



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO BAIXO TOCANTINS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

IRIS LOBATO BARROS

**RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR UTILIZANDO O MÉTODO DE
GAUSS-SEIDEL**

**ABAETETUBA-Pará
2022**

IRIS LOBATO BARROS

**RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR UTILIZANDO O MÉTODO DE
GAUSS-SEIDEL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Campus Universitário de Abaetetuba, Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa.

ABAETETUBA-Pará

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBDSistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará

Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B277r BARROS, IRIS LOBATO.
RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR UTILIZANDO O
MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL / IRIS LOBATO BARROS. —
2022.
17 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade
Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Curso de
Matemática, Abaetetuba, 2022.

1. Sistema linear. Gauss-Seidel. Treliça.. I. Título.

CDD 519.8

IRIS LOBATO BARROS

RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR UTILIZANDO O MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

Trabalho de Conclusão de Curso orientado pelo Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa, apresentado ao curso de Licenciatura Plena em Matemática da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Campus universitário de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará, como requisito para obtenção de grau de licenciada em Matemática.

Aprovado em:25/02/2022.

BANCA EXAMINADORA

Manuel de Jesus dos S. Costa

Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa
Orientador– FACET/Campus de Abaetetuba/UFPA

Rômulo Correa Lima

Prof. Dr. Rômulo Correa Lima
Membro – FACET/Campus de Abaetetuba/UFPA

José Francisco da S. Costa

Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa
Membro – FADECAM/Campus de Abaetetuba/UFPA

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me encorajar com sabedoria e dedicação para enfrentar os desafios que surgiram no decorrer dessa caminhada, aos meus pais, Elisangela Araújo Lobato e Valci Gomes Barros, que não mediram esforços para me ajudar em todos os momentos.

Ao meu orientador Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa, pela imensurável compreensão, além das valiosas contribuições na conquista deste trabalho, me direcionando a concluir essa etapa tão importante em minha vida.

Aos meus familiares e amigos que sempre me apoiaram nessa jornada.

RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR UTILIZANDO O MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

Iris Lobato Barros
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia– FACET
iris11barros@gmail.com

Manuel de Jesus dos Santos Costa
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia – FACET
manuelsc@ufpa.br

RESUMO

O objetivo deste artigo foi apresentar a eficiência do método de Gauss-Seidel na resolução de um sistema linear de grande porte a menos de uma precisão requerida. Neste contexto, foram apresentados a formulação matemática que define o método de Gauss-Seidel, critérios de convergência, teste de parada. Duas aplicações foram desenvolvidas. Primeiramente, abordando a solução de um sistema linear modelando uma situação problema não contextualizada. Num segundo momento, foi utilizado o método de Gauss-Seidel para resolver um sistema linear oriundo de uma situação problema envolvendo engenharia de estruturas pertencente a área de engenharia civil.

Palavras-chave: Sistema linear. Gauss-Seidel. Treliça.

ABSTRACT

The objective of this article was to present the efficiency of the Gauss method in solving a linear system of great precision required. In this context, a mathematical formulation was presented that defines the Gauss-Seidel method, convergence criterion, stopping test. Two applications were developed. Approaching, approaching the solution of a linear system modeling a non-contextualized problem situation. At one point, the Gauss-Seidel method was used to solve for a linear system from a situation belonging to a civil engineering area.

Keywords: Linear system. Gauss-Seidel. Trellis.

- g o vetor das constantes n por 1.

Dessa forma, a partir da aproximação inicial $x^{(0)}$ pode-se gerar aproximações $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(K)}, \dots$ através do processo iterativo definido por (RUGGIERO, 1996):

$$\begin{cases} x_1^{(K+1)} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{(K)} - a_{13}x_3^{(K)} - \dots - a_{1n}x_n^{(K)}) \\ x_2^{(K+1)} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{(K+1)} - a_{23}x_3^{(K+1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(K)}) \\ x_3^{(K+1)} = \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31}x_1^{(K+1)} - a_{32}x_2^{(K+1)} - \dots - a_{3n}x_n^{(K)}) \\ \vdots \\ x_n^{(K+1)} = \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1^{(K+1)} - a_{n2}x_2^{(K+1)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(K+1)}) \end{cases} \quad (2)$$

com $K = 0, 1, 2, \dots$

3 – CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

Para determinar se o método de Gauss-Seidel produzirá uma sequência de aproximações que estabeleça uma convergência, será abordado a seguir dois critérios, quais sejam: o critério de Sassenfeld e o critério das linhas, além de uma constatação no que concerne verificar se a matriz dos coeficientes do SL a resolver for estritamente diagonalmente dominante, ou seja, qualquer elemento $(a_{ij}), i = j$ da matriz dos coeficientes de um determinado SL em módulo for estritamente maior que a soma em módulo dos elementos $(a_{ij}), i \neq j$ pertencentes a mesma linha de referência.

3.1 – CRITÉRIO DE SASSENFELD

Seja $A = (a_{ij})$ os elementos da matriz dos coeficientes de um determinado SL $Ax = b$.

Desta forma, têm-se (RUGGIERO, 1996):

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1n}|}{|a_{11}|} \quad (3)$$

e

$$\beta_j = \frac{|a_{j1}|\beta_1 + |a_{j2}|\beta_2 + \dots + |a_{j,j-1}|\beta_{j-1} + |a_{j,j+1}| + \dots + |a_{jn}|}{|a_{jj}|}, \quad (4)$$

com,

$$\beta = \max_{1 \leq j \leq n} \{\beta_j\}. \quad (5)$$

Portanto, se $\beta < 1$, então o método de Gauss-Seidel gera uma sequência convergente independentemente no chute inicial $x^{(0)}$ utilizado. Salienta-se que quanto menor for β , mais rápida será o processo de convergência.

3.2 – CRITÉRIO DAS LINHAS

Para este critério é necessário que a matriz dos coeficientes seja estritamente diagonalmente dominante, dessa forma, considere que (RUGGIERO, 1996):

$$\alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \{\alpha_k\} < 1, \quad (6)$$

onde,

$$\alpha_k = \frac{\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \right)}{|a_{kk}|}. \quad (7)$$

4 – TESTE DE PARADA

Dada uma aproximação inicial $x^{(0)}$ para a solução do sistema $Ax = b$, obtém-se uma solução com determinada precisão ε (precisão pré-fixada), utilizando o seguinte teste (BARROSO, 1987):

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(K+1)} - x_i^{(K)}| \leq \varepsilon \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

ou,

$k > M$, (M sendo o número máximo de iterações).

5– APLICAÇÃO DO MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

Para efeito de testagem do método de Gauss-Seidel, serão resolvidos dois sistemas lineares utilizando o código Seidel.m implementado em uma interface do programa Matlab (ver Anexo 1).

5.1 – Aplicação 1

Seja o sistema linear S abaixo, o mesmo será resolvido pela formulação matemática (2), utilizando o teste de parada (8). Destaca-se que a convergência do método em questão foi garantida através dos critérios (3.1 e 3.2). A solução de S é mostrada como segue:

$$S = \begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 - 2x_6 = 6,57 \\ 4x_1 - 20x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 + 7x_6 = -68,448 \\ 5x_1 - 3x_2 + 15x_3 - x_4 - 4x_5 + x_6 = -112,05 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4 - x_5 + 2x_6 = -3,968 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 9x_5 - x_6 = -2,18 \\ -4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 + 12x_6 = 10,882 \end{cases} \quad (9)$$

Dados de entrada para executar o código Seidel.m:

- $n \rightarrow$ ordem da matriz dos coeficientes:

$$n = 6 \quad (10)$$

- $A \rightarrow$ matriz dos coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 4 & -20 & 3 & 2 & -1 & 7 \\ 5 & -3 & 15 & -1 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 8 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 9 & -1 \\ -4 & 3 & 1 & 2 & -1 & 12 \end{bmatrix} \quad (11)$$

- $b \rightarrow$ vetor dos termos independentes:

$$b = \begin{bmatrix} 6,57 \\ -68,448 \\ -112,05 \\ -3,968 \\ -2,18 \\ 10,882 \end{bmatrix} \quad (12)$$

- $x^{(0)} \rightarrow$ chute inicial:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,6570 \\ 3,4224 \\ -7,4700 \\ 3,9680 \\ -0,2422 \\ 0,9068 \end{bmatrix} \quad (13)$$

- $\varepsilon \rightarrow$ tolerância (precisão):

$$\varepsilon = 10^{-4}. \quad (14)$$

Vetor Solução:

- $x^{(*)}$ → vetor solução:

$$x^{(*)} = \begin{bmatrix} 1,2500 \\ 3,0200 \\ -7,4000 \\ 0,8300 \\ -0,3940 \\ 1,0140 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Salienta-se, que o método de Gauss-Seidel, para a solução de S necessitou executar 6 iterações com erro máximo $7,0969 \times 10^{-5}$.

5.2 – Aplicação 2

O exemplo de aplicação a seguir foi retirado e adaptado do livro Franco (2006) com o intuito de apresentar uma situação problema, a qual necessita-se determinar a solução de um SL. Novamente, será utilizado o código Seidel.m para resolver o SL em questão.

5.2.1 – Treliça

Em engenharia de estruturas (ramo da engenharia civil), uma treliça (ver Figura 1) é uma estrutura composta por cinco ou mais unidades triangulares construídas com elementos retos cujas extremidades são ligadas em pontos conhecidos como nós (WIKIPÉDIA, 2022).

Figura 1 – Imagem de uma ponte com estrutura em treliça.

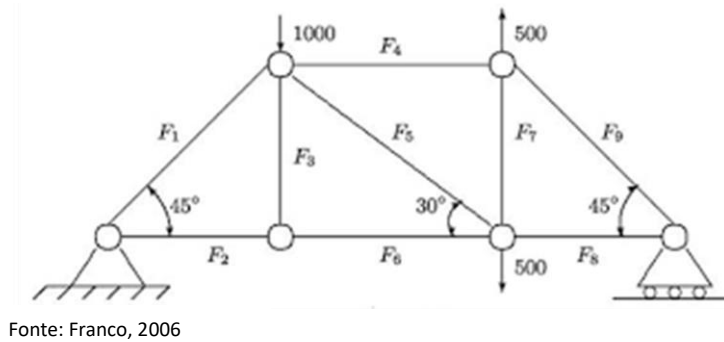


Fonte: WIKIPÉDIA, 2022

5.2.2 – Descrição do problema

Numa treliça estaticamente determinada com juntas articuladas, como dada na Figura (2):

Figura 2 – Imagem hipotética de uma treliça estaticamente determinada com juntas articuladas



Fonte: Franco, 2006

a tensão, (F_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$) a determinar, em cada componente pode ser obtida da seguinte equação matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0,7071 & 0,0000 & 0,0000 & -1,0000 & -0,8660 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,7071 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 & 0,5000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & -1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 & 0,7071 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,7071 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,8660 & 1,0000 & 0,0000 & -1,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,5000 & 0,0000 & -1,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,7071 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \end{bmatrix}}_F = \underbrace{\begin{bmatrix} 0,0000 \\ -1000 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \\ 500 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ -500 \\ 0,000 \end{bmatrix}}_B \quad (16)$$

Para resolver (16) novamente foi utilizado o código Seidel.m com os seguintes dados de entrada:

- $n \rightarrow$ ordem da matriz dos coeficientes:

$$n = 9 \quad (17)$$

- $A \rightarrow$ matriz dos coeficientes
- $B \rightarrow$ vetor dos termos independentes

- $x^{(0)} \rightarrow$ chute inicial igual a $\begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ 0,000 \end{bmatrix}$

- $\varepsilon \rightarrow$ tolerância (precisão):

$$\varepsilon = 10^{-4}. \quad (18)$$

Destaca-se que quando averiguou-se os critérios de convergência (3.1) e (3.2), utilizando a matriz dos coeficientes A de (16), os mesmos não foram satisfeitos. Portanto, partindo desse pressuposto rearranjou-se a matriz A obtendo-se uma matriz A_1 o mais possível diagonalmente dominante, como segue:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0,7071 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & -1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,7071 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,7071 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -1,0000 & 1,0000 & 0,0000 & 0,8660 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -1,0000 & 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & -1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,5000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,8660 & -1,0000 & 0,7071 \\ 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,5000 & 0,0000 & 0,7071 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Em seguida, executou-se o Seidel.m com os dados de entrada já apresentados, obtendo-se como vetor solução o seguinte resultado:

$$F = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 1,0000 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \\ 500,0000 \\ 500,0000 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \\ -1,4142 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Observação: Este exemplo, indicou que os critérios de convergência abordados são necessários e suficientes quando satisfeitos. No entanto, se os mesmos não forem verificados existem procedimentos a realizar através de operações elementares, as quais produzem sistemas equivalentes, de tal maneira que suas respectivas matrizes A possam ser diagonalmente dominantes em sua totalidade ou de forma parcial acarretando uma possível solução do sistema em questão a menos de uma precisão requerida.

6- CONCLUSÃO

Neste trabalho utilizou-se o método de Gauss-Seidel para resolver um sistema linear de maneira iterativa, o qual é amplamente abordado na literatura científica. Dessa forma, buscou-se a cada aplicação verificar a eficiência e robustez do referido método, evidenciando que os critérios de convergências utilizados são suficientes, podendo haver situações que na não verificação da convergência do método em questão, pode-se manipular o sistema linear através de operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão) de tal maneira que viabilize a utilização do método estudado.

7- REFERÊNCIAS

BARROSO, Leônidas Conceição. **Calculo Numérico (Com Aplicações)** – 2. ed. São Paulo: HARBRA, 1987.

FRANCO, Neide Bertoldi. **Cálculo Numérico.** – São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

RUGGIERO, Márcia A. G; LOPES, Vera L. R. **Cálculo Numérico, Aspectos Teóricos e Computacionais** - 2. ed. São Paulo: Pearson Education, 1996.

TRELIÇA. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2022. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Treli%C3%A7a&oldid=62853608>>. Acesso em: 19 jan. 2022.

ANEXO 1 – Seidel.m

```
%N,A,B,XO,ITERMAX,TOL => PARAMETROS DE ENTRADA NA FUNCAO DO
%PROGRAMA
```

```
%.....
```

```
%ESTE PROGRAMA SOLUCIONA UM SISTEMA LINEAR UTILIZANDO O METODO
ITERATIVO
```

```
%DE GAUSS-SEIDEL.
```

```
% ESTE METODO CONSISTE EM SOLUCIONAR A i-ESIMA EQUAÇÃO EM  $Ax = b$ 
```

```
%IMPLEMENTADO POR:
```

```
% Manuel Costa & Iris
```

```
%
```

```
%.....
```

```
%CASO O USUARIO QUEIRA QUE OS DADOS SEJAM PEDIDOS PELO PROGRAMA
```

```
%.....
```

```
N = input('ENTRE COM A ORDEM DA MATRIZ DOS COEFICIENTES :: ');
```

```
A = input('ENTRE COM A MATRIZ DOS COEFICIENTES :: ');
```

```
B = input('ENTRE COM O VETOR DOS TERMOS INDEPENDENTES :: ');
```

```
XO = input('ENTRE COM O CHUTE INICIAL PARA A SOLUCAO:: ');
```

```
ITERMAX = input('ENTRE COM A MAXIMA ITERACAO :: ');
```

```
TOL = input('ENTRE COM A TOLERANCIA :: ');
```

```
%.....
```

```
format long;
```

```
erro = zeros(ITERMAX,N);
```

```
X = zeros(1,N);
```

```
Xi = zeros(1,N);
```

```
Xi(:) = XO; %[-2 1 2 2 6 -4 1];
```

```

erro(:, :) = 1;

for iter = 1:ITERMAX

iter

    for i = 1:N

        soma = 0;

        for j = 1:N

            if j ~= i

                soma = soma + A(i,j)*Xi(j);

            end

        end

        X(i) = B(i)/A(i,i) - soma/A(i,i);

        erro(iter,:) = abs((X(i) - Xi(i))/X(i));

        Xi(:) = X(:); %SE UTILIZARMOS ESTA POSIÇÃO, TEMOS O METODO DE GAUSS-
SEIDEL

    end

    if iter == ITERMAX

        fprintf('ITERACAO MAXIMA ALCANCADA - O METODO NAO
CONVERGIU');ITERMAX

        return;

    end

    if max(erro(iter,:)) <= TOL

        fprintf('TOLERANCIA ALCANCADA - ERRO MAXIMO');max(erro(iter,:))

        break;

    end

end

fprintf('SOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR');X

```