



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
FACULDADE DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Breno Roberto Mota Guedes Melém

Introdução à Teoria dos Grafos com Aspectos Computacionais e Convexidade de Grafos

Ananindeua

2025

Breno Roberto Mota Guedes Melém

Introdução à Teoria dos Grafos com Aspectos Computacionais e Convexidade de Grafos

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Universidade Federal Do Pará do Campus de Ananindeua como parte dos requisitos necessários a Conclusão da Graduação do Curso Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia com Ênfase em Mecânica

Universidade Federal do Pará

Orientador: Prof. Dr. Rômulo Luiz Oliveira Da Silva

Ananindeua

2025

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

M519i Melém, Breno Roberto Mota Guedes.
Introdução à Teoria dos Grafos com Aspectos Computacionais
e Convexidade de Grafos / Breno Roberto Mota Guedes Melém. —
2025.
LXI, 61 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Rômulo Luiz Oliveira da Silva
Trabalho de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Pará,
Campus Universitário de Ananindeua, Curso de Ciência e
Tecnologia, Ananindeua, 2025.

1. Algoritmos. 2. Grafos Inflados. 3. Clique-Expandidos.
4. Complexidades. 5. Convexidades. I. Título.

CDD 511.5

Breno Roberto Mota Guedes Melém


Introdução à Teoria dos Grafos com Aspectos Computacionais e Convexidade de Grafos

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Universidade Federal Do Pará do Campus de Ananindeua como parte dos requisitos necessários para a Conclusão da Graduação do Curso Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia com Ênfase em Tecnologia Mecânica


Conceito: EXCELENTE

Ananindeua, Dezembro de 2025.


BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 ROMULO LUIZ OLIVEIRA DA SILVA
Data: 20/03/2026 09:26:54-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Rômulo Luiz Oliveira Da Silva - Orientador
UFPA

Documento assinado digitalmente
 FRANCIELE GOMES FERREIRA
Data: 10/02/2026 21:23:20-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Ma. Franciele Gomes Ferreira – Membro Interno
UFPA

Documento assinado digitalmente
 ARTUR VINICIUS FERREIRA DOS SANTOS
Data: 26/02/2026 18:37:19-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Artur Vinícius Ferreira dos Santos – Membro Interno
UFPA

Agradecimentos

Inúmeras pessoas estiveram comigo em minha caminhada, a todos os meus mais sinceros agradecimentos, gostaria de agradecer primeiramente a Deus, onde mesmo em minhas fraquezas me concedeu força e serenidade ao longo dos desafios, sempre sendo a minha base, por intersecção da Virgem Maria, onde em meios as minhas dúvidas, me acolheu debaixo de seu poderoso amparo, e me ajudou a concluir mais uma fase de minha vida...

A minha família, em suma a minha mãe, minha inspiração e minha motivação. por sempre me apoiar me ajudando e me aconselhando perante todos os desafios de minha vida, onde sei que em qualquer momento posso estar contando com ela, por lutar tanto para me dar conforto, e sempre me incentivando a buscar mais, a estudar mais. Por isso, meus sinceros agradecimentos. Meu irmão, minha avó e meu pai, agradeço por ser exemplo para mim, e por muito me ensinar em minha vida. Por isso, meus sinceros agradecimentos.

Ao meu amor, a quem chegou tão recente e detêm um pedaço tão importante de mim. Amanda, meu amor, obrigado por me apoiar incondicionalmente, me escutar, aconselhar, e a pessoa com posso conversar infinitamente. Muito obrigado, por me deixar te amar...

Meus sinceros agradecimentos ao meu orientador, professor. Dr. Rômulo Luiz de Oliveira da Silva por me dar todo o suporte necessário, conselhos, e dúvidas que sempre se dispôs a me ajudar. Agradeço, por me apresentar a área de matemática discreta, onde tenho bastante intenções em explorarmos as sutilezas de seu mundo, e por ter me mostrado como funciona o mundo da pesquisa na área, meus sinceros agradecimentos.

Pelos meus Amigos ao longo da graduação, onde se mostraram amigos para muito além dela, muito obrigado por melhorar infinitamente os meus dias ao longo dos semestres, sem vocês, seria extremamente desafiador.

Todos se tornaram parte de mim, por isso meus mais sinceros agradecimentos.....

“A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao tamanho original.”

Albert Einstein.

Resumo

A Teoria dos grafos constitui uma fonte vastíssima de problemas, tanto práticos quanto teóricos. Esses problemas costumam ter enunciados simples, mas frequentemente escondem estruturas matemáticas complexas que exigem modelagem cuidadosa. Diversos problemas presentes em aplicações reais podem ser representados por meio de grafos. Entretanto, muitos desses desafios pertencem a classe dos problemas NP-difíceis, o que significa que, salvo se $P = NP$, não existem algoritmos eficientes conhecidos para resolvê-los em geral. A fim de discorrer sobre as principais classes de grafos; Grafos Bipartidos, Grafos Cordais, Grafos Inflados, grafos Euleriano, Hamiltonianos, com a finalidade para ser uma base ao novo pesquisador que visa dar início ao desenvolvimento científico dentro da área. Neste trabalho, estabelecemos as bases teóricas necessárias para o estudo dos temas abordados, com ênfase em teoremas de caracterização. Discutimos a convexidade em grafos, apresentando seus principais parâmetros e relacionando-a à convexidade clássica. Também analisamos aspectos de complexidade computacional e, por fim, exploramos a classe de grafos introduzida recentemente, em 2022, denominada clique-expandidos em que H é um grafo clique-expandido quando for obtido por um processo de expansão de dado grafo G com um operador f -clique-expandido. Se $f(v_i) = k$ para todo $v_i \in V(G)$ e para algum $k \in \mathbb{N}$, podemos dizer que H é um grafo k -clique-expandido.

Palavras-chave: Algoritmos; Grafos Inflados; Clique-Expandido; Complexidade, Convexidade.

Abstract

Graph Theory constitutes an extremely rich source of both practical and theoretical problems. These problems often have simple statements, but they frequently hide complex mathematical structures that require careful modeling. Several problems arising from real-world applications can be represented by means of graphs. However, many of these challenges belong to the class of NP-hard problems, which means that, unless $P = NP$, no efficient algorithms are known to solve them in general. In order to discuss the main classes of graphs—Bipartite Graphs, Chordal Graphs, Inflated Graphs, Eulerian and Hamiltonian Graphs—this work aims to serve as a foundation for new researchers beginning their scientific development in the area. In this study, we establish the theoretical bases necessary for examining the topics addressed, with emphasis on characterization theorems. We discuss graph convexity, presenting its main parameters and relating it to classical convexity. We also analyze aspects of computational complexity and, finally, explore the class of graphs introduced recently, in 2022, known as clique-expanded graphs, in which H is a clique-expanded graph when it is obtained from a given graph G through an f -clique-expanded operator. If $f(v_i) = k$ for every $v_i \in V(G)$ and for some $k \in \mathbb{N}$, we may say that H is a k -clique-expanded graph.

Keywords: Algorithms; Inflated Graphs; Clique-Expanded; Complexity, Convexity.

Lista de ilustrações

Figura 1.	Conexões de rede de computadores sendo representados por linhas de grafos	12
Figura 2.	Grafo G , grafo $G - uv$ e Grafo $G - v$	16
Figura 3.	Um modelo Computacional representando o funcionamento de uma RAM .	18
Figura 4.	Um Grafo G e a sua matriz de adjacência associada.	23
Figura 5.	Um Multigrafo G e a sua matriz de adjacência associada	23
Figura 6.	Um Multigrafo G e a sua matriz de incidência associada	24
Figura 7.	Um Grafo G não direcionado e sua representação por lista de adjacências . .	25
Figura 8.	Pontes de Königsberg em representação de Grafos	27
Figura 9.	Um grafo associado de um dodecaedro	28
Figura 10.	Uma representação em Grafos do Problema das três casas	30
Figura 11.	Um grafo G e sua representação planar.	32
Figura 12.	Um grafo Cordal (grafo de Hajós) e um grafo Não Cordal, respectivamente .	33
Figura 13.	Representação de vértices simpliciais e suas $N(g)$ induzindo um k_2	33
Figura 14.	Ilustração de um grafo G que admite um esquema de eliminação perfeito . .	34
Figura 15.	Um esquema de Eliminação Perfeito Aplicado a um grafo G removendo os vértices Simpliciais	35
Figura 16.	À esquerda um Grafo K_3 e a sua direita a subdivisão $S(G)$ do K_3	36
Figura 17.	Os grafos que proíbem, como subgrafos induzidos, a classe dos grafos de linha	37
Figura 18.	Um grafo com uma partição de Krauss, verificando que todas as arestas do grafo, pertencem a algum subgrafo da cobertura.	38
Figura 19.	A garra, o diamante e o buraco ímpar, as estruturas que como subgrafos induzidos, proíbem a existência dos grafos de linha bipartidos.	39
Figura 20.	Um grafo G à esquerda e o seu grafo 5-clique expandido à direita.	41
Figura 21.	Um grafo G pertencente a denominação “borboleta”.	42
Figura 22.	À esquerda: um grafo G ; à direita: o seu grafo inflado.	43
Figura 23.	À esquerda temos um grafo G que é raiz de inflação do grafo à direita G_1 . .	45
Figura 24.	Um Grafo G e seu conjunto intervalo ou interval set do Grafo.	48
Figura 25.	Exemplos para a convexidade geodética e P_3 em um grafo	49
Figura 26.	Um conjunto e sua Envoltória convexa	51

Lista de símbolos

Γ	Letra grega Gama
Λ	Lambda
\in	Pertence
$E(G)$	Conjunto de arestas do grafo G
$d_G(v)$	Grau do vértice v no grafo G
G_f	Grafo clique-expandido obtido a partir de um grafo raiz G e uma função f
K_q	Clique com q vértices
$K_{p,q}$	Grafo bipartido completo com partições de tamanhos p e q
P_n	Caminho induzido com n vértices
$S(G)$	Subdivisão do grafo G
$V(G)$	Conjunto de vértices do grafo G
X	Classe dos grafos clique-expandidos
$\delta(G)$	Grau mínimo do grafo G
$\Delta(G)$	Grau máximo do grafo G
$H(G)$	Operador de inflação atuando sobre o grafo G
$i(G)$	Número de intervalo (interval number) do grafo G

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS	12
2	DEFINIÇÕES BÁSICAS	14
2.1	CONCEITOS E DEFINIÇÕES INICIAIS	14
3	COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL	17
3.1	PROBLEMAS NP-COMPLETOS	19
3.2	Representação Computacional de Grafos	22
3.2.1	Matriz de Adjacência	22
3.2.2	Matriz de Incidência	24
3.2.3	Listas de Adjacências.	25
4	CLASSES DE GRAFOS	26
4.1	Grafos Eulerianos	26
4.2	Grafos Hamiltonianos	28
4.3	Grafos Planares	30
4.4	Grafos Cordais	32
4.5	Grafos de Linha	35
4.5.1	Grafos de Linha Bipartido	39
4.6	Grafos Clique-Expandidos	39
4.7	Grafos Inflados	42
5	CONVEXIDADE EM GRAFOS	46
5.1	Parâmetros de Convexidade	49
5.1.1	O Problema Da Dominação	53
6	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	55
	REFERÊNCIAS	57

1 Introdução

“A razão satisfaz apenas uma parte do homem, enquanto o desejo é a expressão de toda a vida”.

Fiódor Dostoiévski

Neste trabalho, buscamos evidenciar e compilar os principais estudos dentro da área de algoritmos e combinatória, incluindo a complexidade computacional, com ênfase na disseminação no meio acadêmico. Com uma linguagem clara e de fácil acesso, com a finalidade de divulgar a teoria dos grafos, principal objeto de estudo ao longo deste trabalho, principalmente em futuros grupos de pesquisa da Universidade Federal do Pará, onde carece de desenvolvimento científico no campo de grafos. Este trabalho tende por caracterizar as principais classes de grafos e seus teoremas de caracterização, almejando apresentar um resumo, de fácil acesso para o desenvolvimento de estudos futuros.

Segundo [1] uma das principais literaturas da área, grafos são estruturas matemáticas que modelam relações de adjacências, muitas das vezes, realizar uma modelagem de um problema utilizando a teoria dos grafos nos permite muitas das vezes, visualizar o problema de uma maneira mais ampla, relacionando com meios logísticos ou combinatórios, por exemplo; linhas de metrô, transporte de carga em estradas, distribuição de mais variados produtos. Relacionando outros campos, como engenharia molecular, uma proliferação de um vírus, e as redes sociais.

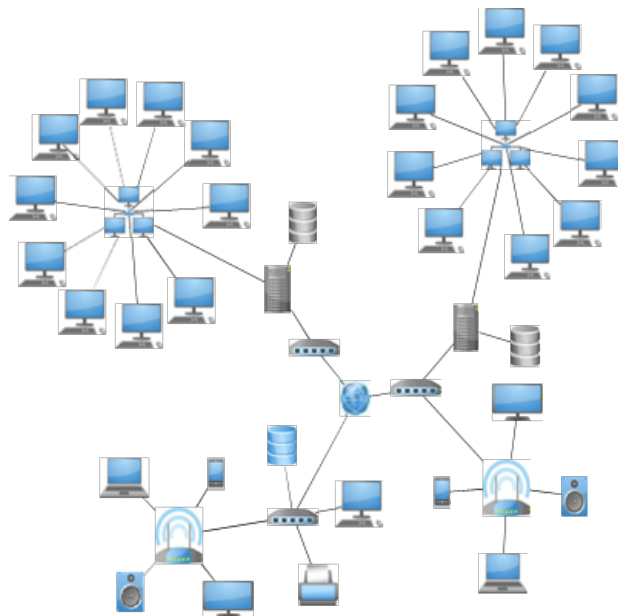
Um grafo, utilizando ferramentas computacionais, nos permite entendimento lógico e aplicado desses e de mais problemas. Por isso, esta maneira de constituir determinado problema, representando através de um grafo, seja utilizando meios físicos ou computacionais, enriquece o entendimento do pesquisador, os permite analisar situações cotidianas de maneira mais lógica. E a teoria dos grafos, nos permite modelar diversas formas, de representar o mesmo problema, tendo em vista, que sua representação não se trata de uma forma geométrica, ou seja, existem inúmeras maneiras de representar um grafo para o mesmo problema.

Com isso, ao longo deste trabalho, iremos destacar a importância/ disseminação, onde nosso principal foco, foi estabelecer um grupo de pesquisa dentro da Universidade Federal do Pará, juntando, abordando as principais ferramentas da Combinatória, ao longo deste trabalho buscamos por compilar de maneira resumida. As principais “famílias de grafos” explorando seus teoremas de caracterização, abordando de maneira integrada a complexidade computacional, evidenciando a importância dos estudos da eficiência de certos algoritmos, explorando a classe de problemas NP-completos, e NP-completude, evidenciando seus problemas, e suas relações na teoria dos grafos, trabalhando com conceitos básicos, onde catalogam-se o início do desenvolvimento da teoria dos grafos, por exemplo; Problema da ponte de Königsberg, iniciando-se a

famosa classe dos grafos eulerianos, o problema das quatro cores, problema do caixeiro viajante, etc. Onde encontra-se o estopim do desenvolvimento da teoria dos grafos contemporâneo. Além de explorarmos de maneira resumida, as convexidades de grafos, objetos de extrema importância, tema esse clássico dentro da matemática, desde a antiguidade, como Euclides, Kepler, Arquimedes, Euler, Gauss, físicos e matemáticos de extremo renome no desenvolvimento científico, contribuindo e apresentando conceitos na Geometria convexa.

Apesar destes grandes nomes da antiguidade, área apenas se tornou uma área independente no século passado, e seus estudos aplicados na área de grafos, próxima da década de 1970, conforme demonstrado no estudo [2], visando continuar contribuindo para o campo de grafos e desenvolvendo de uma maneira simples, direta e clara para o leitor, abordamos/ compilamos ao longo desse trabalho, contribuições valiosas para A Teoria de Grafos.

Figura 1. Conexões de rede de computadores sendo representados por linhas de grafos



Fonte: Imagem Autoral Elaborada via Yead Graph Generator

1.1 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

A Teoria dos Grafos, objeto central de estudo ao longo deste trabalho, ainda é uma área relativamente pouco difundida e explorada de forma sistemática ao longo da formação acadêmica de jovens e adultos. Em geral, o contato com essa teoria ocorre apenas em cursos de Matemática ou Ciência da Computação, muitas vezes de maneira introdutória, simplificada e fragmentada. Além disso, observa-se que uma parcela significativa dos estudantes não possui uma base sólida em áreas fundamentais, como combinatória e lógica matemática, o que dificulta a compreensão mais profunda dos conceitos e estruturas que compõem a Teoria dos Grafos, bem como o reconhecimento de suas múltiplas aplicações práticas.

Apesar dessa limitação no ensino e na disseminação do conhecimento, a Teoria dos Grafos tem desempenhado um papel fundamental na resolução de problemas clássicos e contemporâneos, sendo amplamente utilizada em diversas áreas do conhecimento. Entre os problemas clássicos que evidenciam sua relevância histórica e teórica, destacam-se o Problema das Casas, associado a grafos bipartidos; o Problema do Dodecaedro, conhecido como The Icosian Game, relacionado a grafos hamiltonianos; e o célebre Problema das Pontes de Königsberg, que deu origem ao estudo dos grafos eulerianos. Esses exemplos ilustram não apenas a riqueza teórica da área, mas também sua capacidade de modelar situações reais por meio de estruturas discretas.

Diante da carência no desenvolvimento e na divulgação científica em Teoria dos Grafos, especialmente na região Norte do Brasil, este trabalho tem como um de seus objetivos contribuir para o fortalecimento da pesquisa científica na área, incentivando a produção de artigos, a participação em congressos e a inserção em periódicos especializados. Reconhece-se que outras regiões do país, como o Sudeste, apresentam maior tradição e consolidação no desenvolvimento científico, abrigando alguns dos maiores grupos de pesquisa da América Latina, com expressiva produção e visibilidade acadêmica. Assim, este trabalho busca utilizar referências e resultados desses grupos como base para a construção de uma produção científica sólida e contextualizada.

Nesse sentido, almeja-se também fomentar a criação e o fortalecimento de um grupo de pesquisa em Teoria dos Grafos na Universidade Federal do Pará (UFPA), com o propósito de estimular novos pesquisadores, ampliar a visibilidade da área na região e contribuir para o avanço do conhecimento científico de forma contínua e colaborativa.

Um dos objetivos específicos que motivaram o início desta pesquisa foi o estudo da classe dos grafos Clique-Expandidos, uma subclasse dos grafos de linha, inicialmente desenvolvida em [3]. No entanto, para dar continuidade a investigações mais avançadas nessa classe, tornou-se necessário um aprofundamento prévio em conceitos básicos e clássicos da Teoria dos Grafos. Dessa forma, este trabalho dedica-se à exploração das principais “famílias” de grafos, bem como de seus teoremas de caracterização e dos algoritmos de reconhecimento associados a essas classes.

Por fim, o trabalho tem como objetivo investigar aspectos de complexidade computacional e convexidade em grafos, áreas que apresentam elevado grau de complexidade teórica e relevância prática. O estudo desses temas é fundamental para a aplicação dos conceitos abordados, permitindo compreender os limites computacionais dos algoritmos envolvidos e analisar propriedades estruturais dos grafos. Tais aplicações estendem-se a problemas contemporâneos de grande impacto social, como a modelagem e análise da disseminação de pandemias em escala global, a exemplo da COVID-19, evidenciando a importância da Teoria dos Grafos como ferramenta essencial na ciência moderna.

2 DEFINIÇÕES BÁSICAS

“Se você não consegue explicar algo de forma simples, você não entendeu suficientemente bem.”

Albert Einstein

2.1 CONCEITOS E DEFINIÇÕES INICIAIS

Este capítulo destina-se para apresentarmos os principais conceitos e definições mais comumente utilizada na Teoria dos Grafos, e que mais nos deparamos em nosso cotidiano, além de ser notoriamente citada, em qualquer literatura. Abordaremos conceitos básicos que auxiliam de maneira determinante para estudos posteriores e um maior entendimento para áreas mais complexas, envolvendo a Teoria dos grafos, Complexidade Computacional e principais conceitos de Convexidade. A respeito da Teoria dos grafos, temos inúmeras literaturas e excelentíssimos artigos, explorando definições, teoremas de caracterização aplicando em diversas áreas da sociedade. Entretanto, torna-se inevitável, quando falamos de conceitos básicos, uma das principais referências por todo o globo seria [1], evidencia de fato o que seria um grafo, suas aplicabilidades e desde então é indispensável para qualquer pesquisador da área de fato. Portanto, dista-se então a definição de um grafo.

Um grafo, representado pela letra (G) é uma estrutura combinatória que consiste na dupla $(V(G), E(G))$, onde $(V(G))$ seria um conjunto não vazio de elementos, onde recebe-se o nome de *Vértices*, e $(E(G))$ recebe-se o nome *arestas* do grafo. Sendo esses, pares não ordenados de vértices, mais comumente utilizada na literatura por $u, v \in V(G)$. Seria intuitivo, imaginarmos as arestas como uma função que associa cada par de vértices, ou seja, podemos imaginar sendo uma conexão entre os extremos dos vértices. A notação Clássica de grafos é dada por: $G = (V(G), E(G))$ utilizaremos a notação uv para nos referirmos a arestas. Ressaltando-se o conceito de **grafo finito** é um grafo onde os conjuntos pertencentes de seus vértices $(V(G))$ e de suas arestas $E(G)$ são finitos, os grafos que discutiremos ao longo deste trabalho serão todos finitos. Quando falamos de uma **representação gráfica**, para nos auxiliar a ter uma melhor visualização de determinados gráficos, e buscar uma melhor compreensão do mesmo. Os vértices representamos por pontos no plano, e as arestas uv , são representadas por uma linha contínua conectando os vértices ao seu extremo. Se $e = uv \in E(G)$, então representamos ao dizer que esses vértices são adjacentes ou vizinhos e que uma aresta entre esses vértices (u, v) , dizemos que a aresta será incidente aos vértices se $e = uv$, a chamamos de extremidades de arestas. Um **vértice pendente**, será adjacente apenas um vértice do grafo (G) , analogamente uma aresta pendente seria aquela adjacente ao vértice pendente. Dizemos que a ordem de um grafo

seria o tamanho do seu conjunto de vértices V , utilizaremos a notação mais comum, $n = |V|$ $m = |E|$, para notação do conjunto de vértices e de arestas do grafo. Com isso, um grafo é dito **trivial** quando o seu $n = 1$ e o $E = \emptyset$.

Um **laço** é uma aresta que contém extremos iguais, os diferenciando de **arestas múltiplas**, que contém os mesmos pares de extremo. Quando um grafo contiver uma aresta múltiplas e/ou laços, os denominamos de **multigrafos**, chamamos de grafo simples, aqueles em que não contém uma aresta múltipla e/ou laço. Um **subgrafo**, denotamos por $H = (V(H), E(H))$ do grafo $G(V(G), E(G))$, é um grafo em que o conjunto de vértices $V(H) \subseteq V(G)$ e, $E(H) \subseteq E(G)$. Assim, um subgrafo gerador seria aquele obtido pela remoção de uma ou mais arestas de um grafo, assim dizemos que este novo grafo obtido é gerador do primeiro.

A **vizinhança** de um vértice v , denotada por $Ng(V)$, é o conjunto de todos os vértices adjacentes v em G . Com isso, buscamos por denotar: $NG(v) = \{w \in V; vw \in E(G)\}$

O **grau de um vértice** v , denotado por $d(v)$, é o número de arestas que incidem no vértice, ou seja, a quantidade de vizinhos do mesmo por isso; $d(v) = |N(v)|$.

No caso de multigrafos com laços, cada laço incidente ao vértice contribui com duas unidades para o grau de v . Por conta da cardinalidade, obviamente em um grafo G qualquer irá conter um menor e maior grau e para esses graus mínimos e máximos, respectivamente utilizamos a notação:

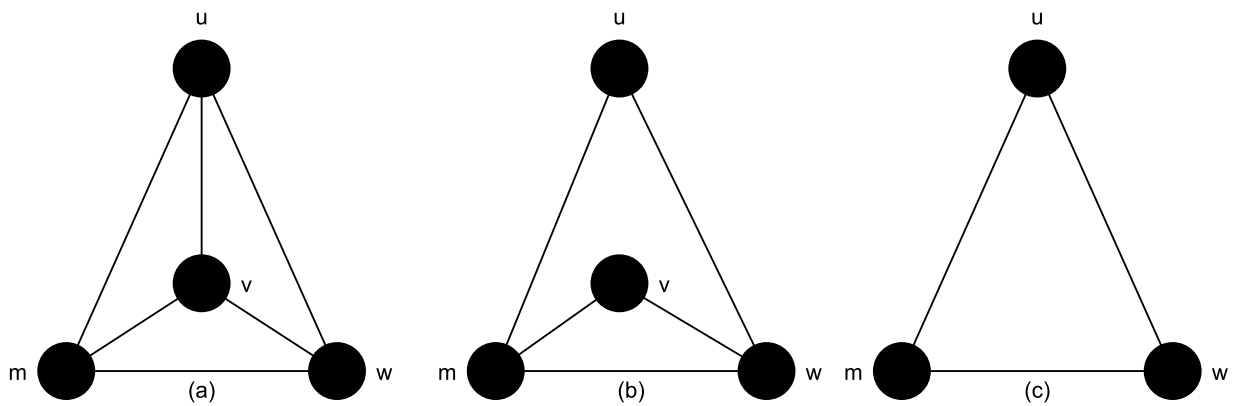
$$\begin{aligned} \delta &= \min\{d(u) \mid u \in V(G)\}. \\ \Delta &= \max\{d(u) \mid u \in V(G)\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Um **passeio** em um grafo G é uma sequência de vértices v_0, v_1, \dots, v_k ; tais que $v_i v_{i+1} \in E(G)$, para $0 \leq i \leq k$ com isso um, passeio é uma sequência de vértices adjacentes o definimos com W_k referente a língua inglesa “walk” quando esse passeio não repetir vértices o chamamos de **caminho**, quando esse passeio não repetir arestas, ou seja, não passar pelas mesmas arestas o chamamos de **trilha**. Uma **corda** em um grafo é uma aresta que conecta dois vértices não consecutivos, para “encurtar” esse passeio.

Um **ciclo** é um caminho em que suas extremidades coincidem, ou seja, $v_0 = v_k$. Se um grafo não contiver em um ciclo ou caminho uma corda, os denominamos de induzido. Utilizaremos bastante desses conceitos para determinarmos de que família/classe aquele determinado grafo pertence por exemplo, iremos trabalhar com grafos hamiltonianos, onde for possível passear por um caminho em todos os vértices, ele irá pertencer a essa classe. Se caso esse caminho se feche com um ciclo, o chamamos de **ciclo hamiltoniano**. Com isso, um grafo é dito **acíclico** se ele não possui um ciclo, utilizaremos bastante a notação P_n para um caminho com n vértices. Um grafo é **conexo** se existir um caminho para quaisquer dois de seus vértices. Caso contrário será desconexo. O comprimento de um grafo, é o número de arestas de arestas desse caminho, utilizaremos esse conceito quando relatarmos de convexidade de grafos pois, o menor comprimento de um grafo é chamado de **geodésico** ou **geodésica**. Com isso, uma **clique**

é um subconjunto de vértices de um grafo, onde quaisquer dois vértices são sempre adjacentes, a clique é fundamental para o estudo de diversas propriedades dentro de grafos, incluindo as principais classes que abordaremos ao decorrer deste trabalho. Portanto, esses são os principais conceitos dentro de grafos, para nos aprofundarmos e aplicarmos os conceitos que vimos, iremos abordar as classes de grafos, suas definições, teoremas de caracterização suas aplicabilidades e explorarmos os seus algoritmos de reconhecimento, abordando de maneira clara, explicitamente no trabalho [4] demonstrada na Figura 2.

Figura 2. Grafo G , grafo $G - uv$ e Grafo $G - v$



Fonte: Imagem Autoral

3 COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL

“Para quem tem fé, nenhuma explicação é necessária; para quem não tem, nenhuma explicação é possível.”

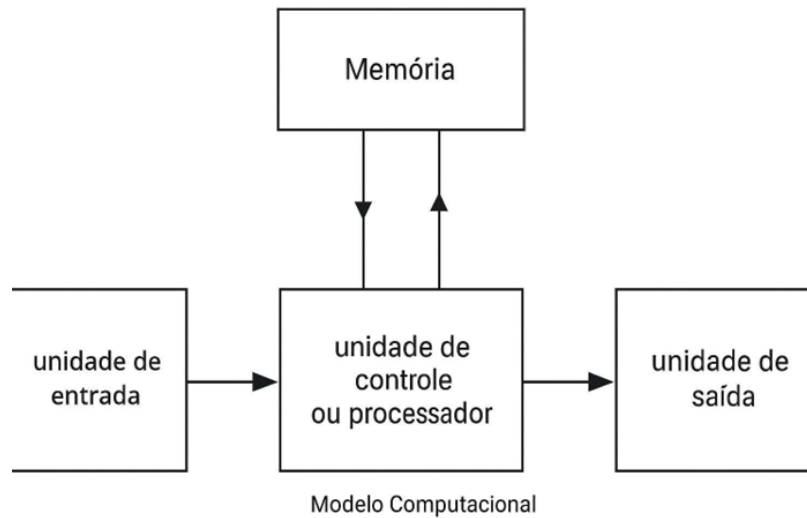
São Tomás de Aquino

Neste capítulo, abordaremos a complexidade computacional em grafos, este seria um ramo da teoria da computação onde nos preocupamos em analisar a eficiência dos algoritmos, bem como classificar problemas, em outras palavras, seria analisarmos o quão eficiente tal algoritmo, que busca resolver determinado problema, será no processo da busca daquela solução. Esta área de suma importância ao desenvolvimento tanto da computação, quanto relacionarmos tais algoritmos aplicados em teoria dos grafos que abordamos nos capítulos anteriores. Além de seus inúmeros problemas, que a depender de certas circunstâncias, mesmo com a tão avançada computação que temos atualmente, em determinados problemas esta resposta do algoritmo pode levar um tempo exorbitante para a sua solução, se de fato ela existir. Para padronizar tais problemas, e facilitar a “mensurar” a eficiência destes algoritmos, ao buscarem classificar os que demanda um tempo de solução limitado por uma curva de polinômio na sua função de entrada, estes são chamados de *algoritmos eficientes* pelo ponto de vista computacional, e por sua vez, os problemas que possuem estes algoritmos eficientes os chamamos de *problemas tratáveis*.

Introduzindo o conceito de algoritmo quando abordamos a complexidade clássica. Informalmente, um algoritmo é qualquer procedimento computacional bem definido que toma algum valor ou conjunto de valores como a sua função de entrada e produz um certo valor em sua função de saída. Portanto, um algoritmo é uma sequência de etapas computacionais que transformam a função de entrada na sua saída. Com isso, utilizamos como ferramenta para resolver problemas computacionais bem especificados. Evidenciamos, que na realidade nem todos os problemas computacionais são tratáveis, para muitos destes problemas que iremos abordar os algoritmos exigem um tempo de execução inadmissíveis no tamanho de entrada, para encontrar a solução do problema cresce exponencialmente conforme a entrada do problema.

De início, os estudos primordiais da área os critérios de medida da eficiência, seriam em gerais empíricos, principalmente ao tratarmos do tempo, um algoritmo era descrito e implementado. Com isso, um programa implementando o algoritmo era executado em computador, para alguns conjuntos de dados de entrada diferentes. Para cada execução media-se o tempo correspondente. Ao final da experiência eram obtidas algumas curvas. Uma possível representação apresentado por [5] seria a do modelo RAM (Random access machine). Onde como demonstrado na Figura 3 seria composta de uma unidade de entrada e de saída, memória e processador. O funcionamento de uma RAM é semelhante ao de um computador hipotético. O processador

Figura 3. Um modelo Computacional representando o funcionamento de uma RAM



Fonte: Imagem Autoral

dispõe de instruções que podem ser executadas. A memória armazena os dados e o programa. Este último consiste em um conjunto de instruções que implementa o algoritmo. Cada instrução I do modelo possui um tempo de instrução $t(I)$. Assim sendo, se para a execução de um programa P , para uma certa entrada fixa, são processadas r_1 instruções do tipo I_1 , r_2 . A complexidade computacional, também busca classificar os problemas via execução dos algoritmos, dividindo-se em duas classes. Os algoritmos com tempos de execução aceitáveis, e a outra classe em que não se tem conhecimentos da existência de algoritmos com tempo de execuções tratáveis, onde abordaremos resumidamente neste capítulo. Baseando nos textos abordados excelentemente pelos [6], [7], [8], apresentaremos as definições básicas que será aos que iremos explorar ao longo deste trabalho.

Um *problema computacional* Π é composto por um problema a ser resolvido, envolvendo uma ou mais variáveis da sua função entrada. Uma instância de Π é um conjunto particular de valores assumidos pelas variáveis da função de entrada do problema Π . Um problema Π é dito problema de decisão, se Π admite como possíveis respostas apenas *SIM* ou *NÃO*. Portanto, o *problema de decisão* é composto por uma descrição geral, cujas possíveis respostas são sim ou não. Considerando tal problema Π com um conjunto de instâncias I_Π , podemos observar a partição de I_Π em dois subconjuntos S_Π e N_Π , respectivamente os conjuntos de instancias das respostas sim ou não do problema abordado. ou seja, $N_\Pi = I_\Pi \setminus S_\Pi$. Formalmente temos:

$$I_\Pi = S_\Pi \cup N_\Pi \quad \text{e} \quad I_\Pi = S_\Pi \cap N_\Pi = \emptyset \quad [3.1]$$

Com isso, um algoritmo A aplicado ao problema de Π é uma sequência de instruções aplicada a quaisquer instancias $x \in I_\Pi$ produzindo uma solução y do problema associada, utilizando um exemplo para a verificação da conexidade de um grafo;

Exemplo. Para o problema “grafo é conexo?”, podemos considerar o seguinte algoritmo:

Algoritmo $A(x)$:Executar uma busca em profundidade (DFS)

- *Se todos os vértices foram visitados, retornar **SIM**; caso contrário, **NÃO***

Dizemos que A seria um algoritmo determinístico para Π se dada qualquer instância $x \in I_{\Pi}$ em que $A(x)$ realizar sempre a mesma seqüências de passos e produz a mesma solução para a instância X . De outra maneira, quando sucessivas seqüência de passos do algoritmo A a uma mesma instancia X , produzirem soluções distintas, diremos que A é um algoritmo randomizado.

3.1 PROBLEMAS NP-COMPLETOS

Como evidenciado anteriormente, de um modo geral pode ser caracterizado por um conjunto de todos os possíveis dados do problema. Resolver o problema P consiste em desenvolver um algoritmo cuja entrada é composta por dados específicos do problema o que chamamos de *instâncias*. O critério seguinte, evidencia a procurar responder sobre esta nova questão, como demonstrado, um algoritmo é eficiente quando a sua complexidade for um *polinômio* no tamanho de sua entrada. Esta classificação certamente não é absoluta. De fato, pode ser até insatisfatória, por vezes. Contudo é aceitável para a grande maioria dos casos. Considere a coleção de todos os algoritmos que resolvem um certo problema P . O interesse é conhecer se nessa coleção existe algum que seja eficiente, isto é, de *complexidade polinomial*. Se existir tal algoritmo, o problema P será denominado tratável, e intratável caso contrário. Por exemplo como evidenciado em [9]

Exemplo. Dados: *Um grafo G e um inteiro $k > 0$*

- **Objetivo:** *Elaborar um algoritmo para encontrar em G , se existir uma clique de tamanho maior do que k*
- **Conjunto de dados:** *Conjunto de todos os pontos (G, k) onde G é grafo arbitrário e k é um inteiro positivo arbitrário.*
- **Instância do problema:** *Um par específico (G, k) .*
- **Solução:** *Um subgrafo completo de G com k ou mais vértices, se existir, é uma solução do problema. Evidenciando e compilando os principais problemas algoritmos abordados na literatura temos estes três:*
- **Problemas de Decisão:** *Existe uma estrutura S que satisfaça às propriedades do problema P ?*
- **Objetivo:** *decidir pela resposta Sim ou Não, à questão acima;*
- **Problemas de Localização:** *Encontrar uma estrutura S que satisfaça às propriedades de P ?*

- **Objetivo:** localizar certa estrutura S que satisfaça à um conjunto de propriedades dadas;
- **Problemas de Otimização:** Encontrar uma estrutura S que satisfaça alguns parâmetros de otimização.
- **Objetivo:** verificar se as propriedades a que S deve satisfazer envolvem critérios de otimização.

Tomando por definição, aos problemas de decisão, que serão de suma importância para os entendimentos da classe NP e por sua famosa questão $P = NP$, um dos mais clássicos problemas computacionais de toda a complexidade:

Um problema de decisão é denominado não determinístico polinomial quando, para qualquer instância cuja resposta seja SIM, existe um certificado (ou evidência) que pode ser verificado de forma eficiente, isto é, em tempo polinomial. Em outras palavras, sempre que uma solução afirmativa é apresentada, é possível confirmar sua validade rapidamente utilizando um procedimento de verificação. Esses tipos de problemas compõem a classe de complexidade NP (*Non-deterministic Polynomial time*). Assim, enquanto a classe P agrupa os problemas que podem ser resolvidos integralmente em tempo polinomial, a classe NP engloba aqueles para os quais a verificação de uma solução positiva pode ser feita em tempo polinomial, ainda que encontrar tal solução possa ser mais difícil. Ao abordar um problema computacional, busca-se primeiramente um algoritmo eficiente, ou seja, um método que encontre o resultado desejado em tempo razoável, sem demandar um tempo de execução excessivo quando implementado em um computador.

Por volta do início da década de 1970, foi demonstrado um teorema fundamental que estabeleceu as bases da teoria da complexidade computacional moderna. Em 1971, o pesquisador Stephen Cook apresentou um resultado notável, conhecido como o Teorema de Cook-Levin, que deu origem ao conceito de problemas NP -completos. Esse teorema demonstrou que existe pelo menos um problema dentro da classe NP cuja solução é tão difícil quanto qualquer outro problema pertencente à mesma classe. Em outras palavras, se for encontrado um algoritmo polinomial para resolver esse problema específico, então todos os problemas da classe NP também poderiam ser resolvidos em tempo polinomial. O problema utilizado por Cook em sua demonstração foi o *Problema da Satisfatibilidade Booleana (SAT)*, que consiste em determinar se existe uma atribuição de valores verdadeiro ou falso às variáveis de uma fórmula lógica que a torne verdadeira.

A partir desse resultado, muitos outros problemas foram classificados como NP – completos, através de *reduções polinomiais*, isto é, transformações que convertem uma instância de um problema em outra, preservando a resposta e garantindo que o processo ocorra em tempo polinomial. Com isso, estabeleceu-se uma das maiores questões da computação teórica: o $P = NP$, que pergunta se todo problema cuja solução pode ser verificada rapidamente (NP)

também pode ser resolvido rapidamente (P). Até hoje, não se conhece uma resposta definitiva para tal problema.

Definição 3.1.1. (*Problemas de Otimização:*) [10] Consideremos um problema combinatório A com uma instância x_A e um conjunto $S_A(x_A)$ de soluções viáveis do problema para essa instância. O custo $c_A(x_A, s)$ de uma solução viável s associada à instância x_A é um número inteiro não negativo. Por exemplo, no caso de *simple max cut*, o custo de uma solução é dado pelo número de arestas presentes no corte obtido. Uma solução ótima $OPT_A(x_A)$ de um problema de maximização (minimização) A com relação a uma instância x_A é uma solução viável de A cujo custo é o máximo (mínimo) possível no conjunto de soluções viáveis $S_A(x_A)$.

Teorema 3.1.1. (*Teorema de Cook-Levin-1971*). O problema da Satisfatibilidade booleana é NP-completo.

O problema da satisfatibilidade booleana (SAT) pergunta, dada uma fórmula booleana, se existem atribuições de Verdadeiro/Falso às suas variáveis que fazem a fórmula avaliar para VERDADEIRO. Em termos práticos, uma fórmula pode ser vista como uma combinação lógica de variáveis usando operadores como E (*conjunção*), OU (*disjunção*) e NO (*negação*). Em 1972, Richard Karp aproveitou o teorema de Cook e publica o trabalho [11] onde mostrou que várias dezenas de problemas naturais e clássicos das áreas de combinatória, grafos e lógica são NP-completos também, isto é, ele construiu reduções polinomiais do SAT (ou de outros problemas já conhecidos NP-completos) para esses problemas. Foram mostrados como tendo exatamente a mesma “dureza” computacional: se um deles tivesse algoritmo polinomial, todos teriam. Esse trabalho tornou palpável a noção de uma grande família de problemas que, do ponto de vista algorítmico, comportam-se como “o mesmo problema”. Ou seja, do ponto de vista computacional, o problema da Satisfatibilidade booleana e o problema da clique são, exatamente, o mesmo problema, pois se alguém conseguir resolver um destes problemas, então conseguirá resolver o outro problema também. O mecanismo que Karp nos introduz para o mapeamento da Satisfatibilidade do teorema de Cook-Levin é a chamada de redução ou transformação polinomial, se este mapeamento for estabelecido utilizando a redução polinomial, prova-se que são exatamente o mesmo do ponto de vista computacional e dizemos que esses problemas têm a mesma complexidade.

Definição 3.1.2 (12). Sejam $\Pi_1 = (D_1, Q_1)$ e $\Pi_2 = (D_2, Q_2)$ dois problemas de decisão. Uma transformação polinomial do problema Π_1 no problema Π_2 é uma função

$$\Phi : D_1 \longrightarrow D_2, \quad [3.2]$$

tal que:

1. A imagem $\Phi(D_1)$ é construída em tempo polinomial;

2. Para toda instância $I \in D_1$, temos que I produz resposta SIM para Π_1 se, e somente se, $\Phi(I)$ produzir resposta SIM para Π_2 .

Definição 3.1.3 (12). Um problema computacional Π é chamado de NP-completo quando são satisfeitas as seguintes condições:

1. $\Pi \in NP$;
2. Para todo problema computacional $\Pi' \in NP$, existe uma transformação polinomial de Π' em Π .

Caso apenas a condição (2) da Definição 3.1.3 seja verificada, dizemos que o problema Π é NP-difícil 10.

3.2 Representação Computacional de Grafos

Ao apresentarmos os conceitos de complexidade, retratando os problemas *NP*, e a classe de problemas *NP-completo*, indaga-se como conseguimos conciliar tais informações pela representação computadorizada. Quando se trabalha com teoria dos grafos, é eficiente escolhermos uma representação conveniente, neste capítulo abordaremos brevemente, como representarmos grafos de maneiras diferentes, ao abordamos os conceitos básicos da teoria anteriormente, enunciemos que grafos não seria em suma, *uma representação geométrica*, ou seja, o mesmo grafo teria inúmeras formas a ser representada. Uma das formas de representar um grafo sem arestas múltiplas é listar todas as arestas desse grafo. Outra forma é por meio de listas de adjacência, na qual especificam os vértices que são adjacentes a cada vértice do grafo.

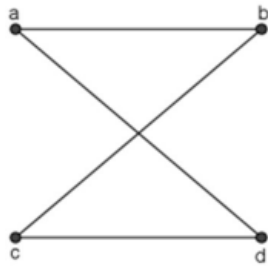
3.2.1 Matriz de Adjacência

A matriz de adjacência é uma das formas mais clássicas e fundamentais de representar um grafo. Ela traduz toda a estrutura de conectividade entre vértices em uma tabela (matriz), tornando o grafo acessível a operações matemáticas e computacionais. Assim como demonstrado em [13], Seja $G(V, E)$ um grafo simples que em $|V| = n$ e supondo que os vértices de G sejam listados por v_1, v_2, \dots, v_n , a matriz de adjacência A é uma matriz de ordem n , com (i, j) igual a 1 quando v_i e v_j forem adjacentes e igual a 0 quando (i, j) não forem adjacentes. A matriz $A \in \{0, 1\}^{n \times n}$ é definida por:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in E, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad [3.3]$$

Para grafos dirigidos, $A_{ij} = 1$ significa que há uma aresta $v_i \rightarrow v_j$. Em grafos ponderados, usa-se o peso w_{ij} no lugar de 1 (ou $0/\infty$, conforme a convenção). Como descrita na figura 4 por

Figura 4. Um Grafo G e a sua matriz de adjacência associada.



	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	1	0	1	0
c	0	1	0	1
d	1	0	1	0

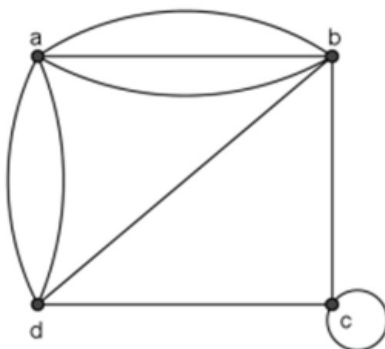
Fonte: Souza (2013)

[13] Em grafos não direcionados, A é simétrica, pois se existe uma aresta entre v_i e v_j , então também existe entre v_i e v_j . Em grafos direcionados, A não é necessariamente simétrica, pois a aresta pode existir em apenas um sentido. A matriz de adjacência pode ser entendida como uma tabela de acessos diretos:

- As linhas representam os vértices de origem.
- As colunas representam os vértices de destino.

O valor 1 indica que há uma conexão (aresta) entre os dois vértices. Uma das vantagens da matriz de adjacência é permitir análises algébricas e combinatórias sobre o grafo. A matriz A^k : O elemento $(A^k)_{ij}$ indica o número de caminhos de comprimento k que ligam o vértice v_i ao vértice v_j . Conseguimos identificar bastante de sua utilidade em teoria espectral de grafos, redes neurais gráficas e análise de conectividade. A Matriz de adjacência também pode representar grafos não orientados com laços e arestas múltiplas, conceitos abordados previamente temos então um laço em um vértice a_i é representado por 1 na posição (i, i) . Na posição (i, j) , será representado por 2 se duas arestas ligam os vértices a_i e a_j desta matriz, ou melhor, será igual a n , se n arestas ligam os vértices a_i e a_j desta matriz. Como representa a figura abaixo 5 por [13]

Figura 5. Um Multigrafo G e a sua matriz de adjacência associada



	a	b	c	d
a	0	3	0	2
b	3	0	1	1
c	0	1	1	1
d	2	1	1	0

Fonte: Souza (2013)

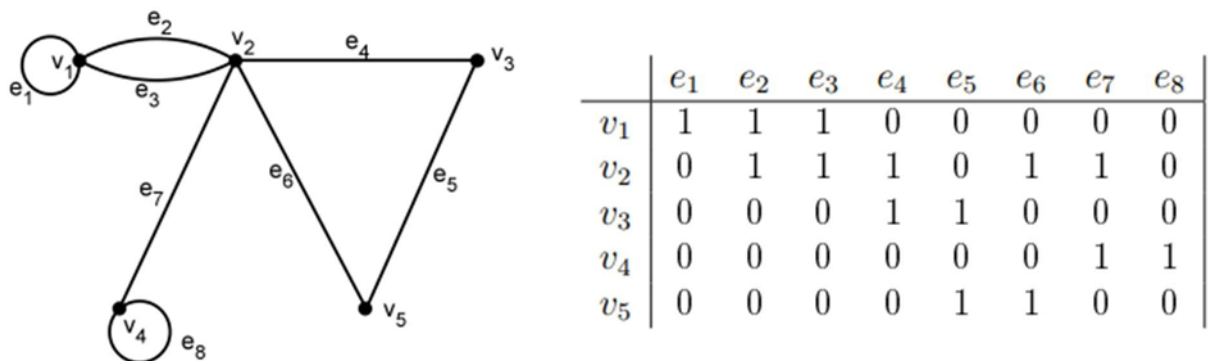
3.2.2 Matriz de Incidência

Contudo, temos por uma outra forma de representação de grafos via matriz, seria a de *incidência*. Seja $G = (V, E)$ de n vértices e m – *arestas*, um grafo não orientado seguindo uma sequência de vértices e de arestas, respectivamente $v_1, v_2, \dots, v_n, e_1, e_2, \dots, e_m$. Em G então a matriz de incidência em relação a esta ordem de V e E seria $M = [m_{ij}]$ em que:

$$m_{ij} \begin{cases} 1, & \text{quando } e_j \text{ for incidente } v_i \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad [3.4]$$

Matrizes de incidência também podem ser usadas para representar grafos com *arestas múltiplas e laços*. As arestas múltiplas são representadas na matriz de incidência usando colunas como elementos idênticos, pois estas arestas são incidentes ao mesmo par de vértices. Os laços são representados usando uma coluna com exatamente um elemento igual a 1, correspondendo ao vértice que é incidente deste laço, assim como caracterizado no trabalho, [13] e demonstra a figura 6.

Figura 6. Um Multigrafo G e a sua matriz de incidência associada



Fonte: Souza (2013)

Temos por utilizar esta representação quando nos depararmos com os seguintes critérios:

- O grafo for **pequeno ou moderado**.
- Para analisar **relações vértice-aresta**.
- Estiver resolvendo problemas de **fluxo, corte** ou **tensão**.

Seguindo os mesmos modelos, quando nos depararmos com grafos seguindo estas características, a matriz de incidência se mostra ineficiente:

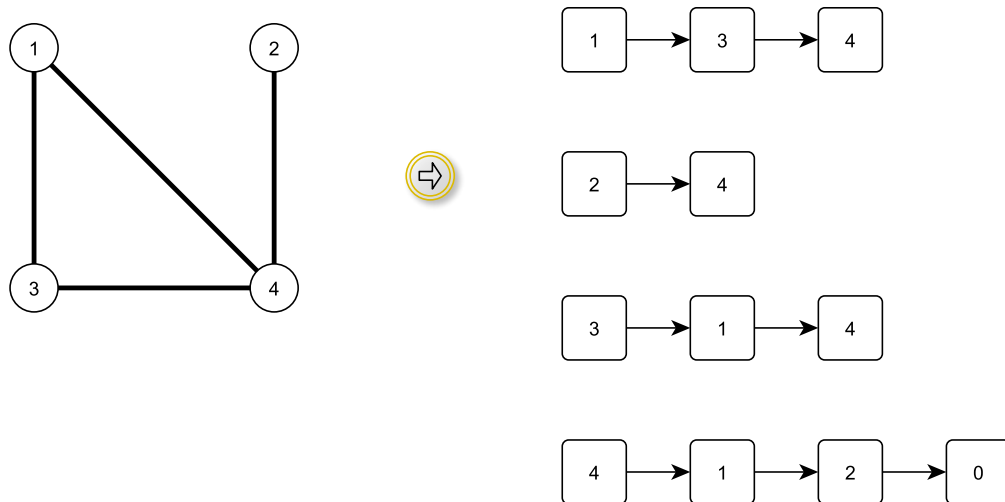
- O grafo for muito grande e esparso,
- Você precisar apenas de buscas locais (nesse caso, use **listas de adjacência**).

3.2.3 Listas de Adjacências.

Uma lista de adjacências é uma estrutura de dados eficiente para representar grafos $G(V, E)$, onde V é o conjunto de vértices e E o conjunto de arestas. Nessa representação, utilizamos um vetor A_{dj} de tamanho $n = |V|$, de modo que cada posição do vetor corresponde a um vértice do grafo. Para cada vértice v , a posição $A_{dj}[v]$ contém uma lista (geralmente encadeada) com todos os vértices que são vizinhos de v , ou seja, aqueles que estão diretamente conectados a v por uma aresta. Essa estrutura permite percorrer rapidamente todos os vizinhos de um vértice, tornando operações como busca e iteração mais eficientes do que outras representações, como a matriz de adjacência, especialmente quando o grafo é esparsa, formalmente representada:

$$L(v_i) = \{v_j, (v_i, v_j) \in E\} \quad [3.5]$$

Figura 7. Um Grafo G não direcionado e sua representação por lista de adjacências



Fonte: Imagem Autoral

A lista de adjacência consiste em n elementos (*vértices*) contendo $2m$ elementos, onde m é o número de arestas do grafo. O espaço utilizado pela lista é da ordem de $O(n + m)$. Temos por utilizar esta representação quando nos depararmos com os seguintes critérios:

- Grafos grandes e esparsos;
- Implementações de algoritmos de busca (**BFS**, **DFS**);
- Aplicações em que as arestas são frequentemente percorridas. Seguindo os mesmos modelos, quando nos depararmos com grafos seguindo estas características, as Listas de adjacências se mostra ineficiente:
- Você precisa verificar adjacência entre vértices rapidamente;
- O grafo for extremamente denso.

4 CLASSES DE GRAFOS

"A fé é acreditar naquilo que você ainda não vê; a recompensa dessa fé é ver aquilo em que você acredita."

Santo Agostinho

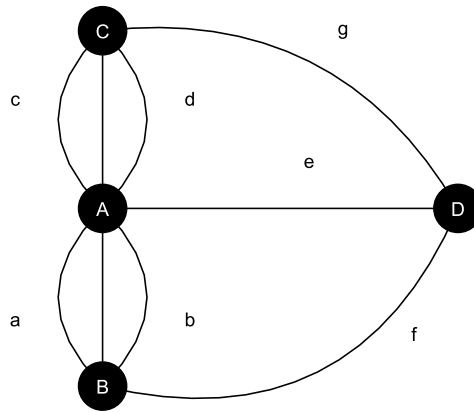
Uma classe de grafos é um agrupamento de grafos que compartilham características semelhantes, que acaba representando cada grafo no seu conjunto, quando dois ou mais grafos apresentam particularidades entre si dizemos que eles pertencem à mesma família de grafos. Para mais acessível o entendimento e desenvolvimento, buscamos por sempre classificar seus elementos por alguma propriedade em comum para efetuar uma análise aprofundada, com grafos não é diferente. Estudando determinadas semelhanças em grafos classificamos e caracterizamos grafos com propriedades semelhantes, regidas por teoremas de caracterização, e se de fato atenderem as particularidades daquela família, prova-se que aquele grafo pertence a ela. Diferentes representações de grafos, pode pertencer a mesma classe, que são regidas pelos mesmos teoremas. Com isso, se tornando mais indubitável a análise em si. Não podemos deixar de mencionar, que vários grafos possuem o seu reconhecimento, ou seja, um algoritmo. O procedimento que assegura se determinado grafo pertence a aquela classe ou não, iremos explorar alguns dos mais conhecidos e importantes algoritmos da área, entretanto isso trata-se intrinsecamente do campo de complexidade computacional, onde os devotos da área, buscando reconhecer, explorar e mostrar algoritmos de reconhecimento eficientes/ou não para determinada classe. Para explorar uma leitura mais aprofundada nas principais classes temos de referencial [14], agora iremos explorar as principais classes, e seus teoremas de caracterização.

4.1 Grafos Eulerianos

Para qualquer pioneiro em estudos é essencial, o estudo dentro desta classe. A mesma é de suma importância, ela foi a principal precursora de toda as outras. A que de fato foi um marco para a história do desenvolvimento na combinatória. Elaborada por Euler (1707- 1783), no ano de 1736 na cidade de Königsberg atual Prússia, Euler solucionou um problema extremamente intrigante para a época, onde de fato foi o primeiro a fazer-lo, havia na cidade duas ilhas que se conectavam entre si com as outras partes através de sete pontes. O problema da época indagava-se se será possível, atravessar toda a cidade uma única vez, utilizando as sete pontes apenas uma vez. Euler foi a primeiro a conseguir dar uma resposta de fato para esse problema, e comprovou que não era possível. Euler modulou as partes de terra e as pontes, através de grafos e que seria possível realizar o percurso se existissem zero ou dois com uma quantidade ímpar de arestas entre eles. O Objetivo era se caso uma pessoa que estivesse em qualquer região da cidade (A, B,

C, D) pudesse atravessar ela uma única vez, sem repetir qualquer uma das pontes. No caso de grafos, repetir as arestas, e voltar ao ponto de partida. Euler, por representar a ponte em uma

Figura 8. Pontes de Königsberg em representação de Grafos



Fonte: Imagem Autoral

representação de grafos utilizou artifícios em que nenhum outro pensara antes. Por exemplo a ilha C um circuito qualquer deve chegar e sair dela o mesmo número de vezes. Intuitivamente, comprova-se que para que exista um circuito Euleriano, deve haver um número par de pontes com extremidades em cada ilha. Assim, formulou um dos principais teoremas de toda a área. Onde de fato pode comprovar que o problema das pontes de Königsberg era impossível, data-se por:

Teorema 4.1.1. *Um grafo conexo G . G é euleriano se, somente se, cada vértice de G é par*

Demonstração. [15] (\Rightarrow) Seja $G = (V, E)$ um grafo euleriano e seja T uma trilha euleriana fechada em G . Se T passa por um vértice v , então, por ser trilha fechada, cada entrada em v é acompanhada de uma saída; assim, T contribui com um número par de arestas incidentes em v . Como cada aresta de G é percorrida exatamente uma vez em T , segue que todo vértice de G tem grau par. Portanto, em todo grafo euleriano, todos os vértices têm grau par.

(\Leftarrow) Suponha que G é grafo conexo e tal que todos os seus vértices têm grau par. Vamos mostrar que G é euleriano por indução na quantidade de suas arestas. Se $|E| = 0$, então G é grafo nulo (só possui vértices) e, portanto, é euleriano no sentido de que não há arestas a serem atravessadas. Vamos supor, então, que G possui pelo menos uma aresta. Como G é conexo e todo vértice tem grau par, o grau de cada vértice é pelo menos igual a dois, ou seja, o grafo G possui pelo menos uma trilha fechada. Seja $C = (V, E^*)$ a trilha fechada de G com maior comprimento. Vamos então mostrar que a trilha C contém todas as arestas de G ($E = E^*$). Para isso, suponha, por absurdo, que C não contém todas as arestas de G e seja $\{e\}$ uma aresta que pertence a G mas não está na trilha C , isto é: $\{e\} \in (E(G) - E(C) = E(G) - E^*)$. Seja G^* a componente conexa de G que possui todas as arestas de $E(G) - E^*$, ou seja, que contém a aresta $\{e\}$. Como C é uma trilha fechada, todo vértice de G^* tem grau par. Assim, todo vértice

de G^* tem grau par. Por hipótese de indução, G^* é grafo euleriano. Seja C^* uma trilha euleriana em G^* . Como G é conexo, existe pelos menos um vértice v em $V(C) \cap V(C^*)$. Assim, $C \cup C^*$ é uma trilha fechada em G e de comprimento maior do que o comprimento de C , o que contraria a escolha de C como sendo de maior comprimento. Daí, a trilha C contém todas as arestas de G e, portanto, G é grafo euleriano. \square

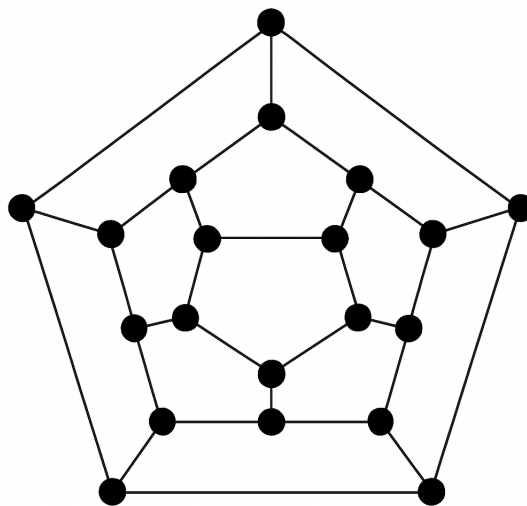
Corolário 4.1.1. [15] *Um grafo conexo tem uma trilha euleriana, se e somente se, ele possui, no Máximo, dois vértices de grau ímpar*

Com os Teoremas enunciados e abordado por Euler, ele foi o primeiro matemático a dar uma resposta para tal problema das pontes, foi se então dado o estopim da construção e elaboração de estudos mais avançados dentro da área, além da aplicação de algoritmos que discutimos em capítulos anteriores para a junção da relação dos grafos com a computação.

4.2 Grafos Hamiltonianos

Outra classe de suma importância para o desenvolvimento da pesquisa em grafos, e utilizado até os dias atuais como objeto de estudo, a primeira vista comparamos bastante com conceitos euleriano, entretanto a classes de grafos hamiltonianos escala em termos muito mais complexos, onde muitas das vezes não conseguiremos entregar uma resposta satisfatória, ou sequer que exista. Conforme [7], em 1856 o matemático William Hamilton (1805-1865) inventou um jogo chamado “The Icosian Game” com um enigma envolvendo um dodecaedro, com cada um de seus 20 vértices nomeados nomes de cidades, o objetivo do jogo era utilizar as 30 arestas do dodecaedro, passar por cada uma das cidades uma única vez, onde começava-se e terminava na mesma cidade. Assim como o problema das pontes, buscamos sempre relacionar

Figura 9. Um grafo associado de um dodecaedro



Fonte: Imagem Autoral

suas representações com grafos, entretanto diferentemente do problema das pontes, onde o objetivo era passar por todas as regiões da ponte sem repetir uma única aresta. Nesta classe, a verificação será muita mais complexa para identificarmos. Apesar de serem estudados a vários séculos, não há uma boa caracterização dos grafos hamiltonianos. Ressalta-se que a caracterização geral dos hamiltonianos ainda não foi encontrada, mesmo com a modernização da computação atual, parece bem improvável que seja encontrada. O problema possui uma assimetria fundamental, ou seja, se torna fácil ser convencido de que tal grafo apresenta um circuito hamiltoniano. No entanto torna-se complicadíssimo ser convencido de que tal circuito não existe em tal grafo.

Definição 4.2.1. [16] *Um caminho que contém todos os vértices de um grafo G é dito caminho Hamiltoniano de G . Contudo, um ciclo que contém todos os vértices de G , recebe-se o nome de ciclo hamiltoniano. Portanto, dizemos que G é um grafo Hamiltoniano.*

Diferentemente das *classes de grafos euleriano*, onde se conhece teoremas de caracterização, e algoritmos eficientes para a classe. Isso se torna bastante complexo ao relacionarmos aos Hamiltonianos, não se conhece um algoritmo eficiente para a verificação eficiente, entende-se por um número de passos que seja limitado por um polinômio no número de vértices dos grafos. Por conta da complexidade da classe, parece bem improvável, que tal algoritmo possa ser encontrado algum dia.

Corolário 4.2.1. [16] *Seja G um grafo de ordem n . Se $\delta(G) \geq \frac{n-1}{2}$, então G é conexo.*

Teorema 4.2.1. (Dirac) [17] *Seja G um grafo simples de ordem $n \geq 3$. Se $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, então G é Hamiltoniano.*

Demonstração. [17] (Contradição) Vamos supor que G não seja hamiltoniano. Seja $P = v_1v_2 \dots v_p$ um caminho de comprimento máximo em G , e portanto, todo vértice adjacente de v_1 e todo vértice adjacente de v_p estão em P ($g(v_1), g(v_p) \leq p - 1$). Como $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, os vértices v_1 e v_p têm no mínimo $n/2$ vizinhos em P . Afirmamos que deve existir algum índice j , $1 \leq j \leq p - 1$, tal que $v_j \in V(v_p)$ e $v_{j+1} \in V(v_1)$. Suponhamos que isso não ocorra; isto é, sempre que $v_j \in V(v_p)$ então $v_{j+1} \notin V(v_1)$. Assim, como $g(v_p) \geq \delta(G) \geq \frac{n}{2}$, temos:

$$g(v_1) \leq p - 1 - \frac{n}{2} < n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}, \quad [4.1]$$

o que contradiz a hipótese de que $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$. Agora, seja o ciclo

$$C = v_1v_2 \dots v_jv_pv_{p-1} \dots v_{j+1}v_1,$$

com os mesmos vértices de P , porém contendo as arestas adicionais v_jv_p e $v_{j+1}v_1$. Como G não é hamiltoniano, existe pelo menos um vértice w de G que não está em P . Mas, como $\delta(G) \geq \frac{n}{2} \geq \frac{n-1}{2}$, pelo Corolário 4.2.1, G é conexo e, portanto, w deve ser adjacente a algum vértice v_i de P . Tomando o caminho em G que começa em w , passa por v_i e continua no ciclo

C , obtemos um caminho mais longo que P , o que é um absurdo. Logo, não podemos ter G não hamiltoniano; portanto, G é hamiltoniano. \square

Teorema 4.2.2. (Ore) [7] *Seja G um grafo simples com n vértices, $n \geq 3$ e sejam u e v dois vértices não adjacentes em G tais que $d(u) + d(v) \geq n$. Então, G é hamiltoniano.*

Apresentando, dois principais Teoremas da classe que estabelecem condições necessárias, que permite decidir de forma não muito eficiente a existência de um ciclo hamiltoniano em dado grafo G . Com isso, modelando uma classe de suma importância para área e aprofundando ainda mais estudos na área de complexidade computacional, por desenvolver e pertencer a os principais problemas de *NP-Completeness*.

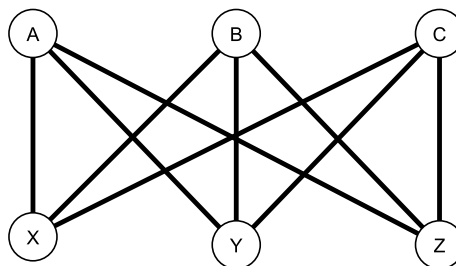
4.3 Grafos Planares

Abordando uma das classes mais evidentes pela literatura clássica, utilizando bastante conceitos, para desenvolvimento crucial da era que compartilhamos, desde a representação de projetos de circuitos eletrônicos, desenho de mapas e geografia e algoritmos e banco de dados.

Definição 4.3.1. [16] *Dizemos que um grafo G é planar se possui uma representação gráfica na qual quaisquer duas arestas se interceptam (possivelmente) apenas em vértices. Neste caso, temos uma representação planar.*

Podemos citar uma das representações por meio de problemas, mais evidentes nas referências, o Problema das três casas. Havendo três casas onde são fornecidas para elas, redes de esgoto, água e eletricidade seria possível fornecer os serviços, para as três casas sem que se cruzem? Podemos então, como de suma maioria, quando vamos tratar de problemas dentro da teoria dos grafos, utilizar a representação gráfica do problema.

Figura 10. Uma representação em Grafos do Problema das três casas



Fonte: Imagem Autoral

Na figura 10, representamos os vértices a, b, c pelas três casas e os vértices x, y, z pelas redes de transmissão, água, esgoto e eletricidade. O problema então trata da seguinte pergunta: seria possível, transmitir as três redes para as casas, sem que elas se cruzem? Para isso iremos definir conceitos que servirão de ferramentas para determinarmos e evidenciamos a classe.

Definição 4.3.2. [16] Um grafo G é bipartido se V pode ser particionado em dois conjuntos (não vazios) X e Y tais que toda aresta de G possui um vértice em X e o outro em Y . X e Y são chamados de conjunto partição.

Com isso na figura 10 conseguimos identificar duas partições $|X| = |Y| = 3$ onde denota-se por $K_{3,3}$ esse tipo de grafo.

Teorema 4.3.1. [16] Seja G um grafo com no mínimo dois vértices. G é bipartido se, e somente se, não contenha ciclos ímpares.

Demonstração. [16] Seja G um grafo bipartido com os conjuntos partição X e Y . Se G não possui ciclos, não temos o que provar. Seja então $C = v_1v_2 \dots v_k$ um ciclo de G , e sem perda de generalidade, assumiremos $v_1 \in X$. Assim, da definição de grafo bipartido, teremos $v_2 \in Y$, $v_3 \in X$, e assim sucessivamente, ou seja, $v_i \in X$ para todo i ímpar e $v_i \in Y$ para todo i par. Como v_k é adjacente a v_1 (pois C é um ciclo), k deve ser par e então C é um ciclo par. \square

Com isso, Leonard Euler em 1752 evidenciou uma relação entre o número de vértices, arestas e faces de um grafo planar. Sendo denominada Fórmula de Euler em sua homenagem, uma das mais clássicas da matemática, assim como nos grafos eulerianos, Euler demonstrou uma nova abordagem para os grafos em si, sendo de suma importância para as suas identificações e caracterização dentro da classe. Expressada por:

Teorema 4.3.2. *Fórmula de Euler:* Se G é um grafo planar conexo com n vértices, q arestas e f faces, então:

$$n - q + f = 2. \quad [4.2]$$

Demonstração. (Indução) Provaremos por indução no número de arestas de G . Se $q = 0$, então G deve ser um grafo nulo, e como G é conexo devemos ter $n = 1$ e assim $f = 1$. Portanto a fórmula é válida. Suponhamos o resultado válido para todo grafo planar conexo com $q - 1$ arestas. Seja G um grafo com q arestas. Caso G seja uma árvore, temos que $q = n - 1$, pois G possui n vértices. Como G não possui ciclos, $\pi - G$ é uma componente conexa, ou seja, G possui uma face. Assim, $n - q + f = n - (n - 1) + 1 = 2$, como queríamos. Caso G não seja uma árvore, considere C um ciclo em G e a uma aresta de C . Então o grafo $G - a$ é conexo, com n vértices, $q - 1$ arestas e $f - 1$ faces (pois ao removermos uma aresta de C , estamos unindo duas faces de G). Assim, aplicando a hipótese de indução em $G - a$, $2 = n - (q - 1) + (f - 1) \Rightarrow 2 = n - q + f$. \square

Por meio da fórmula de Euler, conseguimos explicar e denotar grafos planares e não planares, como evidenciado no Corolário

Corolário 4.3.1. O grafo $K_{3,3}$ é não planar.

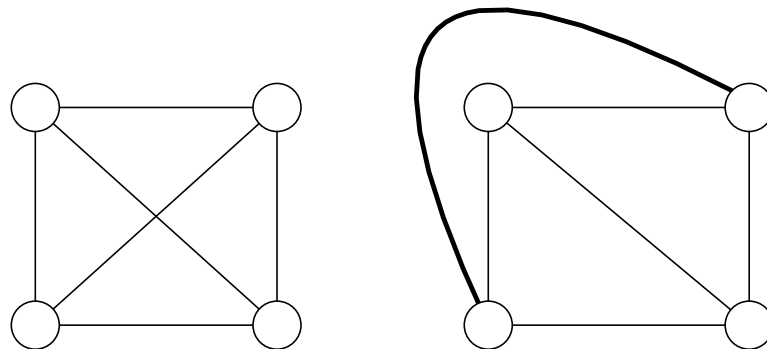
Demonstração. Suponha que $K_{3,3}$ seja planar. Como $n = 6$ e $q = 9$, a fórmula de Euler fornece $f = 5$. $C = \sum_f g(F) \leq 2q = 18$. Além disso, como não há triângulos em grafos bipartidos¹, cada face de $K_{3,3}$ tem no mínimo quatro arestas e assim $C \geq 4f = 20$. Em resumo, se $K_{3,3}$ for planar, teremos $C \leq 18$ e $C \geq 20$, que é obviamente impossível. Logo, $K_{3,3}$ é não planar. \square

O mesmo se aplica ao K_5 , utilizando os mesmos conceitos do corolário anterior, chegamos à mesma conclusão, com isso, séculos depois Kuratowski enuncia um dos Teoremas mais importantes da classe:

Teorema 4.3.3 (Kuratowski). *Um grafo G é planar se, e somente se, G não contém subgrafo homeomorfo ao $K_{3,3}$ ou K_5 .*

Com isso, dando uma caracterização de fato a classe, onde podemos ou não identificarmos um grafo planar sendo de fato, uma das classes mais utilizadas para aplicação de diversos circuitos modernos, a caracterização de fato tem uma suma importância para o reconhecimento da classe.

Figura 11. Um grafo G e sua representação planar.



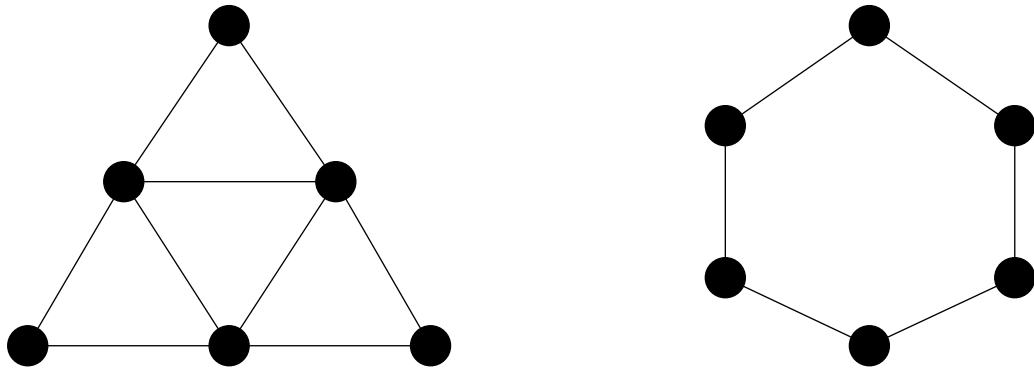
Fonte: Imagem Autoral

4.4 Grafos Cordais

Uma classe bastante explorada na literatura clássica, mesmo assim ainda produz fortíssimos, artigos e estudos bastantes complexos de maneira a conseguirmos aplicar bastante algoritmos polinomiais, tendo em vista que sua própria caracterização pode ser modelada, por um algoritmo polinomial, quanto podendo ser aplicada um determinado problema dentro da classe, para determinarmos a sua complexidade. Com isso, um *Grafo Cordal* ou em umas literaturas *triangularizado*, seria quando todo ciclo maior que três contiver uma corda em sua representação.

Verificamos, na Figura 12 a presença de um grafo de Hajós, e o grafo K_4 não cordal, pois a presença de um C_4 sem a presença de uma corda. Uma importante característica, dentro

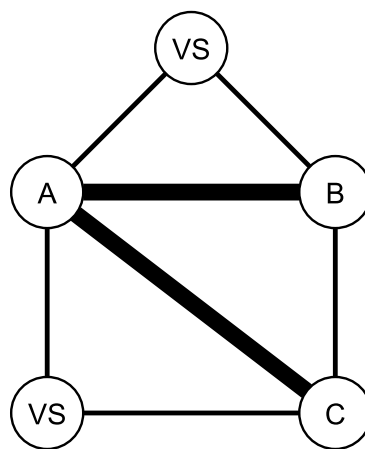
Figura 12. Um grafo Cordal (grafo de Hajós) e um grafo Não Cordal, respectivamente



Fonte: Imagem Autoral

dos cordais seria enunciar uma *hereditariedade* dentro da classe, ou seja, todo subgrafo induzido dentro de um cordal, também será cordal. Essa importante característica será de suma importância para o reconhecimento dela, tendo em vista a criação de um algoritmo linear para reconhecê-la. Podendo determinarmos de maneira linear um reconhecimento para os Cordais, através de um *Esquema de Eliminação Perfeita (EEP)*, para que possamos definir o *EEP* primeiro abordaremos o conceito de *vértice simplicial*. Um vértice $v \in V(G)$ é dito simplicial se $N(v)$ é um clique em G . Com isso, podemos afirmar que $N(v)$ é uma clique em G , observa-se que todo grafo completo denotado por K_n é simplicial, então um esquema de eliminação perfeito de um grafo seria uma ordenação (v_1, v_2, \dots, v_n) dos vértices do grafo de modo que cada vértice v_i é simplicial no subgrafo induzido pelos vértices v_1, \dots, v_n , ou seja, a sequência (v_1, v_2, \dots, v_n) é um esquema de eliminação perfeita se, para cada v_i , o subgrafo induzido por $N(v_i) \setminus \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ for completo, com o enunciado em [18]. Com esses conceitos enunciados

Figura 13. Representação de vértices simpliciais e suas $N(v)$ induzindo um K_2



Fonte: Imagem Autoral

partimos para o desenvolvimento do reconhecimento de tal classe, e seus principais teoremas de caracterização. Sendo abordados dois dos principais teoremas.

Corolário 4.4.1. *Se G é cordal, $|V| > 1$, então $G - v$ é cordal, $v \in V$*

Teorema 4.4.1. [18] *Seja G um grafo cordal. Se G é completo, qualquer um de seus vértices é simplicial. Senão existe um par de vértices simpliciais não adjacentes em G .*

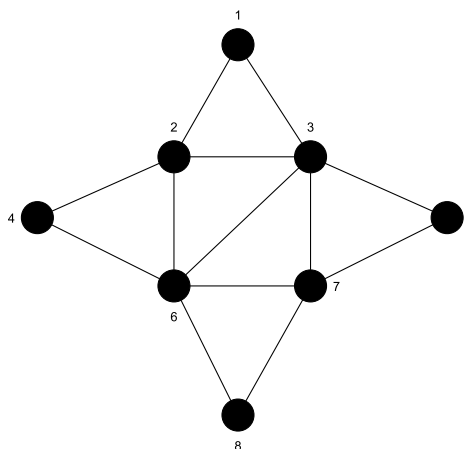
Demonstração. [18] (*Indução*) É trivial se G é completo. Assume que G tem dois vértices não adjacentes a e b e que o Corolário 4.4.1 é verdadeiro para todos os grafos com menos vértices que G . Sejam S um separador de vértices minimal para a e b com $G[A]$ e $G[B]$ as componentes de $G[V - S]$ contendo a e b respectivamente. Por indução, o subgrafo $G[A + S]$ tem dois vértices simpliciais não adjacentes. Um desses tem que estar em A , por conta de S induzir um subgrafo completo; ou $G[A + S]$ é mesmo completo e qualquer vértice de A simplicial em $G[A + S]$. Além disso, considerando o $N(A)$, o conjunto adjacências dos vértices em A , $N(A) \subseteq A + S$ então um vértice simplicial x em $G[A + S]$ é simplicial em todo G . Similarmente, B contém um vértice y simplicial de G . Assim, x e y são dois vértices não simpliciais e não adjacentes em G . \square

Teorema 4.4.2 (18). *Seja G é um grafo cordal se, e somente se, G admite um esquema de eliminação perfeito. Além disso, qualquer vértice simplicial pode iniciar um esquema perfeito.*

Demonstração. [18] \Rightarrow Se G é cordal, então ele tem um vértice simplicial, dito x . Sendo $G[v - x]$ também cordal e menor que G , ele tem, por indução, um esquema perfeito que, quando unido ao sufixo x , forma um esquema perfeito para G .

\Leftarrow Sejam C um ciclo de G e x um vértice de C de menor índice em um esquema perfeito. Como os vizinhos de x têm que formar uma clique devido à minimalidade de x e $N(x) \cap C > 2$, podemos garantir uma corda em C . \square

Figura 14. Ilustração de um grafo G que admite um esquema de eliminação perfeito



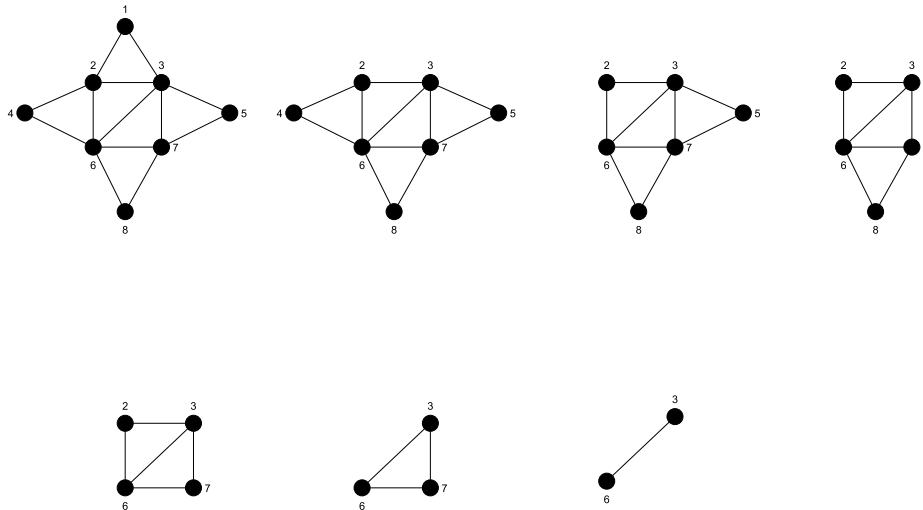
Fonte: Imagem Autoral

Observando então que cada vértice da ordenação induz uma clique sobre o formato que o sucedem nesta ordenação. Portanto, uma maneira eficiente de obter um EEP em um grafo

cordal é através da eliminação sucessiva de seus vértices simpliciais até que todos os vértices do grafo sejam esgotados, por conta da classe de grafos cordais ser hereditária, após a remoção dos vértices simpliciais v , o grafo G é atualizado para $G = G - \{v\}$. Caso de fato seja um cordal o processo termina quando todos os vértices são removidos, se caso ao final da eliminação obtivermos ainda um vértice restante, comprova-se que tal grafo não será cordal.

Uma aplicabilidade do EEP, além do reconhecimento da classe, seria a sua utilização para o encontrar cliques maximais de um grafo cordal em tempo polinomial, enquanto o mesmo problema seria NP-completo para grafos em geral. A Figura 15 ilustra o processo de remoção

Figura 15. Um esquema de Eliminação Perfeito Aplicado a um grafo G removendo os vértices Simpliciais



Fonte: Imagem Autoral

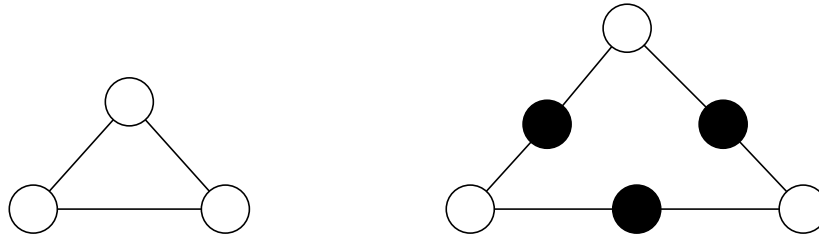
gradual dos vértices simpliciais, a partir do qual se obtém o Esquema de Eliminação Perfeita correspondente ao grafo G exibido na Figura 14. Para determinar um Esquema de Eliminação Perfeita em um grafo cordal, pode-se utilizar um algoritmo de complexidade linear composto por duas fases. Na primeira, aplica-se o método de Busca Lexicográfica ou o algoritmo MCS (maximum cardinality search) [19] para produzir uma ordenação dos vértices. Em seguida, na segunda fase, verifica-se se essa ordenação realmente constitui um Esquema de Eliminação Perfeita.

4.5 Grafos de Linha

A partir desta classe, obtém-se um aprofundamento teórico sólido em suas investigações, tendo em vista que a classe que buscamos nos aprofundar seria comprovadamente a sua subclasse, antes de entrarmos dentro de seu reconhecimento e suas definições, precisamos abordar de fato um conceito extremamente utilizado e abordado dentro dos grafos de linha;

Subdivisão: sendo esta denotada por $S(G)$ e obtida pela subdivisão, de fato, das arestas de G , ou seja, buscamos por subdividindo as arestas, obtendo um grafo subdivido, formando então uma classe que abordaremos bastante ao longo do trabalho tendo esta prévia definição de

Figura 16. À esquerda um Grafo K_3 e a sua direita a subdivisão $S(G)$ do K_3



Fonte: Imagem Autoral

subdivisão, podemos partir para um aprofundamento da classe mais conhecido. A denominação de grafo de linha, foi exposta pela primeira vez na década de 60 ao longo do trabalho [20], sendo utilizada outras denominações dentre a literatura para a classe como, grafo derivado, grafo de arestas entre outras denominações para os grafos de linhas. Outras especulações, denota-se trabalhos utilizando os conceitos dos grafos de linha desde os anos 1930 em [21] Apresentando uma definição para os grafos de linha, que utilizaremos a denotação $L(G)$, formalizando o seu conceito temos.

Definição 4.5.1. (Grafo de Linha) [21] *Seja G um grafo simples. O grafo de linha ou grafo linha de G , é um grafo $L(G)$, onde $V(L(G)) = E(G)$, em outras palavras, é um grafo construído a partir de G , do seguinte modo. Para cada arestas de G associamos um vértice do grafo $L(G)$, que desejamos construir. E dois vértices em $L(G)$ são adjacentes se, e somente se, suas arestas correspondentes em G tiverem um extremo em comum. Ao grafo G chamamos de raiz linha de $L(G)$.*

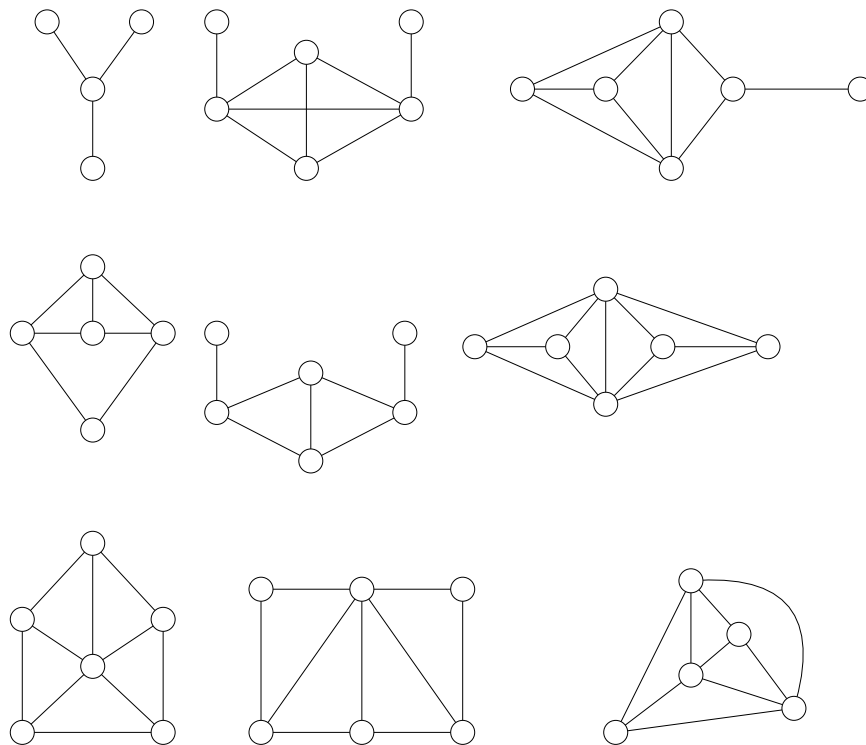
Como evidenciado em [3] os grafos de linha ao longo de seu desenvolvimento na literatura foi- se criando características evidentes para a identificação dos grafos de linha como

1. O grafo de linha de um grafo conexo será conexo
2. Se G for conexo, então conterá um caminho que conecta duas de suas arestas, que será um caminho em $L(G)$ contendo dois dos vértices de $L(G)$ correspondentes. Se um grafo G possuir algum vértice isolado e, portanto, ser desconectado, pode, no entanto, ter um grafo de linha conexo. Se $L(G)$ é um grafo regular conexo, então G é regular ou semirregular bipartido. [22]
3. O problema da clique [12] é polinomial na classe dos grafos de linha [23].
4. O reconhecimento da classe dos grafos de linha é linear [24]. A classe dos grafos linha de bipartido tem reconhecimento linear [25]

Conseguimos evidenciar inúmeras aplicabilidades que foram abordadas na literatura para a utilização dos grafos de linha, conseguimos aplicar dentro das redes de telecomunicações, onde podemos modelar as interferências (enlaces) de uma rede, como por exemplo onde duas conexões que compartilham um roteador não podem usar o mesmo canal, o grafo de linha modela os conflitos entre os enlaces. Em uma outra aplicabilidade temos, analisar interseções de ruas (ou linhas de metrô), onde arestas são ruas e seus encontros definem o grafo de linha, assim como a otimização de sinais de trânsito ou replanejamento de conexões entre estações. Demonstrando assim, a importância da classe em nosso cotidiano, temos então seu teorema de caracterização de sua classe.

Teorema 4.5.1. (Caracterização dos Grafos de Linha)[26] *Um grafo G é grafo de linha se, e somente se, G não possuir nenhum dos 9 grafos da Figura 17, como subgrafos induzidos.*

Figura 17. Os grafos que proíbem, como subgrafos induzidos, a classe dos grafos de linha



Fonte: Imagem Autoral

Décadas, após as primeiras utilizações dos grafos de linha em meados de 1930, surge-se então uma outra caracterização para a classe, foi apresentada por J.Krausz em [27]. Utilizando então os conceitos de partição de arestas do grafo por subgrafos completos, enunciaremos seu teorema, mais denotado por partição de Krausz.

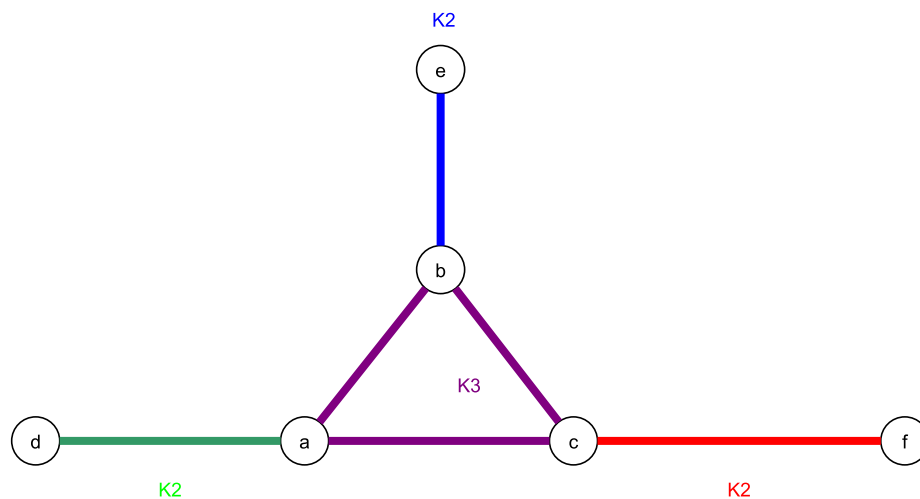
Teorema 4.5.2. (Teorema de Krausz) [22, 27] *Um grafo é de linha se, somente se, o seu conjunto de arestas $E(G)$ puder ser todo coberto por uma coleção de subgrafos $S = \{G_1, G_2, \dots, G_k\}$ não triviais, tal que:*

- i) Os subgrafos G_i , $1 \leq i \leq k$, são todos completos;
- ii) Dois quaisquer desses subgrafos possuem no máximo um único vértice em comum;
- iii) Cada vértice do grafo G ficará em no máximo dois desses subgrafos de S .

Demonstração. [3] (\Rightarrow) Seja $L(G)$ um grafo de linha de G . Sem perda de generalidade reiteramos G sendo um grafo conexo e simples. Arestas que estiverem em estrela $K_{1,p}$ em G induzirão um subgrafo completo em $L(G)$. Cada vértice de $L(G)$ pode estar em exatamente dois subgrafos, desde que cada aresta em G seja incidente em exatamente dois vértices. Assim o grafo linha $L(G)$ possui uma partição de Krausz.

(\Leftarrow) Supondo que $L(G)$ possui uma partição de Krausz. Seja G_1, G_2, \dots, G_k são k -partições de $L(G)$. Criaremos um grafo G a partir dessas partições. O grafo G conterá k vértices v_1, v_2, \dots, v_k , onde v_i corresponde às partições S_i . Se $G_i \cap G_j \neq \emptyset$, $i \neq j$, então existe uma aresta $v_i v_j$ no grafo G . Como somente pode haver um vértice comum entre duas partições, portanto, pode haver no máximo uma aresta de v_i para v_j . Assim G é um grafo simples. Agora criaremos um grafo de linha de G , ou seja, mostraremos que $L(G) = L(G)$. \square

Figura 18. Um grafo com uma partição de Krausz, verificando que todas as arestas do grafo, pertencem a algum subgrafo da cobertura.



Fonte: Imagem Autoral

Na figura [18] representamos uma partição de Krausz em um grafo de linha G , pode-se verificar que todas as arestas pertencem a algum subgrafo completo $S = \{k_2, k_2, k_2, k_3\}$ respeitando assim as condições impostas dentro do teorema, conseguimos com essas definições determinar algumas classes que não permitem de cara, a existência dos grafos de linha, como evidenciado na Figura [17] a garra, uma classe de grafos bastante importante, e clássica. Não permite a existência de um grafo de linha, em qualquer tentativa de particionar um grafo do

tipo Garra, sempre existirá alguma aresta ou vértice descoberto, violando as condições impostas anteriormente.

4.5.1 Grafos de Linha Bipartido

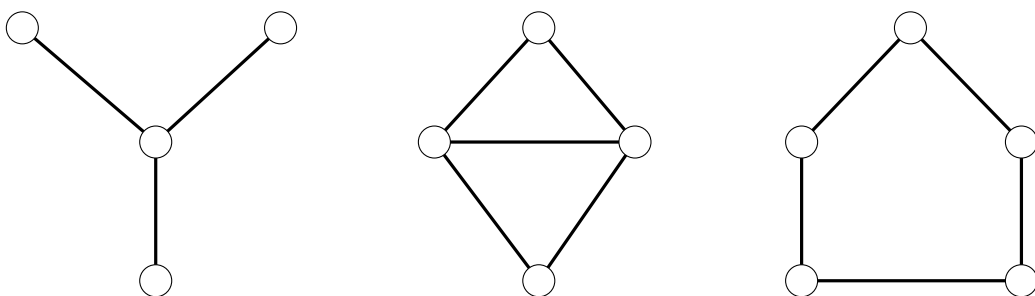
Ao longo da exploração da literatura dos grafos de linha, dedicaram seus esforços em raízes de grafos de linha, atentando-se aos estudos em raízes de grafos mais específicas. Com isso, surge-se a classe de grafos de linha Bipartido, especificando a sua raiz do grafo de linha obtemos subclasses que pode ser em sua maioria para estudos de complexidade computacional e/ou aplicações; estruturas de cache, e codificações eficientes de informação.

Definição 4.5.2. (*Grafos linha de bipartido*). [20] Dizemos que um grafo simples G é linha de bipartido, quando a sua raiz linha for um grafo bipartido.

Com a dedicação de explorar esta classe, foi-se então caracterizada em meados da década 1970 por Harary e Holzmann [20] Utilizando os conceitos dos grafos proibidos para os grafos de linha, tem -se então o teorema de caracterização dos linha bipartidos, se baseando nos subgrafos induzidos proibidos do tipo garra, diamantes e buracos ímpares.

Teorema 4.5.3. (*Harary e Holzmann*). [20] Um grafo $G = (V, E)$ é linha de uma raiz bipartida se, e somente se, ele não contém a garra, nem o diamante e nem buraco ímpar, como subgrafo induzido.

Figura 19. A garra, o diamante e o buraco ímpar, as estruturas que como subgrafos induzidos, probem a existência dos grafos de linha bipartidos.



Fonte: Imagem Autoral

4.6 Grafos Clique-Expandidos

Esta classe foi desenvolvida recentemente, e foi o principal objeto de estudo para criarmos o grupo de pesquisa dentro da universidade, com a finalidade primordialmente de uma amplo aprofundamento dentro da matemática discreta, explorando tais estruturas, para que possamos analisar tal classe desenvolvida recentemente, esta classe apresentada na tese [3], onde foi-se

aplicada a conceitos de convexidade, como convexidade P_3 e a *geodésica*, e a complexidade computacional, como problemas NP completos e o problema da dominação abordado durante todo a tese. Com a abordagem e dedicação de desenvolvermos mais estudos dentro desta classe, empregando uma maior quantidade de artigos de relevância na região norte, tendo por sua definição.

Definição 4.6.1. (*Grafos Clique-expandido*) [3] Dada uma função $f : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(v_i) \geq d(v_i)$ para cada $v_i \in V(G)$, o grafo clique-expandido é definido por: para cada $v_i \in V(G)$, tome um conjunto $V_i \subseteq V(H)$ com $f(v_i)$ vértices formando uma clique.

Para cada $v_j \in N(v_i)$, tome um vértice $v_{i,j} \in V_i$ e uma aresta $v_{i,j}v_{j,i} \in E(H)$. Se $f(v_i) - d(v_i) = k_i > 0$, então V_i possui k_i vértices simpliciais, que são denotados por $v'_{i,1}, \dots, v'_{i,k_i}$. Neste caso, G é o grafo raiz de H sob a ação da função f . O conjunto V_i será referido como o conjunto clique-expandido associado a v_i . Note que para cada $v \in V_i$, $d(v) \in \{|V_i| - 1, |V_i|\}$. Resumidamente, H é um grafo clique-expandido quando for obtido por um processo de expansão de dado grafo G com um operador f -clique-expandido. Se $f(v_i) = k$ para todo $v_i \in V(G)$ e para algum $k \in \mathbb{N}$, podemos dizer que H é um grafo k -clique-expandido.

É importante ressaltar, a análise realizada dentro da tese, comprovou que os grafos inflados, classe abordada por meados dos anos 2000 em [28], seriam uma subclasse dos clique-expandidos. Tendo em vista, um grafo H é inflado se for aplicado o operador de expansão de um par (G, f) com $f(v_i) = d(v_i)$.

Corolário 4.6.1. [3] Um caminho P_n é um grafo clique-expandido.

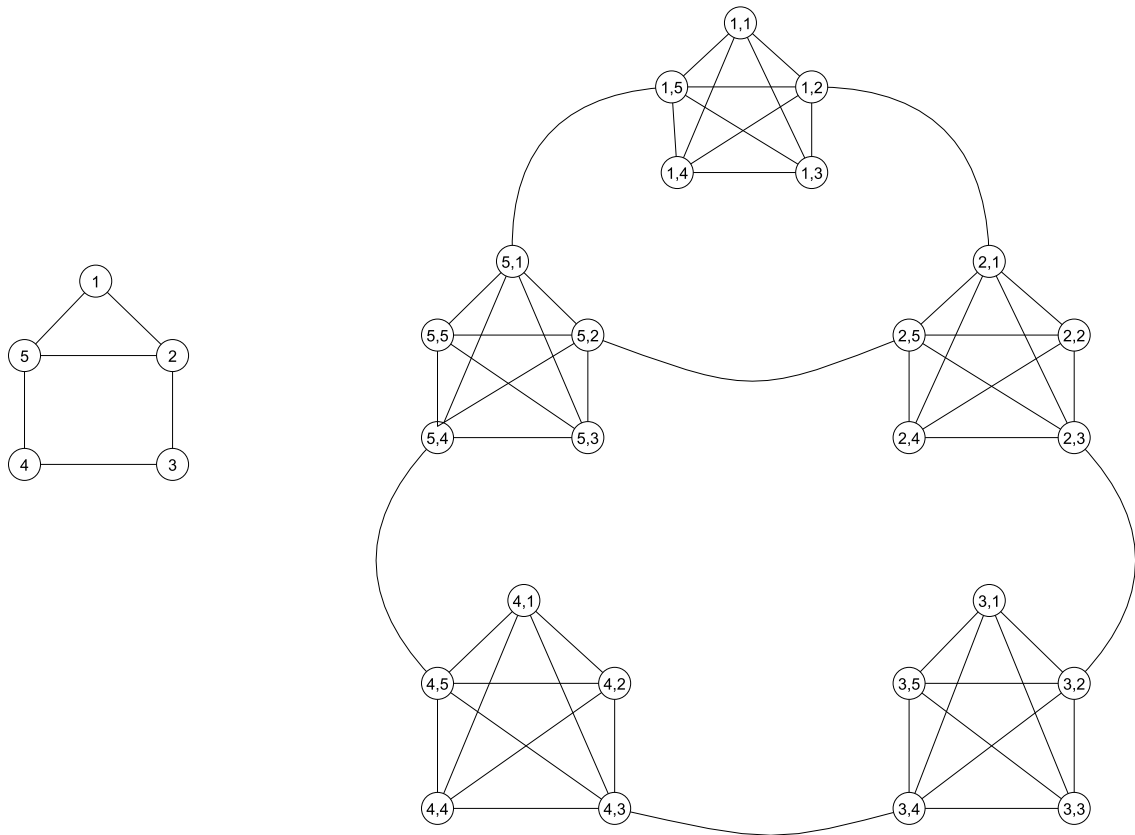
Demonstração. [3] Caso P_n seja um caminho ímpar, tome um emparelhamento perfeito desse caminho e escolha as arestas que estão no complemento desse emparelhamento. Essas arestas do complemento formam as cliques maximais de tamanho 2 que devem ser contraídas em vértices para a obtenção do grafo raiz de expansão. Caso P_n seja um caminho par, tome seu emparelhamento máximo e faça contração das arestas desse emparelhamento em vértices, o caminho assim obtido é uma raiz de expansão do caminho P_n . \square

Neste capítulo, analisaremos determinadas classes de grafo, evidenciada por meio de estudos que buscam demonstrar seus teoremas. Portanto, abordaremos de maneira clássica os métodos de reconhecimento dessas classes.

Teorema 4.6.1. [3] Um grafo conexo G que não é ciclo e nem caminho é clique-expandido se, e somente se, toda cadeia de G for boa e todo vértice de $V(G)$ for simplicial ou 1-simplicial.

O Teorema 4.6.1 afirma que um grafo pertencente ao clique-expandido, todo vértice é simplicial ou 1-simplicial, portanto se um grafo qualquer, analisado não for condizente com a condição dotada descrita no teorema, o grafo não será pertencente a tal classificação, portanto

Figura 20. Um grafo G à esquerda e o seu grafo 5-clique expandido à direita.



Fonte: Imagem Autoral

este grafo não poderá ser clique expandido. Ressalta-se, que um vértice 1-simplicial é um vértice cuja sua vizinhança seria formada uma clique e por um único vértice que não seja vizinho de nenhum vértice da clique.

Corolário 4.6.2. [3] *Se H é um grafo clique-expandido, então H será um grafo linha de um grafo bipartido.*

Com isso, de maneira clássica em um de seus principais teoremas de caracterização, enfatização as semelhanças de sua caracterização com suas classes subsequentes, ressaltando os grafos de linha e linhas de bipartidos, tópicos analisados anteriormente ao longo do trabalho.

Teorema 4.6.2. [3] *Um grafo é clique-expandido se e somente se for livre de cadeia ruim, borboleta, garra, C_4 induzido, diamante e buraco ímpar.*

Demonstração. [3] *Seja H um grafo clique-expandido. Devido ao 4.6.2, sabemos que H é um grafo linha de um grafo bipartido, logo pelo Teorema temos que H é livre de garra, diamante e buraco ímpar. Pelo Teorema enunciado, H é livre de cadeias ruins.*

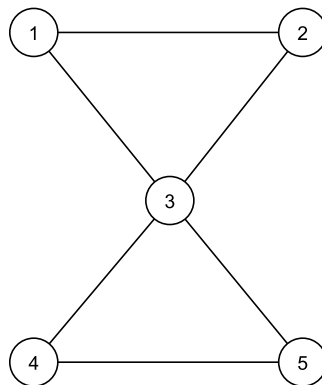
Como uma borboleta tem um vértice que não é nem simplicial nem extremo de cadeia nem vértice de cadeia e nem vértice de semi-cadeia, o Teorema também implica que H é livre

de borboletas. Pela caracterização da classe garante que H é livre de C_4 induzido, H livre de cadeia ruim, borboleta, garra, C_4 induzido, diamante e buraco ímpar.

Por outro lado, seja H um grafo livre de cadeia ruim, borboleta, garra, C_4 induzido, diamante e buraco ímpar. Se H é um ciclo C_k , então k é ainda maior que 4. É claro que C_{2k} para $k \geq 3$ é um grafo clique-expandido. Então, considere que H não é um ciclo. Suponha por contradição que H não é um grafo clique-expandido. Como H não contém cadeias ruins, pelo Teorema, H contém algum vértice v que não é nem simplicial nem extremo de cadeia nem vértice de cadeia e nem vértice de semi-cadeia.

Assim, podemos escolher os vértices $u_1, u_2, u_3 \in N(v)$ tais que $u_1u_2 \notin E(H)$. Se $\{u_1, u_2, u_3\}$ é um conjunto independente teremos uma garra o que é uma contradição. Se houver apenas uma aresta entre os vértices de $\{u_1, u_2, u_3\}$, então v tem um quarto vizinho que pode criar uma garra, um diamante ou uma borboleta, o que também não é possível. Se existem arestas u_1u_3 e u_2u_3 , teremos uma contradição também, pois elas produzem um diamante. \square

Figura 21. Um grafo G pertencente a denominação “borboleta”.



Fonte: Imagem Autoral

4.7 Grafos Inflados

Neste tópico, iremos finalizar todas as classes mais evidentes e exploradas ao longo da graduação; portanto, iremos evidenciar algumas definições e sua caracterização ao abordarmos esta classe, tão pouco evidente e de suma importância para definições e parâmetros de convexidade, enunciados excelentemente em [3], onde se discutem e exploram alguns parâmetros de convexidade aplicáveis a esta classe.

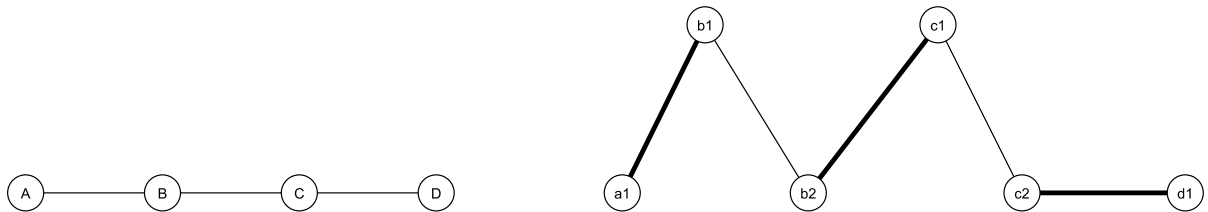
Primordialmente, este grafo é obtido a partir de G substituindo cada vértice v de grau $d(v)$ por uma clique $K_{d(v)}$ e cada aresta uv por uma aresta entre dois vértices das cliques correspondentes. Os grafos inflados foram definidos em [28]; recorde que $S(G)$ denota o grafo subdividido de G , discutido anteriormente.

Os grafos inflados, por sua versatilidade, demonstraram-se altamente aplicáveis em diversas áreas e em inúmeros artigos, desde aplicações químicas até a projeção de algoritmos quânticos. Para ajudar na compreensão — assim como nos grafos clique-expandido — demonstrou-se posteriormente que a classe dos inflados é uma subclasse dos clique-expandido. Pode-se imaginar uma estrutura como um grafo resultante da ação de um operador

$$H : G \longrightarrow G' \quad [4.3]$$

que transforma o grafo G em outro grafo G' . O operador H atua em G inflando seus vértices em cliques de tamanho igual ao grau de cada vértice, de modo que essas cliques sejam conectadas pelas arestas de G . O novo grafo obtido é justamente o nosso grafo inflado $H(G) = G'$.

Figura 22. À esquerda: um grafo G ; à direita: o seu grafo inflado.



Fonte: Imagem Autoral

Corolário 4.7.1. *Todo grafo inflado tem um número par de vértices e esse número é o dobro do número de arestas de seu grafo raiz.*

Demonstração. [3] De fato, seja G um grafo inflado. Os vértices de G são em número a soma dos vértices de todas as cliques provenientes de vértices da raiz de G . E como em cada clique de G o número de vértices é justamente o grau de cada vértice da raiz, temos que:

$$|V(G)| = |K_{d(u_i)}| = \sum_{1 \leq i \leq n} d(u_i) = 2k, \quad [4.4]$$

com $k \in \mathbb{N}$. Observe que o grafo raiz inflado, de G , tem justamente k arestas. \square

Corolário 4.7.2. [3] *Todo grafo G_1 inflado é linha de bipartido.*

Corolário 4.7.3. [3] *Todo grafo G do tipo inflado é livre de borboleta induzida.*

Teorema 4.7.1. [29] *Se um grafo H não contém a garra nem o diamante como subgrafo induzido, então a vizinhança de cada vértice é uma clique (sendo este vértice simplicial) ou duas cliques sem arestas entre elas.*

Demonstração. [3] Utilizando o teorema enunciado anteriormente para uma das caracterizações ao final da década de 90, temos então:

1. O vértice v é um vértice simplicial de G_I e $|N(v)| \geq 2$. Então $N[v]$ é um clique $|K| \geq 3$ cuja raiz linha é um grafo garra que não é um grafo de subdivisão, uma contradição.
2. Outro caso é quando $N(v)$ são duas cliques sem arestas entre elas. Se as duas cliques forem maiores que 2, haveria um grafo borboleta induzido, uma contradição, pois a raiz não é um grafo de subdivisão.

□

Teorema 4.7.2. (*Caracterização de Grafos Inflados*) G_I é um grafo inflado se, e somente se, G_I possuir um emparelhamento aresta-clique e for livre de C_4 induzido

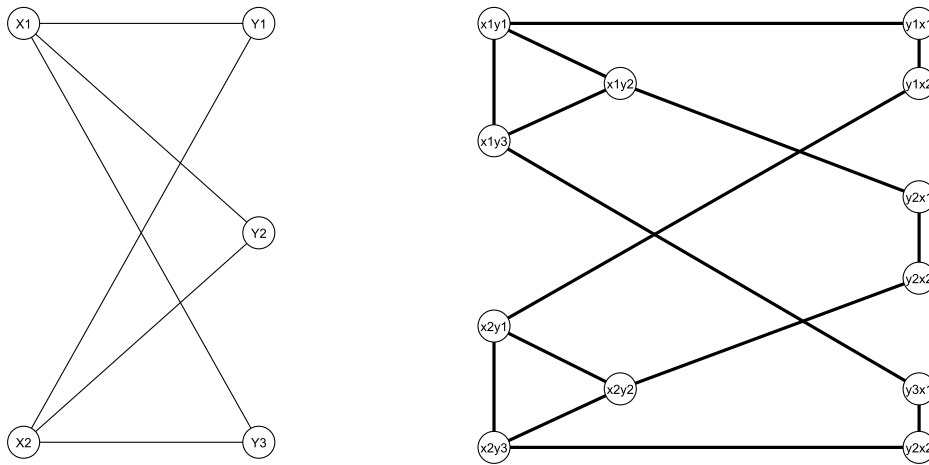
Demonstração. [3] Suponha que o grafo G_I é um grafo inflado. Note que as arestas $E'_2(G_I)$ formam um emparelhamento perfeito que não possui nenhuma aresta pertencente a nenhum K_3 de G_I , logo as arestas de E'_2 formam um emparelhamento aresta-clique para G_I . O grafo G_I não pode possuir C_4 induzido, Assim como referenciado pelo [4.6.2]

Suponha por outro lado que G_I possui um emparelhamento aresta-clique e é livre de C_4 induzido. Seja $\{G_1, G_2, \dots, G_p\}$ as cliques maximais de tamanho maior que 2 de G_I . Do emparelhamento aresta-clique, sabemos que nenhuma aresta dessas cliques maximais pertencem ao emparelhamento aresta-clique e que toda aresta que incide em um único vértice de G_i , por sua vez, pertencerá obrigatoriamente a esse emparelhamento aresta-clique. Dessa forma, construiremos um grafo R partindo de G , da seguinte forma. Para cada clique G_i com $1 \leq i \leq p$, associamos um vértice, de maneira a que o grau desse vértice seja justamente igual ao tamanho da clique associada a ele. As arestas fora das cliques G_i , que não pertencerem ao emparelhamento aresta-clique, associe- também a um vértice para R , no caso de grau 2. Obviamente esses vértices terão todos grau 2 em R e todos esses vértices, definidos dessa maneira, formarão o conjunto $V(R)$. Quanto às arestas $E(R)$, consideramos justamente as arestas do emparelhamento aresta-clique que se associarão às arestas de R . Assim, o grafo $R = (V, E)$ é uma raiz de inflação para G_I . Observe que a ausência de C_4 induzido em G é necessária, pois caso exista tal estrutura induzida em G teríamos a inexistência de raiz de inflação para G_I , pois qualquer raiz para G_I teria, obrigatoriamente, um par de vértices conectados por duas arestas diferentes, o que não permitiríamos já que todos os grafos referidos aqui são grafos simples. □

Em [30], apesar de não abordado, mencionou-se o reconhecimento da classe, que apresentaremos é polinomial

- **Entrada:** Um grafo linha de bipartido $G = (V, E)$, livre de C_4 , com $|V|$ par e $|V| > 2$.
- **Saída:** Um subconjunto $E' \subseteq E$ que forme um emparelhamento aresta-clique; ou **NAO** caso isso não seja possível.

Figura 23. À esquerda temos um grafo G que é raiz de inflação do grafo à direita G_1



Fonte: Imagem Autoral

1. Inicialize $E' \leftarrow \emptyset$.
2. Verifique se G é um ciclo C_n com $n > 4$ ou um caminho P_n . Se for, inclua no conjunto E' as arestas do emparelhamento perfeito existente e devolva E' . Caso contrário, prossiga.
3. Determine o conjunto H das cliques maximais de tamanho maior que 2 e defina $G' = G - E(H)$, removendo todas as arestas internas dessas cliques. Os componentes de G' serão caminhos ou vértices isolados.
4. Analise cada componente de G' . Se algum deles for caminho de comprimento par ou vértice isolado, devolva **NAO**. Caso contrário, selecione as arestas que têm apenas um extremo nas cliques maximais de G e adicione a E' as arestas que formam o emparelhamento perfeito nesses caminhos.
5. Fim.

Com os conhecimentos obtidos, definiremos agora o conceito geral de estruturas convexas. Uma das aplicações mais relevantes do uso de grafos está na modelagem da propagação de alguma informação, comportamento ou fenômeno dentro de uma rede. Situações como a difusão de notícias em mídias sociais ou o espalhamento de uma doença contagiosa em uma população podem ser representadas de forma natural por meio dessa estrutura. Dessa perspectiva surgem os chamados problemas de infecção em grafos, cuja análise está fortemente ligada a parâmetros computacionais associados a diferentes noções de convexidade.

5 CONVEXIDADE EM GRAFOS

“A matemática é o alfabeto no qual Deus escreveu o universo.”

Galileu Galilei

Neste Capítulo, iremos introduzir e abordar conceitos de convexidade. Este ramo de suma importância e aplicabilidade dos conceitos previamente ditos, iremos buscar denotar e enunciar conceitos básicos e que busquem complementar na formação de estudos posteriores. Como abordado no capítulo anterior, É importante destacar que existem várias maneiras de modelar o processo infeccioso em um grafo.

Uma das abordagens mais estudadas é aquela em que a infecção se propaga ao longo de caminhos: dependendo do tipo de caminho adotado — minimal, mínimo, induzido, entre outros obtemos distintas formas de infecção e, conseqüentemente, diferentes tipos de convexidade. De modo geral, o processo funciona da seguinte forma: os vértices inicialmente contaminadores funcionam como extremos de certos caminhos e todos os vértices que surgem como intermediários desses caminhos passam a ser considerados contaminados (ou “gerados”).

Como mencionado, o tipo de caminho definido é o que determina qual noção de convexidade está sendo adotada no grafo. Essa convexidade pode ser vista como uma versão discreta da convexidade euclidiana, na qual são consideradas regiões delimitadas por poligonais no plano. De acordo com [31], no ano de 1951 foi introduzido pela primeira vez o conceito de espaços de convexidade no trabalho [32], generalizando o conceito de convexidade para estruturas matemáticas as mais diversas, o livro [33] mostra um compilado detalhado e bem elaborado dessas estruturas convexas abstratas, bem ao estilo dos que gostam de uma boa leitura de matemática pura.

Convexidade é, de forma abstrata, a ideia de “ser fechado entre pontos”: em geometria esperamos que, se pego dois pontos num conjunto convexo, o segmento que liga esses pontos também esteja no conjunto. Em espaços discretos (conjuntos finitos) transportamos essa noção substituindo “segmento” por alguma operação que captura elementos “entre” os pontos.

Definição 5.0.1. *(Espaço Convexo) Uma coleção \mathcal{C} de partes de um conjunto não vazio e finito V é dita uma convexidade sobre V quando:*

- 1) $\emptyset, V \in \mathcal{C}$.
- 2) \mathcal{C} é fechada para interseção.
- 3) A união de uma cadeia de elementos ordenada pela inclusão de \mathcal{C} está em \mathcal{C} .

Um espaço convexo é um par (V, \mathcal{C}) , onde V é um conjunto não vazio e \mathcal{C} uma convexidade sobre V . Os elementos da coleção \mathcal{C} são chamados de conjuntos **convexos**.

Em teoria convexa há parâmetros como *número de Carathéodory*, *número de Radon* e *número de Helly* eles medem, respectivamente, quantos pontos são necessários para gerar um ponto do fecho, como particionar um conjunto em partes cujas envoltórias se intersectam, e quantos conjuntos convexos verificar para garantir interseção global. Essas ideias têm análogos e importâncias em convexidades discreta. Outro conceito, importantíssimo para ser discutido e que nos ajudará a entendermos as classes de convexidades em grafos, mais estudadas. Em grafos substituímos "pontos entre dois pontos" por vértices que pertencem a caminhos (ou geodésicas, ou certos tipos de caminhos) que ligam dois vértices extremos. Assim, escolhamos uma família de caminhos \mathcal{P} e definimos convexidade usando esses caminhos. Para um par de vértices u, v , definimos o intervalo $I[u, v]$ (dependendo de \mathcal{P}) como o conjunto formado por u, v e todos os vértices w que pertencem a algum caminho $u - v$ em \mathcal{P} .

Definição 5.0.2. (*Intervalo*) Seja \mathcal{C} uma família de caminhos de um grafo $G = (V, E)$. O intervalo dos vértices $u, v \in V(G)$, na convexidade \mathcal{C} , denotado por $I_{\mathcal{C}}(u, v)$, é formado pelos vértices u, v e por todos os vértices que pertencem aos caminhos da convexidade \mathcal{C} , que conectam u, v .

- Para um conjunto S , definimos:

$$I[S] = \bigcup_{u, v \in S} I[u, v]. \quad [5.1]$$

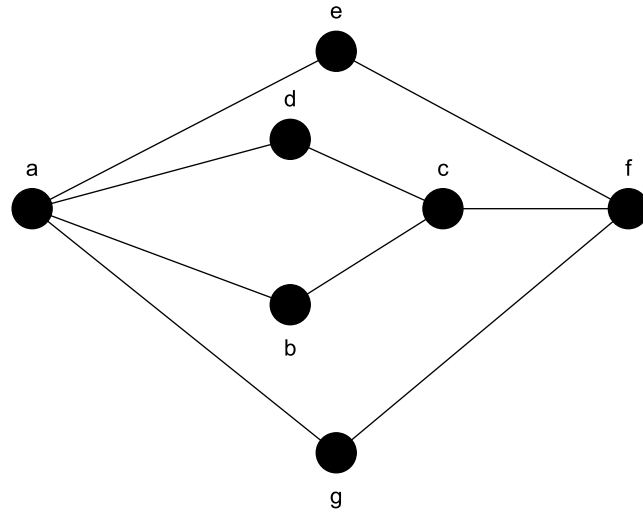
- Um conjunto S é convexo (relativamente a \mathcal{P}) se $I[S] = S$. O fecho convexo $H[S]$ é o ponto fixo obtido aplicando repetidamente $I[\cdot]$ até estabilizar.

Com isso, conseguimos separar em três unidades as características das famílias de caminhos \mathcal{P} :

- Quando \mathcal{P} é o conjunto de todas as geodésicas (caminhos mínimos), temos a **convexidade geodésica**.
- Quando \mathcal{P} é o conjunto de todos os caminhos induzidos, temos a **convexidade monofônica**.
- Quando \mathcal{P} é o conjunto de todos os caminhos de comprimento 2 (isto é, todos os P_3), temos a **convexidade P_3** .

Como ilustração, consideremos a Figura 24. Nela, verificamos que $I[a, c] = \{a, b, c, d\}$. Para o conjunto $S = \{a, b, c\}$, obtemos $I[S] = \{a, b, c, d\}$. De modo geral, seja G um grafo e S um subconjunto de $V(G)$. Quando $I[S] = V(G)$, dizemos que S é um *conjunto intervalo* (ou

Figura 24. Um Grafo G e seu conjunto intervalo ou interval set do Grafo.



Fonte: Santos (2013)

interval set) de G . O menor tamanho entre todos os conjuntos intervalo de G é denominado *número de intervalo* (ou *interval number*), um parâmetro de convexidade amplamente investigado na literatura. Retomando o grafo da Figura 24, consideremos os conjuntos $S_1 = \{a, c, f\}$, $S_2 = \{c, e, g\}$ e $S_3 = \{b, d, e, g\}$. Tomando os caminhos geodésicos do grafo, verificamos que S_1 e S_3 são conjuntos intervalo, pois seus fechos geodésicos coincidem com $V(G)$. Entretanto, S_2 não forma um conjunto intervalo, uma vez que $I[S_2] = \{a, c, e, f, g\} \neq V(G)$. Assim, concluímos que o número de intervalo desse grafo é igual a 3.

Definição 5.0.3. (*Convexidade em um grafo G [34]*) Seja G um grafo e $S \subset V(G)$. O conjunto S é dito ser convexo, com respeito a uma dada convexidade de caminhos \mathcal{C} , quando $I_{\mathcal{C}}(S) = S$.

Assim como abordado excelentemente em [35], diversas convexidades trabalhadas em grafos estão contidas na convexidade de intervalo. Entre elas podemos citar a convexidade geodésica, a convexidade monofônica e a convexidade P_3 . Todas estas convexidades são definidas através de um conjunto \mathcal{P} de caminhos em grafos. Neste caso, um subconjunto $C \subseteq V(G)$ é convexo precisamente quando C contém todos os vértices pertencentes aos caminhos de \mathcal{P} cujos vértices extremos estejam em C . Essencialmente, cada escolha de \mathcal{P} produz uma convexidade diferente sobre o mesmo conjunto de vértices do grafo; muitas propriedades e parâmetros dependem criticamente dessa escolha. Na Figura 25, observamos que o conjunto $S_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$ não é convexo na convexidade geodésica, pois o vértice u_8 pertence a um caminho geodésico entre u_2 e u_3 , porém $u_8 \notin S_1$.

Por outro lado, o conjunto $S_2 = \{u_3, u_4, u_5, u_7, u_{10}, u_{11}\}$ é convexo na convexidade geodésica, uma vez que todos os vértices que aparecem em caminhos mínimos entre quaisquer pares de vértices de S_2 também pertencem ao próprio S_2 .

por $n_C(G)$. No caso em que C é a convexidade geodésica, tanto o conjunto intervalo quanto o seu tamanho recebem, na literatura, os nomes de **conjunto geodésico** e **número geodésico**, respectivamente. O problema associado pode então ser formulado da seguinte maneira:

- **Número de intervalo C :**
- **Instância:** Um grafo $G = (V, E)$ e um inteiro positivo $k \leq |V|$.
- **Questão:** Existe em G um conjunto intervalo, com respeito à convexidade C , de tamanho no máximo k ?

Esse problema pode ser interpretado como uma forma de processo de infecção em grafos, porém envolvendo apenas uma única aplicação do operador intervalo. Quando a convexidade C corresponde ao conjunto de todos os (u, v) -caminhos de comprimento 2, o problema coincide com o da *dupla dominação* [43, 44]. Em [45], demonstrou-se que o número de intervalo- P_3 é NP-completo em grafos gerais, e que a complexidade permanece mesmo quando o problema é restrito às classes dos grafos cordais ou bipartidos cordais. Em [46] os autores estudaram o número de intervalo na convexidade monofônica. Já em [47] foi provado que o número de intervalo geodésico é NP-completo para grafos gerais, e em [37] mostrou-se que essa dificuldade computacional persiste mesmo quando a análise é limitada às classes dos grafos bipartidos e cordais.

Abordando resumidamente os parâmetros associados à convexidade de intervalo, temos:

- **Conjunto convexo / convexidade:** S é convexo se $I[S] = S$. Significa aplicar a operação de “pegar todos os vértices que ficam em caminhos entre vértices de S ”.
- **Número de convexidade:** a cardinalidade do maior conjunto convexo próprio (isto é, o maior conjunto convexo que não é todo o grafo).
- **Número de envoltória (hull number):** o menor tamanho de um conjunto S tal que, aplicando iterativamente o operador intervalo até estabilizar, a envoltória $H[S]$ seja todo o conjunto $V(G)$. Ou seja, S eventualmente “gera” o grafo inteiro. Na literatura, equivale a problemas como *irreversible conversion* ou *bootstrap percolation*.

Denotado por $h(G)$. É o tamanho do menor conjunto de vértices S cujo fecho convexo (envoltória) cobre todo o grafo:

$$H[S] = V(G) \tag{5.2}$$

onde $H[S]$ é obtido aplicando I iterativamente até estabilizar.

- **Intuição:** Enquanto o número convexo/intervalo mede uma geração instantânea (em uma rodada), o número de envoltória mede a geração eventual (em várias iterações).

Em convexidade P_3 , um vértice pode se tornar convexo após várias rodadas de geração por vizinhos duplos — então o hull number mostra quantos vértices iniciais são necessários para, eventualmente, ativar todo o grafo.

- **Aplicações:** O hull number está diretamente relacionado com modelos de propagação de contágio e percolação bootstrap (onde um vértice se ativa se tiver um certo número de vizinhos ativos).

Denotado por $i(G)$ ou $n(G)$. É o tamanho do menor conjunto de vértices S tal que o intervalo de S cobre todo o grafo:

$$I[S] = V(G) \quad [5.3]$$

Em outras palavras: É o menor número de vértices necessários para gerar todo o grafo em uma única aplicação do operador de intervalo.

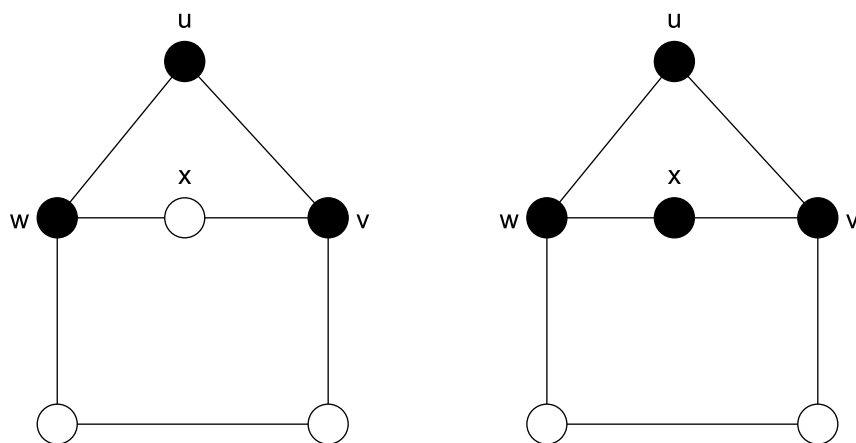
- **Intuição:** Representa a eficiência de geração imediata — quantos vértices são necessários para que o operador “convexidade” traga todos os outros de uma vez.
- **Exemplo:** No caminho $A - B - C - D$:

- Para P_3 , o par $\{A, C\}$ gera B , mas não $D \rightarrow$ precisa de mais um \rightarrow mínimo é $\{A, C, D\}$. Logo, $n_{P_3}(P_4) = 3$. - Em geodética, $\{A, D\}$ já gera todo o grafo $\rightarrow n_g(P_4) = 2$.

Em analogia dinâmica: É o número mínimo de vértices ativos que, em uma rodada de propagação, fazem todo o grafo ser ativado.

A família dos conjuntos que são fixos por $I_{\mathcal{P}}$ (isto é, conjuntos S tais que $I_{\mathcal{P}}(S) = S$) satisfaz as condições de uma convexidade abstrata: contém \emptyset , contém $V(G)$ e é fechada por interseção.

Figura 26. Um conjunto e sua Envoltória convexa



Fonte: Imagem Autoral

Formalmente apresentando o teorema que iremos utilizar como base e aplicação das três definições a seguir, O próximo teorema mostra que a convexidade de caminhos, ou seja, uma família de conjuntos que são iguais ao seu intervalo, computados sobre uma dada família de caminhos do grafo, é de fato uma convexidade no grafo.

Teorema 5.1.1. [6] *Seja $G = (V, E)$ um grafo e C uma família de caminhos em G . A família é uma convexidade em V .*

$$F(C) = \{S \subseteq V(G) ; I_C(S) = S\} \quad [5.4]$$

Demonstração. [6] [5.0.1] A condição 1) é trivialmente verdadeira. Como V é um conjunto finito, pois G é um grafo finito, temos que a condição 3) também é verificada. Para a condição 2) Seja F e C da forma como definidos acima.

Suponha, por absurdo, que 2) seja falsa. Então, existem conjuntos S_1, S_2, S_3 tais que $S_1 \in F, S_2 \in F$ e $S_3 \notin F$ e $S_1 \cap S_2 = S_3$. Tome $w \in I(S_3) - S_3$. Então, por definição, existem vértices $u, v \in S_3$ tal que w é um vértice interno de um caminho de C entre u, v e $w \notin S_3$. Como $u, v \in S_1$ e S_1 é convexo, $w \in S_1$. De modo análogo $w \in S_2$ e, portanto, $w \in S_1 \cap S_2$. Portanto, um absurdo. \square

Abordando, resumidamente cada uma de suas definições temos que um conjunto S de vértices é P_3 -convexo se, sempre que dois vértices de S têm um vértice w exatamente entre eles em um caminho de três vértices $u - w - v$ (um P_3), então esse vértice w também pertence a S . Em outras palavras: S contém todos os “meios” de caminhos de comprimento 2 cujos extremos estão em S .

Definição 5.1.1. (Convexidade P_3) [45] *A convexidade P_3 é definida quando os caminhos considerados para dois vértices procederem a geração de um terceiro vértice na computação do intervalo forem caminhos de tamanho dois, ou seja, caminhos do tipo P_3 . Desse modo, um subconjunto $S \subset V$ é dito ser convexo na convexidade P_3 , ou ser P_3 -convexo, quando todo vértice pertencente a caminhos P_3 entre pares de vértices de S estiver também em S .*

Definição 5.1.2 (Convexidade monofônica). [39, 48] *A convexidade monofônica também possui certo destaque entre as convexidades estudadas em grafos. É definida pelo fato de que os caminhos considerados, na geração dos vértices, são todos caminhos induzidos, ou seja, caminhos minimais que são aqueles que não podem ser reduzidos tomando-se uma aresta como atalho. Desse modo, um subconjunto $S \subset V$ é dito convexo na convexidade monofônica, ou m -convexo, quando todo vértice de todos os caminhos induzidos entre pares de vértices de S estiverem em S , dito de outro modo $I_m[S] = S$, onde $I_m[S]$ é o operador de intervalo desta convexidade.*

Definição 5.1.3 (Convexidade geodética). [9, 34] *A convexidade geodética é um tipo de convexidade caracterizada pelo fato de que os caminhos considerados são os geodésicos, ou seja, de tamanho mínimo, de forma que ao se considerar a convexidade geodética somente serão*

gerados os vértices que pertencerem aos caminhos mínimos entre pares de vértices geradores. Esta é a mais intuitiva das convexidades consideradas em grafos, pois é uma generalização natural e direta do conceito de convexidade que conhecemos na geometria euclidiana. Desse modo, um subconjunto $S \subset V$ é dito convexo na convexidade geodética, ou g -convexo, quando todo vértice de todos os caminhos mínimos entre pares de vértices de S estiver em S , ou seja, $I_g[S] = S$, onde $I_g[S]$ é o operador de intervalo desta convexidade.

5.1.1 O Problema Da Dominação

Nesta seção, estudamos resumidamente o problema do conjunto dominante em grafos clique-expandidos. Para um grafo G , denotamos por $\gamma(G)$ a cardinalidade de um conjunto dominante mínimo. Embora a dominação seja normalmente formulada para vértices, existe uma versão análoga definida sobre arestas. Essa variação descrita em [3]

- **Conjunto Dominante em Arestas**
- **Instância:** Um grafo G e um inteiro positivo ℓ .
- **Questão:** Existe um subconjunto $E' \subseteq E(G)$ tal que $|E'| \leq \ell$ e toda aresta de $E(G) \setminus E'$ seja adjacente a pelo menos uma aresta de E' ?

De maneira geral, a dominação por arestas pode ser vista como uma extensão natural da dominação por vértices. É conhecido que o problema do conjunto dominante em arestas é NP-completo mesmo quando restrito a grafos bipartidos com grau máximo igual a 3 [49]. Como grafos linha de grafos bipartidos com grau máximo 3 possuem grau máximo 4, conclui-se que o problema do conjunto dominante também é NP-completo nessas estruturas.

Adicionalmente, sabe-se que o problema do conjunto dominante permanece NP-completo mesmo quando limitado à classe dos grafos planares com grau máximo 3 [12]. Com base no Corolário 4.6.2, obtemos que essas duas condições podem ocorrer simultaneamente em grafos clique-expandidos. Assim, temos o seguinte resultado.

Teorema 5.1.2. [3] *O problema do conjunto dominante continua sendo NP-completo mesmo quando restringido a grafos 3-clique-expandidos que sejam planares e possuam grau máximo igual a 3.*

Em [49], demonstra-se que o problema do conjunto dominante de arestas é NP-completo mesmo quando restrito a grafos bipartidos com grau máximo igual a 3. Como consequência, obtém-se a NP-completude do problema também para grafos linha de grafos bipartidos com grau máximo 3. A partir desse fato e combinando os Teoremas 4.6.2 e 5.1.2, foi-se estabelecido os seguintes resultados

Corolário 5.1.1. [3] *O problema do conjunto dominante continua sendo NP-completo mesmo na classe dos grafos clique-expandidos.*

Corolário 5.1.2. [3] *O problema do conjunto dominante permanece NP-completo mesmo na classe dos grafos cúbicos que são linha de grafos bipartidos.*

Neste capítulo apresentamos a noção abstrata de convexidade e como ela pode ser adaptada ao contexto de grafos por meio da seleção de famílias de caminhos que determinam o que significa “estar entre” dois vértices. Três instâncias fundamentais foram discutidas: **convexidade** P_3 , que considera caminhos de comprimento dois e modela processos em que um vértice é gerado por pares de vizinhos; a **convexidade monofônica**, que utiliza caminhos induzidos e preserva apenas trajetórias sem atalhos; e a **convexidade geodética**, que se baseia em caminhos mínimos e é a tradução direta da ideia geométrica de segmento entre pontos. Cada uma dessas convexidades produz um operador intervalo com comportamento e consequências distintas sobre os parâmetros clássicos (número de convexidade, e número de envoltória). A escolha da convexidade adequada depende do fenômeno que se pretende modelar: P_3 é indicada para dinâmicas que exigem múltiplas influências locais (por exemplo, certos modelos de propagação e ativação neuronal), a monofônica é útil quando caminhos sem atalhos têm significado prático, e a geodética é a ferramenta natural quando distâncias mínimas e rotas curtas importam.

Do ponto de vista algorítmico, muitos parâmetros centrais são computacionalmente difíceis em grafos gerais, embora existam classes bem estudadas (árvores, cografos, grafos de intervalo, split, entre outros) para as quais algoritmos eficientes ou fórmulas fechadas estão disponíveis. Esses parâmetros estão intrinsecamente relacionados e fornecem uma visão hierárquica da propagação da convexidade no grafo. A partir deles, é possível avaliar o comportamento estrutural e dinâmico de redes complexas, identificar conjuntos críticos de vértices e compreender o papel da conectividade em processos de ativação e cobertura.

Dessa forma, o estudo dos parâmetros de convexidade não apenas aprofunda a compreensão teórica das convexidades em grafos, mas também oferece ferramentas aplicáveis à análise de redes neurais, modelos de propagação e sistemas complexos, estabelecendo uma ponte entre a matemática discreta e fenômenos reais modelados por grafos.

6 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

"Acima de tudo, não minta para si mesmo. Aquele que mente para si mesmo e escuta suas próprias mentiras acaba não distinguindo a verdade nem dentro, nem fora de si."

Fiódor Dostoiévski

Portanto, como evidenciado ao longo deste trabalho, algumas ideias motivaram a elaboração deste trabalho, fundamentando a principal finalidade, a disseminação da área, submissão de artigos, e o desenvolvimento do grupo de pesquisa na região. Explorando a classe de grafos explorada na tese [3], por se tratar de uma “família” criada recentemente, com uma alta gama de conceitos a ser explorada, algoritmos a serem definidos, além de relacionar problemas a serem exploradas dentro da classe; o estudo da complexidade computacional alguns parâmetros de convexidade, além de abordarmos as principais classes e seus teoremas de caracterização, abordando alguns exemplos e suas demonstrações de seus teoremas, com o intuito de fortalecer os conceitos da matemática discreta, com isso, visando a disseminação da área, para novos pesquisadores e grupos de pesquisa.

Para que possam com a bibliografia trabalhada ao longo dos capítulos, terem as suas primeiras noções, e possam ser um estopim para o desenvolvimento científico ainda carente em nossa região, assim que logremos de mais visibilidade e reconhecimento no meio científico, com artigos e pesquisadores renomados. Citando, as aplicações dos conceitos da computação quântica, sendo está o caminhar que a computação está se desenvolvendo atualmente.

Com isso, aprofundamos dentro desta área fundamentalmente não contemporânea, que não tinha sido muito explorada anteriormente na região, e pendemos objetivamente continuar a propagar a teoria de grafos, com o decorrer da pesquisa buscando envolver outras áreas de demasiada importância para o estudo, como os parâmetros de convexidade aplicadas a certas classes e até a classe de clique-expandido explorada anteriormente, propagando e democratizando o acesso a tal área fundamental para o nosso cotidiano. Mesmo, tendo sido realizada em conjunto ao grupo de pesquisa, ainda se ressalta inúmeras propostas para estudos posteriores da área. Exibindo algumas destas ideias abaixo:

- i) Projetar algoritmos polinomiais ou provar matematicamente a dificuldade computacional da busca do parâmetro número de envoltória restrito à classe dos grafos clique-expandidos

de raízes k -regulares e cactos;

- ii)* Projetar algoritmos polinomiais ou provar matematicamente a dificuldade computacional da busca do parâmetro Posto de um Grafo, restrito à classe dos grafos clique-expandidos;
- iii)* Estudar a complexidade computacional da variante do problema do caixeiro viajante restrito a grafos clique-expandidos;
- iv)* Prova de Limites Inferiores: Investigar e tentar estabelecer limites inferiores para a complexidade de determinados problemas, identificando as barreiras teóricas para a construção de algoritmos mais eficientes.

Referências

- [1] BONDY, A.; MURTY, U. S. R. **Graph Theory**. Springer London, 2011. (Graduate Texts in Mathematics). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=HuDFMwZOWcsC>>. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 14.
- [2] ARAÚJO, J.; DOURADO, M. C.; PROTTI, F.; SAMPAIO, R. **An introduction to graph convexity**. Rio de Janeiro: Colóquio Brasileiro de Matemática – IMPA, 2023. Citado na página 12.
- [3] SILVA, R. L. O. **Um estudo de convexidade e dominação em grafos clique-expandidos**. Tese (Tese (Doutorado)) — Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Programa de Pós-Graduação em Informática – PPGI, 2022. Citado 12 vezes nas páginas 13, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 53, 54 e 55.
- [4] SOUZA, M. G. d. **Possibilidades em Grafos Hamiltonianos**. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014. Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Orientadora: Márcia Rosana Cerioli. Citado na página 16.
- [5] SANTOS, V.; SOUZA, U. Uma introdução à complexidade parametrizada. In: SOCIEDADE BRASILEIRA DE COMPUTAÇÃO (SBC). **Anais da 34ª Jornada de Atualização em Informática – JAI 2015**. [S.l.], 2015. (XXXV Congresso da Sociedade Brasileira de Computação), p. 232–273. Citado na página 17.
- [6] SANTOS, V. F. dos. **Convexidades em grafos: Intermediações, parâmetros e conversões**. Tese (Tese (Doutorado)) — Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 18, 48 e 52.
- [7] ORE, O. **Graphs and their Uses**. 2. ed. Washington: The Mathematical Association of America, 1990. Citado 3 vezes nas páginas 18, 28 e 30.
- [8] FAVARON, O. Irredundance in inflated graphs. **Journal of Graph Theory**, v. 28, n. 2, p. 97–104, 1998. Citado na página 18.
- [9] HARARY, F.; NIEMINEN, J. Convexity in graphs. **Journal of Differential Geometry**, v. 16, n. 2, p. 185–190, 1981. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 52.
- [10] VAZIRANI, V. V. **Approximation Algorithms**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.
- [11] KARP, R. M. Reducibility among combinatorial problems. In: MILLER, R. E.; THATCHER, J. W. (Ed.). **Complexity of Computer Computations**. New York: Plenum Press, 1972. p. 85–103. Citado na página 21.
- [12] GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. **Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness**. New York: W. H. Freeman Co., 1979. Citado 4 vezes nas páginas 21, 22, 36 e 53.

- [13] SOUZA, A. L. de. **Teoria dos Grafos e Aplicações**. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)) — Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2013. Orientador: Prof. Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira. Citado 3 vezes nas páginas 22, 23 e 24.
- [14] BOLLOBÁS, B. **Modern graph theory**. [S.l.]: Springer Science Business Media, 2013. v. 184. Citado na página 26.
- [15] JURKIEWICZ, S. **Probleminhas e problemas em grafos**. S.l.: s.n. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.
- [16] COSTA, P. P. da. **Teoria de Grafos e suas Aplicações**. Tese (Dissertação (Mestrado)) — Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Câmpus de Rio Claro, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 29, 30 e 31.
- [17] DIRAC, G. A. On rigid circuit graphs. **Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg**, v. 25, p. 71–76, 1961. Citado na página 29.
- [18] MONTEIRO, M. de S. **Um estudo da técnica de decomposição em árvore na resolução de problemas combinatórios**. Tese (Doutorado), 2009. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.
- [19] TARJAN, R. E.; YANNAKAKIS, M. Simple linear-time algorithms to test chordality of graphs, test acyclicity of hypergraphs, and selectively reduce acyclic hypergraphs. **SIAM Journal on Computing**, v. 13, n. 3, p. 566–579, 1984. Citado na página 35.
- [20] HARARY, F.; HOLZMANN, C. Line graphs of bipartite graphs. **Revista da Sociedade de Matemática do Chile**, v. 1, n. 1, p. 19–22, 1974. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 39.
- [21] WHITNEY, H. Congruent graphs and the connectivity of graphs. **American Journal of Mathematics**, v. 54, n. 1, p. 150–168, 1932. Citado na página 36.
- [22] CVETKOVIĆ, D.; ROWLINSON, P.; SIMIĆ, S. **Spectral generalizations of line graphs: On graphs with least eigenvalue -2**. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. v. 314. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.
- [23] DIESTEL, R. **Graph theory (Graduate Texts in Mathematics)**. 3. ed. [S.l.]: Springer, 2006. Citado na página 36.
- [24] LEHOT, P. G. H. An optimal algorithm to detect a line graph and output its root graph. **Journal of the ACM (JACM)**, v. 21, n. 4, p. 569–575, 1974. Citado na página 36.
- [25] SOARES, P. R. **Um estudo das estruturas de grafos sem garras**. Dissertação (Master’s thesis) — Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), 2008. Citado na página 36.
- [26] BEINEKE, L. W. Characterizations of derived graphs. **Journal of Combinatorial Theory**, v. 9, n. 2, p. 129–135, 1970. Citado na página 37.
- [27] KRAUSZ, J. Démonstration nouvelle d’un théoreme de whitney sur les réseaux. **Mat. Fiz. Lapok**, v. 50, n. 1, p. 75–85, 1943. Citado na página 37.
- [28] HENNING, M. A.; KAZEMI, A. P. Total domination in inflated graphs. **Discrete Applied Mathematics**, v. 160, n. 1, p. 164–169, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 42.
- [29] MAFFRAY, F.; REED, B. A description of claw-free perfect graphs. **Journal of Combinatorial Theory**, v. 75, p. 134–156, 1999. Citado na página 43.

- [30] LEGAY, S.; MONTERO, L. **On the edge-biclique graph and the iterated edge-biclique operator**. 2019. Preprint. Citado na página 44.
- [31] SIERKSMA, G. Exchange properties of convexity spaces. In: **North-Holland Mathematics Studies**. [S.l.]: Elsevier, 1984. v. 87, p. 293–305. Citado na página 46.
- [32] LEVI, F. W. On helly's theorem and the axioms of convexity. **The Journal of the Indian Mathematical Society**, v. 15, p. 65–76, 1951. Citado na página 46.
- [33] VEL, M. L. J. V. de. **Theory of Convex Structures**. [S.l.]: Elsevier Science Publishers, 1993. (North-Holland Mathematical Library). Citado na página 46.
- [34] PELAYO, I. M. **Geodesic Convexity in Graphs**. [S.l.]: Springer New York, 2013. (SpringerBriefs in Mathematics). Citado 2 vezes nas páginas 48 e 52.
- [35] CENTENO, C. **Convexidade P3 em grafos: parâmetros e complexidade**. 152 p. Tese (Tese (Doutorado em Ciência da Computação)) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2008. Citado na página 48.
- [36] DOURADO, M. C.; GIMBEL, J. G.; KRATOCHVÍL, J.; PROTTI, F.; SZWARCFITER, J. L. On the computation of the hull number of a graph. **Discrete Mathematics**, v. 309, n. 18, p. 5668–5674, 2009. Citado na página 49.
- [37] DOURADO, M. C.; PROTTI, F.; RAUTENBACH, D.; SZWARCFITER, J. L. Some remarks on the geodetic number of a graph. **Discrete Mathematics**, v. 310, n. 4, p. 832–837, fev. 2010. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.
- [38] COSTA, E. R. **Monophonic Convexity in Classes of Graphs**. Tese (PhD thesis) — Universidade Federal do Ceará, 2015. Citado na página 49.
- [39] DOURADO, M. C.; PROTTI, F.; SZWARCFITER, J. L. Complexity results related to monophonic convexity. **Discrete Applied Mathematics**, v. 158, n. 12, p. 1268–1274, 2010. Traces from LAGOS 07 – IV Latin American Algorithms, Graphs, and Optimization Symposium, Puerto Varas, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 52.
- [40] DOURADO, M. C.; PROTTI, F.; RAUTENBACH, D.; SZWARCFITER, J. L. On the convexity number of graphs. **Graphs and Combinatorics**, v. 28, n. 3, p. 333–345, maio 2012. Citado na página 49.
- [41] CENTENO, C. C.; DOURADO, M. C.; SZWARCFITER, J. L. On the convexity of paths of length two in undirected graphs. **Electronic Notes in Discrete Mathematics**, p. 11–18, 2009. Citado na página 49.
- [42] VEL, M. L. J. V. de. **Theory of Convex Structures**. [S.l.]: Elsevier Science Publishers, 1993. (North-Holland Mathematical Library). Citado na página 49.
- [43] BLIDIA, M. Independence and 2-domination in trees. **Australasian Journal of Combinatorics**, v. 33, p. 317–327, 2005. Citado na página 50.
- [44] CARO, Y.; RODITTY, Y. A note on the k -domination number of a graph. **International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences**, v. 13, n. 1, p. 205–206, 1990. Citado na página 50.

- [45] CENTENO, C. C. **A convexidade P3 para grafos não direcionados**. Tese (PhD thesis) — UFRJ, 2012. <<https://www.cos.ufrj.br/index.php/pt-BR/publicacoes-pesquisa>>. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 52.
- [46] PALUGA, E. M.; JR., S. R. C. Monophonic numbers of the join and composition of connected graphs. **Discrete Mathematics**, v. 307, n. 9–10, p. 1146–1154, 2007. Citado na página 50.
- [47] ATICI, M. Computational complexity of geodetic set. **International Journal of Computer Mathematics**, v. 79, n. 5, p. 587–591, 2002. Citado na página 50.
- [48] FARBER, M.; JAMISON, R. E. Convexity in graphs and hypergraphs. **SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods**, v. 7, n. 3, p. 433–444, 1986. Citado na página 52.
- [49] YANNAKAKIS, M.; GAVRIL, F. Edge dominating sets in graphs. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, v. 38, n. 3, p. 364–372, 1980. Citado na página 53.