



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SALINÓPOLIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RAFAEL SANTOS DA COSTA

**ATRATOR GLOBAL PARA UM SISTEMA DE MISTURA BINÁRIA DE SÓLIDOS
PARCIALMENTE AMORTECIDO**

SALINÓPOLIS-PA
2022

RAFAEL SANTOS DA COSTA

**ATRATOR GLOBAL PARA UM SISTEMA DE MISTURA BINÁRIA DE SÓLIDOS
PARCIALMENTE AMORTECIDO**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado a Faculdade de Matemática do Campus Universitário de Salinópolis da Universidade Federal do Pará, como requisito básico para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Mirelson Martins Freitas

SALINÓPOLIS-PA
2022

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

C837a Costa, Rafael Santos da.
Atrator global para um sistema de mistura binária de sólidos
parcialmente amortecido / Rafael Santos da Costa. — 2022.
20 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Mirelson Martins Freitas
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade
Federal do Pará, Campus Universitário de Salinópolis, Curso de
Licenciatura em Matemática, Salinópolis, 2022.

1. Mistura de Sólidos. 2. Métodos de quase estabilidade .
3. Atrator global . I. Título.

CDD 519.8

RAFAEL SANTOS DA COSTA

**ATRATOR GLOBAL PARA UM SISTEMA DE MISTURA BINÁRIA DE SÓLIDOS
PARCIALMENTE AMORTECIDO**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado a Faculdade de Matemática do Campus Universitário de Salinópolis da Universidade Federal do Pará, como requisito básico para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

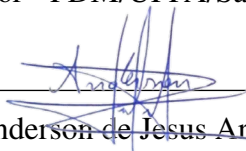
Orientador: Prof. Dr. Mirelson Martins Freitas

Data de Aprovação: 15/12/2022

BANCA EXAMINADORA



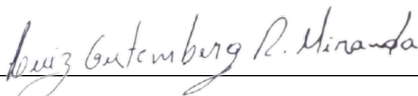
Prof. Dr. Mirelson Martins Freitas
Orientador - PDM/UFGPA/Salinópolis



Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos
Examinador Interno - PDM/UFGPA/Salinópolis



Prof. Dr. Manoel Jeremias dos Santos
Examinador Externo - PDM/UFGPA/Abaetetuba



Prof. Dr. Luiz Gutemberg Rosário Miranda
Examinador Interno - UFGPA/Salinópolis

ATRATOR GLOBAL PARA UM SISTEMA DE MISTURA BINÁRIA DE SÓLIDOS PARCIALMENTE AMORTECIDO

Rafael Santos da Costa¹
Mirelson Martins Freitas²

¹Universidade Federal do Pará, Faculdade de Matemática - UFPA/Salinópolis
E-mail: rafael_santos723@outlook.com

²Universidade Federal do Pará, Faculdade de Matemática - UFPA/Salinópolis
E-mail: mirelson@ufpa.br

RESUMO

No presente trabalho, é exposto um estudo a cerca da dinâmica de longo prazo das soluções de um sistema de equações diferenciais parciais (EDPs), que visa modelar uma mistura binária de sólidos, levando em consideração que há um mecanismo de dissipação por atrito atuando apenas na equação elástica e submetido a termo fonte não linear. Tomando como base métodos de quase-estabilidade, propostos recentemente por Chueshov e Lasiecka, provamos a existência de um atrator global com dimensão fractal finita, sendo que, este é caracterizado por uma variedade instável do conjunto de pontos estacionários.

Palavras Chaves: Mistura de sólidos; Métodos de quase-estabilidade; Atrator global.

Sumário

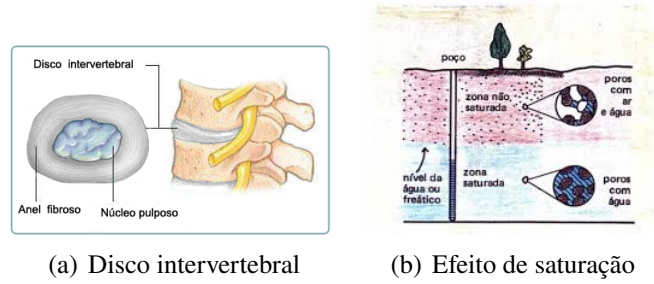
1	Introdução	5
2	Preliminares	7
2.1	Boa Colocação	8
3	Atratores globais	11
3.1	Quase-estabilidade	12
3.2	Sistema gradiente e pontos estacionários	18
3.3	Existência e dimensão fractal de atratores	19

1 Introdução

Nos últimos anos, nota-se que a teoria de mistura de sólidos vem ganhando destaque, apresentando pesquisas voltadas para aplicação em estruturas biológicas, modelagem de materiais porosos, sejam estes levando em consideração o preenchimento do meio por fluídos e/ou gás, dentre outros problemas inerentes da engenharia [13, 3, 4, 14].

Na figura 1, apresentamos aplicações da teoria de mistura de sólidos, em (a) é exposto o problema da degeneração estrutural do tecido do disco intervertebral que, de acordo com [13] é composto por três constituintes principais: água, proteoglicano e colágeno. Além disso, vale ressaltar que uma estrutura deste tipo, quando saudável experimenta instantaneamente altas tensões de tração e compressão sob carga fisiológica. Nesse sentido, modelos construtivos, devem apresentar precisão para as grandes deformações do fluxo de fluido através do proteoglicano-colágeno. Daí surge a necessidade de buscar teorias que retratem tal precisão, para modelar fluxo de fluido que há através do disco.

Figura 1 – Aplicações da teoria de Mistura de Sólidos.



(a) Disco intervertebral

(b) Efeito de saturação

Em (b) ilustramos o efeito relativo das frações de fluido que preenche o meio poroso, conhecido como saturação. Na referência [2], o autor expõe uma análise a cerca do desenvolvimento histórico das equações constitutivas utilizadas para modelar sólidos porosos saturados, com o propósito de compreender as dificuldades em modelar problemas desta ordem, além de tentar fornecer uma base teórica para uma derivação consistente das equações utilizadas nesta teoria.

O estudo do sistema de equações que regem a teoria linear de misturas de sólidos (caso isotérmico), foi proposto por Ieşan [12] (podendo ser encontrado também em [16]), é dado por

$$\rho_z z_{tt} = T_x - P + F, \quad \rho_u u_{tt} = S_x + P + H, \quad (1)$$

onde,

$$T = a_1 z_x + a_2 u_x, \quad S = a_s z_x + a_3 u_x, \quad (2)$$

e

$$P = \xi(z_t - u_t), \quad \xi \geq 0. \quad (3)$$

Nesta abordagem, $z = z(x, t)$ denota o deslocamento do fluido e $u = u(x, t)$ expressa um material sólido elástico, sendo que ρ_z e ρ_u são as densidades de massa. T e S representam tensões parciais, P é a força interna do corpo, F e H denotam forças externas atuando no sistema.

Em contrapartida Quintanilla [15], contribui para a teoria, estudando o sistema apresentado por Ieşan, assumindo que as forças externas satisfazem

$$F = \mu z_{xxt}, \quad H = 0. \quad (4)$$

Por outro lado, Wang e Guo [19] provam um resultado de estabilidade exponencial usando o método espectral com a suposição de que

$$\int_0^1 \gamma(x) dx > 0. \quad (5)$$

Nos últimos anos, diversos autores vem contribuindo para o desenvolvimento da teoria, alguns resultados recentes podem ser encontrados em [1, 17, 18, 5].

Neste presente trabalho, consideramos um sistema de mistura binária de sólidos parcialmente amortecido dado por:

$$\begin{cases} \rho_z z_{tt} - a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ \rho_u u_{tt} - a_3 u_{xx} - a_2 z_{xx} + \mu u_t + f(u) = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \end{cases} \quad (6)$$

em que u_t e $f(u)$ são termos de amortecimento por atrito e fonte não linear, respectivamente, e μ é uma constante positiva. O sistema da equação (6) possui condições iniciais e de contorno definidas da seguinte forma:

$$\begin{cases} z(x, 0) = z_0(x), z_t(x, 0) = z_1(x), x \in (0, L), \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), x \in (0, L), \\ z(0, t) = z_x(L, t) = u(0, t) = u_x(L, t) = 0, t > 0. \end{cases} \quad (7)$$

Aqui, a_1 e a_3 são constantes positivas e a_2 é um número real diferente de 0 satisfazendo a relação

$$a_1 a_3 > a_2^2. \quad (8)$$

Nosso principal objetivo é provar a existência de um atrator global com dimensão fractal finita. Devemos destacar que todos resultados obtidos neste trabalho independem das velocidades das ondas do sistema. Este resultado é único e inesperado, pois ainda não vimos nenhum trabalho publicado em sistemas semelhantes como Timoshenko, Porous e Bresse, com um único mecanismo de amortecimento sem a suposição de velocidades de onda iguais. Por exemplo, mencionamos o trabalho de Feng e Yang [7] onde eles consideraram um sistema Timoshenko com amortecimento friccional, atraso e termos de origem. Eles provaram a existência de um atrator global com dimensão fractal finita e a existência de atratores exponenciais para o caso de velocidades de onda iguais. O estudo de atratores para problemas de misturas totalmente amortecidos, isto é, com damping nas duas equações, podem ser encontrados nas recentes referências [8, 9, 10].

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: Na Seção 2, introduzimos notações, hipóteses e comentamos sem provar a boa colocação do problema. Além disso, estabelecemos algumas estimativas de energia. Na seção 3, provamos que o sistema dinâmico gerado pelo problema (6)-(7) é quase-estável e gradiente, donde concluímos a existência de um atrator global com dimensão fractal finita.

2 Preliminares

Nesta seção, introduzimos alguns conceitos e notações utilizadas neste trabalho, bem como hipóteses fundamentais para o desenvolvimento do mesmo.

Usamos ao longo deste trabalho os espaços de Lebesgue padrão $L^r(0, L)$, $r \geq 1$, com a norma denotada por $\|\cdot\|$. Denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno em $L^2(0, L)$. Vamos considerar o espaço de Sobolev

$$H_*^1(0, L) = \{u \in H^1(0, L) : u(0) = 0\}. \quad (9)$$

Como $u(0) = 0$, vale a desigualdade de Poincaré

$$\lambda_0 \|u\|_2^2 \leq \|u_x\|_2^2, \quad \forall u \in H_*^1(0, L), \quad (10)$$

onde $\lambda_0 > 0$ é a constante de Poincaré. Portanto, $\|u\|_{H_*^1(0, L)} := \|u_x\|_2$ define norma equivalente em $H_*^1(0, L)$.

Definimos o espaço de fase como

$$\mathcal{H} = H_*^1(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L^2(0, L) \times L^2(0, L), \quad (11)$$

com a norma

$$\|(z, u, \phi, \varphi)\|_{\mathcal{H}}^2 = \rho_z \|\phi\|_2^2 + \rho_u \|\varphi\|_2^2 + \left(a_3 - \frac{a_2^2}{a_1}\right) \|u_x\|_2^2 + \left\| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u_x + \sqrt{a_1} z_x \right\|_2^2. \quad (12)$$

Observemos que existem constantes $\kappa_0 > 0$ e $\eta_0 > 0$ tais que

$$\|z_x\|_2^2 + \|u_x\|_2^2 \leq \kappa_0 \left[\left(a_3 - \frac{a_2^2}{a_1}\right) \|u_x\|_2^2 + \left\| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u_x + \sqrt{a_1} z_x \right\|_2^2 \right] \quad (13)$$

e

$$\|z\|_2^2 + \|u\|_2^2 \leq \eta_0 \left[\left(a_3 - \frac{a_2^2}{a_1}\right) \|u_x\|_2^2 + \left\| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u_x + \sqrt{a_1} z_x \right\|_2^2 \right]. \quad (14)$$

Hipótese 2.1. Consideramos que:

(A1) Seja $f \in C^1(\mathbb{R})$, existem constantes $r \geq 1$ e $k_0 > 0$ tais que

$$|f'(u)| \leq k_0(1 + |u|^{r-1}), \quad \forall u \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

(A2) Existe uma constante $k_1 > 0$, tal que

$$F(u) \geq -k_1 \quad e \quad f(u)u - F(u) \geq -k_1, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad (16)$$

onde $F(u) = \int_0^u f(s)ds$.

2.1 Boa Colocação

Seja $U = (z, u, \phi, \varphi) \in \mathcal{H}$ em que $\phi = z_t$ e $\varphi = u_t$. Podemos reescrever (6)-(7) como um problema de Cauchy equivalente:

$$\begin{cases} \frac{dU(t)}{dt} + \mathcal{A}U(t) = \mathcal{F}(U(t)), & t > 0, \\ U(0) = U_0 \in \mathcal{H}, \end{cases} \quad (17)$$

em que $U_0 = (z_0, u_0, z_1, u_1) \in \mathcal{H}$, $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ e $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ são definidos por

$$\mathcal{A}U := \begin{pmatrix} -\phi \\ -\varphi \\ -\frac{1}{\rho_z}(a_1z + a_2u)_{xx} \\ -\frac{1}{\rho_u}(a_3u + a_2z)_{xx} + \frac{\mu}{\rho_u}\varphi \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}(U) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\rho_u}f(u) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

O domínio de \mathcal{A} é dado por

$$D(\mathcal{A}) := \{U = (z, u, \phi, \varphi) \in \mathcal{H} : z, u \in H^2(0, L), \\ \phi, \varphi \in H_*^1(0, L), z_x(L) = u_x(L) = 0\}. \quad (19)$$

Teorema 2.1 (Boa Colocação). *Suponha que as hipóteses (A1) e (A2) sejam satisfeitas, então temos:*

(i) *Se os dados iniciais $U_0 \in \mathcal{H}$, então o problema (17) possui uma única solução fraca $U \in C([0, \infty), \mathcal{H})$ com $U(0) = U_0$.*

(ii) *Se $U_0 \in D(\mathcal{A})$, então a solução fraca acima é solução forte, ou seja,*

$$U \in C([0, \infty), D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, \infty), \mathcal{H}). \quad (20)$$

(iii) *Se U^1 e U^2 são duas soluções fracas do problema (17), então existe uma constante positiva $C_0 = C(U^1(0), U^2(0))$, de modo que*

$$\|U^1(t) - U^2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq e^{C_0 t} \|U^1(0) - U^2(0)\|_{\mathcal{H}}, \quad 0 \leq t < T. \quad (21)$$

Comentários da prova: Podemos provar que \mathcal{A} gera um C_0 -semigrupo de contrações em \mathcal{H} . Além disso, devido a hipótese (15), podemos ver que \mathcal{F} é localmente Lipschitz em \mathcal{H} . Então podemos usar a teoria de semigrupos lineares para concluir os itens (i)-(ii). A dependência contínua (iii) é obtida trabalhando com a diferença de duas soluções. O detalhamento da prova, pode ser encontrado em [11]. ■

Definimos o funcional energia total associado ao problema (6)-(7) por

$$\mathcal{E}(t) := E(t) + \int_0^L F(u(t))dx, \quad (22)$$

em que $E(t)$ é a energia correspondente a (6)-(7) dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \|z(t), u(t), z_t(t), u_t(t)\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (23)$$

Para darmos continuidade em nosso trabalho, necessitamos do seguinte resultado, que trata da lei de dissipação do nosso problema.

Lema 2.1. *A energia total (22) satisfaz a lei de dissipação:*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = -\mu \|u_t\|_2^2. \quad (24)$$

Prova: Multiplicando a equação (6)₁ por z_t e a (6)₂ por u_t e integrando sobre $(0, L)$, obtemos

$$\begin{aligned} \rho_z \int_0^L z_{tt} z_t dx - a_1 \int_0^L z_{xx} z_t dx - a_2 \int_0^L u_{xx} z_t dx + \rho_u \int_0^L u_{tt} u_t dx \\ - a_3 \int_0^L u_{xx} u_t dx - a_2 \int_0^L z_{xx} u_t dx + \mu \int_0^L u_t u_t dx + \int_0^L f(u) u_t dx = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Usando a identidade

$$\phi \phi_t = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\phi|^2,$$

conclui-se que

$$\int_0^L z_{tt} z_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |z_t|^2 dx, \quad (26)$$

$$\int_0^L u_{tt} u_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |u_t|^2 dx. \quad (27)$$

Integrando por partes $\int_0^L z_{xx} z_t dx$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^L z_{xx} z_t dx &= z_t z_x \Big|_0^L - \int_0^L z_x z_{tx} dx \\ &= - \int_0^L z_x z_{tx} dx = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |z_x|^2 dx. \end{aligned} \quad (28)$$

Analogamente, deduz-se

$$\int_0^L u_{xx} u_t dx = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |u_x|^2 dx. \quad (29)$$

Agora, usando novamente integração por partes, vemos facilmente que

$$\begin{aligned} \int_0^L u_{xx} z_t dx &= u_x z_t \Big|_0^L - \int_0^L u_x z_{tx} dx \\ &= - \int_0^L u_x z_{tx} dx, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\int_0^L z_{xx} u_t dx = - \int_0^L z_x u_{tx} dx. \quad (31)$$

Somando (30) e (31) segue-se que

$$\int_0^L (u_{xx}z_t + z_{xx}u_t)dx = - \int_0^L (u_xz_{tx} + z_xu_{tx})dx. \quad (32)$$

Notando que

$$\frac{d}{dt}(z_xu_x) = z_{xt}u_x + z_xu_{xt},$$

conclui-se que

$$\int_0^L (u_{xx}z_t + z_{xx}u_t)dx = -\frac{d}{dt} \int_0^L z_xu_xdx. \quad (33)$$

Usando o fato de que $F' = f$ e a regra da cadeia, deduzimos que

$$\int_0^L f(u)u_tdx = \int_0^L F'(u)u_tdx = \frac{d}{dt} \int_0^L F(u(t))dx. \quad (34)$$

Substituindo as identidades (26)-(34) em (25), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_z}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |z_t|^2 dx + \frac{a_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |z_x|^2 dx + a_2 \frac{d}{dt} \int_0^L z_x u_x dx \\ & + \frac{\rho_u}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |u_t|^2 dx + \frac{a_3}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |u_x|^2 dx + \mu \|u_t\|_2^2 + \frac{d}{dt} \int_0^L F(u(t)) dx = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Agrupando os termos acima, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\rho_z \int_0^L |z_t|^2 dx + a_1 \int_0^L |z_x|^2 dx + 2a_2 \int_0^L z_x u_x dx + \rho_u \int_0^L |u_t|^2 dx + a_3 \int_0^L |u_x|^2 dx \right) \right. \\ \left. + \int_0^L F(u(t)) dx \right] = -\mu \|u_t\|_2^2. \end{aligned} \quad (36)$$

Temos ainda,

$$\left| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u_x + \sqrt{a_1} z_x \right|^2 = a_1 z_x z_x + 2a_2 z_x u_x + \frac{a_2^2}{a_1} u_x u_x.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^L (a_1 |z_x|^2 + 2a_2 z_x u_x) dx &= \int_0^L (a_1 |z_x|^2 + 2a_2 z_x u_x + \frac{a_2^2}{a_1} u_x u_x - \frac{a_2^2}{a_1} u_x u_x) dx \\ &= \int_0^L \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u_x + \sqrt{a_1} z_x \right|^2 dx - \frac{a_2^2}{a_1} \int_0^L |u_x|^2 dx. \end{aligned} \quad (37)$$

Substituindo (37) em (36) resulta imediatamente que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\rho_z \int_0^L |z_t|^2 dx + \rho_u \int_0^L |u_t|^2 dx + \left(a_3 - \frac{a_2^2}{a_1} \right) \int_0^L |u_x|^2 dx + \int_0^L \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u_x + \sqrt{a_1} z_x \right|^2 dx \right) \right. \\ \left. + \int_0^L F(u(t)) dx \right] = -\mu \|u_t\|_2^2. \end{aligned} \quad (38)$$

Consequentemente,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = -\mu \|u_t\|_2^2. \quad (39)$$

completando a prova do lema. ■

Precisamos ainda, do resultado auxiliar enunciado a seguir, este por sua vez, terá relevância para a demonstração do resultado principal que será apresentado na próxima seção.

Lema 2.2. *Seja $U(t) = (z(t), u(t), z_t(t), u_t(t))$ uma solução de (6) - (7). Então existe uma constante $C_F > 0$ tal que*

$$\mathcal{E}(t) \geq \frac{1}{2} \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 - C_F, \quad \forall t \geq 0, \quad (40)$$

$$\mathcal{E}(t) \leq C_F (\|U(t)\|_{\mathcal{H}}^{r+1} + 1), \quad \forall t \geq 0. \quad (41)$$

Prova: Da hipótese (16), segue-se imediatamente que

$$\int_0^L F(u) \geq - \int_0^L k_1 dx = -k_1 L. \quad (42)$$

Como

$$\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2} \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^L F(u(t)) dx. \quad (43)$$

Concluimos que

$$\mathcal{E}(t) \geq \frac{1}{2} \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 - k_1 L. \quad (44)$$

Tomando $C_F = k_1 L$, obtemos

$$\mathcal{E}(t) \geq \frac{1}{2} \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 - C_F. \quad (45)$$

Provaremos agora a desigualdade (41). Pelo Teorema do Valor Médio, existe $0 < \theta < 1$ tal que

$$|f(u)| = |f(0) + f'(\theta u)u| \leq C(1 + |u|^{r-1})|u| \leq C(1 + |u|^r). \quad (46)$$

Assim, usando a imersão $H^1(0, L) \hookrightarrow L^{r+1}(0, L)$ e a desigualdade de Young, deduzimos que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &\leq \frac{1}{2} \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 + CL + C \|u\|_{r+1}^{r+1} \\ &\leq \frac{1}{2} \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 + CL + C \|u_x\|_2^{r+1} \\ &\leq \frac{1}{2} \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 + CL + C \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^{r+1} \\ &\leq C(1 + \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^{r+1}). \end{aligned}$$

Isso finaliza a prova. ■

3 Atratores globais

A seguir é apresentada a definição de atrator global, bem como algumas resultados abstratos importantes para o desenvolvimento deste trabalho.

Definição 3.1. *Um subconjunto $\mathfrak{A} \subset H$ é um **atrator global** para o sistema dinâmico $(H, S(t))$, se satisfaz as seguintes condições:*

- \mathfrak{A} é compacto;
- \mathfrak{A} é invariante, isto é, $S(t)\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ para todo $t \geq 0$;
- \mathfrak{A} atrai conjuntos limitados pela ação do semigrupo $S(t)$, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}_H(S(t)B, \mathfrak{A}) = 0,$$

para todo conjunto limitado $B \subset H$, onde dist_H é a semidistância de Hausdorff em H .

Definição 3.2 (Sistema Gradiente). *Um sistema dinâmico $(H, S(t))$ é chamado gradiente, se existe uma funcional de Lyapunov estrito em H , isto é, existe uma função contínua Φ tal que $t \rightarrow \Phi(S(t)y)$ é não-crescente para qualquer $y \in H$, e se $\Phi(S(t)y) = \Phi(y)$ para todo $t > 0$ e algum $y \in H$, então y é um ponto estacionário de $(H, S(t))$, isto é, $S(t)y = y$ para todo $t \geq 0$.*

Teorema 3.1 (Corolário 7.5.7, [6]). *Seja $(H, S(t))$ um sistema de gradiente assintoticamente compacto em um espaço de Banach H , com o funcional Lyapunov correspondente denotado por Φ . Suponha que*

$$\Phi(y) \rightarrow \infty \text{ se e somente se } \|y\|_H \rightarrow \infty,$$

e que o conjunto de pontos estacionários \mathcal{N} é limitado. Então o sistema $(H, S(t))$ possui um atrator global compacto caracterizado por $\mathfrak{A} = \mathbb{M}_+^u(\mathcal{N})$.

Sejam X e Y espaços de Banach reflexivos com X compactamente imerso em Y . Consideramos o espaço $H = X \times Y$ e o sistema dinâmico $(H, S(t))$ dado por

$$S(t)y = (u(t), u_t(t)), \quad y = (u(0), u_t(0)) \in H, \quad (47)$$

sendo que u tem regularidade $u \in C([0, \infty); X) \cap C^1([0, \infty); Y)$. Dizemos que o sistema dinâmico $(H, S(t))$ é **quase-estável** sobre o conjunto $B \subset H$, se existir uma semi-norma compacta n_X em X e funções escalares não negativas a e c , localmente limitadas em $[0, \infty)$, e $b \in L^1(0, \infty)$, com $\lim_{t \rightarrow \infty} b(t) = 0$ tais que

$$\|S(t)y_1 - S(t)y_2\|_H^2 \leq a(t)\|y_1 - y_2\|_H^2, \quad (48)$$

e

$$\|S(t)y_1 - S(t)y_2\|_H^2 \leq b(t)\|y_1 - y_2\|_H^2 + c(t) \sup_{0 \leq s \leq t} [n_X(u^1(s) - u^2(s))]^2, \quad (49)$$

para todo $y_1, y_2 \in B$. Aqui, denotamos $S(t)y_i = (u^i(t), u_t^i(t))$, $i = 1, 2$.

Teorema 3.2 (Proposição 7.9.4, [6]). *Seja $(H, S(t))$ um sistema dinâmico satisfazendo (47). Se Assumimos que $(H, S(t))$ é quase-estável sobre qualquer conjunto invariante limitado $B \subset H$. Então, $(H, S(t))$ é assintoticamente compacto.*

Teorema 3.3 (Proposição 7.9.6, [6]). *Suponha que $(H, S(t))$ seja um sistema dinâmico satisfazendo (47). Se $(H, S(t))$ possui um atrator global compacto \mathfrak{A} e é quase estável em \mathfrak{A} . Então a dimensão fractal de \mathfrak{A} é finita.*

3.1 Quase-estabilidade

Nosso próximo objetivo é provar que o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ é quase-estável. Para isso, o teorema a seguir desempenha um papel fundamental.

Teorema 3.4 (Desigualdade de Estabilizabilidade). *Suponha que as hipóteses (A1) e (A2) sejam satisfeitas. Seja B um conjunto invariante positivamente limitado em \mathcal{H} e sejam $S(t)U^i = (z^i, u^i, z_t^i, u_t^i)$ as soluções fracas de (6)-(7) com a condição inicial $U_i \in B$, $i = 1, 2$. Então, existem constantes $\mu_0, \gamma_0, C'_B > 0$ tais que*

$$E(t) \leq \gamma_0 e^{-\mu_0 t} E(0) + C'_B \int_0^t e^{-\mu_0(t-s)} \|u(s)\|_{2r}^2 ds, \quad (50)$$

onde $u = u^1 - u^2$.

Prova. As funções $z = z^1 - z^2$ e $u = u^1 - u^2$ resolvem o sistema:

$$\begin{cases} \rho_z z_{tt} - a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} = 0, \\ \rho_u u_{tt} - a_3 u_{xx} - a_2 z_{xx} + \mu u_t + f(u^1) - f(u^2) = 0, \end{cases} \quad (51)$$

com condições de fronteira

$$z(0) = z_x(L) = u(0) = u_x(L) = 0, \quad (52)$$

e iniciais

$$(z(0), u(0), z_t(0), u_t(0)) = U^1 - U^2. \quad (53)$$

A partir de agora, dividiremos a prova em alguns passos.

Passo 1: Primeiro, definimos o funcional

$$E(t) = \frac{1}{2} \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (54)$$

Multiplicando (51)₁ por z_t e (51)₂ por u_t , integrando ambas em $(0, L)$, obtemos

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\mu \int_0^L |u_t|^2 dx - \int_0^L (f(u^1) - f(u^2))u_t dx. \quad (55)$$

Usando a hipótese 15 e o Teorema do Valor Médio concluímos que existe $0 < \theta < 1$ tal que

$$\begin{aligned} |f(u^1) - f(u^2)| &\leq |f'(\theta u^1 - (1 - \theta)u^2)| |u^1 - u^2| \\ &\leq |f'(\theta u^1 - (1 - \theta)u^2)| |u| \\ &\leq k_0(1 + |\theta u^1 - (1 - \theta)u^2|^{r-1}) |u| \\ &\leq \tilde{k}_0(1 + |u^1|^{r-1} + |u^2|^{r-1}) |u|. \end{aligned} \quad (56)$$

Isso implica que

$$\underbrace{\int_0^L |f(u^1) - f(u^2)| |u_t| dx}_I \leq \tilde{k}_0 \int_0^L (1 + |u^1|^{r-1} + |u^2|^{r-1}) |u| |u_t| dx. \quad (57)$$

Da Desigualdade de Hölder Generalizada sabemos que, dadas $g_1 \in L^{p_1}$, $g_2 \in L^{p_2}$, $g_3 \in L^{p_3}$, temos

$$\int_0^L |g_1 g_2 g_3| dx \leq \left(\int_0^L |g_1|^{p_1} dx \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\int_0^L |g_2|^{p_2} dx \right)^{\frac{1}{p_2}} \left(\int_0^L |g_3|^{p_3} dx \right)^{\frac{1}{p_3}}, \quad (58)$$

em que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1$. Tomando $g_1 = (1 + |u^1|^{r-1} + |u^2|^{r-1})$, $g_2 = |u|$ e $g_3 = |u_t|$ e notando que $\frac{r-1}{2r} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{2} = 1$ obtém-se

$$\begin{aligned} I &\leq \left(\int_0^L (1 + |u^1|^{r-1} + |u^2|^{r-1})^{\frac{2r}{r-1}} dx \right)^{\frac{r-1}{2r}} \left(\int_0^L |u|^{2r} dx \right)^{\frac{1}{2r}} \left(\int_0^L |u_t|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(1 + \|u^1\|_{2r}^{r-1} + \|u^2\|_{2r}^{r-1}) \|u\|_{2r} \|u_t\|_2. \end{aligned} \quad (59)$$

Usando o fato de que B é limitado e a desigualdade Young, vemos que

$$I \leq C_B \|u\|_{2r} \|u_t\|_2 \leq C_B \|u\|_{2r}^2 + \frac{\mu}{2} \|u_t\|_2^2. \quad (60)$$

Combinando (55) e (60) concluímos que existe uma constante $C_B > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -\frac{\mu}{2} \|u_t\|_2^2 + C_B \|u\|_{2r}^2. \quad (61)$$

Passo 2: Consideramos o funcional

$$\mathcal{F}(t) := -\rho_z \int_0^L z_t z dx - \rho_u \int_0^L u_t u dx - \frac{\mu}{2} \int_0^L |u|^2 dx. \quad (62)$$

Multiplicando (51)₁ por z e (51)₂ por u , integrando em $(0, L)$, podemos obter que

$$\begin{aligned} \rho_z \int_0^L z_{tt} z dx - a_1 \int_0^L z_{xx} z dx - a_2 \int_0^L u_{xx} z dx + \rho_u \int_0^L u_{tt} u dx - a_3 \int_0^L u_{xx} u dx \\ - a_2 \int_0^L z_{xx} u dx + \mu \int_0^L u_t u dx + \int_0^L (f(u^1) - f(u^2)) u dx = 0. \end{aligned} \quad (63)$$

Usando as seguintes identidades, $zz_{tt} = \frac{d}{dt} z z_t - |z_t|^2$ e $\int_0^L u_{xx} z dx = -\int_0^L u_x z_x dx$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(-\rho_z \int_0^L z z_t dx - \rho_u \int_0^L u u_t dx - \frac{\mu}{2} \int_0^L |u|^2 dx \right) = -\rho_z \int_0^L |z_t|^2 dx - \rho_u \int_0^L |u_t|^2 dx \\ + a_1 \int_0^L |z_x|^2 dx + a_3 \int_0^L |u_x|^2 dx + 2a_2 \int_0^L z_x u_x dx + \int_0^L (f(u^1) - f(u^2)) u dx. \end{aligned} \quad (64)$$

De modo análogo aos resultados obtidos nas equações (37) e (60), temos que $\mathcal{F}(t)$ satisfaz a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}(t) \leq -\rho_z \int_0^L |z_t|^2 dx - \rho_u \int_0^L |u_t|^2 dx + \left(a_3 - \frac{a_2^2}{a_1} \right) \int_0^L |u_x|^2 dx \\ + \int_0^L \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u_x + \sqrt{a_1} z_x \right|^2 dx + C_B \|u\|_{2r}^2. \end{aligned} \quad (65)$$

Passo 3: Definimos o funcional

$$\mathcal{G}(t) := a_2 \rho_u \int_0^L u_t \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u + \sqrt{a_1} z \right) dx. \quad (66)$$

Multiplicando (51)₂ por $a_2 \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u + \sqrt{a_1} z \right)$ e integrando em $(0, L)$, obtemos

$$\begin{aligned} \rho_u a_2 \int_0^L \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u + \sqrt{a_1} z \right) u_{tt} dx - a_3 a_2 \int_0^L \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u + \sqrt{a_1} z \right) u_{xx} dx \\ - a_2^2 a_2 \int_0^L \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u + \sqrt{a_1} z \right) z_{xx} dx + \mu a_2 \int_0^L \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u + \sqrt{a_1} z \right) u_t dx \\ + a_2 \int_0^L \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u + \sqrt{a_1} z \right) (f(u^1) - f(u^2)) dx = 0. \end{aligned} \quad (67)$$

Usando que $u_{tt} \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u + \sqrt{a_1} z \right) = \frac{d}{dt} u_t \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u + \sqrt{a_1} z \right) - u_t \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u_t + \sqrt{a_1} z_t \right)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\rho_u a_2 \int_0^L \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u + \sqrt{a_1} z \right) u_t dx \right] = a_2 \int_0^L (a_3 u_{xx} + a_2 z_{xx}) \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u + \sqrt{a_1} z \right) dx \\ - \mu a_2 \int_0^L \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u + \sqrt{a_1} z \right) u_t dx - a_2 \int_0^L \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u + \sqrt{a_1} z \right) (f(u^1) - f(u^2)) dx \\ + \rho_u a_2 \int_0^L \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u_t + \sqrt{a_1} z_t \right) u_t dx. \end{aligned} \quad (68)$$

Note que $a_3 u_{xx} + a_2 z_{xx} = (a_3 - a_2^2/a_1)u_{xx} + \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}\left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u_{xx} + \sqrt{a_1}z_{xx}\right)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{G}(t) &= -a_2(a_3 - a_2^2/a_1) \int_0^L u_x \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u_x + \sqrt{a_1}z_x \right) dx - \frac{a_2^2}{\sqrt{a_1}} \int_0^L \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u_x + \sqrt{a_1}z_x \right|^2 dx \\ &\quad - \mu a_2 \int_0^L u_t \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u + \sqrt{a_1}z \right) dx - a_2 \int_0^L (f(u^1) - f(u^2)) \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u + \sqrt{a_1}z \right) dx \\ &\quad + a_2 \rho_u \int_0^L u_t \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u_t + \sqrt{a_1}z_t \right) dx. \end{aligned} \quad (69)$$

Analogamente a (60), podemos encontrar que

$$\underbrace{\int_0^L (f(u^1) - f(u^2)) \left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u + \sqrt{a_1}z \right) dx}_I \leq C_B \|u\|_{2r} \left\| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u + \sqrt{a_1}z \right\|_2. \quad (70)$$

Usando as desigualdades de Young e Poincaré conclui-se que

$$I \leq C_B \|u\|_{2r}^2 + \frac{a_2^2}{\sqrt{a_1}} \left\| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u + \sqrt{a_1}z \right\|_2^2. \quad (71)$$

Substituindo a estimativa anterior em (69) e usando a desigualdade de Young $ab \leq a^2/4\eta_i + b^2\eta_i$, ($i = 1, 2, 3$), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{G}(t) &\leq \eta_1 (a_3 - a_2^2/a_1)^2 \int_0^L |u_x|^2 dx + \frac{a_2^2}{4\eta_1} \int_0^L \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u_x + \sqrt{a_1}z_x \right|^2 dx \\ &\quad - \frac{a_2^2}{2\sqrt{a_1}} \int_0^L \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u_x + \sqrt{a_1}z_x \right|^2 dx + \mu^2 \eta_2 \int_0^L |u_t|^2 dx \\ &\quad + \frac{a_2^2}{4\eta_2} \int_0^L \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u + \sqrt{a_1}z \right|^2 dx + \frac{a_2^2 \rho_u}{\sqrt{a_1}} \int_0^L |u_t|^2 dx \\ &\quad + a_1 a_2^2 \eta_3 \rho_u \int_0^L |u_t|^2 dx + \frac{\rho_u}{4\eta_3} \int_0^L |z_t|^2 dx + C_B \|u\|_{2r}^2. \end{aligned} \quad (72)$$

Usando a desigualdade de Poincaré em $\int_0^L \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u + \sqrt{a_1}z \right|^2 dx$, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{G}(t) &\leq \eta_1 (a_3 - a_2^2/a_1)^2 \int_0^L |u_x|^2 dx + \frac{a_2^2}{4\eta_1} \int_0^L \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u_x + \sqrt{a_1}z_x \right|^2 dx \\ &\quad - \frac{a_2^2}{2\sqrt{a_1}} \int_0^L \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u_x + \sqrt{a_1}z_x \right|^2 dx + \mu^2 \eta_2 \int_0^L |u_t|^2 dx \\ &\quad + \frac{a_2^2 c_p}{4\eta_2} \int_0^L \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u_x + \sqrt{a_1}z_x \right|^2 dx + \frac{a_2^2 \rho_u}{\sqrt{a_1}} \int_0^L |u_t|^2 dx \\ &\quad + a_1 a_2^2 \eta_3 \rho_u \int_0^L |u_t|^2 dx + \frac{\rho_u}{4\eta_3} \int_0^L |z_t|^2 dx + C_B \|u\|_{2r}^2, \end{aligned} \quad (73)$$

onde $c_p = \frac{1}{\lambda_0}$. Agrupando alguns termos, obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{G}(t) &\leq \eta_1 \left(a_3 - \frac{a_2^2}{a_1} \right)^2 \int_0^L |u_x|^2 dx + \frac{\rho_u}{4\eta_3} \int_0^L |z_t|^2 dx \\
&\quad - \left[\frac{a_2^2}{2\sqrt{a_1}} - \left(\frac{a_2^2}{4\eta_1} + \frac{a_2^2 c_p}{4\eta_2} \right) \right] \int_0^L \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u_x + \sqrt{a_1} z_x \right|^2 dx \\
&\quad + \left(\mu^2 \eta_2 + \frac{a_2^2 \rho_u}{\sqrt{a_1}} + a_1 a_2^2 \eta_3 \rho_u \right) \int_0^L |u_t|^2 dx + C_B \|u\|_{2r}^2.
\end{aligned} \tag{74}$$

Escolhendo-se adequadamente valores $\eta_i \geq 0$, com $i = 1, 2, 3$ podemos ver que $\mathcal{G}(t)$ satisfaz a estimativa

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{G}(t) &\leq 2\sqrt{a_1} \left(a_3 - \frac{a_2^2}{a_1} \right)^2 \int_0^L |u_x|^2 dx - \frac{a_2^2}{4\sqrt{a_1}} \int_0^L \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u_x + \sqrt{a_1} z_x \right|^2 dx \\
&\quad + \left(2\sqrt{a_1} \mu^2 c_p + \frac{a_2^2 \rho_u}{\sqrt{a_1}} a_1 a_2^2 \eta_3 \rho_u \right) \int_0^L |u_t|^2 dx \\
&\quad + \frac{\rho_u}{4\eta_3} \int_0^L |z_t|^2 dx + C_B \|u\|_{2r}^2.
\end{aligned} \tag{75}$$

Passo 4: Considere o seguinte funcional

$$\mathcal{J}(t) := \rho_u \int_0^L u_t u dx - \frac{a_2 \rho_z}{a_1} \int_0^L z_t u dx + \frac{\mu}{2} \int_0^L |u|^2 dx. \tag{76}$$

Multiplicando (51)₁ por $-\frac{a_2}{a_1}u$ e integrando em $(0, L)$, obtemos

$$-\frac{a_2 \rho_z}{a_1} \int_0^L z_{tt} u dx + a_2 \int_0^L z_{xx} u dx + \frac{a_2^2}{a_1} \int_0^L u_{xx} u dx = 0. \tag{77}$$

Usando que $z_{tt}u = \frac{d}{dt}z_t u - z_t u_t$, temos

$$-\frac{d}{dt} \frac{a_2 \rho_z}{a_1} \int_0^L z_t u dx + \frac{a_2 \rho_z}{a_1} \int_0^L z_t u_t dx - a_2 \int_0^L z_x u_x dx - \frac{a_2^2}{a_1} \int_0^L |u_x|^2 dx = 0. \tag{78}$$

Multiplicando (51)₂ por u e integrando em $(0, L)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\rho_u \int_0^L u_t dx + \frac{\mu}{2} \int_0^L |u|^2 dx \right) - \rho_u \int_0^L |u_t|^2 dx + a_3 \int_0^L |u_x|^2 dx + a_2 \int_0^L z_x u_x dx \\
+ \int_0^L (f(u^1) - f(u^2)) u dx = 0.
\end{aligned} \tag{79}$$

Somando as estimativas (78) e (79), temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathcal{J}(t) &= \rho_u \int_0^L |u_t|^2 dx - \frac{a_2 \rho_z}{a_1} \int_0^L z_t u_t dx - \left(a_3 - \frac{a_2^2}{a_1} \right) \int_0^L |u_x|^2 dx \\
&\quad - \int_0^L (f(u^1) - f(u^2)) u dx = 0.
\end{aligned} \tag{80}$$

Agora, usando a desigualdade de Young e levando em consideração (60), podemos fazer algumas manipulações e obter que $\mathcal{J}(t)$ satisfaz a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathcal{J}(t) &\leq \left(\rho_u + \frac{\eta_4 a_2^2 \rho_z}{a_2^2} \right) \int_0^L |u_t|^2 dx + \frac{\rho_z}{4\eta_4} \int_0^L |z_t|^2 dx \\
&\quad - \left(a_3 - \frac{a_2^2}{a_1} \right) \int_0^L |u_x|^2 dx + C_B \|u\|_{2r}^2.
\end{aligned} \tag{81}$$

Passo 5: Tomemos o funcional

$$\mathcal{L}(t) := N_1 E(t) + N_2 \mathcal{F}(t) + N_3 \mathcal{G}(t) + N_4 \mathcal{J}(t). \quad (82)$$

Utilizando a Desigualdade de Young e (14), segue que

$$|\mathcal{L}(t) - N_1 E(t)| \leq N_2 |\mathcal{F}(t)| + N_3 |\mathcal{G}(t)| + N_4 |\mathcal{J}(t)| \leq \tilde{\eta} E(t), \quad \tilde{\eta} > 0. \quad (83)$$

Consequentemente, para $N_1 > \tilde{\eta}$, temos

$$(N_1 - \tilde{\eta})E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq (N_1 + \tilde{\eta}), \quad \forall t \geq 0. \quad (84)$$

Passo 6: Pelas estimativas (61), (65), (75) e (81), temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) &\leq - \left[\frac{N_1 \mu}{\rho_u} + N_2 - N_3 \left(\frac{2\sqrt{a_1} \mu^2 c_p}{\rho_u} + \frac{a_2^2}{\sqrt{a_1}} + a_1 a_2^2 \eta_3 \right) \right. \\ &\quad \left. - N_4 \left(1 + \frac{\eta_4 a_2^2 \rho_z}{a_1^2 \rho_u} \right) \right] \rho_u \int_0^L |u_t|^2 dx - \left(N_2 - \frac{N_3 \rho_u}{4\eta_3 \rho_z} - \frac{N_4}{4\eta_4} \right) \rho_z \int_0^L |z_t|^2 dx \\ &\quad - \left(\frac{N_3 a_2^2}{4\sqrt{a_1}} - N_2 \right) \int_0^L \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u_x + \sqrt{a_1} z_x \right|^2 dx \\ &\quad - \left[N_4 - N_2 - 2N_3 \sqrt{a_1} \left(a_3 - \frac{a_2^2}{a_1} \right) \right] \left(a_3 - \frac{a_2^2}{a_1} \right) \int_0^L |u_x|^2 dx \\ &\quad + C_B (N_1 + N_2 + N_3 + N_4) \|u\|_{2r}^2. \end{aligned} \quad (85)$$

Tomando,

$$\eta_3 = \frac{N_3 \rho_u}{2\rho_z} \quad e \quad \eta_4 = \frac{N_4}{2}. \quad (86)$$

Temos de imediato,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) &\leq - \left[\frac{N_1 \mu}{\rho_u} + \frac{N_2}{2} - N_3 \left(\frac{2\sqrt{a_1} \mu^2 c_p}{\rho_u} + \frac{a_2^2}{\sqrt{a_1}} + N_3 \frac{a_1 a_2^2 \rho_u}{2\rho_z} \right) \right. \\ &\quad \left. - N_4 \left(1 + N_4 \frac{a_2^2 \rho_z}{2a_1^2 \rho_u} \right) \right] \rho_u \int_0^L |u_t|^2 dx - (N_2 - 1) \rho_z \int_0^L |z_t|^2 dx \\ &\quad - \left(\frac{N_3 a_2^2}{4\sqrt{a_1}} - N_2 \right) \int_0^L \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u_x + \sqrt{a_1} z_x \right|^2 dx \\ &\quad - \left[N_4 - N_2 - 2N_3 \sqrt{a_1} \left(a_3 - \frac{a_2^2}{a_1} \right) \right] \left(a_3 - \frac{a_2^2}{a_1} \right) \int_0^L |u_x|^2 dx \\ &\quad + C_B (N_1 + N_2 + N_3 + N_4) \|u\|_{2r}^2. \end{aligned} \quad (87)$$

Escolhendo $N_2 > 1$ e $N_3 > (4\sqrt{a_1}/a_2^2)N_2$. Como N_2 e N_3 são fixos, podemos escolher N_4 grande o suficiente, ou seja,

$$N_4 > N_2 + 2N_3 \sqrt{a_1} (a_3 - a_2^2/a_1). \quad (88)$$

Por fim, escolhemos

$$N_1 > N_3 \frac{\rho_u}{\mu} \left(\frac{2\sqrt{a_1} \mu^2 c_p}{\rho_u} + \frac{a_2^2}{\sqrt{a_1}} + N_3 \frac{a_1 a_2^2 \rho_u}{2\rho_z} \right) + N_4 \frac{\rho_u}{\mu} \left(1 + N_4 \frac{a_2^2 \rho_z}{2a_1^2 \rho_u} \right). \quad (89)$$

Temos,

$$\xi_1 := \frac{N_1\mu}{\rho_u} + \frac{N_2}{2} - N_3 \left(\frac{2\sqrt{a_1}\mu^2 c_p}{\rho_u} + \frac{a_2^2}{\sqrt{a_1}} + N_3 \frac{a_1 a_2^2 \rho_u}{2\rho_z} \right) - N_4 \left(1 + N_4 \frac{a_2^2 \rho_z}{2a_1^2 \rho_u} \right) > 0, \quad (90)$$

$$\xi_2 := N_2 - 1 > 0, \quad (91)$$

$$\xi_3 := \frac{N_3 a_2^2}{4\sqrt{a_1}} - N_2 > 0, \quad (92)$$

$$\xi_4 := N_4 - N_2 - 2N_3\sqrt{a_1} \left(a_3 - \frac{a_2^2}{a_1} \right) > 0. \quad (93)$$

Assim, escolhendo $N_0 := 2 \min_{1 \leq i \leq 4} \{\xi_i\} > 0$, podemos concluir que existe uma constante $C_B > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L} \leq -N_0 E(t) + C_B \|u\|_{2r}^2, \quad \forall t \geq 0. \quad (94)$$

Utilizando a segunda desigualdade de (84), obtemos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L} \leq -\frac{N_0}{N_1 - \tilde{\eta}} \mathcal{L}(t) + C_B \|u\|_{2r}^2, \quad \forall t \geq 0. \quad (95)$$

Agora, aplicando o Lema de Gronwall na equação acima, obtemos

$$\mathcal{L}(t) \leq e^{-\frac{N_0}{N_1 - \tilde{\eta}} t} \mathcal{L}(0) + c_B \int_0^t e^{-\frac{N_0}{N_1 - \tilde{\eta}} (t-s)} \|u(s)\|_{2r}^2 ds. \quad (96)$$

Tomando $\gamma_0 := \frac{N_1 + \tilde{\eta}}{N_1 - \tilde{\eta}} > 0$, $\mu_0 := \frac{N_0}{N_1 + \tilde{\eta}} > 0$, $C'_B := \frac{C_B}{N_1 + \tilde{\eta}} > 0$ e usando novamente (84), temos

$$E(t) \leq \gamma_0 e^{-\mu_0 t} E(0) + C'_B \int_0^t e^{-\mu_0 (t-s)} \|u(s)\|_{2r}^2 ds. \quad (97)$$

A prova está completa. ■

3.2 Sistema gradiente e pontos estacionários

Lema 3.1. *Suponha que (A1) e (A2) sejam satisfeitas. Então o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ é gradiente com funcional de Lyapunov correspondente Φ satisfazendo*

$$\Phi(U) \rightarrow \infty \iff \|U\|_{\mathcal{H}} \rightarrow \infty. \quad (98)$$

Prova: Seja $U_0 \in \mathcal{H}$, temos que $S(t)U_0 = (z(t), u(t), z_t(t), u_t(t))$ é uma solução forte para (6)-(7). Definimos a função $\Phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Phi(S(t)U_0) = \frac{1}{2} \|z(t), u(t), z_t(t), u_t(t)\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^L F(u(t)) dx. \quad (99)$$

De (24), segue-se imediatamente que

$$\frac{d}{dt} \Phi(S(t)U_0) = -\mu \|u_t\|_2^2. \quad (100)$$

Como $\mu > 0$, tem-se $\frac{d}{dt} \Phi(S(t)U_0) \leq 0$, donde segue que Φ é não-crescente. Suponhamos que $\Phi(S(t)U_0) = \Phi(U_0) \forall t \geq 0$. Então

$$\frac{d}{dt} \Phi(U_0) = -\mu \|u_t\|_2^2 = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (101)$$

Assim, $u(x, t) = u(x)$ para todo $t \geq 0$. De (6)₂, podemos concluir que

$$-a_2 z_{xx} = a_3 u_{xx} - f(u) := \psi_1(x). \quad (102)$$

Integrando em $[x, L]$ e usando as condições de contorno, obtemos

$$a_2 z_x = \int_x^L \psi_1(x) dx := \psi_2, \quad \forall t \geq 0. \quad (103)$$

Por fim, integrando a equação anterior em $[0, x]$ e usando novamente as condições de contorno, obtemos que $z(x, t) = z(x)$ para todo $t \geq 0$. Portanto $U_0 = (z, u, 0, 0)$ é um ponto estacionário de $(\mathcal{H}, S(t))$. Segue que Φ é um funcional de Lyapunov estrito em \mathcal{H} . Logo $(\mathcal{H}, S(t))$ é gradiente. ■

Para provar (98), observemos por (40) e (41) que

$$\frac{1}{2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 - C_F \leq \Phi(U) \leq C_F (\|U\|_{\mathcal{H}}^{r+1} + 1), \quad \forall U \in \mathcal{H}, \quad (104)$$

o que implica diretamente a equivalência (98). A prova está completa. ■

Lema 3.2. *Suponha que as hipóteses (A1) e (A2) sejam satisfeitas, então o conjunto de pontos estacionários \mathcal{N} de $S(t)$ é limitado em \mathcal{H} .*

Prova: Pontos estacionários $U = (z, u, 0, 0)$ são soluções do sistema

$$\begin{cases} -a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} = 0, \\ -a_3 u_{xx} - a_2 z_{xx} + f(u) = 0. \end{cases} \quad (105)$$

Multiplicando por (105)₁ por z , (105)₂ por u e integrando em $(0, L)$, podemos obter

$$\left(a_3 - \frac{a_2^2}{a_1}\right) \|u_x\|_2^2 + \left\| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u_x + \sqrt{a_1} z_x \right\|_2^2 = - \int_0^L f(u) u dx. \quad (106)$$

Utilizando (A2), temos

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 2Lk_1, \quad \forall U \in \mathcal{N}. \quad (107)$$

Portanto, \mathcal{N} é limitado em \mathcal{H} . ■

3.3 Existência e dimensão fractal de atratores

Terminamos esta seção estabelecendo nosso principal resultado no contexto da dinâmica a longo-prazo do sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$, que consiste em provar a existência de um atrator global com dimensão fractal finita.

Teorema 3.5. *Suponha que as hipóteses (A1) e (A2) sejam válidas. Então:*

1. O sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ possui um atrator global compacto único $\mathfrak{A} \subset \mathcal{H}$, que é caracterizado pela variedade instável $\mathfrak{A} = \mathbb{M}_+^u(\mathcal{N})$ do conjunto de pontos estacionários

$$\mathcal{N} = \left\{ (z, u, 0, 0) \in \mathcal{H} \left| \begin{array}{l} -a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} = 0 \\ -a_3 u_{xx} - a_2 z_{xx} + f(u) = 0 \end{array} \right. \right\}$$

2. O atrator \mathfrak{A} tem dimensão fractal finita, isto é, $\dim_{\mathcal{H}}^f \mathfrak{A} < +\infty$.

Prova:

1. Devido a desigualdade de estabilizabilidade (3.4), o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ é quase-estável. Portanto, levando em consideração o Teorema 3.2, temos que $(\mathcal{H}, S(t))$ é assintoticamente compacto. Além disso, pelo Lema 3.1, o sistema dinâmico é gradiente e satisfaz

$$\Phi(y) \rightarrow \infty \Leftrightarrow \|y\|_{\mathcal{H}} \rightarrow \infty.$$

Temos ainda que, pelo Lema 3.2, o conjunto \mathcal{N} dos pontos estacionários de $(\mathcal{H}, S(t))$ é limitado em \mathcal{H} . Logo, pelo Teorema 3.1, podemos concluir que o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ possui atrator global dado por $\mathfrak{A} = \mathbb{M}_+^u(\mathcal{N})$.

2. Do item acima, o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ possui atrator global dado por $\mathfrak{A} = \mathbb{M}_+^u(\mathcal{N})$ e, em particular, é quase-estável em \mathfrak{A} . Segue-se do Teorema 3.3 que o atrator \mathfrak{A} possui dimensão fractal finita $\dim_{\mathcal{H}}^f \mathfrak{A} < +\infty$. ■

Referências

- [1] APALARA, Tijani A. General stability result of swelling porous elastic soils with a viscoelastic damping. **Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik**, v. 71, n. 6, p. 1-10, 2020.
- [2] BOER, R. Plastic Behaviour of Saturated Porous Media. In: **Advances in Continuum Mechanics**. Springer, Berlin, Heidelberg, 1991. p. 46-57.
- [3] BOER, R.; EHLERS, W. On the problem of fluid-and gas-filled elasto-plastic solids. **International journal of solids and structures**, v. 22, n. 11, p. 1231-1242, 1986.
- [4] BOWEN, Ray M. Incompressible porous media models by use of the theory of mixtures. **International Journal of Engineering Science**, v. 18, n. 9, p. 1129-1148, 1980.
- [5] CHOUCHA, Abdelbaki et al. Exponential stability of swelling porous elastic with a viscoelastic damping and distributed delay term. **Journal of Function Spaces**, v. 2021, 2021.
- [6] CHUESHOV, Igor; LASIECKA, Irena. **Von Karman Evolution Equations: Well-posedness and Long Time Dynamics**. Springer Science & Business Media, 2010.
- [7] FENG, B.; YANG, X.-G. Long-time dynamics for a nonlinear timoshenko system with delay, **Applicable Analysis**, v. 96, p. 606–625, 2017.
- [8] FREITAS, M. M.; COSTA, A. L. C.; ARAÚJO, G. M. Pullback dynamics of a non-autonomous mixture problem in one dimensional solids with nonlinear damping. **Communications on Pure & Applied Analysis**, v. 19, n. 2, p. 785, 2020.
- [9] FREITAS, M. M.; RAMOS, A. J. A.; SANTOS, M. L. Existence and upper-semicontinuity of global attractors for binary mixtures solids with fractional damping. **Applied Mathematics & Optimization**, v. 83, n. 3, p. 1353-1385, 2021.
- [10] FREITAS, M. M.; RAMOS, A. J. A.; JÚNIOR, D. A.; AUM, P. T. P.; ALMEIDA, J. L. L. Global and exponential attractors for mixtures of solids with Fourier’s law. **Nonlinear Analysis: Real World Applications**, v. 63, p. 103391, 2022.
- [11] FREITAS, Mirelson M. et al. Attractors for partially damped systems of binary mixtures of solids. **Applicable Analysis**, p. 1-20, 2022.
- [12] IEŞAN, D. On the theory of mixtures of thermoelastic solids. **Journal of thermal stresses**, v. 14, n. 4, p. 389-408, 1991.

- [13] KLISCH, Stephen M.; LOTZ, Jeffrey C. A special theory of biphasic mixtures and experimental results for human annulus fibrosus tested in confined compression. **Journal of biomechanical engineering**, v. 122, n. 2, p. 180-188, 2000.
- [14] LIE, K.-A.; JUANES, Ruben. A front-tracking method for the simulation of three-phase flow in porous media. **Computational Geosciences**, v. 9, n. 1, p. 29-59, 2005.
- [15] QUINTANILLA, R. Exponential stability for one-dimensional problem of swelling porous elastic soils with fluid saturation. **Journal of computational and applied mathematics**, v. 145, n. 2, p. 525-533, 2002.
- [16] QUINTANILLA, R. On the linear problem of swelling porous elastic soils with incompressible fluid. **International journal of engineering science**, v. 40, n. 13, p. 1485-1494, 2002.
- [17] RAMOS, A. J. A. et al. Stabilization of swelling porous elastic soils with fluid saturation and delay time terms. **Journal of Mathematical Physics**, v. 62, n. 2, p. 021507, 2021.
- [18] RAMOS, A. J. A. et al. Stability results for elastic porous media swelling with nonlinear damping. **Journal of Mathematical Physics**, v. 61, n. 10, p. 101505, 2020.
- [19] WANG, Jun-Min; GUO, Bao-Zhu. On the stability of swelling porous elastic soils with fluid saturation by one internal damping. **IMA journal of applied mathematics**, v. 71, n. 4, p. 565-582, 2006.