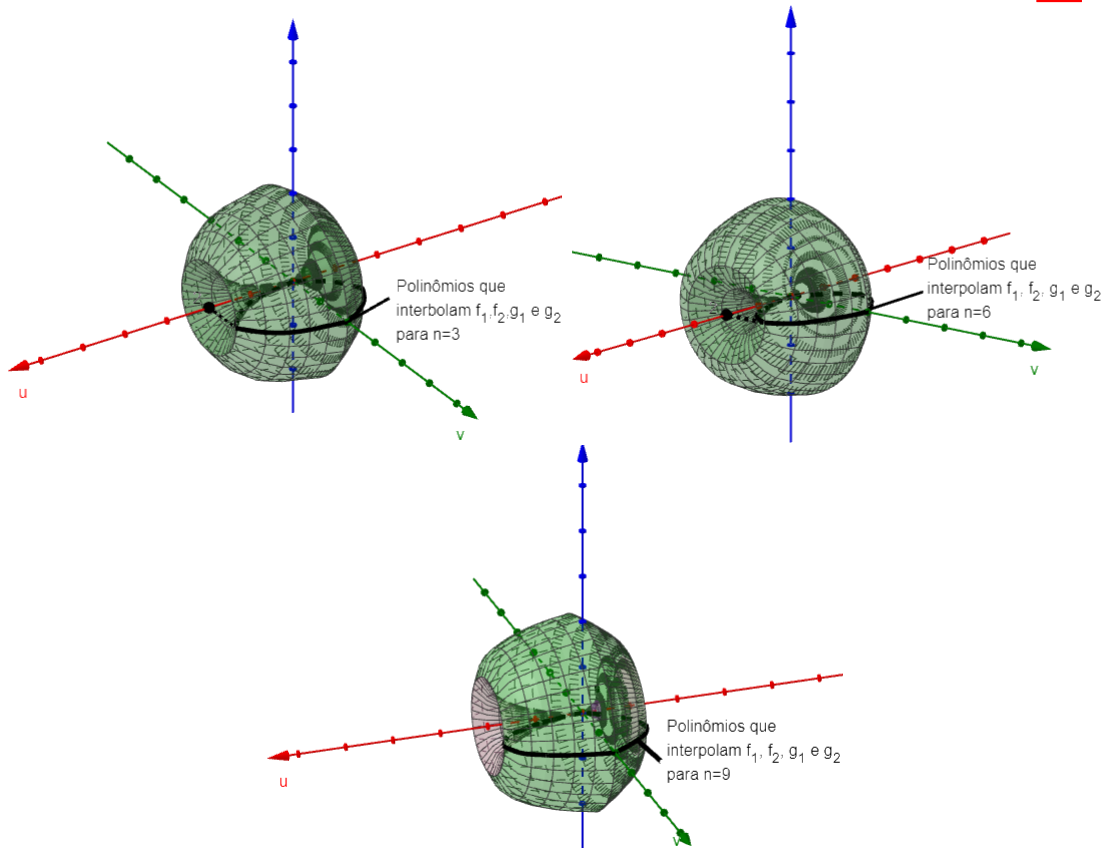
Figura 29: Área da superfície do Problema (5.6).



Fonte: Elaborado pelo Autor.

A Figura 30 é construída com os polinômios interpolantes das equações (5.19), (5.24), em apêndice A

Figura 30: Polinômios que interpolam $f(u), g(u)$ para a superfície do Problema (5.6).



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Em apêndice B tem-se a construção da Tabela 6 construída com 2ª regra composta de Simpson (ou regra composta 3/8) e usando a fórmula (4.3), isto é: Área de superfície de revolução é

$$A_{2x} = 2\pi \int_{-\arctan(\frac{\sqrt{5}}{2})}^{\arctan(\frac{\sqrt{5}}{2})} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \tan(t) + 1 \right) \sqrt{\frac{4}{5} (\sec(t))^4 + 4 (\sec(t) \tan(t))^2} dt$$

$$+ 2\pi \int_{-\arcsen(\frac{\sqrt{8}}{3})}^{\arcsen(\frac{\sqrt{8}}{3})} \frac{3}{\sqrt{8}} (2 \sen(t) + 1) \sqrt{8 (\sen(t))^2 + (\cos(t))^2} dt$$

usando o software Wolfram Mathematica.

Tabela 6: Cálculo de área de superfície de revolução do problema (5.6)

n	Área de superfície de revolução analítica (u^2)	Área de superfície de revolução aproximada (u^2)	Erro absoluto (u^2)
3	48,1978	48,278	1,85141
6	48,1978	48,456	0,257827
9	48,1978	48,209	0,0573558

Fonte: Elaborado pelo Autor.

5.4 Cálculo de comprimento

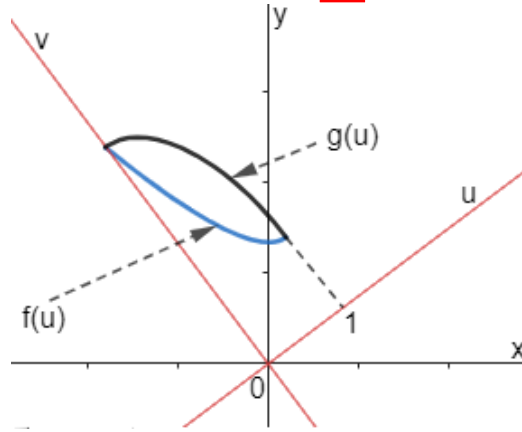
Problema 5.7. Determinar o comprimento de arco do conjunto de todos os pontos (x, y) , com aproximação numérica para $n = 3, 6, 9$ e o erro absoluto para cada um, da fronteira de:

$$\frac{32}{25}x^2 + \frac{48}{25}xy + \frac{18}{25}y^2 - \frac{13}{5}x - \frac{16}{5}y + 3 \leq 0 \quad (5.41)$$

$$\frac{73}{25}x^2 + \frac{72}{25}xy + \frac{52}{25}y^2 + \frac{6}{5}x - \frac{8}{5}y - 3 \leq 0 \quad (5.42)$$

Solução As inequações (5.41), (5.42) são as mesmas do Problema 5.1. Para obter a Figura 31 usando a Observação 1.1

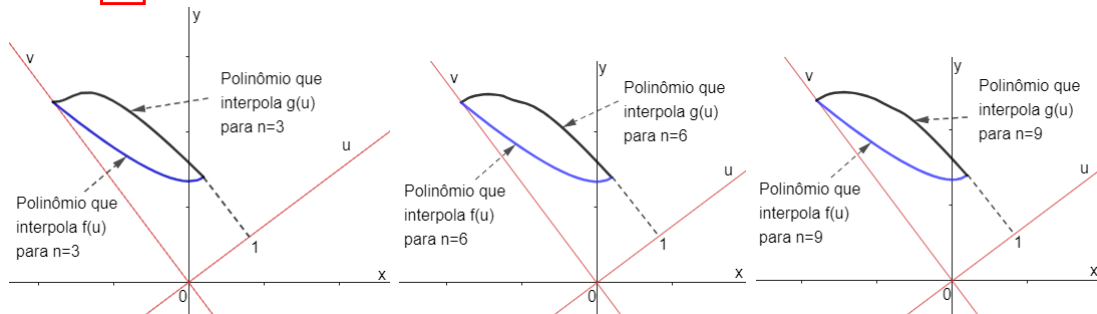
Figura 31: Comprimento de arco do Problema (5.7).



Fonte: Elaborado pelo Autor.

A Figura 32 é construída com os polinômios interpolantes das equações (5.7), (5.12) em apêndice A.

Figura 32: Polinômios que interpolam $f(u), g(u)$ para o comprimento de arco do Problema (5.7).



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Em apêndice B tem-se a construção da Tabela 32 construída com 2ª regra composta de Simpson (ou regra composta 3/8) e usando a fórmula (4.2) e as curvas paramétricas (5.33), (5.34), isto é: o comprimento de arco é

$$L_1 = \int_0^1 \sqrt{(1)^2 + 4(t-1)^2} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\text{sen}(t))^2 + 2(\cos(t))^2} dt$$

usando o software Wolfram Mathematica.

Tabela 7: Cálculo de comprimento de arco do problema 5.7.

n	Comprimento de arco Analítica (u)	Comprimento de arco Aproximada (u)	Erro absoluto (u)
3	4,7455	4,76361	0,01811
6	4,7455	4,74649	0,00099
9	4,7455	4,74563	0,00013

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Problema 5.8. Determinar o comprimento de arco do conjunto de todos os pontos (x, y) , com aproximação numérica para $n = 3, 6, 9$ e o erro absoluto para cada um, da fronteira de:

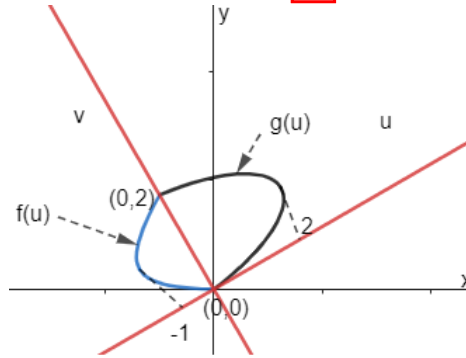
$$\frac{11}{4}x^2 - \frac{7\sqrt{3}}{2}xy + \frac{25}{4}y^2 + (\sqrt{3} + 8)x + (1 - 8\sqrt{3})y \leq 0 \quad (5.43)$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + 3\sqrt{3}xy - \frac{7}{2}y^2 + (3\sqrt{3} - 5)x + (3 + 5\sqrt{3})y \geq 0 \quad (5.44)$$

Solução

As inequações (5.43), (5.44) são as mesmas do Problema 5.2. Para obter a Figura 33 usando a Observação 1.1

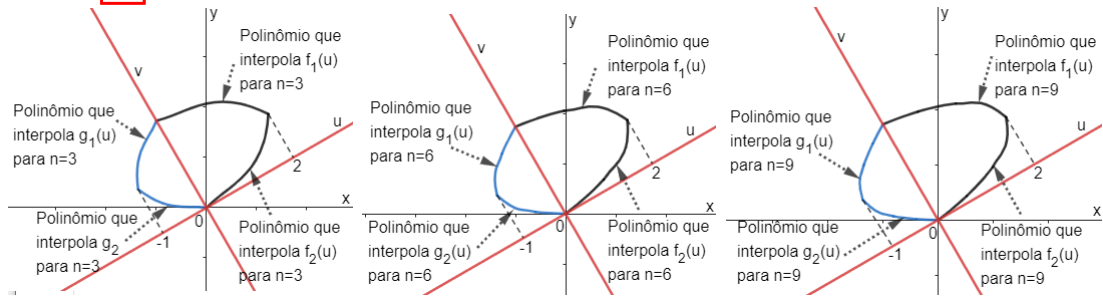
Figura 33: Comprimento de arco do Problema 5.8).



Fonte: Elaborado pelo Autor.

A Figura 34 é construída com os polinômios interpolantes das equações (5.19), (5.24) em apêndice A.

Figura 34: Polinômios que interpolam $f(u), g(u)$ para o comprimento de arco do Problema (5.8).



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Em apêndice B tem-se a construção da Tabela 8 construída com 2ª regra composta de Simpson (ou regra composta 3/8) e usando a fórmula (4.2) e as curvas paramétricas (5.39), (5.40), isto é: o comprimento de arco é

$$L_2 = \int_{-\arctan(\frac{\sqrt{5}}{2})}^{\arctan(\frac{\sqrt{5}}{2})} \sqrt{\frac{4}{5}(\sec(t))^4 + 4(\sec(t)\tan(t))^2} dt \\ + \int_{-\arcsen(\frac{\sqrt{8}}{3})}^{\arcsen(\frac{\sqrt{8}}{3})} \frac{3}{\sqrt{8}} \sqrt{8(\sen(t))^2 + (\cos(t))^2} dt$$

usando o software Wolfram Mathematica.

Tabela 8: Cálculo de comprimento de arco do problema 5.8.

n	Comprimento de arco analítica (u)	Comprimento de arco aproximada (u)	Erro absoluto (u)
3	7,67092	7,6832	0,294661
6	7,67092	7,7120	0,0410345
9	7,67092	7,6726	0,00912847

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Parte III

CONCLUSÃO

6 CONCLUSÃO

Mostrou-se a aplicação da integração numérica na rotação de cônicas, e como resolver problemas de área, volume de revolução, área de superfície de revolução e comprimento de arcos, que possuem solução analítica complexa.

Foi utilizado a 2ª regra composta de Simpson, que é uma técnica de integração numérica que utiliza parábolas para estimar a área sob uma curva. Esta regra consiste em dividir o intervalo em subintervalos menores para obter o resultado aproximado da área.

No primeiro momento, foram descritas as cônicas (parábola, elipse, hipérbole) com suas definições, elementos e características, além da mudança de eixos coordenados para poder aplicar a integração numérica em problemas com rotação.

A resolução dos problemas foi feita através de programas feitos no Software Wolfram Mathematica para os intervalos com $n = 3, 6, 9$. A programação encontra-se no apêndice B e pode ser utilizada para qualquer n .

A análise dos resultados foi feita através da comparação entre a solução analítica e a solução aproximada, sendo que para fazer a comparação dos problemas 5.5, 5.6, 5.7 e 5.8 foi necessário fazer a parametrização das curvas, pois são problemas complexos. Os problemas 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4 não foi necessário fazer a parametrização, foi trabalhado na forma cartesiana.

Através dessas comparações verificou-se que os gráficos geral e aproximados são bem parecidos e as tabelas mostram que os erros são bem pequenos, o que comprova a eficácia e precisão do método utilizado. Apesar de ser um método eficiente, notou-se que para um $n \geq 9$ o programa ficava lento e travando o que dificultou na plotagem e manuseio do gráfico.

Esta pesquisa não apenas enriquece nosso conhecimento sobre cônicas, mas também ressalta o potencial da integração numérica na resolução de problemas complexos, e fornece uma base sólida para futuras pesquisas, aplicações e melhorias.

O trabalho fica aberto para ser resolvido através da Quadratura Gaussiana.

REFERÊNCIAS

Referências

- [1] BARROSO, Leônidas Conceição *et al.* **Cálculo numérico (com aplicações)**, Ed. Harbra Ltda, 1987.
- [2] BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan De. **Geometria analítica**. *CEP*, v. 4533, p. 004, 1987.
- [3] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, v. 3, 2013.
- [4] LEHMANN, Charles H. **Geometria analítica**. 13^a ed. México: Limusa Edições, 1989.
- [5] STEWART, James. **Cálculo volume 1**. 6^a ed. Norte-Americana: Cengage Learning Edições Ltda, 2010.
- [6] RAMOS, Espinoza. **Análisis matemático II**. Lima – Perú, 2002.

APÊNDICE

A Polinômios interpolantes

PROBLEMA 5.2; 5.4; 5.6; 5.8 POLINÔMIOS QUE INTERPOLAM

$n = 3$; $a = 0$; $b = 2$; $f[u_] = \text{Sqrt}[(9 - (u + 1)^2) / 8] + 1$; $f1[u_] = -\text{Sqrt}[(9 - (u + 1)^2) / 8] + 1$; $n1 = 3$; $c = -1$; $d = 0$; $g[u_] = 1 + \frac{\sqrt{-4 + (3 + u)^2}}{\sqrt{5}}$; $g1[u_] = 1 - \frac{\sqrt{-4 + (3 + u)^2}}{\sqrt{5}}$;
 $h = (b - a) / n$; $u[j_] = a + j * h$; $v[j_] = f[u[j]]$; $v1[j_] = f1[u[j]]$; $h1 = (d - c) / n1$; $u1[j_] = c + j * h1$; $w[j_] = g[u1[j]]$; $z[j_] = g1[u1[j]]$;

LL =

Expand [
 Table [$\left\{ \frac{-1}{6 h^3} (u - u[3 j + 1]) (u - u[3 j + 2]) (u - u[3 j + 3]) v[3 j] + \frac{1}{2 h^3} (u - u[3 j]) (u - u[3 j + 2]) (u - u[3 j + 3]) v[3 j + 1] - \frac{1}{2 h^3} (u - u[3 j]) (u - u[3 j + 1]) (u - u[3 j + 3]) v[3 j + 2] + \frac{1}{6 h^3} (u - u[3 j]) (u - u[3 j + 1]) (u - u[3 j + 2]) v[3 j + 3], u[3 j] \leq u \leq u[3 j + 3] \right\}$, {j, 0, n/3 - 1}]]];

LLL =

Expand [
 Table [$\left\{ \frac{-1}{6 h^3} (u - u[3 j + 1]) (u - u[3 j + 2]) (u - u[3 j + 3]) v1[3 j] + \frac{1}{2 h^3} (u - u[3 j]) (u - u[3 j + 2]) (u - u[3 j + 3]) v1[3 j + 1] - \frac{1}{2 h^3} (u - u[3 j]) (u - u[3 j + 1]) (u - u[3 j + 3]) v1[3 j + 2] + \frac{1}{6 h^3} (u - u[3 j]) (u - u[3 j + 1]) (u - u[3 j + 2]) v1[3 j + 3], u[3 j] \leq u \leq u[3 j + 3] \right\}$, {j, 0, n/3 - 1}]]];

L =

Expand [
 Table [$\left\{ \frac{-1}{6 h1^3} (u1 - u1[3 j + 1]) (u1 - u1[3 j + 2]) (u1 - u1[3 j + 3]) w[3 j] + \frac{1}{2 h1^3} (u1 - u1[3 j]) (u1 - u1[3 j + 2]) (u1 - u1[3 j + 3]) w[3 j + 1] - \frac{1}{2 h1^3} (u1 - u1[3 j]) (u1 - u1[3 j + 1]) (u1 - u1[3 j + 3]) w[3 j + 2] + \frac{1}{6 h1^3} (u1 - u1[3 j]) (u1 - u1[3 j + 1]) (u1 - u1[3 j + 2]) w[3 j + 3], u1[3 j] \leq u1 \leq u1[3 j + 3] \right\}$, {j, 0, n1/3 - 1}]]];

L4 =

Expand [
 Table [$\left\{ \frac{-1}{6 h1^3} (u1 - u1[3 j + 1]) (u1 - u1[3 j + 2]) (u1 - u1[3 j + 3]) z[3 j] + \frac{1}{2 h1^3} (u1 - u1[3 j]) (u1 - u1[3 j + 2]) (u1 - u1[3 j + 3]) z[3 j + 1] - \frac{1}{2 h1^3} (u1 - u1[3 j]) (u1 - u1[3 j + 1]) (u1 - u1[3 j + 2]) z[3 j + 3], u1[3 j] \leq u1 \leq u1[3 j + 3] \right\}$, {j, 0, n1/3 - 1}]]];

pw1 = Piecewise[LL] // Simplify

pw2 = Piecewise[LLL] // Simplify

pw3 = Piecewise[L] // Simplify

pw4 = Piecewise[L4] // Simplify

POLINÔMIO QUE INTERPOLA A f E g

PROBLEMAS 5.1; 5.3; 5.5, 5.7

$n = 3$; $a = 0$; $b = 1$; $f[u_] = 2 (u - 1)^2 + 1$; $g[u_] = 1 + 2 \sqrt{1 - u^2}$;
 Resultado

$h = (b - a) / n$;

$u[j_] = a + j * h$;

$w[j_] = g[u[j]]$;

$v[j_] = f[u[j]]$;

L =

Expand [
 Table [$\left\{ \frac{-1}{6 h^3} (u - u[3 j + 1]) (u - u[3 j + 2]) (u - u[3 j + 3]) w[3 j] + \frac{1}{2 h^3} (u - u[3 j]) (u - u[3 j + 2]) (u - u[3 j + 3]) w[3 j + 1] - \frac{1}{2 h^3} (u - u[3 j]) (u - u[3 j + 1]) (u - u[3 j + 3]) w[3 j + 2] + \frac{1}{6 h^3} (u - u[3 j]) (u - u[3 j + 1]) (u - u[3 j + 2]) w[3 j + 3], u[3 j] \leq u \leq u[3 j + 3] \right\}$, {j, 0, n/3 - 1}]]];

LL =

Table [$\left\{ \frac{-1}{6 h^3} (u - u[3 j + 1]) (u - u[3 j + 2]) (u - u[3 j + 3]) v[3 j] + \frac{1}{2 h^3} (u - u[3 j]) (u - u[3 j + 2]) (u - u[3 j + 3]) v[3 j + 1] - \frac{1}{2 h^3} (u - u[3 j]) (u - u[3 j + 1]) (u - u[3 j + 3]) v[3 j + 2] + \frac{1}{6 h^3} (u - u[3 j]) (u - u[3 j + 1]) (u - u[3 j + 2]) v[3 j + 3], u[3 j] \leq u \leq u[3 j + 3] \right\}$, {j, 0, n/3 - 1}]]];

pw = Piecewise[L] // Simplify

pw1 = Piecewise[LL] // Simplify

B Programação

CONSTRUÇÃO DAS TABELAS

PROBLEMA 5.1 ÁREAS (TABELA 1)

```

n = 3; a = 0; b = 1; f[x_] = 2 (x - 1)^2 + 1; g[x_] = 1 + 2 √(1 - x^2);
Resultado
h = (b - a) / n;
x[j_] = a + j * h;
Table[x[j], {j, 0, n}];
y[j_] = f[x[j]];
z[j_] = g[x[j]];

a1 = N[(3 h / 8) * (y[0] + 3 Sum[y[3 j - 2], {j, 1, n / 3}] + 3 Sum[y[3 j - 1], {j, 1, n / 3}] + 2 Sum[y[3 j], {j, 1, n / 3 - 1}] + y[n]), 5];
a4 = N[(3 h / 8) * (z[0] + 3 Sum[z[3 j - 2], {j, 1, n / 3}] + 3 Sum[z[3 j - 1], {j, 1, n / 3}] + 2 Sum[z[3 j], {j, 1, n / 3 - 1}] + z[n]), 5];
a2 = NIntegrate[g[x] - f[x], {x, a, b}];
a3 = Abs[a2 - (a4 - a1)];
Print["O valor numérico aproximado da área com ", n, " partições é: ", a4 - a1]
Print["O valor analítico da área é: ", a2]
Print["O erro absoluto é: ", a3]

```

PROBLEMA 5.2 ÁREA

```

n = 3; a = -1; b = 0; c = 0; d = 2; f[x_] = 1 +  $\frac{\sqrt{-4 + (3 + x)^2}}{\sqrt{5}}$ ; g[x_] = 1 -  $\frac{\sqrt{-4 + (3 + x)^2}}{\sqrt{5}}$ ; f1[x_] = Sqrt[(9 - (x + 1)^2) / 8] + 1; f2[x_] = -Sqrt[(9 - (x + 1)^2) / 8] + 1;
Resultado
h = (b - a) / n;
x[j_] = a + j * h;
Table[x[j], {j, 0, n}];
y[j_] = f[x[j]];
z[j_] = g[x[j]];

h1 = (d - c) / n;
x1[j_] = c + j * h1;
Table[x1[j], {j, 0, n}];
y1[j_] = f1[x1[j]];
z1[j_] = f2[x1[j]];

a1 = N[(3 h / 8) * (y[0] + 3 Sum[y[3 j - 2], {j, 1, n / 3}] + 3 Sum[y[3 j - 1], {j, 1, n / 3}] + 2 Sum[y[3 j], {j, 1, n / 3 - 1}] + y[n]), 5];
a4 = N[(3 h / 8) * (z[0] + 3 Sum[z[3 j - 2], {j, 1, n / 3}] + 3 Sum[z[3 j - 1], {j, 1, n / 3}] + 2 Sum[z[3 j], {j, 1, n / 3 - 1}] + z[n]), 5];
a2 = NIntegrate[-g[x] + f[x], {x, a, b}];

a5 = N[(3 h1 / 8) * (y1[0] + 3 Sum[y1[3 j - 2], {j, 1, n / 3}] + 3 Sum[y1[3 j - 1], {j, 1, n / 3}] + 2 Sum[y1[3 j], {j, 1, n / 3 - 1}] + y1[n]), 5];
a6 = N[(3 h1 / 8) * (z1[0] + 3 Sum[z1[3 j - 2], {j, 1, n / 3}] + 3 Sum[z1[3 j - 1], {j, 1, n / 3}] + 2 Sum[z1[3 j], {j, 1, n / 3 - 1}] + z1[n]), 5];
a7 = NIntegrate[f1[x] - f2[x], {x, c, d}];
a3 = Abs[a2 + a7 - ((-a4 + a1) + (a5 - a6))];
Print["O valor numérico aproximado da área com ", n, " partições é: ", -a4 + a1 + a5 - a6]
Print["O valor analítico da área é: ", a2 + a7]
Print["O erro absoluto é: ", a3]

```

PROBLEMA 5.3 VOLUME

PROBLEMA 5.3;

```

n = 9; a = 0; b = 1; f[x_] = (2 (x - 1)^2 + 1)^2; g[x_] = (1 + 2 √(1 - x^2))^2;
Resultado
h = (b - a) / n;
x[j_] = a + j * h;
Table[x[j], {j, 0, n}];
y[j_] = f[x[j]];
z[j_] = g[x[j]];

a1 = N[(3 h / 8) * (y[0] + 3 Sum[y[3 j - 2], {j, 1, n / 3}] + 3 Sum[y[3 j - 1], {j, 1, n / 3}] + 2 Sum[y[3 j], {j, 1, n / 3 - 1}] + y[n]), 5];
a4 = N[(3 h / 8) * (z[0] + 3 Sum[z[3 j - 2], {j, 1, n / 3}] + 3 Sum[z[3 j - 1], {j, 1, n / 3}] + 2 Sum[z[3 j], {j, 1, n / 3 - 1}] + z[n]), 5];
a2 = NIntegrate[Pi (g[x] - f[x]), {x, a, b}];
a3 = Abs[a2 - Pi (a4 - a1)];
Print["O valor numérico aproximado do volume com ", n, " partições é: ", Pi (a4 - a1)]
Print["O valor analítico da área é: ", a2]
Print["O erro absoluto é: ", a3]

```

PROBLEMA 5.4 VOLUME

PROBLEMA 5.4;

$$n = 9; a = 0; b = 2; g[x_] = (\text{Sqrt}[(9 - (x + 1)^2) / 8] + 1)^2; f[x_] = (-\text{Sqrt}[(9 - (x + 1)^2) / 8] + 1)^2;$$

$$n1 = 9; c = -1; d = 0; g1[x1_] = \left(1 + \frac{\sqrt{-4 + (3 + x1)^2}}{\sqrt{5}}\right)^2; f1[x1_] = \left(1 - \frac{\sqrt{-4 + (3 + x1)^2}}{\sqrt{5}}\right)^2;$$

Resultado

 $h = (b - a) / n;$ $x[j_] = a + j * h;$ $\text{Table}[x[j], \{j, 0, n\}];$ $y[j_] = f[x[j]];$ $z[j_] = g[x[j]];$ $h1 = (d - c) / n1;$ $x1[j_] = c + j * h1;$ $\text{Table}[x1[j], \{j, 0, n1\}];$ $y1[j_] = f1[x1[j]];$ $z1[j_] = g1[x1[j]];$

$$a1 = N[(3 h / 8) * (y[0] + 3 \text{Sum}[y[3 j - 2], \{j, 1, n / 3\}] + 3 \text{Sum}[y[3 j - 1], \{j, 1, n / 3\}] + 2 \text{Sum}[y[3 j], \{j, 1, n / 3 - 1\}] + y[n]), 5];$$

$$a4 = N[(3 h1 / 8) * (z[0] + 3 \text{Sum}[z[3 j - 2], \{j, 1, n1 / 3\}] + 3 \text{Sum}[z[3 j - 1], \{j, 1, n1 / 3\}] + 2 \text{Sum}[z[3 j], \{j, 1, n1 / 3 - 1\}] + z[n]), 5];$$

$$a2 = \text{NIntegrate}[\text{Pi} (g[x] - f[x]), \{x, a, b\}];$$

$$a3 = \text{Abs}[a2 - \text{Pi} (a4 - a1)];$$

$$a11 = N[(3 h1 / 8) * (y1[0] + 3 \text{Sum}[y1[3 j - 2], \{j, 1, n1 / 3\}] + 3 \text{Sum}[y1[3 j - 1], \{j, 1, n1 / 3\}] + 2 \text{Sum}[y1[3 j], \{j, 1, n1 / 3 - 1\}] + y1[n]), 5];$$

$$a44 = N[(3 h1 / 8) * (z1[0] + 3 \text{Sum}[z1[3 j - 2], \{j, 1, n1 / 3\}] + 3 \text{Sum}[z1[3 j - 1], \{j, 1, n1 / 3\}] + 2 \text{Sum}[z1[3 j], \{j, 1, n1 / 3 - 1\}] + z1[n]), 5];$$

$$a22 = \text{NIntegrate}[\text{Pi} (g1[x1] - f1[x1]), \{x1, c, d\}];$$

$$a33 = \text{Abs}[a22 - \text{Pi} (a44 - a11)];$$

$$\text{Print}["\text{O valor numérico aproximado do volume com } n, \text{ partições é: ", \text{Pi} ((a4 - a1) + (a44 - a11))];$$

$$\text{Print}["\text{O valor analítico da área é: ", a2 + a22];$$

$$\text{Print}["\text{O erro absoluto é: ", \text{Abs}[a3] + \text{Abs}[a33]];$$

ÁREA DE SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO

PROBLEMA 5.5 ÁREA DE SUPERFÍCIE

$$n = 9; a = 0; b = \frac{\pi}{2}; g[x_] = (2 \text{Sin}[x] + 1) \sqrt{4 (\text{Cos}[x])^2 + (\text{Sin}[x])^2};$$

$$n1 = 9; c = 0; d = 1; f[x1_] = (2 (x1 - 1)^2 + 1) \sqrt{1 + 16 (x1 - 1)^2};$$

"Resultado n=3"

 $h = (b - a) / n;$ $x[j_] = a + j * h;$ $\text{Table}[x[j], \{j, 0, n\}];$ $z[j_] = g[x[j]];$ $h1 = (d - c) / n1;$ $x1[j_] = c + j * h1;$ $\text{Table}[x1[j], \{j, 0, n1\}];$ $y[j_] = f[x1[j]];$

$$a4 = N[(3 h / 8) * (z[0] + 3 \text{Sum}[z[3 j - 2], \{j, 1, n / 3\}] + 3 \text{Sum}[z[3 j - 1], \{j, 1, n / 3\}] + 2 \text{Sum}[z[3 j], \{j, 1, n / 3 - 1\}] + z[n]), 5];$$

$$a2 = \text{NIntegrate}[2 \text{Pi} g[x], \{x, a, b\}];$$

$$a3 = \text{Abs}[a2 - 2 \text{Pi} (a4)];$$

$$a44 = N[(3 h1 / 8) * (y[0] + 3 \text{Sum}[y[3 j - 2], \{j, 1, n1 / 3\}] + 3 \text{Sum}[y[3 j - 1], \{j, 1, n1 / 3\}] + 2 \text{Sum}[y[3 j], \{j, 1, n1 / 3 - 1\}] + y[n1]), 5];$$

$$a22 = \text{NIntegrate}[2 \text{Pi} f[x1], \{x1, c, d\}];$$

$$a33 = \text{Abs}[a22 - 2 \text{Pi} (a44)];$$

$$\text{Print}["\text{O valor numérico aproximado da área de superfície de revolução com } n, \text{ partições é: ", 2 \text{Pi} (a4 + a44)}];$$

$$\text{Print}["\text{O valor analítico da área de superfície de revolução é: ", a2 + a22];$$

$$\text{Print}["\text{O erro absoluto é: ", \text{Abs}[a3] + \text{Abs}[a33]];$$

PROBLEMA 5.6 ÁREA DE SUPERFÍCIE REVOLUÇÃO

```

n = 9; a = -ArcSin[ $\frac{\sqrt{8}}{3}$ ]; b = ArcSin[ $\frac{\sqrt{8}}{3}$ ]; g[x_] =  $\left(\frac{3}{\sqrt{8}} \sin[x] + 1\right) \left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) \sqrt{(\cos[x])^2 + 8 (\sin[x])^2}$ ;

n1 = 9; c = -ArcTan[ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ]; d = ArcTan[ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ]; f[x1_] =  $\left(\frac{2}{\sqrt{5}} \tan[x1] + 1\right) \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \sqrt{(\sec[x1])^4 + 5 (\sec[x1])^2 (\tan[x1])^2}$ ;

"Resultado n=3"
h = (b - a) / n;
x[j_] = a + j * h;
Table[x[j], {j, 0, n}];
z[j_] = g[x[j]];

h1 = (d - c) / n1;
x1[j_] = c + j * h1;
Table[x1[j], {j, 0, n1}];
y[j_] = f[x1[j]];

a4 = N[(3 h / 8) * (z[0] + 3 Sum[z[3 j - 2], {j, 1, n / 3}] + 3 Sum[z[3 j - 1], {j, 1, n / 3}] + 2 Sum[z[3 j], {j, 1, n / 3 - 1}] + z[n]), 5];
a2 = NIntegrate[2 Pi g[x], {x, a, b}];
a3 = Abs[a2 - 2 Pi (a4)];

a44 = N[(3 h1 / 8) * (y[0] + 3 Sum[y[3 j - 2], {j, 1, n1 / 3}] + 3 Sum[y[3 j - 1], {j, 1, n1 / 3}] + 2 Sum[y[3 j], {j, 1, n1 / 3 - 1}] + y[n1]), 5];
a22 = NIntegrate[2 Pi f[x1], {x1, c, d}];
a33 = Abs[a22 - 2 Pi (a44)];
Print["O valor numérico aproximado da área de superfície de revolução com ", n, " partições é: ", 2 Pi (a4 + a44)]
Print["O valor analítico da área de superfície de revolução é: ", a2 + a22]
Print["O erro absoluto é: ", Abs[a3] + Abs[a33]]

```

COMPRIMENTO DE ARCO

PROBLEMA 5.7 COMPRIMENTO DE ARCO

```

n = 9; a = 0; b =  $\frac{\pi}{2}$ ; g[x_] =  $\sqrt{4 (\cos[x])^2 + (\sin[x])^2}$ ;

n1 = 9; c = 0; d = 1; f[x1_] =  $\sqrt{1 + 16 (x1 - 1)^2}$ ;

"Resultado n=3"
h = (b - a) / n;
x[j_] = a + j * h;
Table[x[j], {j, 0, n}];
z[j_] = g[x[j]];

h1 = (d - c) / n1;
x1[j_] = c + j * h1;
Table[x1[j], {j, 0, n1}];
y[j_] = f[x1[j]];

a4 = N[(3 h / 8) * (z[0] + 3 Sum[z[3 j - 2], {j, 1, n / 3}] + 3 Sum[z[3 j - 1], {j, 1, n / 3}] + 2 Sum[z[3 j], {j, 1, n / 3 - 1}] + z[n]), 5];
a2 = NIntegrate[g[x], {x, a, b}];
a3 = Abs[a2 - (a4)];

a44 = N[(3 h1 / 8) * (y[0] + 3 Sum[y[3 j - 2], {j, 1, n1 / 3}] + 3 Sum[y[3 j - 1], {j, 1, n1 / 3}] + 2 Sum[y[3 j], {j, 1, n1 / 3 - 1}] + y[n1]), 5];
a22 = NIntegrate[f[x1], {x1, c, d}];
a33 = Abs[a22 - (a44)];
Print["O valor numérico aproximado da área de superfície de revolução com ", n, " partições é: ", (a4 + a44)]
Print["O valor analítico da área de superfície de revolução é: ", a2 + a22]
Print["O erro absoluto é: ", Abs[a3] + Abs[a33]]

```

PROBLEMA 5.8 COMPRIMENTO DE ARCO

```

n = 6; a = -ArcSin[ $\frac{\sqrt{8}}{3}$ ]; b = ArcSin[ $\frac{\sqrt{8}}{3}$ ]; g[x_] =  $\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) \sqrt{(\cos[x])^2 + 8 (\sin[x])^2}$ ;

n1 = 6; c = -ArcTan[ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ]; d = ArcTan[ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ]; f[x1_] =  $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \sqrt{(\sec[x1])^4 + 5 (\sec[x1])^2 (\tan[x1])^2}$ ;

"Resultado n=3"
h = (b - a) / n;
x[j_] = a + j * h;
Table[x[j], {j, 0, n}];
z[j_] = g[x[j]];

h1 = (d - c) / n1;
x1[j_] = c + j * h1;
Table[x1[j], {j, 0, n1}];
y[j_] = f[x1[j]];

a4 = N[(3 h / 8) * (z[0] + 3 Sum[z[3 j - 2], {j, 1, n / 3}] + 3 Sum[z[3 j - 1], {j, 1, n / 3}] + 2 Sum[z[3 j], {j, 1, n / 3 - 1}] + z[n]), 5];
a2 = NIntegrate[g[x], {x, a, b}];
a3 = Abs[a2 - (a4)];

a44 = N[(3 h1 / 8) * (y[0] + 3 Sum[y[3 j - 2], {j, 1, n1 / 3}] + 3 Sum[y[3 j - 1], {j, 1, n1 / 3}] + 2 Sum[y[3 j], {j, 1, n1 / 3 - 1}] + y[n1]), 5];
a22 = NIntegrate[f[x1], {x1, c, d}];
a33 = Abs[a22 - (a44)];

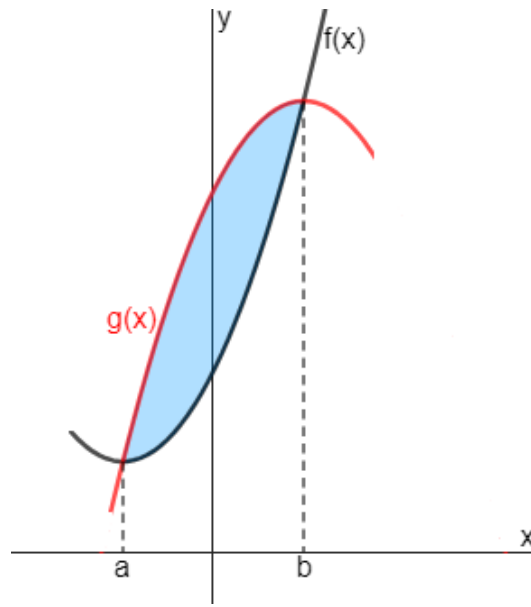
Print["O valor numérico aproximado da área de superfície de revolução com ", n, " partições é: ", (a4 + a44)]
Print["O valor analítico da área de superfície de revolução é: ", a2 + a22]
Print["O erro absoluto é : ", Abs[a3] + Abs[a33]]

```

c Cálculo de área e volume de revolução

Fórmula da Área entre duas Curvas

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \quad (\text{C.1})$$



Fórmula do Volume de Revolução entre duas Curvas

$$V = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx \quad (\text{C.2})$$

