



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
FACULDADE DE GEOFÍSICA

MATIAS COSTA DE SOUSA

**MODELO HÍBRIDO DE PREDIÇÃO DE VELOCIDADE
CISALHANTE: APLICAÇÃO EM RESERVATÓRIO DE
ARENITO DO CAMPO DE NORNE, NORUEGA**

BELÉM
2017

MATIAS COSTA DE SOUSA

**MODELO HÍBRIDO DE PREDIÇÃO DE VELOCIDADE
CISALHANTE: APLICAÇÃO EM RESERVATÓRIO DE
ARENITO DO CAMPO DE NORNE, NORUEGA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
à Faculdade de Geofísica do Instituto de
Geociências da Universidade Federal do
Pará, em cumprimento às exigências para
obtenção do grau de Bacharel em Geofísica.

Orientador: Prof. Dr. José Jadsom
Sampaio de Figueiredo

BELÉM
2017

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Biblioteca do Instituto de Geociências/SIBI/UFPA

Sousa, Matias Costa de, 1992 -

Modelo híbrido de predição de velocidade cisalhante: aplicação em reservatório de arenito do Campo de Norne, Noruega / Matias Costa de Sousa. – 2017.

52 f. : il. ; 30 cm

Inclui bibliografias

Orientador: José Jadsom Sampaio de Figueiredo

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Geociências, Faculdade de Geofísica, Belém, 2017.

1. Geofísica. 2. Perfilagem geofísica de poços. 3. Ondas sísmicas - Velocidade. I. Título.

CDD 22. ed.: 554.81

MATIAS COSTA DE SOUSA

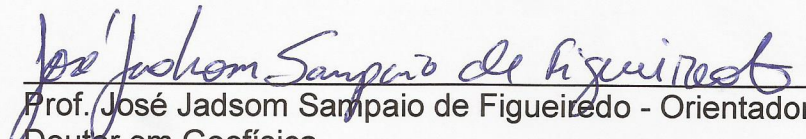
MODELO HÍBRIDO DE PREDIÇÃO DE VELOCIDADE CISALHANTE: APLICAÇÃO
EM RESERVATÓRIO DE ARENITO DO CAMPO DE NORNE, NORUEGA

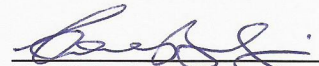
Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Faculdade de Geofísica do
Instituto de Geociências da Universidade
Federal do Pará, como requisito parcial à
obtenção de grau de Bacharel em
Geofísica.

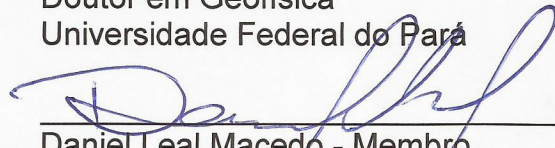
Data da defesa: 16 de março de 2017.

Conceito: EXC

Banca Examinadora:


Prof. José Jadsom Sampaio de Figueiredo - Orientador
Doutor em Geofísica
Universidade Federal do Pará


Profª Drª Carolina Barros da Silva - Membro
Doutor em Geofísica
Universidade Federal do Pará


Daniel Leal Macedo - Membro
Doutor em Ciências e Engenharia de Petróleo
Universidade Federal do Pará

À minha querida avó, Maria de Nazaré.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente a meus pais, Manoel e Terezinha, pelo empenho contínuo dedicado à estabilidade e ao bem de nossa família, sem o qual não teria as mesmas oportunidades de estudo e boas condições de vida. À minha irmã mais nova, Marina, agradeço pelo convívio diário e lições proporcionadas. Ao meu irmão mais velho, Mateus, sou grato por sempre incentivar-me a buscar grandes conquistas. À minha avó, Maria de Nazaré, agradeço por sempre prezar por meu bem estar e demonstrar isto de maneiras bem peculiares.

Em especial, agradeço à minha namorada, Rafaela, pelo apoio incondicional em situações de dificuldade que enfrentei durante a graduação e por todo o amor e o carinho dedicados.

Aos professores do curso também sou grato, pelos ensinamentos e experiência acadêmica compartilhada. Agradeço particularmente ao professor José Jadsom, com quem trabalhei por um longo período durante a graduação e foi quem possibilitou desenvolver este trabalho, me orientando e motivando a aprimorar meus horizontes de estudo.

Àqueles com quem vivenciei boa parte da graduação, agradeço pelos momentos de descontração bem como pelas boas trocas de conhecimento. Em especial, cumprimento os colegas Luan, Yuri, Mykel, Ludegards, Nelson, Louzeiro, Felipe, René e Vitor, que são algumas das amizades que contruí na Faculdade de Geofísica da Universidade Federal do Pará (UFPA), instituição esta a que também serei eternamente grato.

Ao Ministério da Educação, agradeço pelo apoio financeiro proporcionado durante o período em que atuei como bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET). Também sou grato a professora Carolina, que supervisionou as atividades em que participei como membro do grupo PET-Geofísica UFPA.

Agradeço também à Universidade Norueguesa de Ciência e Tecnologia (NTNU) por fornecer o conjunto de dados de poço do Campo de Norne.

RESUMO

Observações empíricas são alternativas comuns para construir uma compreensão mais apropriada de como as propriedades da rocha estão relacionadas, inclusive para prever aquelas que são difíceis de serem medidas *in situ*. Este trabalho consiste em uma abordagem híbrida para estimar velocidade de onda S em rochas saturadas com salmoura, modificada a partir do método de Greenberg-Castagna. A combinação de regressões polinomiais locais com análise de substituição de fluídos (equação de Gassmann) converge para um método de estimar V_s quando informações sobre litologia e saturação estão disponíveis, o qual foi aplicado em um conjunto de dados de poço da região do Mar da Noruega a fim de verificar a qualidade desta modelagem.

Palavras-chave: Velocidades acústicas. Relações empíricas. Estimativa de velocidade cisalhante. Perfilagem geofísica de poços. Campo de Norne.

ABSTRACT

Empirical observations are common alternatives used to build up a better understanding of how the rock properties are related, and even predict those that are difficult to measure *in situ*. This work consists in a hybrid approach to estimate S-wave velocity in brine-saturated composite lithologies modified from Greenberg-Castagna method. The combination of local polynomial regressions with a fluid substitution analysis (Gassmann's equation) leads to a effective method of estimating V_s when lithology and saturation information are available, which was applied on a well log data set from the Norwegian Sea region in order to verify the quality of this modelling.

Keywords: Acoustic velocities. Empirical relations. Shear velocity estimation. Geophysical well logging. Norne Field.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

- Figura 2.1 – Modelo petrofísico simplificado caracterizando uma unidade de rocha com conteúdo de fluidos (água e hidrocarboneto) na fração porosa e matriz mineralógica na fração sólida, em que a porosidade é denotada por ϕ e a saturação de água por S_W 16
- Figura 2.2 – Representação geométrica dos modelos de Voigt e Reuss. Na primeira configuração se estabelece um regime de deformação uniforme (isodeformação), em que a tensão se distribui de acordo com a fração e rigidez de cada componente. A outra configuração consiste na aplicação uniforme de tensão (isotensão), em que a deformação total é dada pela soma das variações de cada unidade dos dois componentes. 17
- Figura 2.3 – Representação geométrica do modelo de Hashin-Shtrikman: cada esfera (cinza-escuro) e sua casca (cinza-claro) apresentam as respectivas frações de dois materiais, em que se estabelece o limite inferior quando o material interno é o mais rígido ou o limite superior caso a parte externa seja mais incompressível. 18
- Figura 2.4 – Curvas de limites elásticos com decrescimento da diferença entre as propriedades individuais E_1 e E_2 : (a) Exemplo de dois elementos que diferem muito um do outro em termos de módulos elásticos (quartzo-água); (b) Exemplo de dois elementos com módulos elásticos distintos (quartzo-argila); e (c) Exemplo de dois minerais com módulos elásticos bem próximos (dolomita-calcita). 19
- Figura 2.5 – Representação geométrica do modelo de Gassmann: esqueleto da rocha com poros bem conectados sujeito às tensões normais σ_1 , σ_2 e σ_3 20
- Figura 2.6 – Fluxograma da modelagem. Calibram-se as relações empíricas a partir de dados de poços de referência, em que os perfis de velocidade de onda P e de onda S estão disponíveis. Nos poços em que se deseja estimar a velocidade cisalhante *in situ* é adotada a aproximação de onda P da relação de Gassmann. 26
- Figura 3.1 – Perfis analógicos do Poço A: vagarosidade da onda P; vagarosidade da onda S; densidade da formação; raio gama natural; volume de folhelho; porosidade; e saturação de água. 28

Figura 3.2 – Perfis analógicos do Poço B: vagarosidade da onda P; vagarosidade da onda S; densidade da formação; raio gama natural; volume de folhelho; porosidade; e saturação de água. (GOC: Contato Gás-Óleo; OWC: Contato Óleo-Água.)	29
Figura 3.3 – Perfis analógicos do Poço C: vagarosidade da onda P; vagarosidade da onda S; densidade da formação; raio gama natural; volume de folhelho; porosidade; e saturação de água. (OWC: Contato Óleo-Água.)	30
Figura 3.4 – Comportamento do módulo de incompressibilidade no Poço A: (a) condição <i>in situ</i> ; e (b) formação saturada com salmoura.	31
Figura 3.5 – Variação percentual absoluta nas estimativas do Poço A.	32
Figura 3.6 – Predição de V_s aplicando a relação de Greenberg-Castagna no Poço A: (a) perfis comparativos e (b) gráfico de dispersão.	33
Figura 3.7 – Predição de V_s aplicando a relação local no Poço A: (a) perfis comparativos e (b) gráfico de dispersão.	33
Figura 3.8 – Comportamento do módulo de incompressibilidade no Poço B: (a) condição <i>in situ</i> ; e (b) saturado com salmoura.	36
Figura 3.9 – Comportamento do módulo de incompressibilidade no Poço C: (a) condição <i>in situ</i> ; e (b) saturado com salmoura.	36
Figura 3.10 – Predição de V_s no Poço B: (a) perfis comparativos e (b) gráfico de dispersão.	37
Figura 3.11 – Erro percentual absoluto nas estimativas do Poço B.	37
Figura 3.12 – Predição de V_s no Poço C: (a) perfis comparativos e (b) gráfico de dispersão.	38
Figura 3.13 – Erro percentual absoluto nas estimativas do Poço C.	38
Figura A.1 – Princípio de aquisição com ferramenta sônica. A partir da diferença nos tempos de chegada identificados nos sinais registrados nos receptores R1 e R2 (resultantes da interação do sinal da fonte T com a formação) se quantifica o tempo de trânsito (Δt).	43
Figura A.2 – Forma de onda normalmente registrada via perfilagem acústica, exibindo três chegadas que caracterizam as ondas elásticas que se propagam nas proximidades do poço.	45

Figura A.3 – Conjunto de traços acústicos adquiridos por ferramenta sônica em: (a) formação rápida, em que a chegada da onda S é identificada; e (b) formação lenta, na qual não se identifica a chegada da onda S.	45
Figura A.4 – Curvas de dispersão observadas em arranjos sônicos dipolares. A onda flexural notadamente é mais dispersiva que a onda S refratada e que a onda de tubo (Stoneley).	46
Figura A.5 – Efeito da anisotropia na propagação de ondas flexurais: (a) propagação da onda S em meio isotrópico; (b) onda S com duas polarizações em razão da anisotropia intrínseca; e (c) polarização da onda S devido a presença de tensões ou anisotropia induzida.	46
Figura B.1 – Localização do Campo de Norne.	47
Figura B.2 – Segmentos do Campo de Norne: mapa estrutural (com os Poços A, B e C destacados) e vista 3D.	48
Figura B.3 – Carta estratigráfica do Campo de Norne.	49

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Coeficientes de regressão de V_s adotados por Greenberg e Castagna (1992).	22
Tabela 2.2 – Vagariosidade de onda P (Δt_p), densidade (ρ), módulo de incompressibilidade (K) e módulo de cisalhamento (μ) de fluídos e minerais usados na modelagem.	23
Tabela 3.1 – Disposição dos contatos de fluídos ao longo dos poços estudados (em m).	27
Tabela 3.2 – Coeficientes de regressão de V_s obtidos utilizando os perfis do Poço A.	32
Tabela 3.3 – Intervalos de velocidade de onda S nos poços investigados (em km/s).	32
Tabela 3.4 – Parâmetros de qualidade de predição do modelo estudado.	35
Tabela B.1 – Limites em profundidade (topo-base) das formações geológicas ao longo dos poços estudados (em m).	50

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

R^2	Coefficiente de determinação
GOC	Contato Gás-Óleo
OWC	Contato Óleo-Água
ρ_b	Densidade da formação
ρ_{min}	Densidade da matriz mineral
ρ_{fl}	Densidade de fluído
I_{GR}	Índice de radioatividade
HS^-	Limite inferior de Hashin-Shtrikman
HS^+	Limite superior de Hashin-Shtrikman
μ_{min}	Módulo de cisalhamento da matriz mineral
μ_{sat}	Módulo de cisalhamento da rocha saturada
μ_{dry}	Módulo de cisalhamento da rocha seca
K_{min}	Módulo de incompressibilidade da matriz mineral
K_{fl}	Módulo de incompressibilidade do fluído
K_{sat}	Módulo de incompressibilidade da rocha saturada
K_{dry}	Módulo de incompressibilidade da rocha seca
M_{min}	Módulo da onda P da matriz mineral
M_{fl}	Módulo da onda P do fluído
M_{sat}	Módulo da onda P da rocha saturada
M_{dry}	Módulo da onda P da rocha seca
ϕ	Porosidade
GR	Raio gama natural
$RMSE$	Raiz do Erro Quadrático Médio
s_w	Saturação de água
Δt_p	Vagarosidade da onda P (vagarosidade compressional)
Δt_s	Vagarosidade da onda S (vagarosidade cisalhante)
Δt_{min}	Vagarosidade da matriz mineral
Δt_{fl}	Vagarosidade do fluído
V_p	Velocidade da onda P (velocidade compressional)
V_s	Velocidade da onda S (velocidade cisalhante)
v_{shale}	Volume de folhelho (fração de argila)
v_{sand}	Volume de arenito (fração de quartzo)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	METODOLOGIA	16
2.1	Descrição Teórica	16
2.1.1	Estudo dos Limites Elásticos	17
2.1.2	Modelo de Substituição de Fluidos de Biot-Gassmann	19
2.1.3	Método de Greenberg-Castagna	21
2.2	Preparação dos Dados de Poço	22
2.3	Calibragem das Relações Empíricas	23
2.4	Análise de Substituição de Fluidos	24
3	RESULTADOS E DISCUSSÕES	27
3.1	Apresentação dos Dados	27
3.2	Relações Empíricas Locais	31
3.3	Estimativa de Velocidade	34
4	CONCLUSÃO	39
	REFERÊNCIAS	40
	APÊNDICES	42
	APÊNDICE A - DESAFIOS DA PERFILAGEM DE ONDA S .	43
	APÊNDICE B - GEOLOGIA DO CAMPO DE NORNE	47
	APÊNDICE C - REGRESSÃO POLINOMIAL	51

1 INTRODUÇÃO

O panorama da interpretação sísmica quantitativa compreende diversas questões relacionadas a parâmetros mensuráveis e sua interação em modelos físicos de rocha, os quais possibilitam caracterizar reservatórios de forma consistente ao associar propriedades petrofísicas aos parâmetros sísmicos fundamentais: V_p , V_s e ρ . Dentre as velocidades acústicas, a cisalhante requer um tratamento mais rigoroso, em razão do registro de onda S em perfilagem geofísica ainda levantar questionamentos, apesar da construção de mecanismos e aprimoramento de técnicas para torna-lá mais acessível ser uma área bastante explorada (STEVENSON; DAY, 1986; CHEN, 1988, 1989; TANG; WANG, 2004).

Historicamente, a busca por maior confiabilidade em medidas de vagarosidade envolve superar certas restrições para identificar os tempos de chegada da onda S, como: a detecção de ondas refratadas com fontes monopolares ser limitada a formações em que V_s é maior que V_p do fluido de perfuração; a natureza dispersiva das ondas flexurais (fontes dipolares) e fontes quadrupolares (usadas em perfilagem com perfuração) condicionar a aquisição às baixas frequências; e medidas em determinadas formações serem afetadas fortemente pela anisotropia, especialmente em poços direcionais (CHENG, 2015). Dados de poço de onda S em muitos casos são de baixa qualidade, irregulares ou até mesmo não são adquiridos, principalmente em poços antigos, por causa das limitações mencionadas (mais detalhes no Apêndice A).

A alternativa mais pragmática para solucionar a falta de informação de velocidade cisalhante é avaliar modelos físico-matemáticos que permitam prevê-la com base em outros parâmetros mais confiáveis, como relações entre V_p e V_s . Existem diversos modelos dessa natureza já estudados e que são muito úteis à indústria do petróleo (DVORKIN; MAVKO, 2014), como o desenvolvido por Greenberg e Castagna (1992), que se vale de equações empíricas estabelecidas para determinados componentes monominerálicos e da teoria de Biot-Gassmann (GASSMANN, 1951; BIOT, 1956) para estimar V_s em formações saturadas com salmoura. Para assegurar que estas equações sejam mais confiáveis quando aplicadas em áreas diferentes das quais foram originalmente observadas é interessante calcular os coeficientes de regressão em dados locais, o que geralmente minimiza erros de estimativa (PINHEIRO, 2005; CARVALHO; CARRASQUILLA, 2015).

Por apresentar tanto caráter empírico como natureza teórica, a relação de Greenberg-Castagna na realidade se vale de uma modelagem híbrida, seguindo uma linha de pensamento mais característico da engenharia, porém uma ferramenta robusta em termos de física de rocha (AVSETH et al., 2005). Embora as considerações teóricas do método exijam mais parâmetros de entrada para sua aplicação, ao investigar a relação empírica levando em conta os fluídos de formação se espera que a correspondência entre as velocidades seja mais expressiva do ponto de vista matemático em função do vínculo petrofísico estabelecido.

Neste trabalho serão utilizados dados do Campo de Norne para calibrar as equações empíricas de acordo com as litologias predominantes na região (ver Apêndice B), caracterizada por reservatório de arenito com formações argilosas intercaladas, visando comparar a eficiência das relações locais com as de Castagna et al. (1993). A expectativa final deste estudo é demonstrar que a metodologia adotada se trata de uma alternativa consistente para predição de velocidade cisalhante. Para tal, o trabalho encontra-se disposto da seguinte maneira: no Capítulo 2 é apresentada a metodologia do trabalho, em que são destacados o embasamento teórico do modelo de predição e como o mesmo será aplicado; no Capítulo 3 constam os resultados de estimativa de V_s para poços de Norne e discussões a respeito destes; por fim, no Capítulo 4 expõe-se as conclusões do trabalho.

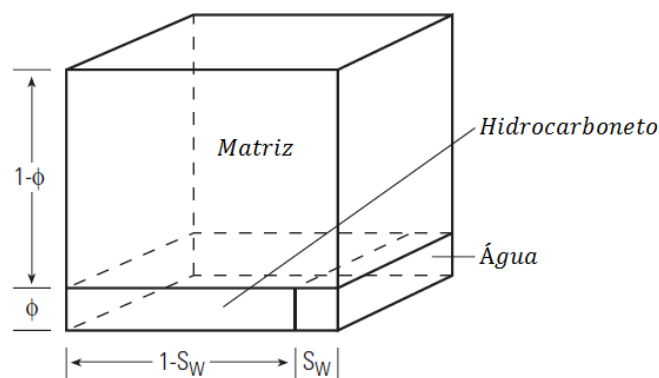
2 METODOLOGIA

Neste capítulo será feita uma breve discussão sobre os fundamentos teóricos utilizados neste trabalho assim como a respeito da metodologia de uso de dados de perfilagem de poço para este tipo de abordagem.

2.1 Descrição Teórica

Do ponto de vista petrofísico, a construção de um modelo que descreva as propriedades de cada constituinte da rocha é importante, que se resume em ponderar volumetricamente a composição da matriz mineralógica e o conteúdo de fluidos de uma formação, representados no desenho esquemático presente na Figura 2.1. Por sua vez, a simulação da troca de fluidos também requer uma formulação consistente para ser avaliada, momento em que recorreremos à teoria de Biot-Gassmann, a qual se caracteriza por ser uma ferramenta com boa aplicabilidade em dados de poço embora limitada por algumas premissas (VASQUEZ et al., 2007).

Figura 2.1 – Modelo petrofísico simplificado caracterizando uma unidade de rocha com conteúdo de fluidos (água e hidrocarboneto) na fração porosa e matriz mineralógica na fração sólida, em que a porosidade é denotada por ϕ e a saturação de água por S_W .



Fonte: Adaptado de Ellis e Singer (2007).

A seguir serão descritas brevemente algumas ferramentas da teoria de meios efetivos utilizadas para determinar principalmente os parâmetros elásticos, que servem de base para avaliar a substituição de fluidos e, conseqüentemente, para aplicar o método de Greenberg-Castagna.

2.1.1 Estudo dos Limites Elásticos

Na prática, ter conhecimento da fração volumétrica e das propriedades de cada constituinte da rocha é suficiente para avaliar com certo grau de confiança a resposta efetiva de um dado meio poroso. O conceito de limites elásticos trata da análise quantitativa das propriedades de misturas de diferentes materiais, descrevendo domínios a serem satisfeitos pelas possíveis combinações de minerais e fluidos. Os modelos mais simples para estabelecer os limites de propriedades da rocha são os de Voigt (1910) e Reuss (1929), descritos pelas equações

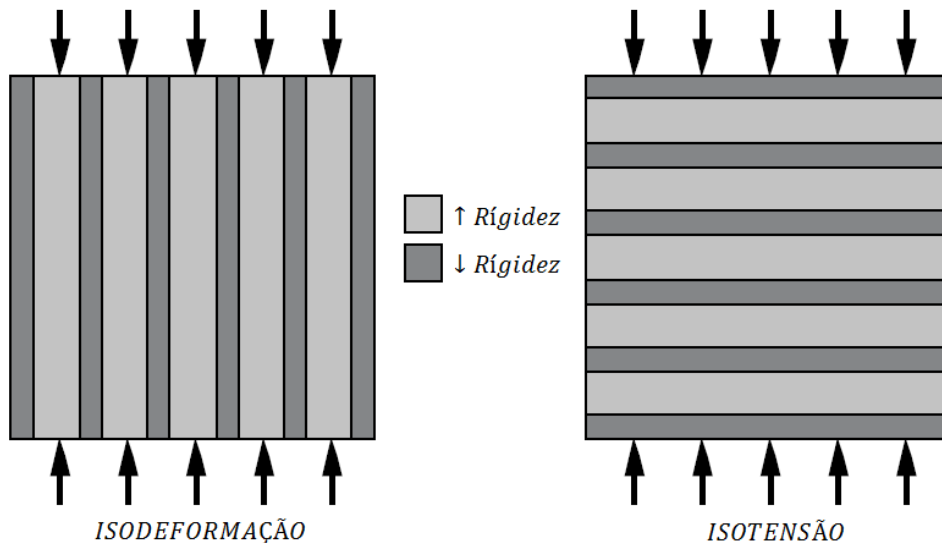
$$E_V = \sum_{i=1}^n E_i f_i, \quad (2.1)$$

e

$$\frac{1}{E_R} = \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{E_i}, \quad (2.2)$$

em que f_i e E_i são, respectivamente, a fração volumétrica e a propriedade do i -ésimo constituinte. Com a equação (2.1) se estima, por exemplo, a densidade de fluido na formação, levando em conta a distribuição uniforme de massa. Considerando que na fase fluida as tensões se distribuem uniformemente, usa-se a equação (2.2) para calcular o módulo elástico de fluido.

Figura 2.2 – Representação geométrica dos modelos de Voigt e Reuss. Na primeira configuração se estabelece um regime de deformação uniforme (isodeformação), em que a tensão se distribui de acordo com a fração e rigidez de cada componente. A outra configuração consiste na aplicação uniforme de tensão (isotensão), em que a deformação total é dada pela soma das variações de cada unidade dos dois componentes.



Fonte: Adaptado de Mavko et al. (2009).

Em termos de módulos elásticos, a relação de Voigt (1910) representa o máximo de rigidez de uma dada mistura (condição de *isodeformação*), enquanto o máximo de complacência é indicado pela relação de Reuss (1929) (condição de *isotensão*), ambas ilustradas na Figura 2.2. Para estimar um dado parâmetro elástico, como o módulo de incompressibilidade da matriz, pode-se também utilizar uma simples média aritmética destes limites, conhecida por média de Hill (1963). Além destes, para melhor delimitar a janela possível do módulo de incompressibilidade de uma mistura de dois materiais se usa a expressão

$$K^{HS\pm} = K_1 + \frac{f_2}{(K_2 - K_1)^{-1} + f_1(K_1 + \frac{4}{3}\mu_1)^{-1}}, \quad (2.3)$$

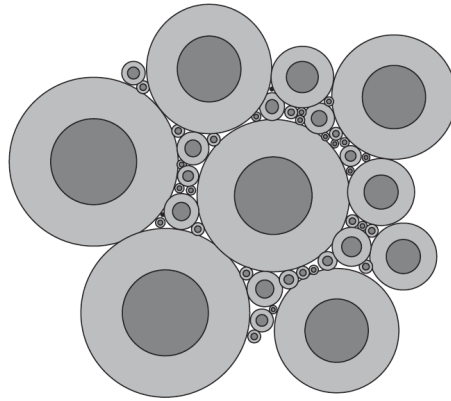
na qual (K_1, μ_1) e (K_2, μ_2) são os pares de módulos de cada componente, e f_1 e f_2 as suas respectivas frações volumétricas. Trata-se dos limites de Hashin-Shtrikman (HASHIN; SHTRIKMAN, 1963), que são de grande utilidade para avaliar o comportamento de meios elásticos isotrópicos. O limite superior (HS^+) é definido quando a componente 1 é a mais incompressível, enquanto o inferior (HS^-) é obtido aplicando em 1 a componente mais compressível, idealmente interpretados por unidades esféricas dispostas geometricamente como descrito na Figura 2.3. Em um arenito limpo (matriz de quartzo) saturado com água, por exemplo, têm-se estes limites dados por

$$K^{HS^+} = K_{quartzo} + \frac{\phi}{(K_{\acute{a}gua} - K_{quartzo})^{-1} + \phi(K_{quartzo} + \frac{4}{3}\mu_{quartzo})^{-1}} \quad (2.4)$$

e

$$K^{HS^-} = K_{\acute{a}gua} + \frac{1 - \phi}{(K_{quartzo} - K_{\acute{a}gua})^{-1} + (1 - \phi)(K_{\acute{a}gua} + \frac{4}{3}\mu_w)^{-1}}. \quad (2.5)$$

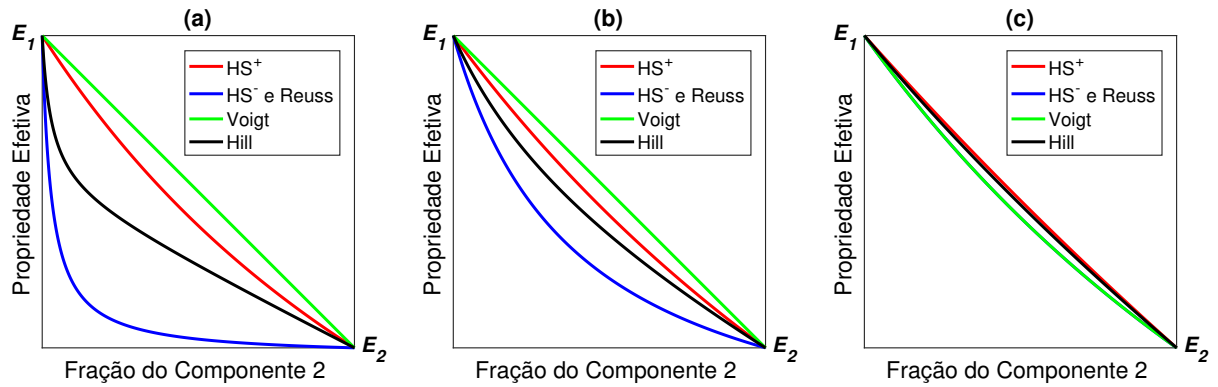
Figura 2.3 – Representação geométrica do modelo de Hashin-Shtrikman: cada esfera (cinza-escuro) e sua casca (cinza-claro) apresentam as respectivas frações de dois materiais, em que se estabelece o limite inferior quando o material interno é o mais rígido ou o limite superior caso a parte externa seja mais incompressível.



Fonte: Mavko et al. (2009).

Considerando uma mistura de dois componentes elásticos, ao aplicar os modelos apresentados curvas similares às mostradas na Figura 2.4 são obtidas, em que os limites se aproximam conforme a diferença de propriedades físicas entre os dois componentes diminua.

Figura 2.4 – Curvas de limites elásticos com decrescimento da diferença entre as propriedades individuais E_1 e E_2 : (a) Exemplo de dois elementos que diferem muito um do outro em termos de módulos elásticos (quartzo-água); (b) Exemplo de dois elementos com módulos elásticos distintos (quartzo-argila); e (c) Exemplo de dois minerais com módulos elásticos bem próximos (dolomita-calcita).



Fonte: Do autor.

2.1.2 Modelo de Substituição de Fluidos de Biot-Gassmann

São dois os parâmetros elementares usados para estudar o comportamento elástico de uma rocha em diferentes composição de fluídos, os já mencionados módulos elásticos. A partir das velocidades acústicas e da densidade de formação (ρ_b) são definidos os módulos volumétricos de cisalhamento (μ) e incompressibilidade (K), descritos pelas equações

$$\mu = \rho_b V_s^2 \quad (2.6)$$

e

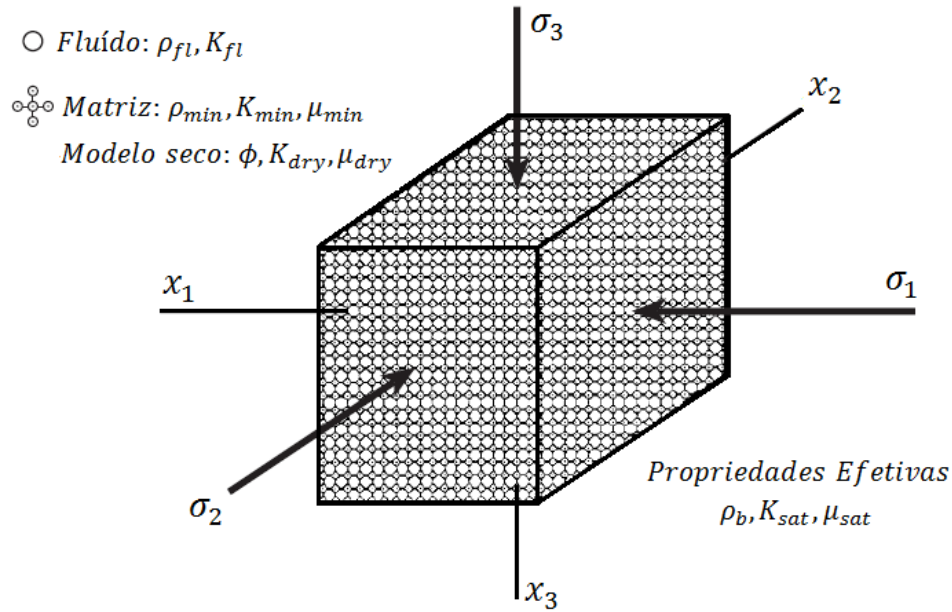
$$K = \rho_b \left(V_p^2 - \frac{4}{3} V_s^2 \right), \quad (2.7)$$

em que o primeiro quantifica a resistência de um material às tensões tangenciais (mudança de forma) e o segundo a resistência à compressão (mudança de volume), ambos expressos em unidade de pressão (normalmente em GPa).

Para avaliar o efeito das propriedades do fluído nas velocidades acústicas em rochas porosas saturadas utiliza-se o modelo proposto por Gassmann (1951), que consiste em um esqueleto sólido preenchido com fluído de propriedades conhecidas (Figura 2.5) em

que assume-se a validade das seguintes condições: 1) a rocha apresenta homogeneidade e isotropia predominantes; 2) a porosidade é efetiva (poros totalmente conectados); 3) os fluídos que preenchem os poros são pouco viscosos; 4) o sistema é fechado; 5) não há interação química entre o esqueleto da rocha e os fluídos; e 6) não há movimento relativo entre os constituintes da rocha em relação ao movimento da formação.

Figura 2.5 – Representação geométrica do modelo de Gassmann: esqueleto da rocha com poros bem conectados sujeito às tensões normais σ_1 , σ_2 e σ_3 .



Fonte: Adaptado de Ellis e Singer (2007).

Tais premissas implicam na limitação do modelo de Gassmann para condição de baixa frequência, que posteriormente foi aprimorado por Biot (1956) ao considerar os efeitos anômalos resultantes da propagação de ondas a altas frequências. Para ambos os casos, Gassmann ou Biot, a noção de rocha seca é indispensável, correspondendo a condição hipotética de que os fluídos contidos nos poros do esqueleto da rocha sejam drenados. Gassmann deduziu uma relação geral entre os módulos da rocha seca e da rocha saturada, na forma mais comum expressa por

$$\frac{K_{sat}}{K_{min} - K_{sat}} = \frac{K_{dry}}{K_{min} - K_{dry}} + \frac{K_{fl}}{\phi(K_{min} - K_{fl})}, \quad (2.8)$$

na qual os subscritos *sat*, *dry*, *min* e *fl* indicam os módulos da rocha saturada, da rocha seca, da matriz mineral e do fluído, respectivamente.

Partindo-se das medidas de velocidade e densidade em uma dada condição inicial, denotada pelo índice (1), a seguinte receita é adotada com a finalidade de determinar as velocidades após a troca de fluídos:

1. Extraí-se os módulos elásticos a partir das velocidades na condição inicial:

$$K_{sat}^{(1)} = \rho_b^{(1)} \left(V_p^{(1)2} - \frac{4}{3} V_s^{(1)2} \right)$$

e

$$\mu_{sat}^{(1)} = \rho_b^{(1)} V_s^{(1)2};$$

2. Usando a relação de Gassmann calcula-se o novo módulo de incompressibilidade:

$$\frac{K_{sat}^{(2)}}{K_{min} - K_{sat}^{(2)}} - \frac{K_{fl}^{(2)}}{\phi(K_{min} - K_{fl}^{(2)})} = \frac{K_{sat}^{(1)}}{K_{min} - K_{sat}^{(1)}} - \frac{K_{fl}^{(1)}}{\phi(K_{min} - K_{fl}^{(1)})};$$

3. O módulo de cisalhamento se mantém constante: $\mu_{sat}^{(2)} = \mu_{sat}^{(1)}$;
4. Calcula-se a nova densidade: $\rho_b^{(2)} = \rho_b^{(1)} + \phi(\rho_{fl}^{(2)} - \rho_{fl}^{(1)})$;
5. Por fim obtém-se as velocidades na condição final denotada pelo índice (2):

$$V_p^{(2)} = \sqrt{\frac{K_{sat}^{(2)} + \frac{4}{3}\mu_{sat}^{(2)}}{\rho_b^{(2)}}}$$

e

$$V_s^{(2)} = \sqrt{\frac{\mu_{sat}^{(2)}}{\rho_b^{(2)}}}.$$

2.1.3 Método de Greenberg-Castagna

Para estimar a velocidade de onda S (V_s) a partir de outros parâmetros petrofísicos, Greenberg e Castagna (1992) apresentaram um modelo matemático baseado em relações lineares de V_p aplicadas em rochas monominerálicas saturadas com salmoura. Eles utilizaram os coeficientes apresentados na Tabela 2.1, os quais satisfazem a expressão

$$V_s = \frac{1}{2} \left\{ \left[\sum_{i=1}^L X_i \sum_{j=0}^{N_i} a_{ij} V_p^j \right] + \left[\sum_{i=1}^L X_i \left(\sum_{j=0}^{N_i} a_{ij} V_p^j \right)^{-1} \right]^{-1} \right\}, \quad (2.9)$$

em que L é o número de componentes monominerálicos, X_i é a fração volumétrica do i -ésimo componente, a_{ij} são os coeficientes da regressão empírica, N_i é o grau do polinômio para o i -ésimo constituinte litológico, e V_p^j e V_s são a velocidade compressional e a velocidade cisalhante (em km/s), respectivamente.

Em razão destas equações empíricas serem efetivas somente na condição de saturação com 100% de salmoura, para obter o perfil de V_s a partir de V_p na condição *in situ* é necessário recorrer a substituição de fluídos. O procedimento original do método

envolve realizar diversas iterações partindo de suposições de V_p em salmoura até alcançar uma convergência significativa, assegurando assim a qualidade da estimativa de V_s . A abordagem híbrida em questão se vale de uma aproximação da relação (2.8) para inverter a velocidade cisalhante a partir da compressional, evitando o processo iterativo.

Tabela 2.1 – Coeficientes de regressão de V_s adotados por Greenberg e Castagna (1992).

Litologia	a_{i2}	a_{i1}	a_{i0}	R^2
Arenito	0	0,80416	-0,85588	0,98352
Calcário	-0,05508	1,01677	-1,03049	0,99096
Dolomita	0	0,58321	-0,07775	0,87444
Folhelho	0	0,76969	-0,86735	0,97939

Fonte: Castagna et al. (1993).

2.2 Preparação dos Dados de Poço

Como mencionando anteriormente, entre as formações características das rochas-reservatório de Norne predomina um arenito limpo, intercalado por camadas mais argilosas, que são os dois constituintes pertinentes em termos de correlação empírica. Levando em conta que o conteúdo argiloso domina a resposta radioativa das formações, pode-se obter as frações dos componentes litológicos com base nos dados desta natureza, usando as equações

$$I_{GR} = \frac{GR - GR_{min}}{GR_{max} - GR_{min}}, \quad (2.10)$$

$$v_{shale} = 0,33(2^{(2I_{GR})} - 1), \quad (2.11)$$

e

$$v_{sand} = 1 - v_{shale}, \quad (2.12)$$

nas quais GR_{max} e GR_{min} são os valores de máximo e mínimo avaliados a partir do perfil de raio gama natural (GR), e v_{shale} e v_{sand} denotam conteúdo de folhelho e fração de arenito. Ao longo das formações atravessadas em cada poço será calculado primeiro o I_{GR} (índice de radioatividade) e, posteriormente, usada a relação de Larionov (1969) (equação (2.11)), a qual pode ser aplicada em rochas antigas, como as de idade Jurássica encontradas no reservatório de Norne.

Os perfis de velocidades acústicas (em km/s) são gerados a partir dos perfis de vagarosidade sônica (em $\mu s/ft$), cuja conversão é realizada conforme a equação (2.13). E a partir do perfil de vagarosidade compressional (Δt_p) se estima o perfil de porosidade

total (ϕ):

$$V = \frac{304,8}{\Delta t}, \quad (2.13)$$

e

$$\phi = \frac{\Delta t_p - \Delta t_{min}}{\Delta t_{fl} - \Delta t_{min}}, \quad (2.14)$$

em que Δt_{min} e Δt_{fl} são os tempos de trânsito da onda P para matriz mineral e para fluído. As constantes adotadas para computar todos estes parâmetros constam na Tabela 2.2, assim como os módulos elásticos a serem considerados na modelagem de V_s .

Tabela 2.2 – Vagoriedade de onda P (Δt_p), densidade (ρ), módulo de incompressibilidade (K) e módulo de cisalhamento (μ) de fluídos e minerais usados na modelagem.

Componente	$\Delta t_p^{(1)}$	$\rho^{(2)}$	$K^{(3)}$	$\mu^{(3)}$
Quartzo	55	2,65	37	44
Argilominerais	89	2,58	21	7
Salmoura	185	1,1	3,2	0
Água	189	1	2,2	0
Óleo	230	0,85	0,8	0
Gás	920	0,2	0,02	0

(1): em $\mu s/ft$. (2): em g/cm^3 . (3): em GPa .

Fonte: Mavko et al. (2009).

2.3 Calibragem das Relações Empíricas

Uma parte essencial deste trabalho é a determinação dos coeficientes de regressão linear para as litologias locais. Com a finalidade de obter um modelo que consiga prever a velocidade cisalhante com maior precisão, recorre-se a análise de mínimos quadrados, que consiste em ajustar os perfis de velocidade da onda P aos de velocidade de onda S por meio de um modelo matemático desejado. A partir de uma formulação geral, apresentada em maior detalhe no Apêndice C, este método de ajuste de curvas permite obter os coeficientes do polinômio que melhor correlaciona V_s a V_p , que em termos matriciais equivale a solução

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ V_{p1} & V_{p2} & \dots & V_{pm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{p1}^n & V_{p2}^n & \dots & V_{pm}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & V_{p1} & \dots & V_{p1}^n \\ 1 & V_{p2} & \dots & V_{p2}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & V_{pm} & \dots & V_{pm}^n \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ V_{p1} & V_{p2} & \dots & V_{pm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{p1}^n & V_{p2}^n & \dots & V_{pm}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{s1} \\ V_{s2} \\ \vdots \\ V_{sm} \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

em que o vetor $\mathbf{a}$ corresponde aos coeficientes do polinômio de grau n de V_p , cujos perfis contém m elementos em profundidade. A partir dos perfis v_{sand} e v_{shale} os perfis de

velocidade de um dado poço são divididos em dois conjuntos: um correspondente às formações limpas e outro às formações sujas. Nestes perfis particionados pode-se aplicar este método de regressão polinomial e assim calibrar as relações empíricas para arenitos e folhelhos.

2.4 Análise de Substituição de Fluidos

Para estimar as mudanças das velocidades acústicas quando se altera o conteúdo dos poros é preciso conhecer ambas as velocidades em um condição inicial de saturação, a fim de aplicar a transformação de Gassmann com base nos módulos de incompressibilidade da rocha e de seus componentes (matriz e fluídos). No cenário em que apenas o perfil de V_p é regular torna-se viável utilizar o módulo da onda P (M) com base nas equações

$$M = \rho_b V_p^2 = K + \frac{4}{3}\mu, \quad (2.16)$$

e

$$\frac{M_{sat}}{M_{min} - M_{sat}} = \frac{M_{dry}}{M_{min} - M_{dry}} + \frac{M_{fl}}{\phi(M_{min} - M_{fl})}, \quad (2.17)$$

em que os subscritos *sat*, *dry*, *min* e *fl* indicam rocha saturada, rocha seca, matriz mineral e fluído, respectivamente. Também chamado de módulo longitudinal, M expressa a resistência à compressão em um estado de tensão uniaxial (direção de propagação da onda P), também dado em GPa .

De acordo com Mavko et al. (1995), a transformação aproximada (2.17) possibilita alcançar resultados similares a transformação original (2.8). Por meio desta relação é possível aplicar a média ponderada das relações empíricas de $V_p - V_s$ na condição de saturação por salmoura sem necessitar de uma análise de convergência, tornando menos custosa a predição de V_s e sem perdas significativas de qualidade. Partindo-se de uma dada condição *in situ*, denotada pelo índice (1), o fluxo de substituição de fluídos a ser aplicado com a finalidade de estimar V_s usando relações empíricas locais em condição de saturação por salmoura, denotada pelo índice (2), consiste em:

1. Extrair o módulo da onda P na condição inicial:

$$M_{sat}^{(1)} = \rho_b^{(1)} \left(V_p^{(1)} \right)^2;$$

2. Usar a relação de Gassmann aproximada para calcular o novo módulo da onda P:

$$\frac{M_{sat}^{(2)}}{M_{min} - M_{sat}^{(2)}} - \frac{M_{fl}^{(2)}}{\phi(M_{min} - M_{fl}^{(2)})} = \frac{M_{sat}^{(1)}}{M_{min} - M_{sat}^{(1)}} - \frac{M_{fl}^{(1)}}{\phi(M_{min} - M_{fl}^{(1)})};$$

3. Calcular a nova densidade: $\rho_b^{(2)} = \rho_b^{(1)} + \phi(\rho_{fl}^{(2)} - \rho_{fl}^{(1)})$;
4. Obter a velocidade da onda P em saturação por salmoura:

$$V_p^{(2)} = \sqrt{\frac{M_{sat}^{(2)}}{\rho_b^{(2)}}};$$

5. Estimar a velocidade da onda S na formação saturada com salmoura usando as relações empíricas locais e, por fim, invertê-la para a condição *in situ*:

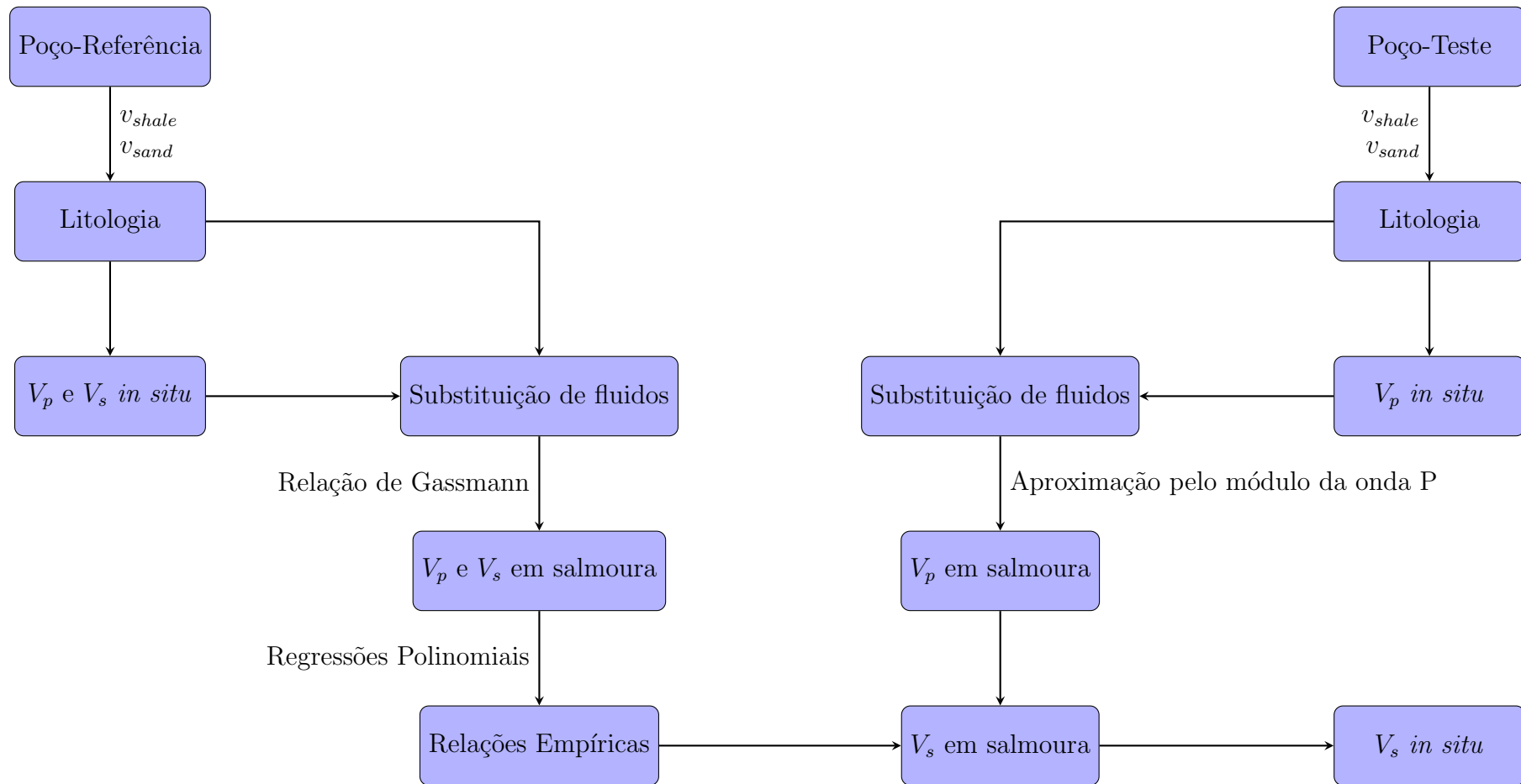
$$\mu_{sat}^{(1)} = \mu_{sat}^{(2)} = \rho_b^{(2)} \left(V_s^{(2)} \right)^2,$$

e

$$V_s^{(1)} = \sqrt{\frac{\mu_{sat}^{(1)}}{\rho_b^{(1)}}} = V_s^{(2)} \sqrt{\frac{\rho_b^{(2)}}{\rho_b^{(1)}}}.$$

Esse procedimento destaca o lado teórico do presente modelo, que ao levar em conta a aproximação da relação de Gassmann para o módulo de onda P torna-se mais simples que a metodologia proposta por Greenberg e Castagna (1992). Na Figura 2.6 é apresentado um fluxograma que resume a abordagem apresentada e indica os principais pontos levados em consideração para obter os resultados a serem discutidos no próximo capítulo.

Figura 2.6 – Fluxograma da modelagem. Calibram-se as relações empíricas a partir de dados de poços de referência, em que os perfis de velocidade de onda P e de onda S estão disponíveis. Nos poços em que se deseja estimar a velocidade cisalhante *in situ* é adotada a aproximação de onda P da relação de Gassmann.



Fonte: Do autor.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

3.1 Apresentação dos Dados

O conjunto de dados disponíveis contém vários perfis geofísicos referentes a uma série de poços operados pela petrolífera norueguesa Statoil ASA desde o início da prospecção no Campo de Norne, o qual está localizado no Mar da Noruega. Três destes foram selecionados para avaliar o modelo de predição de velocidade cisalhante proposto, os quais serão denominados por Poço A, Poço B e Poço C. Entre os dados de perfilagem geofísica estão os seguintes parâmetros:

- Raio gama natural - GR;
- Volume de folhelho - v_{shale} ;
- Porosidade - ϕ ;
- Saturação de água - s_w ;
- Densidade da formação - ρ_b ;
- Vagarosidade compressional - Δt_p ;
- Vagarosidade cisalhante - Δt_s .

Nas Figuras 3.1, 3.2 e 3.3 constam os perfis analógicos de cada poço e, na Tabela 3.1, as profundidades de contato de hidrocarbonetos presentes no reservatório.

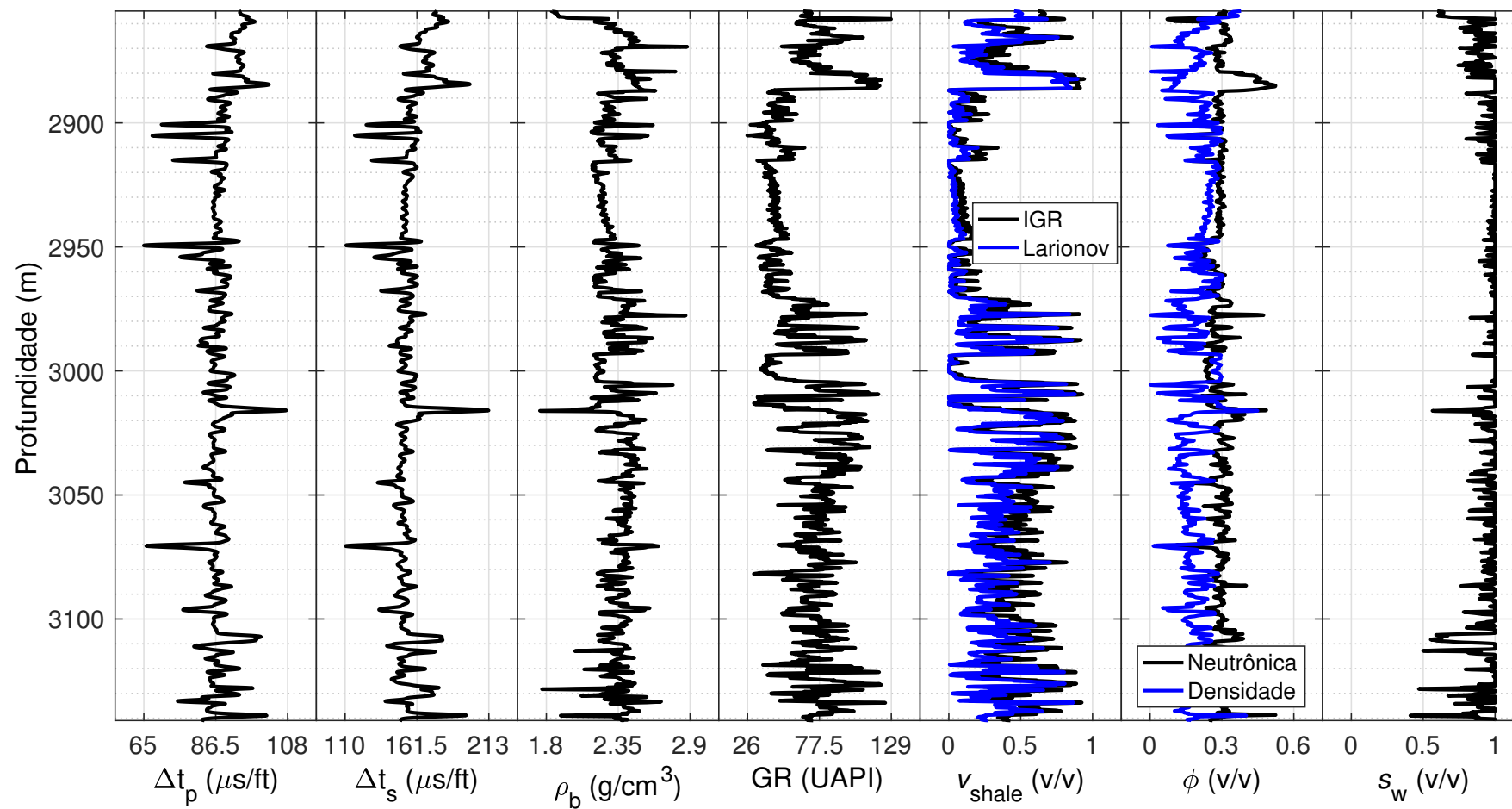
Tabela 3.1 – Disposição dos contatos de fluídos ao longo dos poços estudados (em m).

Interface	Poço A	Poço B	Poço C
Topo do Reservatório	2849,0	3348,0	2706,5
GOC	ausente	3361,5	ausente
OWC	ausente	3487,0	2808,0

GOC: Contato Gás-Óleo; OWC: Contato Óleo-Água.

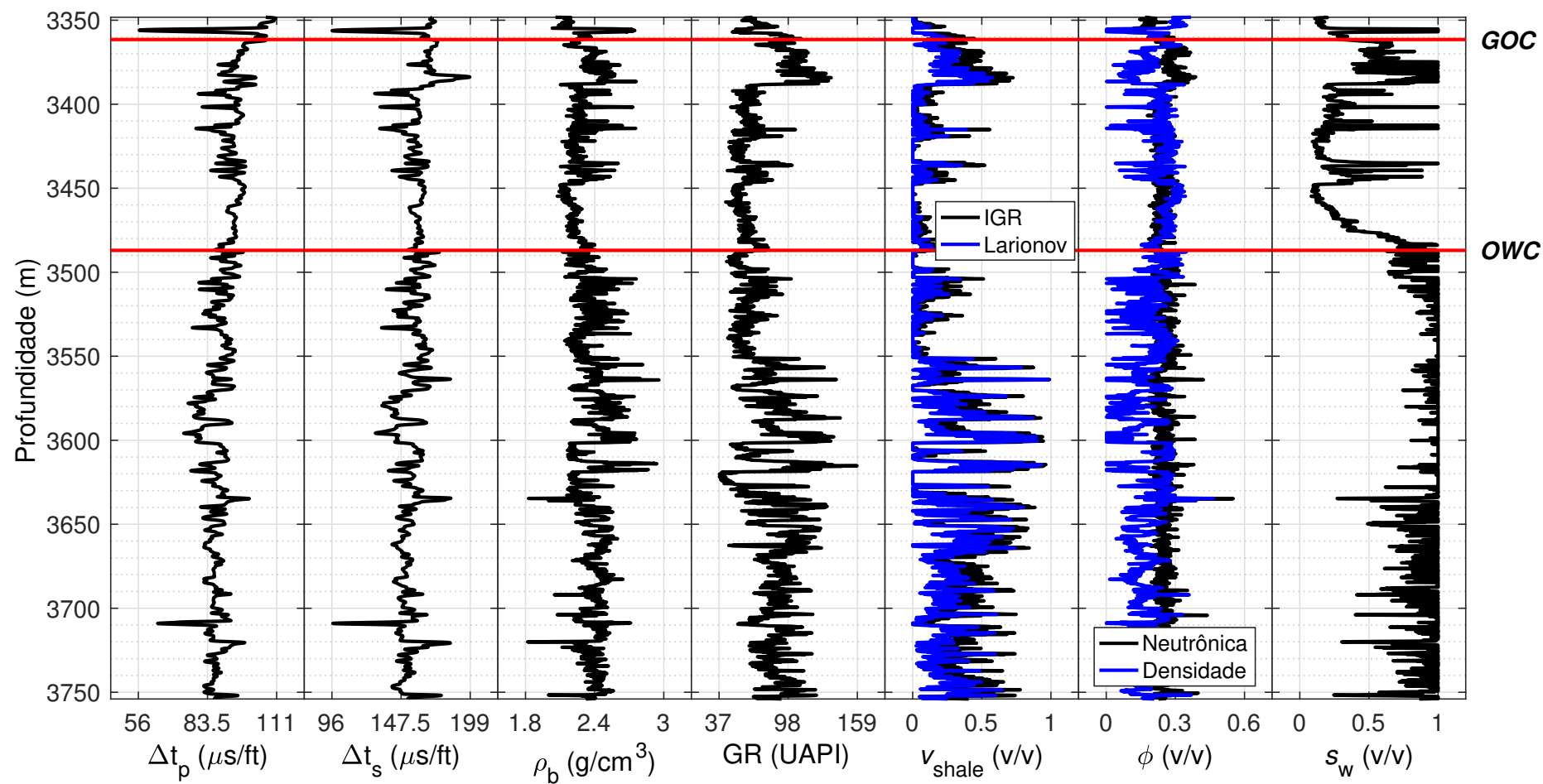
Fonte: Statoil (2001).

Figura 3.1 – Perfis analógicos do Poço A: vagarosidade da onda P; vagarosidade da onda S; densidade da formação; raio gama natural; volume de folhelho; porosidade; e saturação de água.



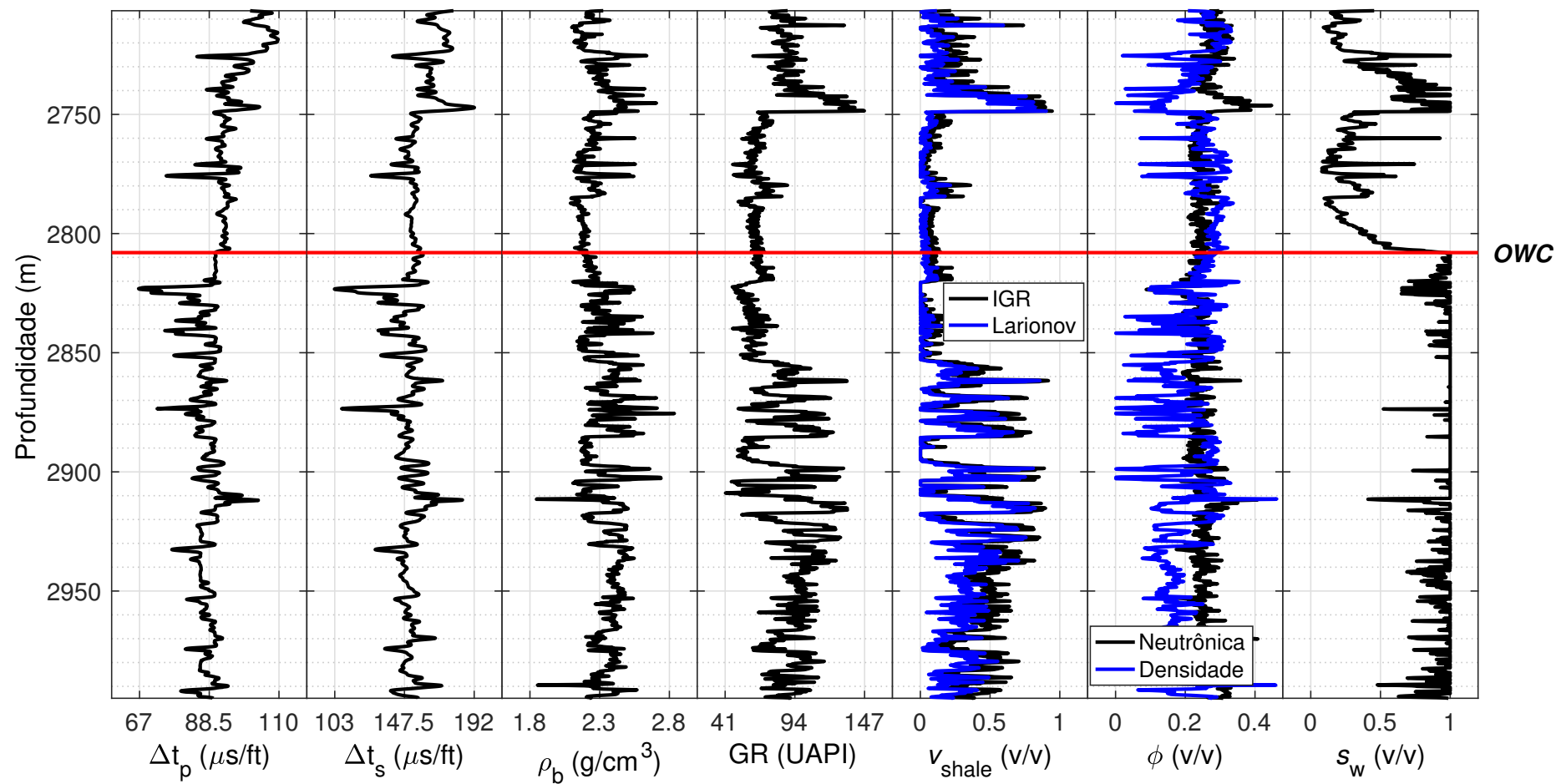
Fonte: Do autor.

Figura 3.2 – Perfis analógicos do Poço B: vagarosidade da onda P; vagarosidade da onda S; densidade da formação; raio gama natural; volume de folhelho; porosidade; e saturação de água. (GOC: Contato Gás-Óleo; OWC: Contato Óleo-Água.)



Fonte: Do autor.

Figura 3.3 – Perfis analógicos do Poço C: vagarosidade da onda P; vagarosidade da onda S; densidade da formação; raio gama natural; volume de folhelho; porosidade; e saturação de água. (OWC: Contato Óleo-Água.)



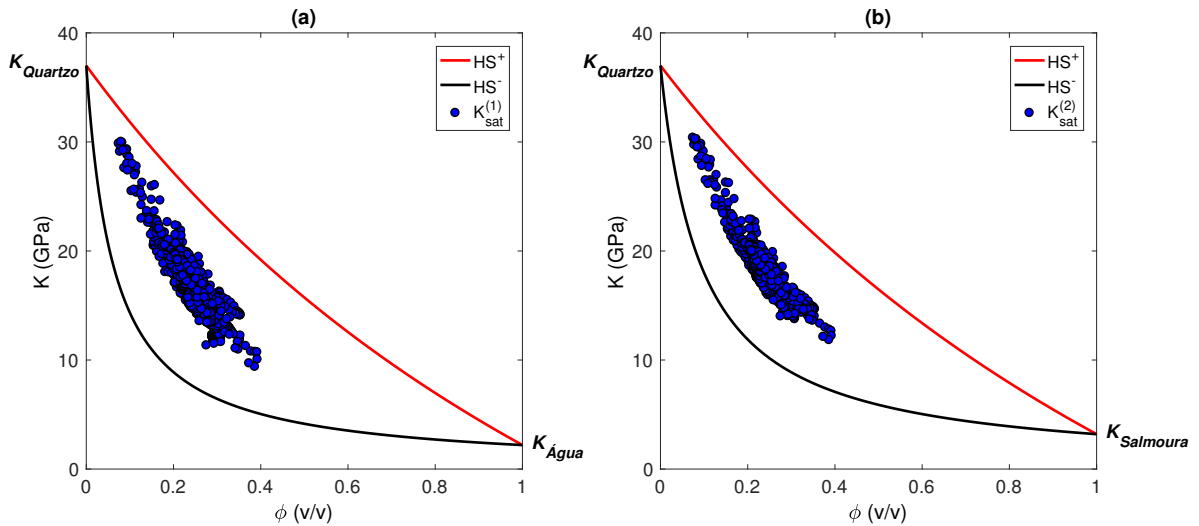
Fonte: Do autor.

3.2 Relações Empíricas Locais

O Poço A apresenta a fração porosa preenchida predominantemente por água ao longo de todo o intervalo perfilado, e por este motivo foi adotado como referência para calibrar as relações empíricas de arenito e folhelho. Para aplicar regressões polinomiais neste poço foi preciso primeiro estimar as velocidades sísmicas na condição de 100% salmoura, e somente nesta etapa não utilizamos a transformação com módulo da onda P, pois o objetivo era obter o melhor ajuste possível para então testá-lo nos outros dois poços.

Nesta etapa, as relações de Voigt-Reuss-Hill foram utilizadas para calcular a densidade e o módulo de incompressibilidade do fluido, levando em conta a saturação de água para definir as frações de fluidos, e também para estimar o módulo da matriz, contabilizando as frações de quartzo e argila. Para analisar se o módulo de incompressibilidade da rocha saturada condizia com a saturação de fluido neste poço de referência, verificou-se os limites de Hashin-Shtrikman, notando que estes são satisfeitos tanto antes quanto após a simulação da troca de fluidos. Num primeiro momento, assume-se o *quartzo* como componente mais incompressível da formação e a *água* como constituinte mais compressível, e em seguida o conteúdo dos poros é substituído por *salmoura*, obtendo-se as dispersões presentes na Figura 3.4, em (a) e (b), respectivamente.

Figura 3.4 – Comportamento do módulo de incompressibilidade no Poço A: (a) condição *in situ*; e (b) formação saturada com salmoura.



Fonte: Do autor.

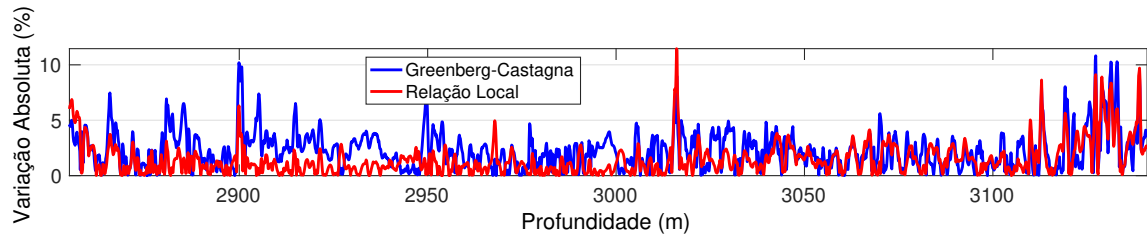
A Tabela 3.2 apresenta o resultado da calibragem: uma parábola para arenitos e uma reta para folhelhos. Como esperado, observa-se um desvio menor entre velocidade estimada e velocidade medida com a relação local (Figura 3.5), fato ainda mais evidente ao comparar a estimativa usando a relação de Greenberg-Castagna original (Figura 3.6) com a obtida por meio da relação local (Figura 3.7). Esse bom ajuste reflete também os altos *coeficientes de determinação* (R^2) observados nas regressões com os conjuntos de velocidade de cada litologia, que foram selecionadas de acordo com as frações de argila e quartzo na matriz da rocha.

Tabela 3.2 – Coeficientes de regressão de V_s obtidos utilizando os perfis do Poço A.

Litologia	a_{i2}	a_{i1}	a_{i0}	R^2
Arenito	-0,0225	0,8568	-0,8110	0,977
Folhelho	0	0,7729	-0,7767	0,986

Fonte: Do autor.

Figura 3.5 – Variação percentual absoluta nas estimativas do Poço A.



Fonte: Do autor.

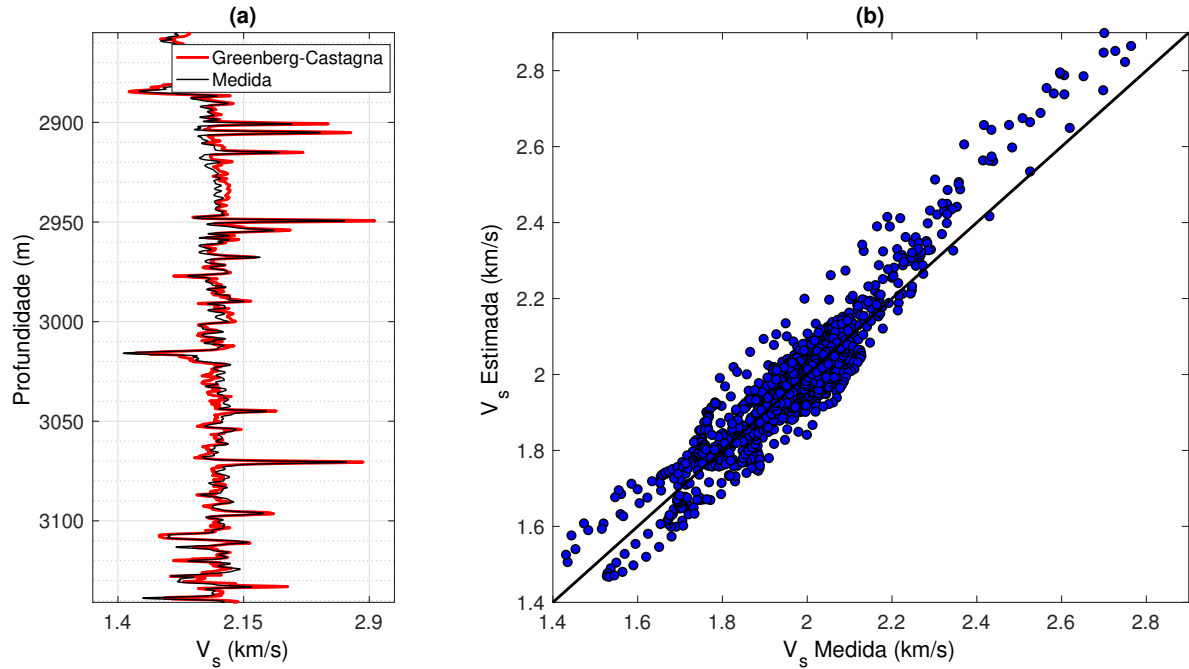
Verificou-se também a coerência dos dados de velocidade de onda S em relação às litologias, uma vez que nos materiais mais argilosos se espera uma queda de velocidade associada à menor consistência elástica. Analisando os valores da Tabela 3.3, observa-se que em arenitos a maior variação de V_s se dá entre 1,76 a 3,17 km/s , enquanto em folhelhos o intervalo mais longo vai de 1,52 a 2,37 km/s .

Tabela 3.3 – Intervalos de velocidade de onda S nos poços investigados (em km/s).

Litologia	Poço A	Poço B	Poço C
Arenito	1,88 - 2,75	1,76 - 3,17	1,79 - 2,96
Folhelho	1,52 - 2,07	1,55 - 2,37	1,58 - 2,12

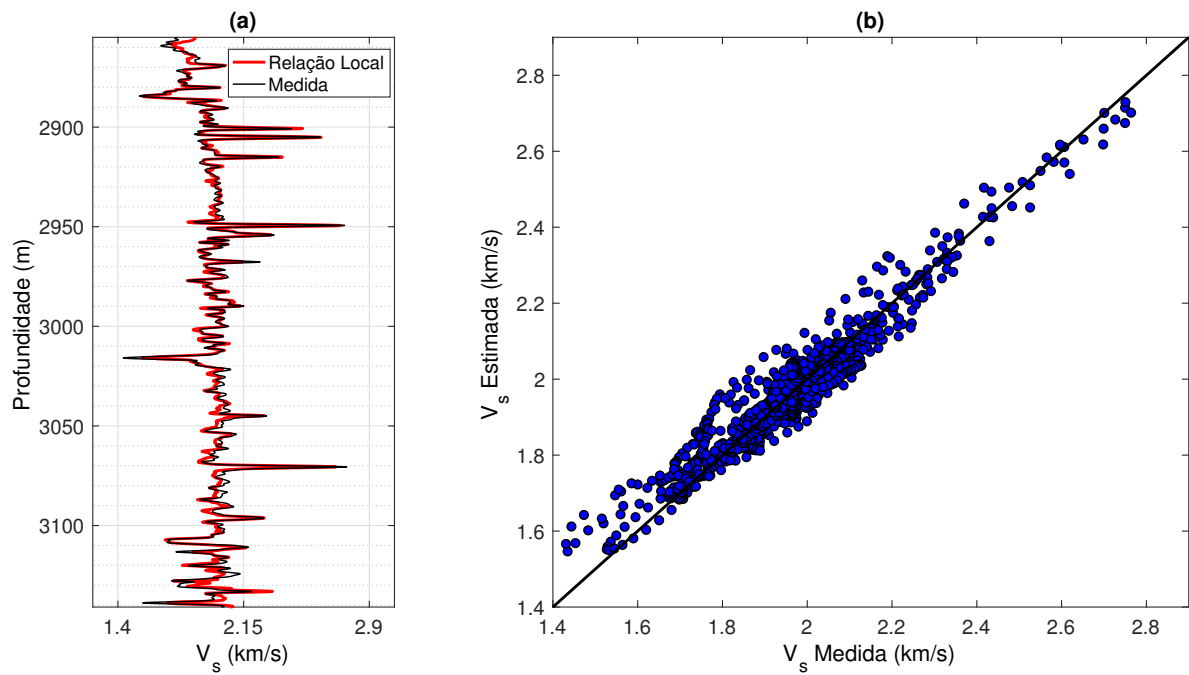
Fonte: Do autor.

Figura 3.6 – Predição de V_s aplicando a relação de Greenberg-Castagna no Poço A: (a) perfis comparativos e (b) gráfico de dispersão.



Fonte: Do autor.

Figura 3.7 – Predição de V_s aplicando a relação local no Poço A: (a) perfis comparativos e (b) gráfico de dispersão.



Fonte: Do autor.

3.3 Estimativa de Velocidade

Com base nas relações locais foi realizada a última etapa do trabalho, que consistiu em verificar a qualidade destas quando aplicadas em conjunto com a substituição de fluídos avaliada por meio da aproximação (2.17), ou seja, analisar quão confiável é prever V_s a partir de V_p com este modelo híbrido. Para os poços-teste, B e C, calculou-se M_{min} , M_{fl} e ρ_{fl} usando os limites elásticos de maneira semelhante a análise da etapa de calibragem, obtendo M_{sat} na situação de saturação por salmoura e calculando V_s por meio das definições dos módulos elásticos. Para verificar a coerência física das propriedades elásticas para a situação inicial e final de saturação utilizamos novamente os limites definidos por Hashin-Shtrikman, cujos gráficos de cada poço constam nas Figuras 3.8 e 3.9.

O módulo de incompressibilidade para o Poço B apresentou elementos fora dos limites definidos pelos pares *quartzo-água* e *quartzo-salmoura*, mas a maioria absoluta dos valores estimados nas duas condições de saturação estão espalhados dentro da região delimitada pelas curvas HS^+ e HS^- . No caso do Poço C, os resultados são ainda mais satisfatórios, exibindo um bom comportamento de K_{sat} das formações em que se simulou a troca de fluídos (óleo, água ou gás) por salmoura. As amostras que se encontram acima do limite superior podem estar associadas a formações com teor calcáreo ou carbonático predominante em relação ao quartzo, o qual é menos incompressível que os minerais calcita e dolomita. E, nos pontos em que o limite inferior não é atingido, óleo ou gás predominam na fase fluída da formação ou a presença de argilas menos rígidas na matriz é mais expressiva.

Com fins comparativos, optou-se por gerar os perfis de velocidade cisalhante tanto com as equações empíricas de Castagna et al. (1993) como com os coeficientes de regressão local, obtendo as curvas apresentadas nas Figuras 3.10 e 3.12, em que os perfis estimados (em cor azul ou vermelha) estão sobrepostos pelo perfil medido (em cor preta) ou dispostos em diagramas de dispersão de valores estimados em relação aos valores medidos. Observa-se que a predição de V_s é razoável em ambos os casos, sendo notável a maior acurácia ao aplicar a relação local no Poço B (curva vermelha na Figura 3.11). No caso do Poço C, a relação local mostrou erro ligeiramente maior ou equivalência à de Greenberg-Castagna em alguns intervalos, conforme nota-se na Figura 3.13.

As distribuições de erro de estimativa convergem para uma boa qualidade de predição, apresentando eventuais desvios mais abruptos, principalmente quando V_s ultrapassa $2,4 \text{ km/s}$, associados provavelmente à medidas irregulares de velocidade devido à fraturas na formação. Nos perfis analógicos de velocidade, tanto de onda P como de onda S, existem variações abruptas (conhecidas também por *spikes*), em alguns

poços mais numerosas. Segundo Fertl e III (1980), no caso de reservatórios em regiões com forte presença de fraturas, como no Campo de Norne, a ocorrência desta variações é esperada e pode ser interpretada também com base nos perfis de raio gama, o qual nos poços estudados apresenta intervalos de maior instabilidade.

Em termos quantitativos, a *Raiz do Erro Quadrático Médio* ($RMSE$) de cada curva gerada indica que os modelos tem boa precisão até a primeira casa decimal de velocidade (em km/s), conforme destaca-se na Tabela 3.4. Estes valores são coerentes com o roteiro de trabalho executado, em que o Poço A, que foi referência para a calibragem das relações empíricas, apresenta menor erro. Para os dois poços em que as relações locais foram testadas também se confirma a consistência da análise de substituição de fluídos, pois o baixo erro justifica a aplicação de estimativa de velocidade cisalhante a partir da velocidade compressional em formações de saturação de fluídos conhecida.

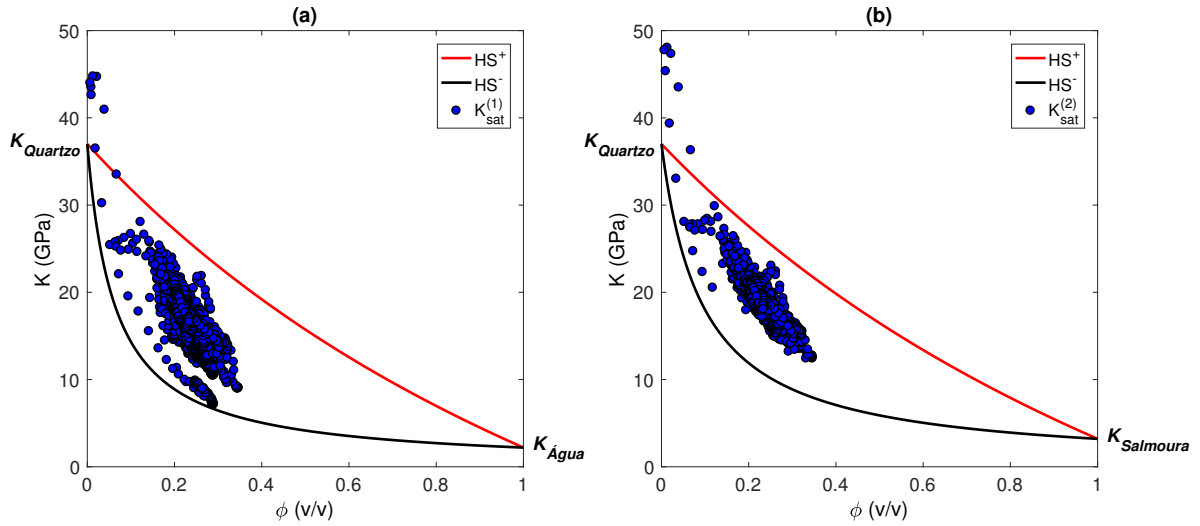
Tabela 3.4 – Parâmetros de qualidade de predição do modelo estudado.

Poço	$RMSE_{GC}$	$RMSE_{RC}$
A	0,0563	0,0392
B	0,0715	0,0507
C	0,0770	0,0829

GC: Greenberg-Castagna; RC: Relação Calibrada.

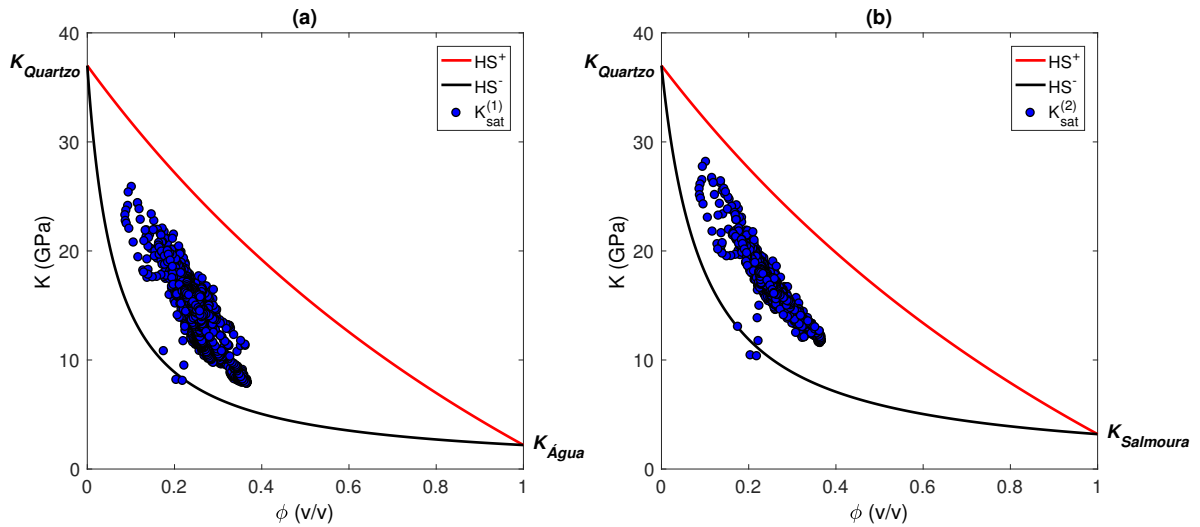
Fonte: Do autor.

Figura 3.8 – Comportamento do módulo de incompressibilidade no Poço B: (a) condição *in situ*; e (b) saturado com salmoura.



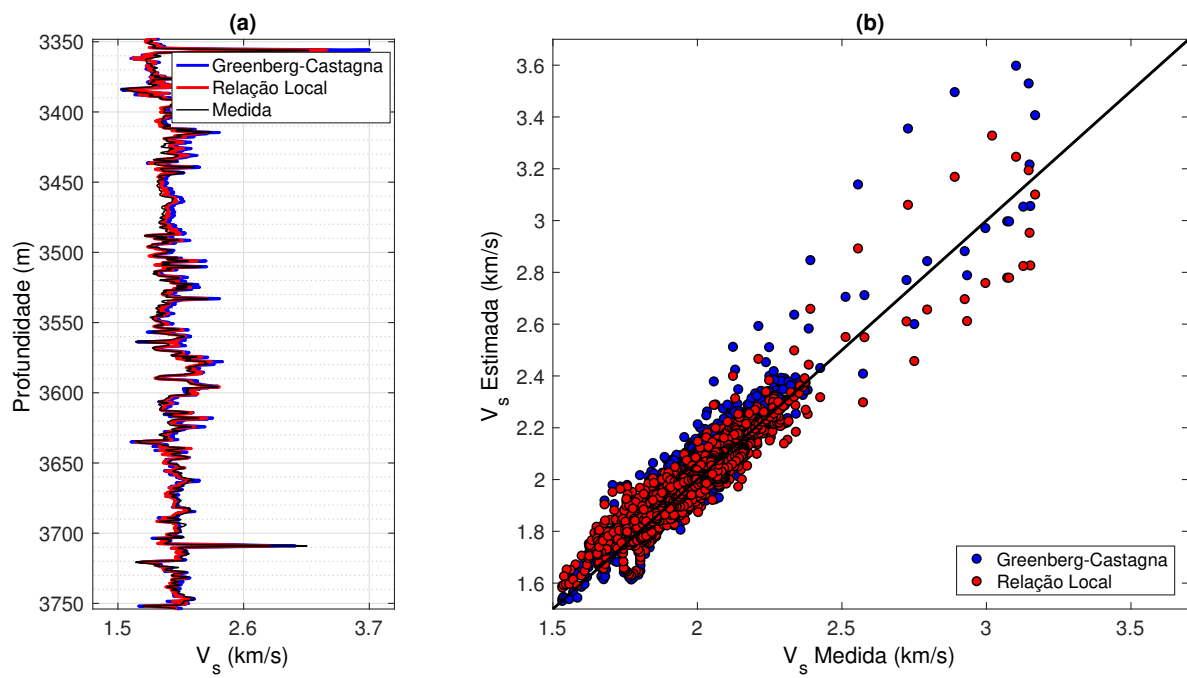
Fonte: Do autor.

Figura 3.9 – Comportamento do módulo de incompressibilidade no Poço C: (a) condição *in situ*; e (b) saturado com salmoura.



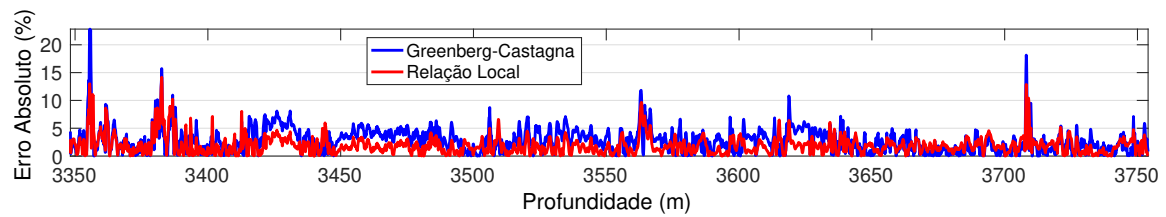
Fonte: Do autor.

Figura 3.10 – Predição de V_s no Poço B: (a) perfis comparativos e (b) gráfico de dispersão.



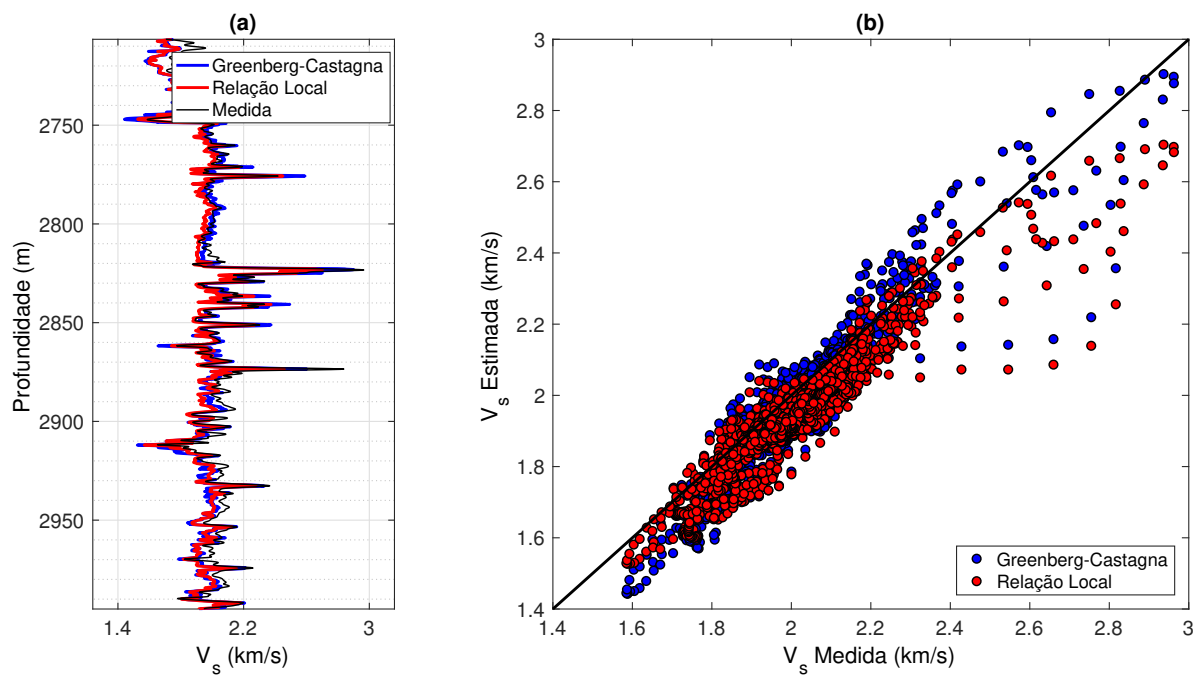
Fonte: Do autor.

Figura 3.11 – Erro percentual absoluto nas estimativas do Poço B.



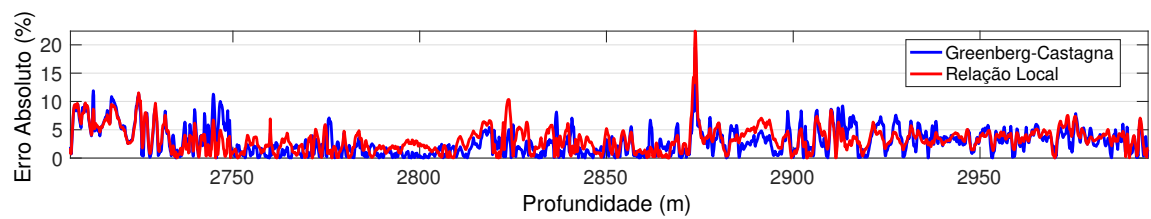
Fonte: Do autor.

Figura 3.12 – Predição de V_s no Poço C: (a) perfis comparativos e (b) gráfico de dispersão.



Fonte: Do autor.

Figura 3.13 – Erro percentual absoluto nas estimativas do Poço C.



Fonte: Do autor.

4 CONCLUSÃO

Seja de natureza teórica, empírica ou heurística, diversos são os modelos físico-matemáticos desenvolvidos com o intuito de construir alternativas para obter a informação da onda S a partir de parâmetros melhor mensurados pela ferramenta de perfilagem. As relações $V_p - V_s$ são um instrumento fundamental nesse contexto, pois esse par de atributos permite compreender melhor a dinâmica de um reservatório, descrevendo de aspectos litológicos à anisotropia do meio.

Equações puramente empíricas em muitos casos são eficientes para estimar V_s , principalmente quando não se tem acesso a todos os parâmetros petrofísicos. Sousa et al. (2015), por exemplo, determinaram os coeficientes de regressão em modelos não-polinomiais, que resultaram em estimativas de V_s para a litologia de Norne em que a primeira casa decimal (em km/s) era questionável em certos perfis e, portanto, de precisão inferior à atingida com o modelo híbrido discutido.

A combinação do fator empírico com o aspecto teórico estudada no presente trabalho, adaptando o modelo de Greenberg e Castagna (1992), embora restrita a situação em que se tenha informações sobre litologia e saturação de fluídos, mostrou forte eficiência preditiva, cumprindo o papel de estimar a velocidade cisalhante. Ainda que se trabalhe no melhor cenário, em que é possível perfilar Δt_s (vagarosidade cisalhante), existe a probabilidade de o dado precisar ser regularizado, mais uma razão pela qual modelagens dessa natureza são importantes e contribuem para redução de riscos de interpretação sísmica.

REFERÊNCIAS

- AVSETH, P.; MUKERJI, T.; MAVKO, G. *Quantitative Seismic Interpretation: Applying rock physics tools to reduce interpretation risk*. New York, US: Cambridge University Press, 2005.
- BIOT, M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid. i. low frequency range and ii. higher-frequency range. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Acoust. Soc., v. 28, n. 2, p. 168–191, 1956.
- CARVALHO, C. de; CARRASQUILLA, A. Calculating shear wave velocity from compressional wave to estimate geomechanical parameters in a turbidite reservoir of campos basin - southeast brazil. In: 14th INTERNATIONAL CONGRESS OF THE BRAZILIAN GEOPHYSICAL SOCIETY; EXPOGEF, 2015, RIO DE JANEIRO, BRAZIL. *Expanded Abstracts*. Rio de Janeiro: Brazilian Geophysical Society, 2015. p. 327–332.
- CASTAGNA, J. P.; BATLZE, M. L.; KAN., T. K. *Rock physics: The link between rock properties and AVO response*. In: CASTAGNA, J. P.; BACKUS, M. M. (eds.) *Offset-dependent reflectivity – Theory and practice of AVO analysis*. Houston, Texas, US: Society of Exploration Geophysicists, 1993. p. 135–171.
- CHEN, S. T. Shear-wave logging with dipole sourcers. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 53, n. 5, p. 659–667, 1988.
- CHEN, S. T. Shear-wave logging with quadrupole sourcers. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 54, n. 5, p. 590–597, 1989.
- CHENG, A. C. H. Can we ever trust the shear-wave log? *The Leading Edge*, Society of Exploration Geophysicists, v. 34, n. 3, p. 278–284, 2015.
- DVORKIN, J.; MAVKO, G. Vs predictors revisited. *The Leading Edge*, Society of Exploration Geophysicists, v. 33, n. 3, p. 288–296, 2014.
- ELLIS, D. V.; SINGER, J. M. *Well Logging for Earth Scientist*. Dordrecht, The Netherlands: Springer, 2007.
- FERTL, W. H.; III, H. H. R. Gamma ray spectral evaluation techniques identify fractured shale reservoirs and source-rock characteristics. *Journal of Petroleum Technology*, Society of Petroleum Engineers, v. 32, n. 11, p. 2–53, 1980.
- GASSMANN, F. Elastic waves through a packing of spheres. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 16, n. 4, p. 673–685, 1951.
- GREENBERG, M. L.; CASTAGNA, J. P. Shear-wave velocity estimation in porous rocks: Theoretical formulation, preliminary verification and applications. *Geophysical Prospecting*, European Association of Geoscientists and Engineers, v. 40, n. 2, p. 195–209, 1992.

HASHIN, Z.; SHTRIKMAN, S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Elsevier, v. 11, n. 2, p. 127–140, 1963.

HILL, R. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Elsevier, v. 11, n. 5, p. 357–372, 1963.

LARIONOV, W. W. *Borehole Radiometry*. Moscow, Russia: Nedra, 1969.

MAVKO, G.; CHAN, C.; MUKERJI, T. Fluid substitution: Estimating changes in vp without knowing vs. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 60, n. 6, p. 1750–1755, 1995.

MAVKO, G.; MUKERJI, T.; DVORKIN, J. *The rock physics handbook: Tools for seismic analysis of porous media*. New York: Cambridge University Press, 2009.

MONDOL, N. H. *Well Logging: Principles, applications and uncertainties*. In: BJORLYKKE, K. (ed.). *Petroleum Geoscience: From sedimentary environments to rock physics*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2015. p. 348–425.

PINHEIRO, J. E. F. Aprendendo a confiar em greenberg-castagna. In: 9th INTERNATIONAL CONGRESS OF THE BRAZILIAN GEOPHYSICAL SOCIETY; EXPOGEF, 2005, SALVADOR, BAHIA, BRAZIL. *Expanded Abstracts*. Rio de Janeiro: Brazilian Geophysical Society, 2005. p. 18–23.

REUSS, A. Berechnung der fließgrenze von mischkristallen auf grund der plastizitätsbedingung für einkristalle. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Wiley-VCH, v. 9, n. 1, p. 49–58, 1929.

SOUSA, M. C. de; FIGUEIREDO, J. J. S. de; SANTOS, L. K. Estimativa de vs a partir de vp usando equações empíricas. In: 14th INTERNATIONAL CONGRESS OF THE BRAZILIAN GEOPHYSICAL SOCIETY; EXPOGEF, 2015, RIO DE JANEIRO, BRAZIL. *Expanded Abstracts*. Rio de Janeiro: Brazilian Geophysical Society, 2015. p. 888–892.

STATOIL. *PL128-Norne Reservoir Management Plan*. 2001.

STEVENS, J. L.; DAY, S. M. Shear velocity logging in slow formations using the stoneley wave. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 51, n. 1, p. 137–147, 1986.

TANG, X. M.; WANG, T. Stress effects on wireline and logging-while-drilling shear-wave measurements and interpretation. In: SEG TECHNICAL PROGRAM EXPANDED ABSTRACTS 2004. *Expanded Abstracts*. [S.l.]: Society of Exploration Geophysicists, 2004. p. 286–289.

VASQUEZ, G. et al. Live and let Gassmann work. In: 10th INTERNATIONAL CONGRESS OF THE BRAZILIAN GEOPHYSICAL SOCIETY; EXPOGEF, 2007, RIO DE JANEIRO, BRAZIL. *Expanded Abstracts*. Rio de Janeiro: Brazilian Geophysical Society, 2007. p. 1346–1350.

VOIGT, W. *Lehrbuch der kristallphysik*. Leipzig, Berlin: B. G. Teubner, 1910.

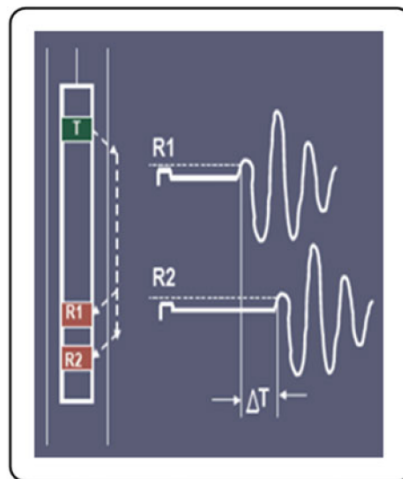
APÊNDICES

APÊNDICE A - DESAFIOS DA PERFILAGEM DE ONDA S

A abordagem convencional de perfilagem acústica se vale do método de transmissão, em que um sinal acústico da ordem de 20 kHz de frequência é gerado em uma fonte e, em receptores a certa distância desta, são registrados traços acústicos a partir dos quais se afere o tempo de trânsito (Δt), como ilustrado na Figura A.1. O produto da transmissão de energia através das formações de rocha ao redor do poço, o traço acústico, é útil para medir tanto velocidade compressional quanto velocidade cisalhante, as quais normalmente são correlacionadas a porosidade de formação e litologia, assim como para estimar propriedades mecânicas e avaliar geopressões.

Outro método de aquisição sônica em poços é o chamado modo de reflexão, em que a fonte opera em alta frequência, emitindo um sinal da ordem de 500 kHz. Medidas de tempo de trânsito entre emissão e detecção do sinal com este método podem ser aplicadas para imagear a região ao longo da parede do poço, de forma similar a sísmica de reflexão. A introdução de mecanismos multipolares, em conjunto com a incorporação de sofisticações em processamento de sinais e modelagem acústica em detalhe, convergiu para o estudo da propagação de ondas de poço dispersivas, as quais possibilitam detectar fraturas, prever falhamentos de rocha e estimar outras propriedades essenciais para o controle de perfuração.

Figura A.1 – Princípio de aquisição com ferramenta sônica. A partir da diferença nos tempos de chegada identificados nos sinais registrados nos receptores R1 e R2 (resultantes da interação do sinal da fonte T com a formação) se quantifica o tempo de trânsito (Δt).



Fonte: MONDOL (2015).

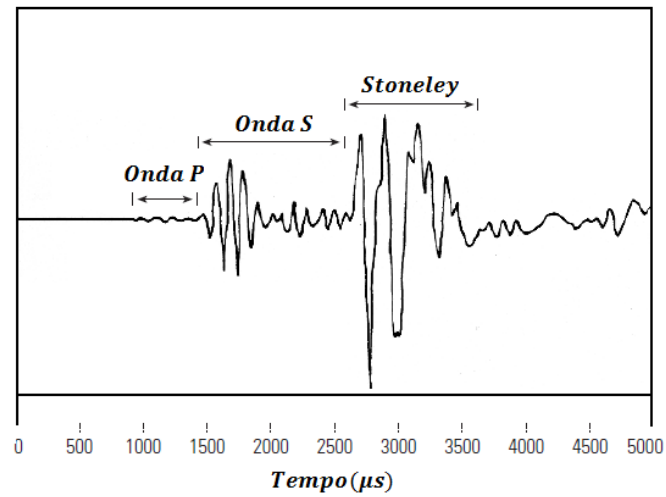
Na Figura A.2 é apresentado um traço acústico real, ilustrando o sinal registrado na ferramenta sônica no caso em que distingue-se três diferentes pacotes de energia. A primeira chegada indica a perturbação compressional, conhecida por onda P (onda primária). Em seguida chega uma onda de maior amplitude, resultante do lento cisalhamento propagado ao longo da formação, conhecida por onda S (onda secundária). Por último, observa-se a chegada da onda Stoneley, também chamada de onda de tubo, a qual se propagada na superfície de fronteira do poço e apresenta amplitude ainda maior que a onda de cisalhamento.

Na prática, embora o pulso transmitido por um mecanismo monopolar seja bem comportado, se espera que os sinais registrados no receptor sejam de complexidade condizente com as diversas reflexões e interferências resultantes da propagação das ondas no poço. No caso ideal, só é possível identificar as três ondas devido este se dar em uma formação rápida, isto é, em uma configuração em que a velocidade da onda S no conteúdo sólido é maior que a velocidade da onda P na lama de perfuração. Em formações suaves (ou lentas) ocorre o contrário, implicando na ausência do pacote cisalhante no traço acústico, conforme ilustrado na Figura A.3.

O advento de dispositivos dipolares amenizou o problema de medir V_s em formações lentas. Como discutido por Chen (1988), nestes arranjos a fonte é orientada de forma que o campo de pressão gerado apresente frente de onda perpendicular ao corpo da sonda. A dinâmica de reflexão da onda de pressão gerada por esta fonte gera ondulações na parede do poço, conhecidas por ondas flexurais, que por sua vez produzem ondas de pressão na lama que em frequência nula apresentam a mesma velocidade de propagação da onda S. No entanto, ondas dessa natureza possuem forte caráter dispersivo quando comparadas com onda Stoneley ou onda S registradas por arranjos monopolares, ganhando vagarosidade em função da frequência tal qual mostram as curvas contidas na Figura A.4.

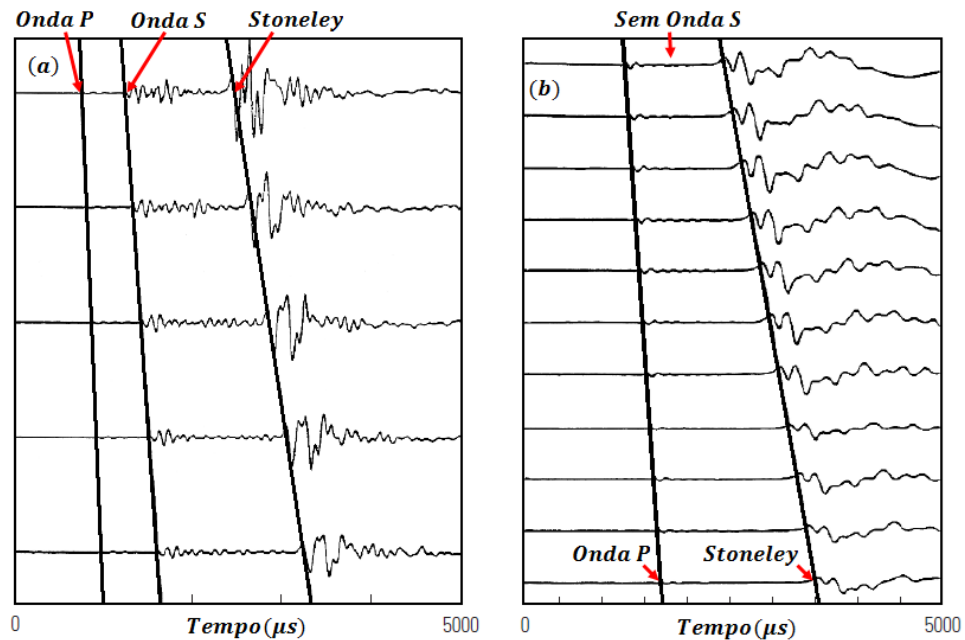
A influência da anisotropia das formações em que é realizado o registro sônico é outro questionamento relevante sobre perfilagem acústica (TANG; WANG, 2004). O caso isotrópico é uma idealização de como as rochas se dispõem em subsuperfície, sendo normal em casos reais a definição de dois tipos de anisotropia: a intrínseca, associada a acamadamentos ou alinhamento de fraturas, em que a propagação de onda S se dá de forma polarizada com maior velocidade na direção paralela a subparalela ao eixo de isotropia e menor velocidade na direção perpendicular a esta; e a induzida por esforços mecânicos, como forças tectônicas, em que a onda S se polariza nas direções de máxima tensão e de máximo alívio (Figura A.5). Arranjos sônicos multipolares, que também operam ondas flexurais, permitem quantificar a anisotropia intrínseca das formações atravessadas por um poço vertical, porém em poços horizontais a sub-horizontais a anisotropia induzida compromete identificar com segurança a velocidade cisalhante (CHEN, 1989).

Figura A.2 – Forma de onda normalmente registrada via perfilagem acústica, exibindo três chegadas que caracterizam as ondas elásticas que se propagam nas proximidades do poço.



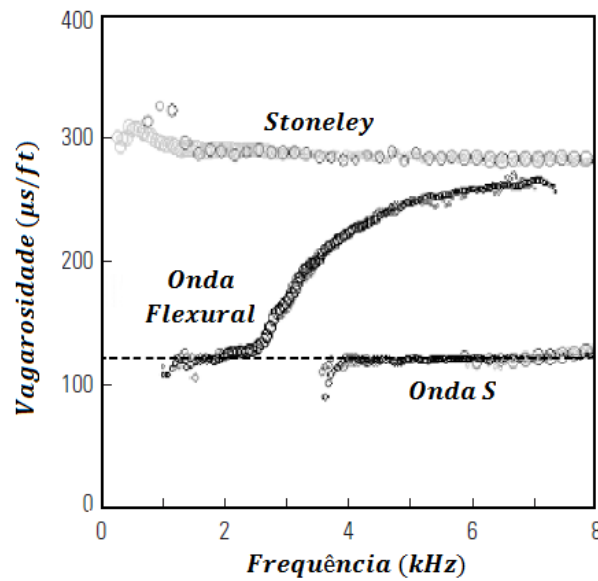
Fonte: Adaptado de Ellis e Singer (2007).

Figura A.3 – Conjunto de traços acústicos adquiridos por ferramenta sônica em: (a) formação rápida, em que a chegada da onda S é identificada; e (b) formação lenta, na qual não se identifica a chegada da onda S.



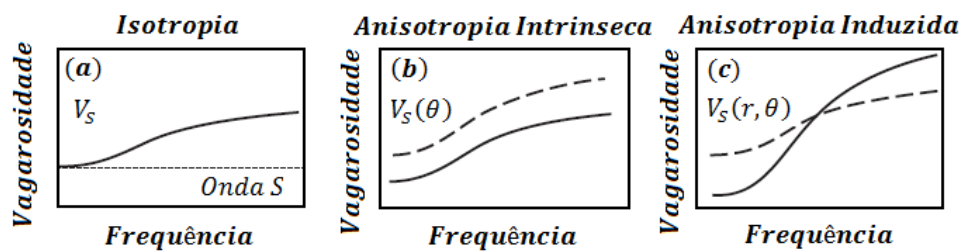
Fonte: Adaptado de Ellis e Singer (2007).

Figura A.4 – Curvas de dispersão observadas em arranjos sônicos dipolares. A onda flexural notadamente é mais dispersiva que a onda S refratada e que a onda de tubo (Stoneley).



Fonte: Adaptado de Ellis e Singer (2007).

Figura A.5 – Efeito da anisotropia na propagação de ondas flexurais: (a) propagação da onda S em meio isotrópico; (b) onda S com duas polarizações em razão da anisotropia intrínseca; e (c) polarização da onda S devido a presença de tensões ou anisotropia induzida.

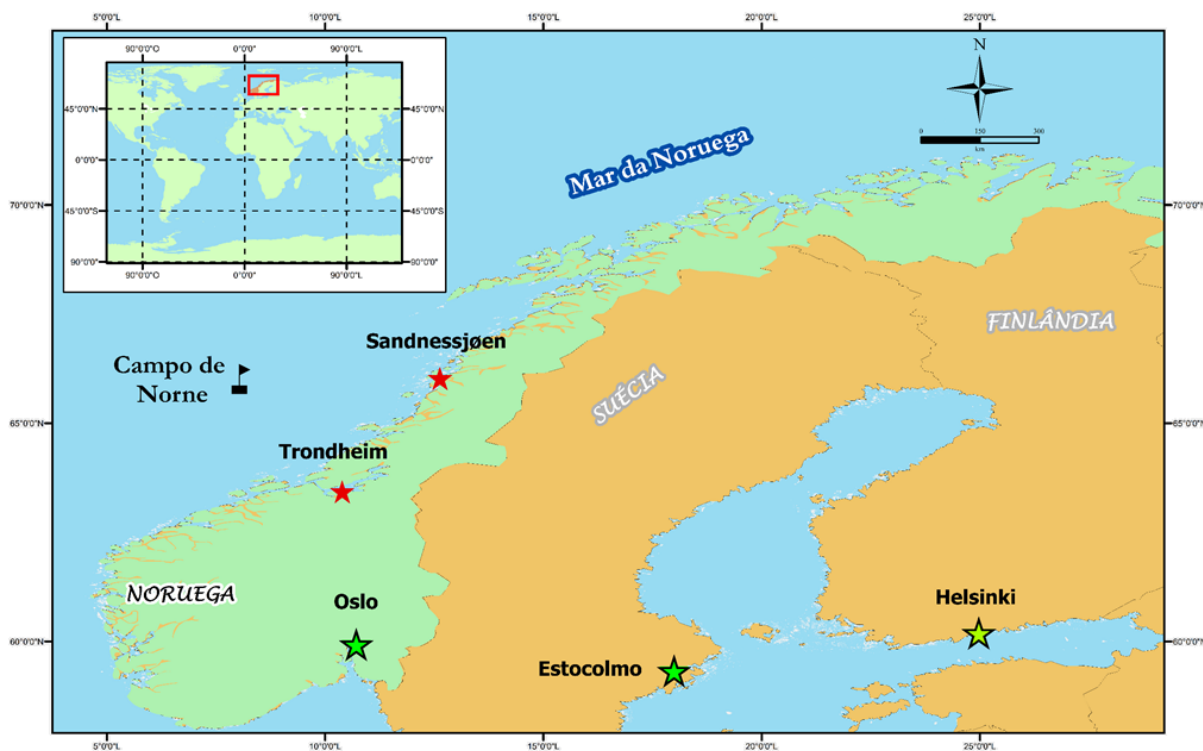


Fonte: Adaptado de Ellis e Singer (2007).

APÊNDICE B - GEOLOGIA DO CAMPO DE NORNE

Norne é um campo de óleo e gás localizado no Mar da Noruega, aproximadamente a 200 km da costa, próximo a cidade de Sandnessjøen, conforme observa-se na Figura B.1. Descoberto em dezembro de 1991, este campo produz óleo desde novembro de 1997 e gás desde 2001, operado primariamente pela Statoil ASA, cujos dados são disponibilizados pelo Centro de Operações Integradas da Indústria de Pétroleo (IO Center), instalado na Universidade Norueguesa de Ciência e Tecnologia (NTNU) em Trondheim.

Figura B.1 – Localização do Campo de Norne.

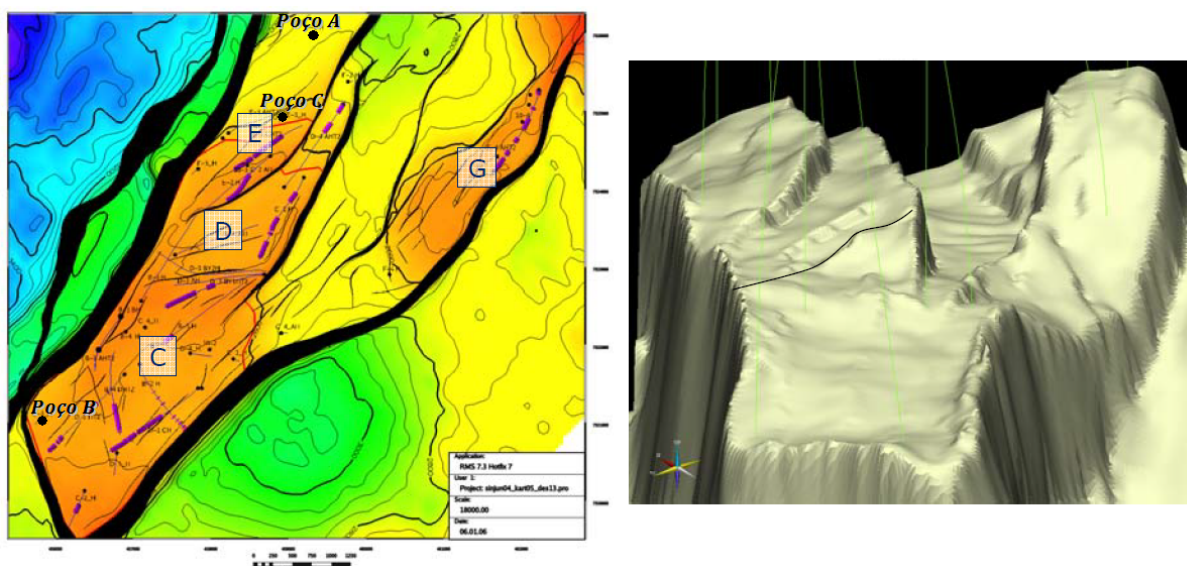


Fonte: Do autor.

Baseado em levantamentos geofísicos, observações geológicas e análises petrofísicas, Statoil (2001) compilou vários relatórios técnicos a respeito do Campo de Norne, a partir dos quais serão apresentadas informações gerais em relação a geologia da área e destacadas as principais características do sistema petrolífero local.

Norne faz parte de um bloco horst que cobre uma área de aproximadamente 9 km x 3 km, situado em um complexo de falhas denominado de Revfallet, por sua vez definido por quatro segmentos (C, D, E e G) indicados na Figura B.2. A região de Nordland, que inclui o Campo de Norne, sofreu dois períodos de rifteamento: um no Permiano e outro entre o Jurrásico Superior e Cretácio Inferior. O primeiro foi predominado por falhamentos que afetaram boa parte da área, especialmente falhas normais, enquanto o segundo período caracterizou-se pela elevação de lapas de falhas e processo erosivo intenso, em que o desenvolvimento estrutural do reservatório de Norne foi mais expressivo. O reservatório foi gradualmente expandindo em profundidade, permitindo então a formação e acumulação de gás e óleo, em rochas do Triássico Superior ao Jurássico Médio.

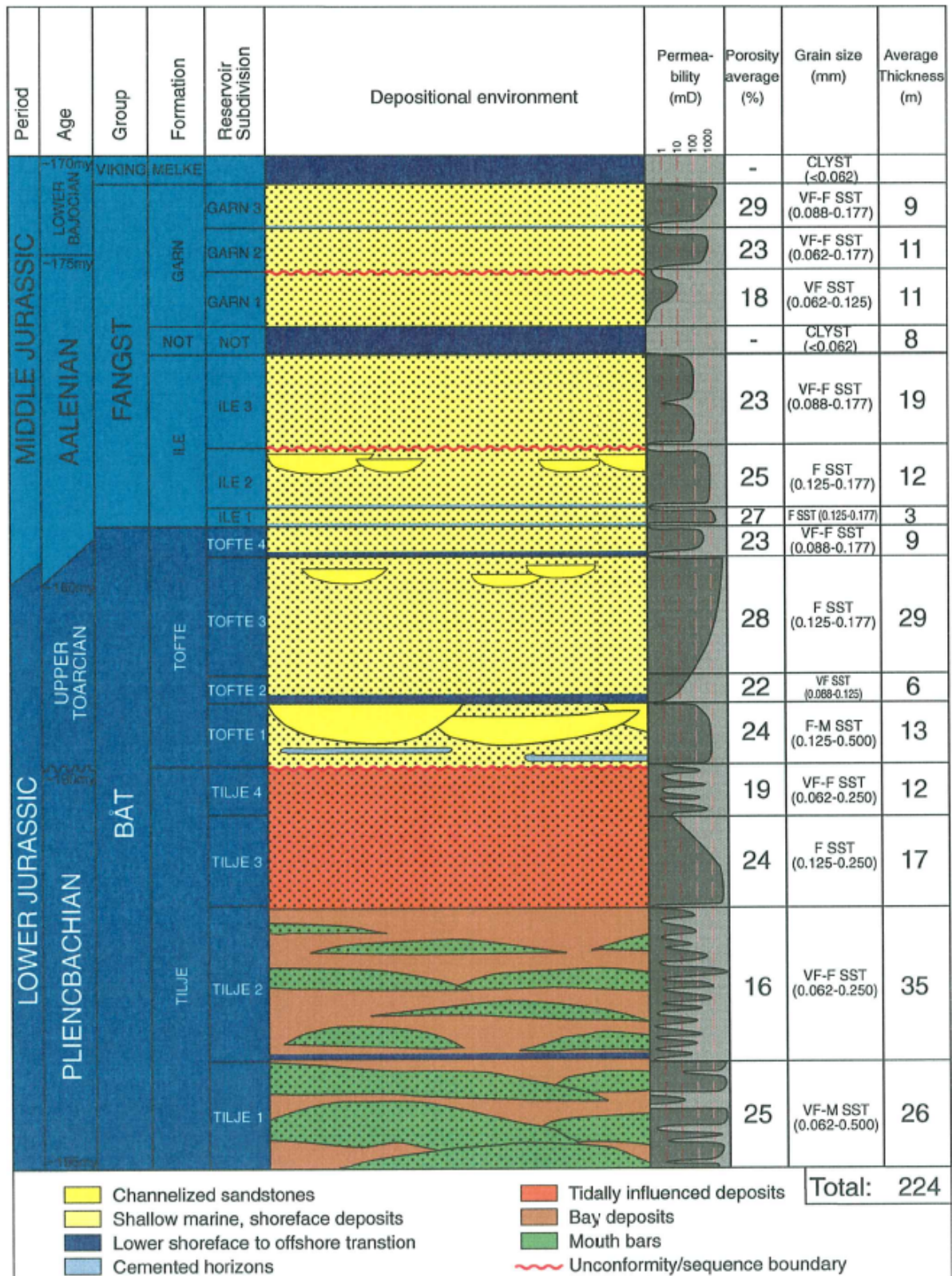
Figura B.2 – Segmentos do Campo de Norne: mapa estrutural (com os Poços A, B e C destacados) e vista 3D.



Fonte: Adaptado de Statoil (2001).

O reservatório pode ser dividido em quatro formações diferentes, dispostas na seguinte ordem descendente: Garn, Ile, Tofte e Tijle. No geral, estas formações são constituídas por arenitos subarcosianos de grãos finos de bom a muito bom grau de seleção, que embora sejam afetados pro processos diagenéticos constituem bons reservatórios de intervalo de porosidade de 25-30% e permeabilidade variando de 20 a 2500 mD. Em relação às rochas geradoras, que são aquelas em que existiu conteúdo orgânico posteriormente transformado em hidrocarbonetos, acredita-se que sejam das formações Spekk, do Jurássico Superior, e Åre, do Jurássico Inferior. Rochas da formação Melke que atuam como selante na parte superior do reservatório, assim como as da formação Not, que separam as formações Garn e Ille, são em maior parte folhelhos, que em conjunto com blocos de falhas formam trapas e favorecem a retenção de fluídos nas formações subjacentes. Na Figura B.3 consta o panorama completo a respeito da estratigrafia de Norne, a partir do qual pode-se verificar as características principais da formações mencionadas.

Figura B.3 – Carta estratigráfica do Campo de Norne.



Fonte: Statoil (2001).

Ao longo do Campo de Norne nota-se uma variação da espessura do reservatório, do topo da formação Åre ao topo da formação Garn, variando de 260 a 120 m, devido a erosão gradualmente mais agressiva na direção norte da área. A formação Åre é a mais profunda e de composição mais heterogênea, consolidada em um ambiente de deposição sedimentar intermediário entre aluvial e deltaico, em que se identifica alternância entre arenitos, folhelhos, carbonatos e calcários. Acima desta se encontra a formação Tijle, caracterizada por sedimentos marinhos que originaram camadas de arenito, folhelhos levemente bioturbados a laminados e camadas de conglomerados. A formação Tofte apresenta aumento gradual de bioturbações da parte inferior ao seu topo, com matriz arenítica de granulação fina a muito fina.

A qualidade do reservatório em parte da formação Ile é notável, diferenciando-se em relação às formações adjacentes por ser um arenito menos espesso, com conteúdo calcáreo expressivo em algumas zonas. A formação Not é caracterizada por finas camadas de folhelhos negros, originados da deposição em ambiente marinho estável. Com zona inferior argilosa acima da formação Not, a formação Garn é composta por arenito com granulometria fina a muito fina, tornando-se mais limpo em direção ao topo. A formação mais rasa, Melke, apresenta boa espessura, dominada por argilitos e lâmina siltítica originados da deposição em ambiente de transição marinho a costeiro. A Tabela B.1 mostra as profundidades de topo e base de cada uma das formações geológicas que compõe o sistema petrolífero local, em relação a cada um dos poços utilizados neste trabalho.

Tabela B.1 – Limites em profundidade (topo-base) das formações geológicas ao longo dos poços estudados (em *m*).

Formação	Poço A	Poço B	Poço C
Melke	2691,0 - 2849,0	3167,5 - 3348,0	2535,0 - 2706,5
Garn	2849,0 - 2881,5	3348,0 - 3377,4	2706,5 - 2742,0
Not	2881,5 - 2887,5	3377,4 - 3388,0	2742,0 - 2749,0
Ile	2887,5 - 2904,5	3388,0 - 3440,0	2749,0 - 2775,0
Tofte	2904,5 - 2964,0	3440,0 - 3503,0	2775,0 - 2834,0
Tijle	2964,0 - 3015,5	3503,0 - 3634,0	2834,0 - 2910,0
Åre	3015,5 - 3170,0	3634,0 - 3780,0	2910,0 - 3010,0

Fonte: Statoil (2001).

APÊNDICE C - REGRESSÃO POLINOMIAL

Em termos estatísticos, um método de regressão consiste em determinar o modelo matemático que melhor correlaciona dois conjuntos de dados. No caso da regressão polinomial por mínimos quadrados, o objetivo é encontrar uma curva definida por uma relação polinomial de tal forma que sua variação residual seja mínima.

Sejam as variáveis y , x e o polinômio de n -ésimo grau

$$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad (\text{C.1})$$

cujo resíduo é dado por

$$R = \sum_{i=1}^m [y_i - f_i(a_0, a_1, \dots, a_n, x_i)]^2, \quad (\text{C.2})$$

a seguinte condição deve ser satisfeita para determinar os coeficientes a_k do polinômio f :

$$\frac{\partial(R)}{\partial a_k} = 0. \quad (\text{C.3})$$

Dito isto, as derivadas parciais do resíduo são tais que

$$\frac{\partial(R)}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^m [y_i - f_i] = 0, \quad (\text{C.4})$$

$$\frac{\partial(R)}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^m [y_i - f_i] x_i = 0, \quad (\text{C.5})$$

$\vdots$

$$\frac{\partial(R)}{\partial a_n} = -2 \sum_{i=1}^m [y_i - f_i] x_i^n = 0. \quad (\text{C.6})$$

Por sua vez, estas equações equivalem a

$$a_0n + a_1 \sum_{i=1}^m x_i + \dots + a_n \sum_{i=1}^m x_i^n = \sum_{i=1}^m y_i, \quad (\text{C.7})$$

$$a_0 \sum_{i=1}^m x_i + a_1 \sum_{i=1}^m x_i^2 + \dots + a_n \sum_{i=1}^m x_i^{n+1} = \sum_{i=1}^m x_i y_i, \quad (\text{C.8})$$

$\vdots$

$$a_0 \sum_{i=1}^m x_i^n + a_1 \sum_{i=1}^m x_i^{n+1} + \dots + a_n \sum_{i=1}^m x_i^{2n} = \sum_{i=1}^m x_i^n y_i. \quad (\text{C.9})$$

Em termos matriciais o sistema toma a forma

$$\begin{bmatrix} m & \sum_{i=1}^m x_i & \dots & \sum_{i=1}^m x_i^n \\ \sum_{i=1}^m x_i & \sum_{i=1}^m x_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^m x_i^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^m x_i^n & \sum_{i=1}^m x_i^{n+1} & \dots & \sum_{i=1}^m x_i^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m y_i \\ \sum_{i=1}^m x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m x_i^n y_i \end{bmatrix}, \quad (\text{C.10})$$

em que a primeira matriz é uma matriz de *Vandermonde*, o que permite reescrevê-lo em

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & \dots & x_m^n \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} \quad (\text{C.11})$$

ou ainda, em notação matricial,

$$\mathbf{X}\mathbf{a} = \mathbf{y}. \quad (\text{C.12})$$

Para solucionar esta igualdade primeiro multiplica-se pela transposta de $\mathbf{X}$ à esquerda,

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{a} = \mathbf{X}^T \mathbf{y}, \quad (\text{C.13})$$

e, por último, pela inversa do produto $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$, obtendo

$$\mathbf{a} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}. \quad (\text{C.14})$$

Portanto, os coeficientes do polinômio que ajusta x à y com menor resíduo são calculados por

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_m^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & \dots & x_m^n \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_m^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}. \quad (\text{C.15})$$