



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SALINÓPOLIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LUIZ FELIPE SANTOS ABREU

**MODELAGEM COMPUTACIONAL DA EQUAÇÃO
DO CALOR DE FOURIER**

SALINÓPOLIS – PA
2024

LUIZ FELIPE SANTOS ABREU

**MODELAGEM COMPUTACIONAL DA EQUAÇÃO
DO CALOR DE FOURIER**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao corpo docente da Faculdade de Matemática – Campus Universitário de Salinópolis, como parte dos requisitos necessários para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos.

SALINÓPOLIS-PA
2024

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

A162m Abreu, Luiz Felipe Santos.
Modelagem computacional da equação do calor de Fourier /
Luiz Felipe Santos Abreu. — 2024.
v, 15 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos
Ramos

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade
Federal do Pará, Campus Universitário de Salinópolis, Curso de
Licenciatura em Matemática, Salinópolis, 2024.

1. Equação do Calor. 2. Lei de Fourier. 3. Simulação
Computacional. I. Título.

CDD 515.353

LUIZ FELIPE SANTOS ABREU

**MODELAGEM COMPUTACIONAL DA EQUAÇÃO
DO CALOR DE FOURIER**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para
obtenção de grau de Licenciado, Faculdade de Ma-
temática, Campus Universitário de Salinópolis, Univer-
sidade Federal do Pará.

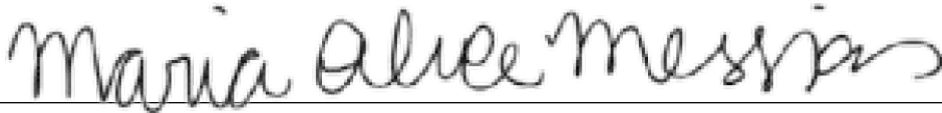
Orientador: Dr. Anderson de Jesus Araujo Ramos.

Data de aprovação: 19 de fevereiro de 2024

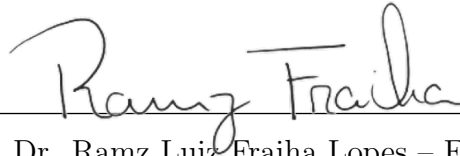
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos – FAMAT/UFPA (Orientador)



Prof. Dr^a. Maria Alice de Vasconcelos Feio Messias – FAMAT/UFPA



Prof. Dr. Ramz Luiz Fraiha Lopes – FAMAT/UFPA

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, uno e trino, na qual me deu perseverança, coragem e forças em todos os momentos difíceis de minha vida. A virgem Maria Santíssima que sempre atendeu meus pedidos e intercedeu por mim ao Pai. **“Vós, os que temeis ao SENHOR, confiai no SENHOR; ele é vosso auxílio e vosso escudo (Sl 115:11).”**

Aos meus pais Luiz Fernando B. de Abreu e Rosângela M. dos Santos que são meu alicerce de fé e nunca deixaram que eu desistisse, sempre me apoiando e me incentivando em minhas escolhas. À eles também que são minha motivação para continuar essa caminhada, meu obrigado por tudo. Aos meus irmãos, Bruno e Igor, obrigado por todo apoio nesta tão difícil caminhada. **“Creia no Senhor Jesus, e serão salvos, você e os de sua casa (Atos 16:31)”**.

Aos meus padrinhos José Ferreira Filho e Mara Mônica e a sua filha Talyta, pela ajuda durante toda minha vida e por sempre se fazerem presentes na minha família.

Ao senhor Adelson Teles e sua esposa Rosa Cristina e sua família, pela ajuda na minha estadia em Salinópolis durante o período da graduação e também por todo apoio e carinho que tens por mim e pela minha família.

Aos meus colegas de graduação por todo apoio e incentivo durante o curso, em especial ao David, Jaqueline, João Victor, Manoel Nandinho e Rafael. E aos meus amigos de Salinas pelas ajudas e pelos momentos importantes de descontração durante minha passagem nesta cidade, em especial ao Alan e sua família, Elivelton, Wanderson e Thainá.

Aos professores do Campus de Salinópolis por todo ensinamento repassado durante a graduação, vocês que sempre foram solícitos e pacientes em todos os momentos.

Aos meu orientador Professor Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos que foi fundamental para a conclusão desse curso. Obrigado por todo apoio e incentivo durante essa reta final. Por confiar em mim e acreditar na minha capacidade em momentos que até eu mesmo duvidei.

Que Deus bondoso abençoe a todos.

Modelagem Computacional da Equação do Calor de Fourier

Luiz Fellipe Santos Abreu

*Faculdade de Matemática, Universidade Federal do Pará.
Rua Raimundo Santana Cruz, s/n, 68721-000, Salinópolis-Pa, Brasil.*

Resumo

Neste trabalho usamos Modelagem Computacional para estudarmos o problema de condução de calor governada pela lei de Fourier. Primeiro usamos o método da separação de variáveis juntamente com séries de Fourier para obtermos a solução formal do problema. Em seguida, fizemos simulações computacionais usando o software MATLAB para ilustrar o comportamento da solução.

Paravras-chave: Equação do Calor, Lei de Fourier, Simulação Computacional

1. Introdução

A Modelagem Computacional é o processo de criar modelos matemáticos e simulações utilizando computadores para entender e prever o comportamento de sistemas físicos, biológicos, econômicos e outros. Esses modelos ajudam a tomar decisões, otimizar processos e entender fenômenos complexos.

“De acordo com Bunge [4], para apreender a realidade, o ser humano começa com idealizações e simplificações que permitem construir o que ele define como objeto-modelo ou modelo conceitual do fenômeno de interesse da situação-problema em pauta.”

Nessas condições, a linguagem de programação e os softwares matemáticos se apresentam como ferramentas fundamentais para realização da Modelagem Computacional de determinado problema. Sendo a VisualBasic, Delphi e C++ as linguagens de programação mais populares. Dentre os softwares mais utilizados, destacam-se as planilhas eletrônicas StarOffice, Excel e os softwares que permitem cálculos algébricos e numéricos como o Mathcad, Mathematica, Matlab e outros (ver [8]).

No âmbito educacional atual, destaca-se a necessidade de utilizar *metodologias ativas* de maneira a promover experiências satisfatórias de ensino e aprendizagem dos alunos e reduzir a evasão e reprovação em todas as esferas educacionais (ver [1]). Atualmente, com o avanço da tecnologia, existem muitos recursos pedagógicos que proporcionam ao professor realizar aulas mais dinâmicas dentro e fora da sala de aula, tornando o aluno participante ativo durante todo o processo de ensino e aprendizagem.

Dentre as diversas perspectivas metodológicas, destacam-se o uso de Jogos Pedagógicos e Materiais Manipuláveis, o Ensino por Investigação, a Resolução de Problemas, Modelagem, Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC'S), etc. Diante disso, o uso da Modelagem Computacional para o ensino e aprendizagem de matemática, vem mostrando resultados positivos, proporcionando ao professor dinamizar sua prática, permitindo que o aluno visualize com mais clareza o que foi proposto com uma ampla possibilidade de exploração, análise de dados e interpretação gráfica.

Andrade [1], afirma que para o professor desenvolver uma atividade utilizando um ambiente virtual de aprendizado é necessário levar em conta três aspectos que nortearão todo o processo de ensino. São eles: os conteúdos e objetivos de ensino, a ferramenta computacional e a metodologia. O primeiro aspecto está relacionado com o conteúdo que será abordado dentro de sala de aula e seu respectivo objetivo. Nesse primeiro momento, o professor deve ter clareza dos objetivos em termo de aprendizagem. O segundo aspecto visa observar a ferramenta computacional utilizada pelo professor no processo de ensino. Nessa etapa o docente precisa ter um bom domínio da ferramenta escolhida, uma vez que ela não deve substituir o professor dentro de sala, mas ser apenas um auxílio no processo e, por se tratar de um meio tecnológico, o professor deve estar ciente de que existem falhas no sistema. Por isso deve estar preparado para contornar eventuais imprevistos dentro de sala. O terceiro aspecto é o processo didático. Nessa fase, o professor deve utilizar a ferramenta computacional para abordar o conteúdo proposto e alcançar os objetivos. Assim, o processo didático deve nortear o professor no que se refere a utilização do instrumento computacional dentro de sala de aula.

O principal objetivo neste trabalho de conclusão de curso é motivar a iniciação científica em Modelagem Computacional com o estudo de conceitos físicos, equações diferenciais parciais e programação. Para isso, consideramos o problema clássico da condução de calor em uma barra governada pela lei de Fourier.

2. Lei de Fourier

A condução de calor é um dos três principais modos de transporte de calor, juntamente com a convecção e a radiação. Ela ocorre em meios materiais, como sólidos, líquidos e gases, quando há um gradiente de temperatura relacionado ao material, ou seja, uma diferença de temperatura entre duas regiões adjacentes (ver [6, 2, 3]).

A condução de calor é um fenômeno importante e amplamente observado em situações cotidianas e na engenharia como por exemplo, a transferência de calor em sistemas de resfriamento de motores, projetos de isolamento térmico em edifícios e a operação de dispositivos eletrônicos. Ela é responsável por transferir energia térmica de regiões de temperatura mais alta para regiões de temperatura mais baixa dentro do material, sem que o material se mova.

A lei de Fourier, formulada em 1822 pelo próprio Fourier [5], descreve a condução de calor em um material sólido e estabelece uma relação entre o fluxo de calor q , o gradiente de temperatura $\nabla\theta$, e a condutividade térmica κ do material. Para obter mais informações sobre o contexto epistemológico do problema consulte Pifer & Aurani [7]. A equação da Lei

de Fourier no domínio unidimensional é dada por

$$q = -\kappa\theta_x, \quad (1)$$

em que o sinal negativo indica que o calor flui do lado mais quente para o menos quente. A condutividade térmica κ é uma propriedade intrínseca do material que quantifica sua capacidade de conduzir calor. Materiais com alta condutividade térmica, como metais, conduzem calor muito bem, enquanto materiais com baixa condutividade térmica, como isolantes, são menos eficientes na condução de calor. Além da equação constitutiva (1), é necessário considerar também o balanço de energia interna dada pela equação

$$\rho e_t + q_x = 0, \quad (2)$$

e, para obter um sistema completo de Equações Diferenciais Parciais, consideramos a relação constitutiva $e = c\theta$ (equação de estado), o que nos dá a equação

$$\rho c\theta_t + q_x = 0, \quad (3)$$

em que não consideramos termos fonte. Com isto, obtemos o sistema de Equações Diferenciais Parciais dado por

$$\begin{cases} \rho c\theta_t + q_x = 0 & \text{em } (0, \ell) \times (0, \infty), \\ q + \kappa\theta_x = 0 & \text{em } (0, \ell) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (4)$$

com condições de contorno adiabáticas, i.e., que caracterizam o resfriamento do corpo sem haver troca de calor com o meio externo a ele, ou seja,

$$q(0, t) = q(\ell, t) = 0, \quad \text{para todo } t > 0, \quad (5)$$

e condições iniciais

$$\theta(x, 0) = f(x), \quad q(x, 0) = g(x) \quad x \in (0, \ell). \quad (6)$$

Por ser um sistema simples, no sentido de ter poucas variáveis dependentes e derivadas de baixa ordem no tempo, podemos desacoplar o sistema e obter uma única equação para as variáveis θ e q . Abaixo apresentamos os modelos desacoplados para a temperatura θ e para o fluxo de calor q , i.e.,

$$\begin{cases} \theta_t - k\theta_{xx} = 0 & \text{em } (0, \ell) \times (0, \infty), \\ \theta_x(0, t) = \theta_x(\ell, t) = 0 & \text{para } t \geq 0, \\ \theta(x, 0) = f(x), & x \in (0, \ell), \end{cases} \quad (7)$$

seguido por

$$\begin{cases} q_t - kq_{xx} = 0 & \text{em } (0, \ell) \times (0, \infty), \\ q(0, t) = q(\ell, t) = 0 & \text{para } t \geq 0, \\ q(x, 0) = g(x), & x \in (0, \ell), \end{cases} \quad (8)$$

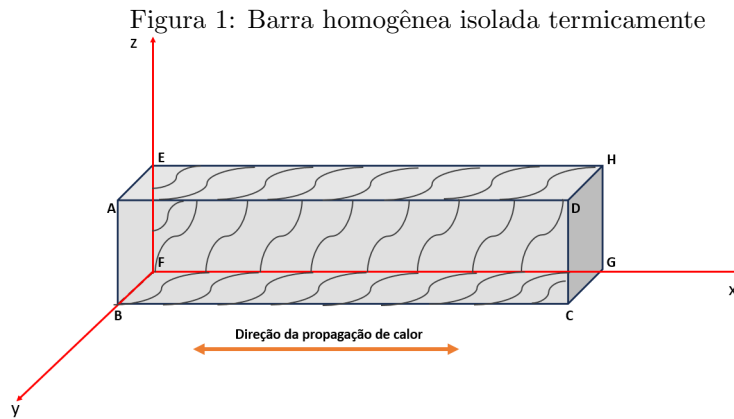
onde $k = \kappa/\rho c$.

Na seção seguinte fornecemos mais detalhes do problema físico que temos em mente.

3. O problema físico

Para termos uma ideia mais concreta do que estamos estudando, descrevemos com mais detalhes o seguinte problema físico.

Considere uma barra $ABCDEFGH$ de comprimento $\ell = \overline{BC}$, constituída de um material homogêneo e condutor de calor cujas faces $ABCD$, $EFGH$ e as bases $BCGF$, $ADHE$ estão isoladas termicamente. Devido ao isolamento térmico, o calor se propaga em apenas uma direção, isto é, na direção do vetor \overrightarrow{BC} . Veja a Figura 1



Fonte: Própria (2024).

3.1. Solução formal da equação do calor

No contexto de uma barra termicamente isolada consideramos o modelo de Fourier para a propagação unidimensional do calor dado por

$$\theta_t - k\theta_{xx} = 0 \quad \text{em} \quad (0, \ell) \times (0, \infty), \quad (9)$$

onde $k > 0$ é a constante de difusividade térmica do material. As condições de contorno são dadas por

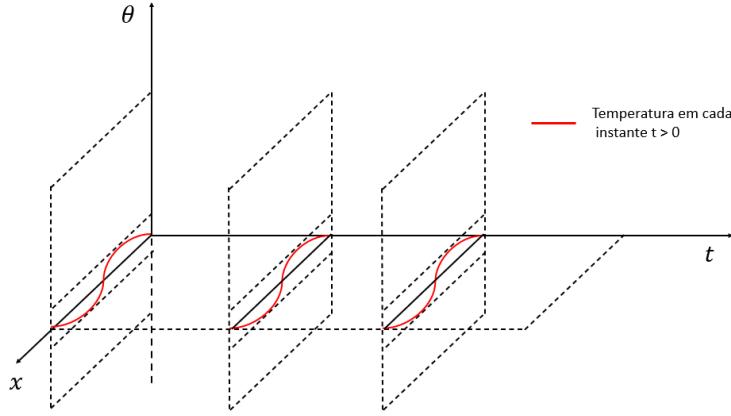
$$\theta_x(0, t) = \theta_x(\ell, t) = 0, \quad \text{para todo} \quad t > 0, \quad (10)$$

e condição inicial por

$$\theta(x, 0) = f(x), \quad x \in (0, \ell). \quad (11)$$

Para cada instante $t > 0$ fixo, o problema tem lugar no plano (x, θ) , onde $\theta = \theta(x, t)$ representa a temperatura no ponto x no instante t . A Figura 2 ilustra nossa descrição.

Figura 2: Plano (x, θ) para cada $t > 0$ fixo.



Fonte: Própria (2024).

A seguir, utilizamos o método da separação de variáveis juntamente com séries de Fourier para encontrarmos a solução formal da equação do calor. A proposição seguinte apresenta a solução formal do problema.

Proposição 3.1. A solução formal do problema (9)–(11) em série de Fourier é dada por

$$\theta(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-k \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} t} \cos(n\pi x / \ell), \quad (12)$$

onde c_n é o coeficiente de Fourier dado por

$$c_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos(n\pi x / \ell) dx. \quad (13)$$

Prova: Considerando o *ansatz* da forma

$$\theta(x, t) = F(x)G(t) \quad \text{em } [0, \ell] \times [0, \infty), \quad (14)$$

segue que

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G'(t)}{kG(t)}. \quad (15)$$

Observamos que o lado esquerdo da equação acima depende apenas de x , enquanto que o lado direito depende apenas de t . Logo podemos concluir que ambos os lados, são independentes de x e t . Isto quer dizer que,

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G'(t)}{kG(t)} = \sigma, \quad \text{para algum } \sigma \in \mathbb{R}. \quad (16)$$

Por outro lado, substituindo $\theta(x, t) = F(x)G(t)$ nas condições de contorno $\theta_x(0, t) = \theta_x(\ell, t) = 0$ temos,

$$\begin{cases} \theta_x(0, t) = 0 & \Rightarrow & F'(0)G(t) = 0 & \Rightarrow & F'(0) = 0, \\ \theta_x(\ell, t) = 0 & \Rightarrow & F'(\ell)G(t) = 0 & \Rightarrow & F'(\ell) = 0, \end{cases} \quad (17)$$

e substituindo na condição inicial $\theta(x, 0) = f(x)$ temos

$$\theta(x, 0) = f(x) \quad \Rightarrow \quad F(x)G(0) = f(x), \quad (18)$$

de onde adotamos $G(0) = G_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$. Com isto, passamos a considerar o problema de valor de contorno

$$\begin{cases} F''(x) - \sigma F(x) = 0 & \text{em } (0, \ell), \\ F'(0) = F'(\ell) = 0, \end{cases} \quad (19)$$

e o problema de valor inicial

$$\begin{cases} G'(t) - k\sigma G(t) = 0, & \text{para todo } t \geq 0, \\ G(0) = G_0. \end{cases} \quad (20)$$

Primeiro resolvemos o problema de valor de contorno (19). Para isto, analisamos os seguintes casos:

Caso I: Supondo $\sigma > 0$ e considerando $F(x) = e^{\mu x}$ em (19) temos a equação característica

$$\mu^2 - \sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \pm\sqrt{\sigma}. \quad (21)$$

Segue que

$$F(x) = e^{\sqrt{\sigma}x} \quad \text{e} \quad F(x) = e^{-\sqrt{\sigma}x}. \quad (22)$$

Pelo *princípio da superposição de solução* temos que

$$F(x) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}x}, \quad (23)$$

também é solução do problema. Por outro lado, segue das condições de contorno $F'(0) = F'(\ell) = 0$ que

$$\begin{cases} F'(0) = c_1\sqrt{\sigma} - c_2\sqrt{\sigma} = 0 & \Rightarrow \quad c_1 - c_2 = 0, \\ F'(\ell) = c_1\sqrt{\sigma}e^{\sqrt{\sigma}\ell} - c_2\sqrt{\sigma}e^{-\sqrt{\sigma}\ell} = 0 & \Rightarrow \quad c_1e^{\sqrt{\sigma}\ell} - c_2e^{-\sqrt{\sigma}\ell} = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Isto implica em $c_1(e^{2\sqrt{\sigma}\ell} - 1) = 0$ e como $\sigma > 0$ temos que $c_1 = c_2 = 0$.

Logo temos que F é uma solução nula. Como não estamos interessados na solução nula, o parâmetro $\sigma > 0$ não serve.

Caso II: Supondo $\sigma = 0$ em (19) temos $F''(x) = 0$. Consequentemente,

$$F(x) = c_1x + c_2. \quad (25)$$

Segue das condições de contorno $F'(0) = F'(\ell) = 0$ que

$$F(x) = 0. \quad (26)$$

Novamente temos que F é uma solução nula. Como não estamos interessados na solução nula, o parâmetro $\sigma = 0$ não serve.

Caso III: Finalmente, supondo $\sigma := -\lambda^2 < 0$ em (19) e (23) temos

$$F(x) = c_1 e^{i\lambda x} + c_2 e^{-i\lambda x}. \quad (27)$$

Usando a relação de Euler $e^{\pm i\beta} = \cos(\beta) \pm i \sin(\beta)$ obtemos

$$F(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x). \quad (28)$$

Segue das condições de contorno $F'(0) = F'(\ell) = 0$ que $B = 0$ e $F'(\ell) = -\lambda A \sin(\lambda \ell) = 0$. Isto implica em $A \neq 0$ e $\lambda_n = \lambda = n\pi/\ell$. Consequentemente,

$$F_n(x) = A \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (29)$$

Agora que já encontramos $\sigma_n = -\lambda_n^2 = -n^2\pi^2/\ell^2$, resolvemos o problema de valor inicial dado por

$$\begin{cases} G'(t) - k\sigma_n G(t) = 0, & \text{para todo } t \geq 0, \\ G(0) = G_0. \end{cases} \quad (30)$$

É fácil ver que

$$G_n(t) = G_0 e^{-k\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}t}, \quad \text{para todo } t \geq 0, \quad (31)$$

é solução (20). Por fim, combinando as equações (29), (31) temos

$$\theta_n(x, t) = \beta e^{-k\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}t} \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad (32)$$

onde $\beta := AG_0$ satisfaz a equação (9) e as condições de contorno (10). Para que $\theta_n(x, t)$ seja solução do problema (9)–(11), esta deve satisfazer a condição inicial (11), *i.e.*, para $t = 0$ devemos ter

$$\theta_n(x, 0) = f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \beta \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right). \quad (33)$$

Em particular, note que se

$$f(x) = 2 \cos\left(\frac{5\pi x}{\ell}\right), \quad (34)$$

então a solução do problema (9)–(11) é dada por

$$\theta_5(x, t) = 2e^{-k\frac{25\pi^2}{\ell^2}t} \cos\left(\frac{5\pi x}{\ell}\right). \quad (35)$$

Além disso, se

$$f(x) = 2 \cos\left(\frac{5\pi x}{\ell}\right) + 3 \cos\left(\frac{4\pi x}{\ell}\right), \quad (36)$$

então a solução do problema (9)–(11) é dada por

$$\theta(x, t) = 2e^{-k\frac{25\pi^2}{\ell^2}t} \cos\left(\frac{5\pi x}{\ell}\right) + 3e^{-k\frac{16\pi^2}{\ell^2}t} \cos\left(\frac{4\pi x}{\ell}\right). \quad (37)$$

De modo geral, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^N a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad (38)$$

onde a_n ($n = 0, 1, \dots, N$) são coeficientes conhecidos, então usamos o *princípio da superposição de solução* para afirmarmos que a solução do problema (9)–(11) é da forma

$$\theta(x, t) = \sum_{n=0}^N a_n e^{-k\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}t} \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right). \quad (39)$$

Por outro lado, se $f(x)$ não é da forma (38) então, devemos considerar $f(x)$ expressa como uma série de Fourier da forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad (40)$$

e usando o *princípio da superposição de solução* temos que

$$\theta(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-k\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}t} \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad (41)$$

é solução do problema (9)–(11). Os coeficientes c_n ($n = 0, 1, \dots$) são chamados de coeficientes de Fourier e são escolhidos de modo que tomando $t = 0$ em (41) tenhamos (40). Portanto os c_n ($n = 0, 1, \dots$) devem ser coeficientes de Fourier da função $f(x)$, dada em $[0, \ell]$. Note que $f(x)$ deve ser escolhida de modo a ser uma função par e periódica de período 2π , a fim de termos uma série de cossenos de argumento $n\pi/\ell$.

Agora nossa intenção é encontrar os valores de c_n ($n = 0, 1, \dots$). Note que integrando a equação (40) em $[0, \ell]$ obtemos

$$c_0 = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) dx. \quad (42)$$

Por outro lado, multiplicando a equação (40) por $\cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right)$ ($m = 1, 2, \dots$) e integrando em $[0, \ell]$ obtemos

$$\int_0^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^{\ell} \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\int_0^\ell f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx &= c_1 \int_0^\ell \cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx + c_2 \int_0^\ell \cos\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx \\
&+ c_3 \int_0^\ell \cos\left(\frac{3\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx + c_4 \int_0^\ell \cos\left(\frac{4\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx \\
&+ \dots + \dots \\
&+ c_{n-1} \int_0^\ell \cos\left(\frac{(n-1)\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx + c_n \int_0^\ell \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx \\
&+ \dots + \dots.
\end{aligned}$$

Usando as relações de ortogonalidade entre as funções $\cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$ e $\cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right)$ para $n \neq m$ segue que

$$\int_0^\ell f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx = \frac{\ell}{2} c_n, \quad n = m,$$

ou ainda,

$$c_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (43)$$

Isto conclui a prova. ■

Observação 3.2. Seguindo os passos acima, mostramos sem dificuldades que a solução formal do fluxo de calor referente ao sistema [\[8\]](#) é dada por

$$q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-k \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} t} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad (44)$$

onde o coeficiente de Fourier é dado por

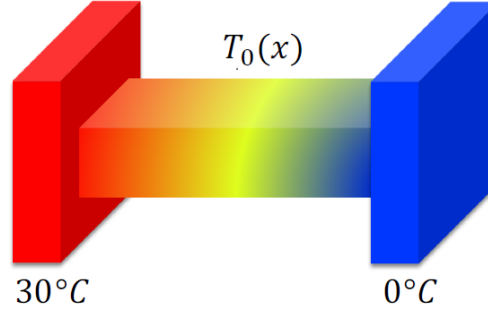
$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (45)$$

Na seção seguinte, apresentamos as simulações usando a solução exata que obtemos.

4. Simulação computacional

Nesta seção, consideramos um experimento hipotético de uma barra $ABCDEFGH$ de comprimento ℓ , constituída de um material homogêneo e condutor de calor cujas faces $ABCD$, $EFGH$ e as bases $BCGF$, $ADHE$ estão isoladas termicamente. Supomos que as faces laterais $ABFE$ e $CGHD$ livres do isolamento térmico estejam em contato com dois corpos C_A e C_B de temperaturas 30°C e 0°C respectivamente. Além disso, também supomos que no instante $t = 0$ a barra possui uma distribuição de temperatura $T_0(x)$. Vejamos a ilustração da Figura [\[3\]](#).

Figura 3: Configuração inicial do experimento



Fonte: Própria (2024).

Tal configuração inicial pode ser modelada por uma função contínua da forma

$$f(x) = T_b + \frac{T_f}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \quad \text{para todo } 0 \leq x \leq \ell. \quad (46)$$

Tendo em mente as equações (42) e (43), os coeficientes de Fourier associado à condição inicial (46) são dados por

$$c_0 = T_b \quad \text{e} \quad c_1 = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \left[T_b + \frac{T_f}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \right] \cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) dx = \frac{T_f}{2}.$$

Assim, a solução (41) é da forma

$$\theta(x, t) = T_b + \frac{T_f}{2} e^{-k \frac{\pi^2}{\ell^2} t} \cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right). \quad (47)$$

Agora, para encontrarmos a solução exata da equação do fluxo de calor dada em (8) é necessário sabermos o campo do fluxo de calor inicial referente a temperatura inicial adotada em (46) e para isso, devemos usar a equação (4)2. Isso resulta em

$$g(x) = \frac{kT_f\pi}{2\ell} \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \quad \text{para todo } 0 \leq x \leq \ell. \quad (48)$$

Segue da equação (45) que o coeficiente de Fourier associado à condição inicial (48) é dado por

$$a_1 = \frac{kT_f\pi}{\ell^2} \int_0^\ell \sin^2\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) dx = \frac{kT_f\pi}{2\ell}.$$

Finalmente estamos em condição de realizar a simulação computacional. Para isso consideramos $T_b = 15^\circ\text{C}$ e $T_f = 30^\circ\text{C}$, $\ell = 1\text{ m}$ e $k = 5\text{ m}^2/\text{s}$.

4.1. Código Matlab

Aqui inserimos o código Matlab usado para fazer as simulações.

```
1 %=====
2 %===== Equacao do calor de Fourier =====
3 %=====
4 %            $u_t - k*u_{xx} = 0$  em  $(0,L) \times (0,T)$ ,
5 %            $u(0,t) = u(L,t) = 0$ ,
6 %            $u(x,0) = f(x)$ .
7 %=====
8 %=====
9
10 %=====
11 %===== Limpa a memoria e a tela de comando =====
12 %=====
13 clear
14 clc
15 %=====
16 %=====
17
18 %=====
19 %===== Dominio  $(0,L) \times (0,T)$  =====
20 %=====
21 %--- Dominio espacial  $(0,L)$ 
22 L = 1;
23 J = 999;
24 dx = L/(J+1);
25 x = 0:dx:L;
26 %-----
27 %--- Dominio temporal  $(0,T)$ 
28 T = 0.25;
29 N = 999;
30 dt = T/(N+1);
31 t = 0:dt:T;
32 %=====
33 %=====
34
35 %=====
36 %===== Constantes =====
37 %=====
38 %--- Constantes fisicas
39 k = 4;
40 Tb = 15;
```

```

41     Tf = 30; %
42 %=====
43 %=====
44
45 %=====
46 %===== Solucao exata =====
47 %=====
48 %--- Coeficientes %
49     c1 = Tf/2; %
50     omega = pi/L; %
51     c2 = k*Tf*omega/2; %
52 %
53 %--- Condicao inicial %
54     for j = 1:J+2 %
55         u(j,1) = Tb + c1*cos(omega*x(j)); %
56         q(j,1) = c2*sin(omega*x(j)); %
57     end %
58 %
59 %--- Solucao exata %
60     for n = 2:N+2 %
61         for j = 1:J+2 %
62             u(j,n) = Tb + c1*exp(-k*(omega^2)*t(n))*sin(omega*x(j)); %
63             q(j,n) = c2*exp(-k*(omega^2)*t(n))*sin(omega*x(j)); %
64         end %
65     end %
66 %=====
67
68 %=====
69 %===== Grafico da solucao exata =====
70 %=====
71 %--- Subplot %
72     subplot(2,2,[1,2]) %
73     mesh(t,x,u) %
74     title('\bf Equacao do calor pela lei de Fourier') %
75     zlabel('\bf Temperatura u(x, t) (C)', 'rotation', 90) %
76     ylabel('\bf espaco x (m)') %
77     xlabel('\bf tempo t (s)') %
78     colorbar %
79     colormap('jet') %
80     view(-19,35) %
81 %-----
82     subplot(2,2,3) %
83     mesh(t,x,u) %

```

```

84 title('\bf Visao vertical') %
85 zlabel('\bf Temperatura u(x, t) (C)', 'rotation', 90) %
86 ylabel('\bf espaco x (m)') %
87 xlabel('\bf tempo t (s)') %
88 colorbar %
89 colormap('jet') %
90 view ([0 0 90]) %
91 %-----%
92 subplot(2,2,4) %
93 mesh(t,x,u) %
94 title('\bf Visao lateral') %
95 zlabel('\bf Temperatura u(x, t) (C)', 'rotation', 90) %
96 ylabel('\bf espaco x (m)') %
97 xlabel('\bf tempo t (s)') %
98 colorbar %
99 colormap('jet') %
100 view ([0 -90 0]) %
101 %-----%
102 %-----%
103 %
104 figure %
105 %
106 %--- Subplot: Fluxo de calor %
107 subplot(2,2,[1,2]) %
108 mesh(t,x,q) %
109 title('\bf Equaca do calor pela lei de Fourier') %
110 zlabel('\bf Fluxo de calor q(x, t) (W/m^2)', 'rotation', 90) %
111 ylabel('\bf espaco x (m)') %
112 xlabel('\bf tempo t (s)') %
113 colorbar %
114 colormap('jet') %
115 view(-19,35) %
116 %-----%
117 %
118 subplot(2,2,3) %
119 mesh(t,x,q) %
120 title('\bf Visao vertical') %
121 zlabel('\bf Fluxo de calor q(x, t) (W/m^2)', 'rotation', 90) %
122 ylabel('\bf espaco x (m)') %
123 xlabel('\bf tempo t (s)') %
124 colorbar %
125 colormap('jet') %
126 view ([0 0 90]) %

```

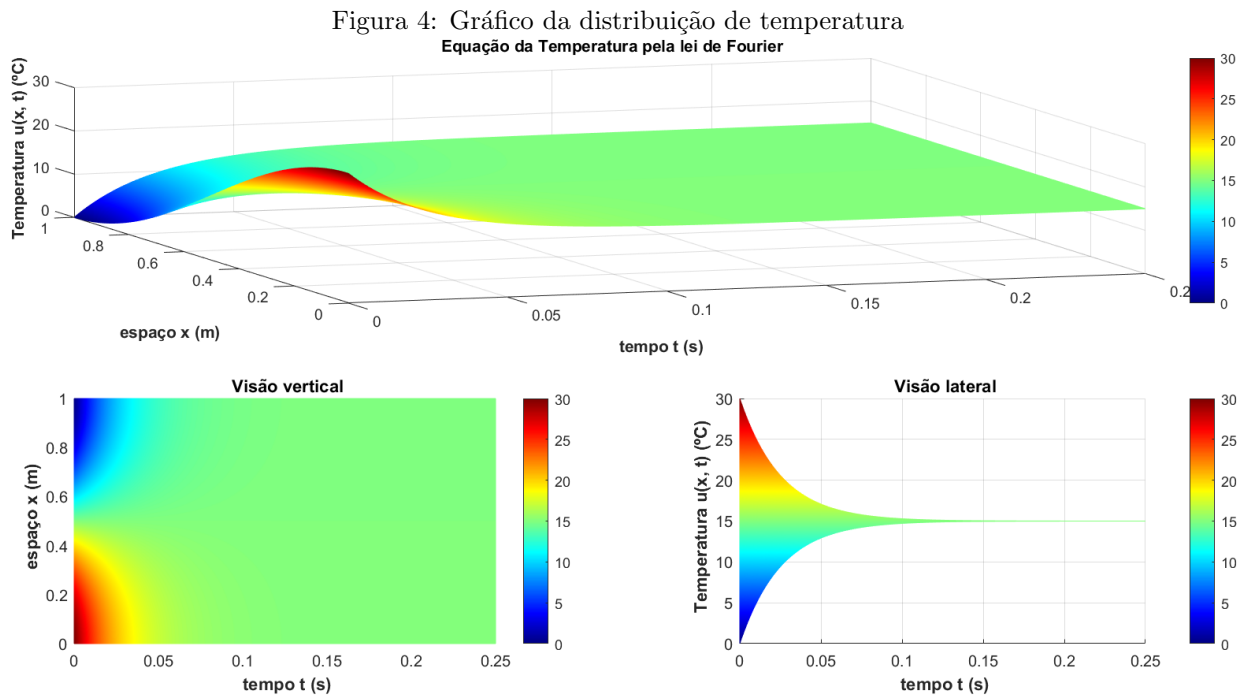
```

127 %-----%
128 %
129 subplot(2,2,4) %
130 mesh(t,x,q) %
131 title('\bf Visao lateral') %
132 zlabel('\bf Fluxo de calor q(x, t) (W/m^2)', 'rotation', 90) %
133 ylabel('\bf espaco x (m)') %
134 xlabel('\bf tempo t (s)') %
135 colorbar %
136 colormap('jet') %
137 view ([0 -90 0]) %
138 %===== %
139 %===== %

```

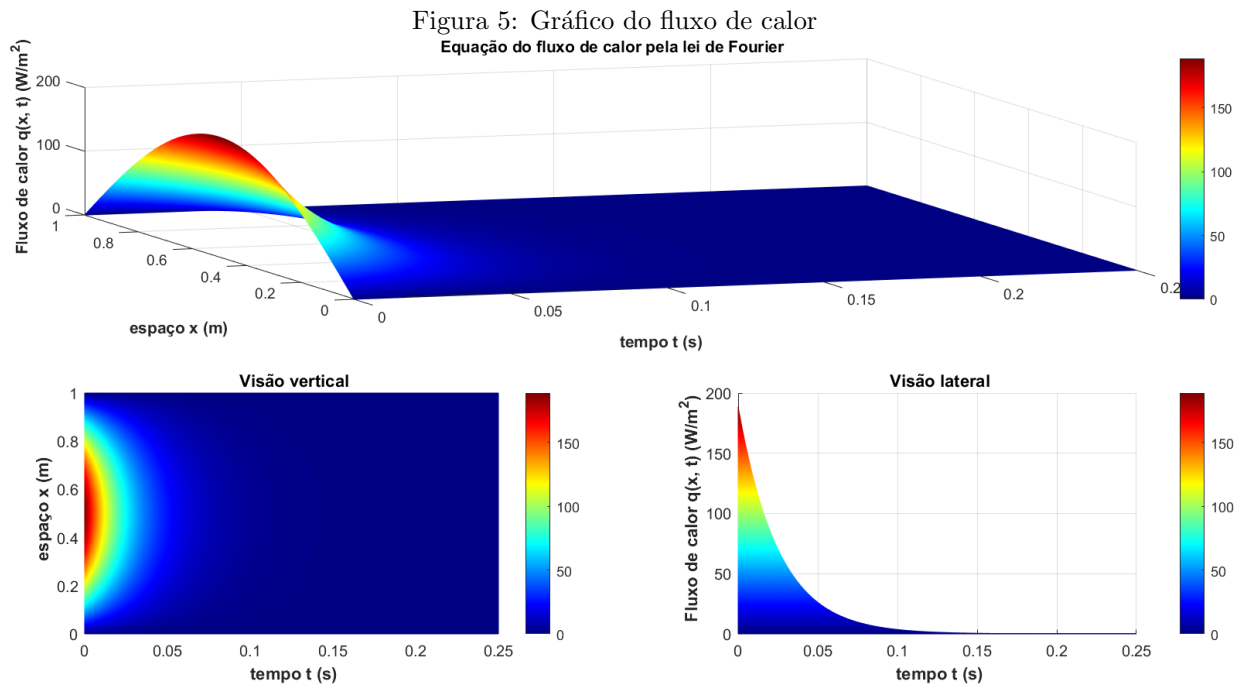
4.2. Gráficos

Na Figura 4 observamos um decaimento rápido da temperatura, a qual se estabiliza em 15°C. A estabilização se dá acima de 0°C devido a condição inicial não ser uma função de média nula.



Fonte: Própria (2024).

Por outro lado, na Figura 5 também observamos um decaimento rápido do fluxo de calor, porém, se estabilizando em 0°C devido a condição inicial ser uma função de média nula.



Fonte: Própria (2024).

Por fim, ressaltamos que as simulações apresentadas nesse trabalho são compatíveis com as soluções encontradas no capítulo anterior.

5. Considerações finais

Neste trabalho, estudamos a equação constitutiva para o fluxo de calor conhecida como Lei de Fourier, juntamente com a equação da conservação de energia. O acoplamento dessas duas equações resulta no sistema de Equações Diferenciais Parciais que modela o problema de condução de calor pela Lei de Fourier. Nosso estudo mostrou que, desacoplando as variáveis dependentes (θ , q) do sistema e, considerando condições de contorno adiabáticas, obtemos a mesma equação diferencial parcial para θ e q , porém, para cada equação, temos uma condição de contorno diferente, o que resulta em soluções diferentes. Por fim, usamos condições iniciais que representam um cenário realista e realizamos algumas simulações que ilustram nossos resultados.

Referências

- [1] ANDRADE, M. E.. **Simulação e Modelagem Computacional com o Software Modellus: Aplicações práticas para o ensino de física**. 1. ed. São Paulo: LF Editorial, 2016.

- [2] BEJAN, A. **Transferência de calor**. São Paulo: Edgard Blucher, 2004.
- [3] BRAGA FILHO, W. **Transmissão de calor**. São Paulo: Thomson, 2006.
- [4] BUNGE, M. (1974). **Teoria e realidade**. São Paulo: Editora Perspectiva.
- [5] FOURIER, J. B. J. **Théorie Analytique de la Chaleur** (Firmin Didot, Paris, 1822). Disponível em [http:// www.e-rara.ch/doi/10.3931/e-rara-19706](http://www.e-rara.ch/doi/10.3931/e-rara-19706).
- [6] INCROPERA, F. P. **Fundamentos de transferência de calor e de massa**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.
- [7] PIFER, A. & AURANI, K. M. **A teoria analítica do calor de Joseph Fourier: uma análise das bases conceituais e epistemológicas**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 37, n. 1, 1603 (2015).
- [8] VEIT, E. A.; ARAUJO, I. S. **Modelagem computacional no ensino de Física**. Revista do Centro de Educação da Universidade Federal de Alagoas. CEDU-n, 2005.