UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE BRAGANÇA
FACULDADE DE MATEMÁTICA

GLENDA DE FÁTIMA AMORIM QUADROS

A UTILIZAÇÃO DO *SOFTWARE GEOGEBRA* E DA ARTE NA APRENDIZAGEM DE PRISMAS

BRAGANÇA
2023

GLENDA DE FÁTIMA AMORIM QUADROS

A UTILIZAÇÃO DO *SOFTWARE GEOGEBRA* E DA ARTE NA APRENDIZAGEM DE PRISMAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Maria Augusta Raposo de Barros Brito.

Coorientador: Prof. Matheus Amorim da Luz.

BRAGANÇA

2023

Dedico este trabalho a minha família, que sempre me apoiou, incentivou e foi a minha fortaleza para realizá-lo.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, venho agradecer a Deus pelo dom da vida. Pois, foi ele quem me reergueu nos momentos que pensei em desistir. A todo momento iluminou meus pensamentos e me abençoou juntamente com Nossa Senhora, que me colocou em seu colo e se fez presente. Além disso, ao meu anjo da guarda, que me livrou de todo o mal e protegeu nos instantes de insegurança.

Aos meus pais Audrin e Eulinda, que são meus orientadores da vida. Pelo incentivo, amor e dedicação em minha criação, se hoje, me tornei metade do que eles desejavam, sinto-me orgulhosa.

As minhas irmãs Gleicy, Maria Eduarda e Ana Luísa, cúmplices, amigas e compartilhadoras dos segredos mais secretos.

À minha orientadora, Profa. Dra. Maria Augusta Raposo, pela parceria não somente deste, mas em outros trabalhos também. Ensinou e contribuiu para a minha formação.

Ao meu amigo Matheus Amorim, pelos conselhos, aprendizado e companheirismo, com certeza, foram de grande importância.

À Profa. Dra. Marly dos Anjos Nunes, modelo a ser seguido de mulher, amiga e profissional, espero alcançar pelo menos um pouco do que és.

À Profa. Dra. Edilene Farias Rozal, espelho a ser seguido. Obrigada, pelos ensinamentos, sem dúvidas levarei para a vida.

Aos amigos, Júlia, Edenilson e Jacó, pelos dias, tardes e noites de conversa no cantinho do incentivo. Ademais, por serem meus camaradas na maioria dos trabalhos, como posteres, artigos, oficinas, investigações e entre outros.

As amigas Natália, Marilia, Erica e Roseane, por todo o apoio na academia.

À direção do colégio Padre Luiz Gonzaga, por autorizar a realização do projeto com os alunos.

Ao professor supervisor Marsily Andrei Risuenho, por ser um docente que faz a diferença, por disponibilizar o seu tempo e dividir os momentos que passei na escola.

"Revela ao Senhor teus planos, e teus projetos se realizarão." (Provérbios 16: 3)

“A beleza da Matemática só se mostra aos seguidores mais pacientes.” (Maryam Mirzakhani).

“As estrelas são todas iluminadas. Será que elas brilham para que cada um possa encontrar a sua?” (O Pequeno Príncipe).

RESUMO

O presente trabalho, tem a finalidade de investigar e refletir a importância de novas metodologias de ensino, em particular, o uso do *software GeoGebra* e a Arte, em busca de uma aprendizagem significativa dos alunos sobre o conteúdo Geometria Espacial, especialmente, o assunto prismas. Desta forma, foi realizado um projeto em uma turma do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública do município de Bragança no Pará, cuja metodologia de ensino utilizada foi a interdisciplinaridade entre Matemática e a Arte. Durante o desenvolvimento das atividades com os estudantes, a praticidade, autogestão, protagonismo foram fomentados, além da cooperação e autonomia trabalhadas em tarefas que exigiam formar grupos/equipes. Ademais, será apresentado resultados dos encontros, materiais utilizados, atividades elaboradas e por fim, o questionário contendo as opiniões dos estudantes acerca da aplicação do projeto.

Palavras-chave: Matemática; Arte; Geometria Espacial; Prismas; *Software GeoGebra*.

ABSTRACT

The presente work has the purpose of investigating and reflecting on the importance of new teaching methodologies, in particular,the use of the *GeoGebra software* and Arte, in Search of a meaningful learning of the students about the Space Geometry contente, especially, the subject prisms. In this way, a Project was carried out in a class of the 3rd year of High School in a public school in the city of Bragança, Pará, whose teaching methodology used was the interdisciplinarity between Mathematics and Art. During the development of activities with students, practicality, self-management, protagonism were encouraged, in addition to cooperation and autonomy worked on tasks that required forming groups. In addition, the results of the meetings, materials used, activities developed and, finally, the questionnaire containing the students' opinions about the application of the project will be presented.

Keywords: Mathematics; Art; Spatial Geometry; Prisms, *Software GeoGebra*.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Encontro do projeto VIMATPEB 16
Figura 2 – Atividade realizada no projeto utilizando o *GeoGebra* 17
Figura 3 – Atividade realizada em sala por um dos professores 17
Figura 4 – Atividade realizada em sala por um dos professores 17
Figura 5 – Página do livro “Exercícios Geométricos 29
Figura 6 – Obra “O Homem Vitruviano” 29
Figura 7 – Quadro “Composition 8” 30
Figura 8 – Quadro “São Paulo” 31
Figura 9 – Quadro “Number 1” 32
Figura 10 – Monumento “Catedral Metropolitana de Brasília 33
Figura 11 – Exposição “Liberty and Anarchy” 34
Figura 12 – Como pesquisar o aplicativo no celular ou tablet 38
Figura 13 – O aplicativo que se deve escolher 38
Figura 14 – Como instalar e abrir.....38
Figura 15 – *Interface* do *GeoGebra* para celular e tablet 39
Figura 16 – Como pesquisar o *GeoGebra* no notebook e computadores de mesa 39
Figura 17 – Qual *site* escolher 39
Figura 18 – Qual ícone buscar no *site* para escolher o aplicativo 40
Figura 19 – Qual calculadora escolher 40
Figura 20 – Instalação do *software* 40
Figura 21 – Como abrir o aplicativo 41
Figura 22 – *Interface* inicial do *GeoGebra* para *notebooks* e computadores de mesa 41
Figura 23 – *Interface* inicial do *GeoGebra* 3D 42
Figura 24 – Ferramentas do *GeoGebra* 3D 42
Figura 25 – *Interface* inicial do *GeoGebra* 2D 42
Figura 26 – Realidade Aumentada no *GeoGebra* 44
Figura 27 – Exemplo de como utilizar o *GeoGebra* 45
Figura 28 – Apresentação no *Power Point* sobre prismas 47
Figura 29 – Alunos observando como utilizar o *GeoGebra* 48
Figura 30 – Atividade realizada pelo aluno A 49

Figura 31 – Atividade realizada pelo aluno B 49
Figura 32 – Os prismas planificados em origami 50
Figura 33 – Prismas em animação através da técnica origami 50
Figura 34 – Prisma no formato 3D 51
Figura 35 – Atividade levada para a sala de aula sobre planificação de objetos 51
Figura 36 – Folha de exercício para a realização da atividade 51
Figura 37 – Atividade utilizando o *GeoGebra* 3D 53
Figura 38 – Explicação sobre o uso da Realidade Aumentada 53
Figura 39 – Arte feita pelo grupo de alunos C 55
Figura 40 – Arte feita pelo grupo de alunos D 55
Figura 41 – Mini tutorial – *Interface* inicial do *GeoGebra* 56
Figura 42 – Mini tutorial – bloco de ferramentas 56
Figura 43 – Mini tutorial – como construir prismas 57
Figura 44 – Mini tutorial – execução da construção 57
Figura 45 – Mini tutorial – finalização do objeto 57
Figura 46 – Mini tutorial – Tela inicial do *GeoGebra* para tablets e celulares 58
Figura 47 – Mini tutorial – realização do prisma 58
Figura 48 – Mini tutorial – processo de construção 59
Figura 49 – Mini tutorial – conclusão do objeto 59
Figura 50 – Mini tutorial – planificação do prisma de base triangular 60
Figura 51 – Mini tutorial – planificação do objeto 60
Figura 52 – Mini tutorial – alunos utilizando o RA 61
Figura 53 – Demonstração da atividade aplicada em sala 62
Figura 54 – Arte feita pela autora para demonstração 62

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Questões passadas em sala 54
Tabela 2 – Resultado da 1ª pergunta do questionário 64
Tabela 3 – Resultado da 2ª pergunta do questionário 65
Tabela 4 – Resultado da 3ª pergunta do questionário 65
Tabela 5 – Resultado da 4ª pergunta do questionário 66
Tabela 6 – Resultado da 5ª pergunta do questionário 67
Tabela 7 – Resultado da 6ª pergunta do questionário 68
Tabela 8 – Resultado da 7ª pergunta do questionário 69
Tabela 9 – Resultado da 8ª pergunta do questionário 69

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Resultado da 1ª pergunta do questionário.....64
Gráfico 2 – Resultado da 2ª pergunta do questionário 65
Gráfico 3 – Resultado da 3ª pergunta do questionário 66
Gráfico 4 – Resultado da 4ª pergunta do questionário 66
Gráfico 5 – Resultado da 5ª pergunta do questionário 67
Gráfico 6 – Resultado da 6ª pergunta do questionário 68
Gráfico 7 – Resultado da 7ª pergunta do questionário 69

LISTA DE FLUXOGRAMA

Fluxograma 1 – Objetivos esperados em sala de aula 72
Fluxograma 2 – Objetivos alcançados em sala de aula 73

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 14

1 A CRONOLOGIA DA MATEMÁTICA E ARTE 19

1.1 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA 19

1.1.1 Primeiros Relatos 19

1.1.2 Mesopotâmia 20

1.1.3 Grécia 21

1.1.4 Idade Moderna 22

1.1.5 Idade Contemporânea 23

1.2 A HISTÓRIA DA ARTE 23

1.2.1 Arte rupestre 24

1.2.2 Idade Antiga 24

1.2.3 Idade Medieval 25

1.2.4 Idade Moderna 26

1.2.5 Idade Contemporânea 26

2 A RELAÇÃO ENTRE MATEMÁTICA E A ARTE 27

2.1 ALGUMAS ARTES FAMOSAS QUE ENVOLVEM MATEMÁTICA 28

2.1.1 Origami 28

2.1.2 O Homem de Vitrúvio 29

2.1.3 *Composition 8* (Composição 8) 30

2.1.4 São Paulo 31

2.1.5 *Number 1* (Número 1) 32

2.1.6 Catedral Metropolitana de Brasília 33

2.1.7 *Liberty and Anarchy* (Liberdade e Anarquia) 34

3 MATEMÁTICA, ARTE E A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC) 35

4 O SOFTWARE GEOGEBRA 37

4.1 DEFINIÇÃO E INSTALAÇÃO 37

4.2 FERRAMENTAS BÁSICAS 41

4.3 REALIDADE AUMENTADA NO *GEOGEBRA* 43

4.4 COMO ENSINAR MATEMÁTICA COM O *GEOGEBRA*? 44

5 METODOLOGIA 46

5.1 TIPO DE PESQUISA 46

5.2 APLICAÇÃO 47

5.3 MINI TUTORIAL DO GEOGEBRA EM RELAÇÃO AS ATIVIDADES 55

5.4 ATIVIDADES REALIZADAS EM SALA DE AULA DE FORMA DETALHADA 61

6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS 63

6.1 DISCUSSÃO SOBRE O PROJETO 63

6.2 APRESENTAÇÃO DOS DADOS 64

6.3 FLUXOGRAMA DOS OBJETIVOS ESPERADOS E ALCANÇADOS 71

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS 74

REFERÊNCIAS 75

INTRODUÇÃO

Diante de tantas dificuldades que a Educação Básica enfrenta, a componente curricular Matemática é a que mais sofre com os danos, como sua abstração ou pelo tempo e energia gastos para tentar compreendê-la. Ademais, o público de hoje em dia, não é o mesmo de anos anteriores, são alunos que estão inseridos no mundo tecnológico, ou seja, precisam e necessitam de novas metodologias em sala de aula. Em prol da melhoria no Ensino, Silva (2012, p. 104-106) destaca:

> A aula deve ser preparada e adaptada levando em conta as particularidades da turma. Em um estado tão grande como o nosso, cada região tem suas necessidades e se tratando de escolas e salas de aulas essas particularidades se restringem ainda mais. O universo de sala de aula é único, pois cada indivíduo é único então é um erro generalizar a metodologia da aula como se fosse uma produção em série. Pois, a escola não é uma fábrica, ela não produz robôs, ela deve formar pensamentos e atitudes e isso não se faz com modelos únicos. [...].

Tendo em vista isso, é importante buscar por práticas pedagógicas diferenciadas, levando em conta o conhecimento dos impasses que a turma possui. Desta forma, é possível alcançar o maior número de alunos, e consequentemente, tornar a aprendizagem de Matemática mais fácil e dinâmica.

Porém, afirma Brandt e Moretti (2016, p. 10) “as dificuldades escolares que estão relacionadas à aprendizagem da Matemática são atribuídas a diversos fatores, entre eles, a principal é a atuação do professor”. Ou seja, cada estudante tem uma forma de aprender, nem sempre os conteúdos serão claros de absorver por todos que estão na sala, e o método tradicional que o docente utiliza, consistindo no uso de lousa, pincel e livro, não ajuda o aluno a sanar essas lacunas. Então, o professor tem um papel importante, preparar esses estudantes para superar os seus obstáculos.

Mas isso se deve, pela falta de tempo e recurso que o professor tem para planejar suas aulas, visto que, necessita organizar os conteúdos para turmas de anos/séries distintas, não havendo tempo de inserir novos métodos de ensino. Pensando nesta problemática, é preciso novos meios que facilitem a compreensão dos alunos acerca do assunto que está sendo abordado pelo(a) professor(a). Desta forma, ferramentas que podem auxiliar o docente são os recursos tecnológicos e a Arte, diz Mueller (2013, p. 36),

> Na perspectiva educacional, a utilização das tecnologias como ferramenta didática possibilita uma prática educacional desafiadora tanto para o aluno quanto para o professor, pois trabalha com uma proposta pedagógica mais ampla, responsável pela motivação e interação. O educador e a escola precisam

> estar preparados para essa mudança e oferecer ao educando o que a sociedade exige. Torná-los indivíduos integrados neste contexto tecnológico é também papel do docente, é um dever que não podemos abandonar, pois estes adolescentes e jovens estarão em curto espaço de tempo inseridos no mercado de trabalho. Suas oportunidades aumentarão ou diminuirão de acordo com o preparo e o que a escola os oferece. Não podemos esquecer que para muitos desses alunos a escola é, talvez, o único local ao seu alcance capaz de oferecer conhecimento, alimentação, alegria, lazer, esportes, talentos e cultura.

Assim, a inserção de recursos tecnológicos se torna um facilitador para a aprendizagem dos estudantes, onde eles se sentirão motivados por ser um mecanismo que estão habituados a utilizar como o celular, computador, notebook ou tablet. Ademais, será uma ajuda ao professor quando ministrar suas aulas, tornando-as mais atraentes à atuação dos alunos, favorecendo a aprendizagem por meio da interação, e os preparando como cidadãos e futuros profissionais no mercado de trabalho.

E a interdisciplinaridade[1] entre a Matemática e Arte desperta no aluno o prazer de conhecer o conteúdo que está sendo ministrado, pois uma parte do estudo se dará por meio da expressão artística realizada pelos estudantes. Desta forma, afirma Fainguelernt (2009, p. 13),

> A arte, além de nutrir nossa alma com sensibilidade, nos leva à reflexão sobre valores, atitudes e comportamentos. Ela nos proporciona a expansão do universo cultural e tem um grande poder transformador, que permite o desenvolvimento de nossas potencialidades como a intuição, a sensibilidade, a percepção, a imaginação e a curiosidade – importantíssimas para a atividade matemática.

Todos os benefícios citados acima "intuição, sensibilidade, percepção, imaginação e curiosidade" se fazem essenciais para a Matemática, por meio desses pontos essa área do conhecimento foi construída ao longo do tempo. Assim, a junção entre as duas ciências apresenta aos alunos novas perspectivas contribuindo para os campos envolvidos.

Desse modo, diante de tudo que foi exposto acima, venho propor o uso do recurso *GeoGebra* com o auxílio da Arte para o estudo do ramo de Geometria Espacial, especificamente, prismas, a fim de reduzir os impedimentos na aprendizagem deste assunto. Com o objetivo de investigar e refletir a importância de novas metodologias de ensino, em particular, o uso do *software GeoGebra* associado à arte na busca de uma aprendizagem significativa para o aluno.

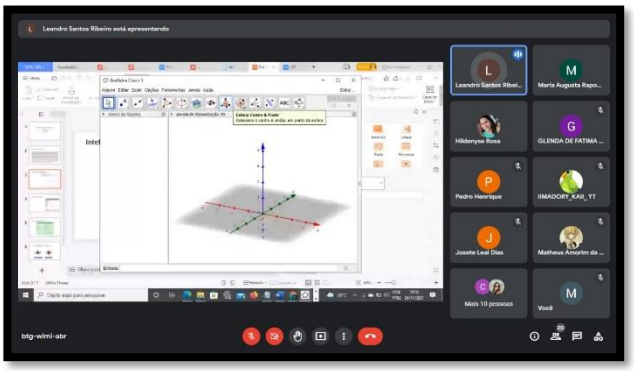
[1] é um conceito que busca a intersecção entre conteúdos de duas ou mais disciplinas para permitir que o aluno elabore uma visão mais ampla a respeito dessas temáticas.

Além disso, durante o período pandêmico, participei como bolsista de um projeto. Sabe-se que o sistema educacional precisou passar por algumas medidas, pois os alunos não conseguiriam permanecer nas escolas por conta da rápida contaminação do vírus SARS-CoV-2. Assim, surgiu o Ensino Remoto Emergencial (ERE), que necessitava de novas metodologias.

Pensando em tudo isso, no ano de 2021 fui bolsista em um projeto vinculado à Pró-reitoria de Extensão – PROEX, intitulado Vivências Formativas em Matemática com Professores dos Anos Iniciais da Educação Básica no Município de Bragança/PA (VIMATPEB), realizado no campo de formação continuada de professores, em sua prática como docente. O intuito do projeto era criar atividades para Aritmética, Álgebra e Geometria em aulas de Matemática para professores dos Anos Iniciais do município em questão, por meio do ambiente virtual de aprendizagem *Classroom* e aplicativos digitais *GeoGebra*, *Winplot*, *Wingeom*, *GCompris* e *Google Meet*.

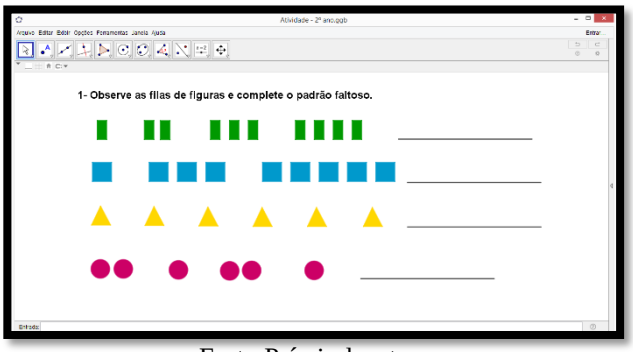
Ao todo foram selecionados 30 docentes, os encontros aconteciam de quinze em quinze dias (Figura 1 e 2), no período noturno, por conta da disponibilidade dos participantes, no decorrer de 11 (onze) meses. Nesse tempo, o *software GeoGebra* foi introduzido, e por ser um aplicativo amplo durou 6 encontros para ser finalizado, atendendo o que queríamos apresentar e conforme o que era estudado nesta etapa de ensino, mostrando a forma de instalação, dados iniciais, ferramentas e atividades associadas aos ramos Aritmética, Álgebra e Geometria.

Figura 1 – Encontro do projeto VIMATPEB



Fonte: Própria da autora

Figura 2 – Atividade realizada no projeto utilizando o GeoGebra

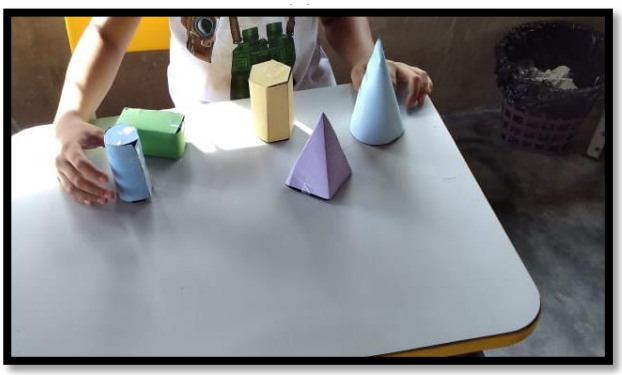


Fonte: Própria da autora

Figura 3 – Atividade realizada em sala por um dos professores

Fonte: Própria da autora

Figura 4 – Atividade realizada em sala por um dos professores



Fonte: Própria da autora

No começo dos encontros que abordavam o *GeoGebra*, os professores participantes se sentiram receosos, pois achavam que o *software* seria difícil de manusear, mas com o processo de aprendizado dele, se surpreenderam com a facilidade que ele proporcionava.

Portanto, observou-se que ao final do projeto, os docentes se sentiram mais seguros e confiantes para manipular todos os aplicativos apresentados. Ademais, viu a necessidade de utilizar ferramentas digitais para a contribuição na formação continuada de professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental Menor referente a Educação

Básica, não apenas aos docentes como aos alunos que estão em processo de aprendizado e formação. Isso é comprovado através dos relatos (Figura 3 e 4) compartilhados em nossos encontros e grupo de *WhatsApp* criado para dar logística ao projeto.

Além disso, os alunos foram beneficiados, pois começaram a esperar e sentir anseio pela próxima aula de Matemática, ou seja, os recursos digitais favoreciam os professores nesse quesito. Porém, a tecnologia precisa ser um auxílio, não ser a aula, foi o que acontecia, primeiro os professores explicavam o assunto e depois aplicavam o recurso tecnológico com alguma atividade ou servia como complemento da aula.

Com base em toda a minha experiência no projeto e na minha vida acadêmica, notei que gostaria de fazer meu trabalho de conclusão de curso (TCC), tendo como base um *software*, no caso o *GeoGebra* e também a Arte para ensinar Matemática, e responder ao seguinte questionamento "De que forma o uso da Arte e o *software GeoGebra* podem se tornarem agentes facilitadores para o ensino da Geometria Espacial, mais precisamente, no estudo de prismas?", essa seria a motivação para realizar a pesquisa que faria e que será detalhada nos próximos capítulos.

Este trabalho será dividido em sete capítulos da seguinte maneira: Capítulo 1, abordará sobre a história da Matemática ao longo dos anos e dentro da Arte, e suas correlações.

Em seguida, no Capítulo 2, a relação entre a Matemática e Arte, pontos característicos sobre as duas áreas do conhecimento.

Após, no Capítulo 3, relatará sobre a Matemática, Arte e Base Nacional Comum Curricular, as temáticas e conceitos utilizados para abordar e ensinar essas ciências.

Por conseguinte, no Capítulo 4, apresentará o *software GeoGebra*, suas funcionalidades e definição.

Depois, o Capítulo 5, mostrará a metodologia empregada para realizar o projeto, foco do trabalho.

Posteriormente, no Capítulo 6, será exposto os dados e discussões acerca do projeto aplicado.

E por fim, no Capítulo 7, as considerações finais do trabalho em questão.

1 A CRONOLOGIA DA MATEMÁTICA E ARTE

1.1 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A Matemática, segundo alguns estudiosos é conhecida como a “Rainha das Ciências”, por ter origem através da Aritmética e Geometria rudimentares, nasceu para suprir as necessidades de contagem, facilitar as transações comerciais e guiar os construtores das primeiras civilizações, por isso, de todas as ciências ela é a rainha, pois existi desde os primórdios. Ela se desenvolveu por meio das culturas dos povos da Antiguidade Mediterrânea e se prolongou nos anos posteriores, de acordo com Brasil (1998, p. 40):

> A própria História da Matemática mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática.

Embora, os primeiros indícios que a Matemática tenha surgido no Egito Antigo e no Império Babilônico, por volta dos anos 3500 a.C., ela não foi criada por uma pessoa em específico, sempre esteve presente e nasceu da necessidade do homem de medir e contar objetos. Desta forma, relatarei alguns passos na história onde a Matemática possui mais relevância e importância, destacando o pensamento intuitivo do homem em sua aplicação sobre o mundo que o cercava.

1.1.1 Primeiros Relatos

Os primeiros registros de uma escrita Matemática teriam surgido na Mesopotâmia, onde o barro era abundante, assim eram feitas marcas em forma de cunha utilizando um estilete sobre tabletas (placas de barro) moles que depois eram cozidas ao calor do sol ou em fornos. Esse tipo de escrita era chamado de cuneiforme (da palavra latina *cuneus*, cunha) por causa da forma dos sinais. Por ser o começo da escrita, não há tantas descrições sobre a Matemática, mas a durabilidade desses documentos nas tabletas, posteriormente descobriu-se que era a Rocha *Behistun*, nos deixou poucas e valiosas primeiras exposições matemáticas. Confirma Charpin (2008, p. 257),

> Sabendo da importância do corpus da cultura cuneiforme para os estudos da antiguidade próximo-oriental, em termos quantitativos a maior fonte para o estudo da Mesopotâmia são os tabletes feitos de argila, sobre os quais eram impressos os sinais cuneiformes.

Com o tempo, encontrou-se os escritos egípcios, feito na pedra chamada Pedra de Rosetta, desempenhava um papel análogo ao da Rocha *Behistum*. Ainda que esses documentos datem cerca de 5000 a.C., não houve problemas em decifrar a numeração hieroglífica egípcia, pois se tratava de três tipos de idiomas, grega, demótica e hieroglífica. Os egípcios se tornam curiosos no modo de pensar quanto a Matemática, pois se baseavam na escala de dez, ou seja, a base dez, e hoje usamos o sistema de numeração decimal. Eles utilizavam da seguinte forma, um traço vertical representa uma unidade, um osso de calcanhar invertido indicava 10, um laço como uma letra C maiúscula valia 100, uma flor de lótus 1.000, um dedo dobrado 10.000, um peixe era usado para indicar 100.000 e uma figura ajoelhada (talvez o *Deus do Sem-fim*) 1.000.000. Expressa Boyer (1996, p. 07),

> Agora as inscrições nas tumbas e monumentos no Egito podiam ser lidas, embora tais documentos cerimoniais não sejam a melhor fonte de informação quanto a ideias matemáticas. A numeração hieroglífica egípcia foi facilmente decifrada. O sistema, pelo menos tão antigo quanto as pirâmides, datando de cerca de 5.000 anos atrás, baseava-se, como seria de esperar, na escala de dez.

Por conseguinte, temos o Papiro de Ahmes ou Papiro Rhind, um documento egípcio que durou cerca de mais de três e meio milênios. Tendo uma escrita cursiva, adaptada ao uso de pena e tinta sobre folhas de papiro preparadas e conhecida como hierática, nele se encontram 85 problemas de aritmética juntamente com suas soluções detalhadas, é um dos registros mais famosos e antigos que temos nos dias de hoje. Neste período no Egito, surgiu o desenvolvimento das frações unitárias, operações aritméticas, problemas algébricos, problemas geométricos e razão trigonométrica.

1.1.2 Mesopotâmia

Foi na Mesopotâmia que a escrita de forma estilizada convencional era usada para muitas coisas, mas gradualmente o número de símbolos, na época em média de 2.000, tornou-se menor pela conquista acadiana. Desenhos primitivos deram lugar a combinações de cunhas, o estilete, que anteriormente fora um prisma triangular, foi

substituído por um cilindro circular reto, ou antes, por dois de raios diferentes. O sistema decimal passou para uma notação que dava lugar a base sessenta.

Desta maneira, houve a evolução da numeração posicional, frações sexagesimais, operações fundamentais, problemas algébricos, equações quadráticas, equações cúbicas, ternas pitagóricas (sequência de três números inteiros que satisfazem o Teorema de Pitágoras), áreas poligonais, a geometria como aritmética aplicada.

1.1.3 Grécia

Durante esse período, entre 585-600 a.C., os relatos sobre a Matemática grega se concentram em duas escolas Jônia e Pitagórica, e dois homens se destacam quando se fala em descobertas matemáticas desta época: Tales de Mileto e Pitágoras de Samos. A eles se deve a proposição conhecida como Teorema de Tales que diz: "Um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto" pode ter vindo de Tales no decorrer de suas viagens à Babilônia. Por isso, Tales é considerado por alguns pesquisadores como o primeiro matemático, originando a organização dedutiva da Geometria.

Enquanto Pitágoras ficou famoso pelo teorema que leva o seu nome, Teorema de Pitágoras, que até a atualidade é ensinado nas escolas. Porém, há algumas dúvidas se foi ele quem conseguiu chegar na demonstração correta, visto que, a atribuição de descobertas não era feita a um membro específico da escola, e sim a Pitágoras. No final, foi ele quem apresentou a solução e ficou reconhecido por ela.

A prova de que o Teorema de Pitágoras tenha surgido antes dele, seja dada aos babilônios cerca de 1800 a.C., reitera Eves (2004), que existe uma tábua que está localizada na Universidade de Colúmbia chamada Plimpton 322. Nela há uma representação por três números inteiros, onde os dois primeiros representam os catetos de um triângulo retângulo e o último representa a hipotenusa.

De acordo com Boyer (1996), houve outros matemáticos que contribuíram tanto quanto para a Matemática, são eles: Anaxágoras de Clazomenae, Hípias de Elis, Filolau, Arquitas de Tarento, Platão, Aristóteles, Sócrates, Teodoro de Cirene, Eudoxo de Cnido, Menaecmus, Dinóstrato, Autólico de Pitane, Euclides de Alexandria, Arquimedes de Siracusa, Apolônio de Perga, Eratóstenes de Cirene, Aristarco de Samos, Hiparco de Nicéia, Menelau de Alexandria, Ptolomeu, Heron de Alexandria, Diofante de Alexandria, Nicômaco de Gerasa, Papus de Alexandria, Proclo de Alexandria e Boécio foram de grande importância para o progresso da Geometria, Aritmética e Álgebra.

Entre os trabalhos associados e desenvolvidos por esses matemáticos citados acima, estão o pentagrama pitagórico, misticismo sobre números, aritmética e cosmologia, números figurativos, proporções, numeração ática, numeração Jônia, aritmética e logística.

1.1.4 Idade Moderna

Inicia-se uma nova era da Ciência, o período Renascentista fez com que essa área do conhecimento se expandisse para o mundo afora, onde a Matemática estabelece as suas bases, as pesquisas se tornam mais intensas, surgindo novos ramos e sub-ramos da mesma. Expressa Ohse (2011, p. 07),

> O desenvolvimento dos conceitos matemáticos, aritmética, álgebra e trigonometria, estavam centrados, em sua maioria, nas cidades italianas e nas cidades de Nuremberg, Viena e Praga. Estas eram cidades mercantis em desenvolvimento, propiciando um campo fértil para a expansão matemática. A população volta a ter interesse pela educação. A atividade comercial no Renascimento tem um grande crescimento. Começam a aparecer textos populares de aritmética, em linguagem clássica (latim) para os eruditos e na língua mãe, com o fim de propiciar o ensino aos jovens que tem interesse em seguir a carreira comercial.

Destacam-se René Descartes, Isaac Newton, Leibniz, Gauss, David Hilbert e Albert Einstein. O primeiro por ser conhecido “O pai da Matemática Moderna”, escreveu uma obra marcada pelas aplicações práticas em questões científicas; o segundo e terceiro por fazerem significativas descobertas sobre o Cálculo; o quarto por uma lista de incontáveis avanços para a Matemática Moderna, Astronomia e Física; o quinto responsável por formalizar a Geometria Euclidiana e abrir caminhos para a Matemática Contemporânea; o sexto colaborou para a Teoria da Relatividade tendo como suporte as bases matemáticas. Também Ohse (2011, p. 10) relata,

> O século XVII é extremamente importante no desenvolvimento da matemática. [...], Newton e Leibniz contribuíram para o desenvolvimento do cálculo [...]. De todas as descobertas e desenvolvimentos obtidos pela matemática neste período, a mais notável e mais importante foi a invenção do cálculo por Newton e Leibniz. Com esta descoberta, a matemática passou a um plano superior e a história da matemática elementar, terminou.

A descoberta do Cálculo sem dúvida foi um dos maiores feitos que o homem já desvendou, pois através dele outras ciências se estabeleceram a Física, Química e a

própria Matemática. Utilizando de suas quatro operações: limite, diferencial, derivada e integral, o Cálculo se fundamentou e hoje, a sua aplicação é usada nas Ciências Exatas.

1.1.5 Idade Contemporânea

A partir do século XIX, começa o período em que as pesquisas sobre os fundamentos matemáticos se intensificam, surgem os jornais voltados à publicação cientifica e cursos de formação específicos em Matemática e Ciências. Iniciou-se a tendência as especializações, e com a nova geração de matemáticos como Carnot, Poncelet, Galois, Abel, Jacobi e Gauss, a Matemática se subdivide em diversos ramos. Confirma Boyer (1996, p. 343),

> Mais do que qualquer outro período, o século dezenove merece ser considerado a Idade de Ouro da matemática. Seu crescimento durante estes cem anos é de longe maior que a soma total de produtividade em todas as épocas precedentes. O século foi também, executada talvez a Idade Heroica na Grécia antiga, o mais revolucionário na história da matemática. A introdução, no repertório matemático, de conceitos como de geometrias não-euclidianas, espaços *n*-dimensionais, álgebras não comutativas, processos infinitos e estruturas não quantitativas, tudo contribuiu para uma transformação radical que mudou não só a aparência como as definições da matemática.

Com isso, desde o século XX até a atualidade, com o avanço da Matemática, o desenvolvimento da tecnologia progrediu, houve outras especializações, como a ciência da computação e estatística. Deste modo, a Matemática se dividiu em duas grandes áreas, são elas: pura e aplicada. Na Matemática pura, os estudos dão espaço a teoria dos números, álgebra, análise combinatória, geometria, topologia e análise matemática, enquanto na Matemática aplicada, a probabilidade e estatística ganham destaque.

1.2 A HISTÓRIA DA ARTE

A Arte partiu de manifestações culturais de acordo com o contexto histórico de cada época, isso pode ser facilmente verificado pela evolução do homem, que desde o princípio se comunicava através de sinais artísticos, rabiscos, símbolos e desenhos. De modo geral, a Arte busca demonstrar as mais diversas sensações e emoções (...) além de valores estéticos como o belo, equilíbrio, harmonia e assim por diante. Salienta D’Arcy Hayman (1975, p. 29-30):

> Descobrimento na arte e pela arte não é somente o que o artista faz com sua obra, mas o que a obra faz com o artista. A obra artística resume e reflete assim o que o artista descobriu em si mesmo e no meio que o cerca. [...]. A arte intensifica essa maneira de comprometimento do homem com a vida, é um símbolo da energia humana. Além disso, aclara e vivifica a experiência humana.

A ela é designada às belas-artes (artes plásticas, cinema, música, teatro, dança, arquitetura etc.), e esse conjunto de procedimentos criados com o intuito de satisfazer o homem por meio das ferramentas que se tinha, em prol de mudanças na natureza para sobrevivência, foi concretizado por conta do conhecimento dessas variadas formas. Entretanto, o ser humano cria a Arte para que as pessoas tenham o entendimento da forma que o artista pensa ou compreende o mundo que o cerca.

1.2.1 Arte rupestre

Produção artística feita pelos hominídeos (termo utilizado para descrever os humanos e ancestrais extintos), durante a Pré-história. Esse tipo de arte se encontra nas paredes das cavernas e em alguns utensílios, na parte externa. Segundo Buco (2012, p. 14),

> Não sabemos o que eles pensavam, mas podemos conhecer um pouco da sua história, ou construir uma história, por esses vestígios, por esse registro pictórico deixado ao tempo. A arte rupestre é um complexo sistema de comunicação que cumpriu e cumpre sua principal função até hoje, o comunicar.

Por conta das poucas informações sobre o modo de vida das primeiras civilizações, a arte rupestre se tornou uma fonte histórica rica para pesquisadores que desejam aprofundar seus conhecimentos sobre o modo de vida dos primeiros seres humanos.

1.2.2 Idade Antiga

Na antiguidade, por volta do século V a.C., a Arte se sobressai no Egito e na Grécia. Por exemplo, no Egito, buscava-se retratar a movimentação dos corpos e mostra uma preocupação com a delicadeza das formas, o local de trabalho era revestido com um gesso branco e logo depois era pintado com uma tinta (essa tinta podia ser colorida a partir de minerais e tinha a textura espessa). Acrescenta Imbroisi *et al.* (2023),

> No Período Clássico, século V a.C., passou-se a procurar movimento nas estátuas, há maior uso do bronze, mais resistente do que o mármore, podendo fixar o movimento sem se quebrar. Surge o nu feminino, pois no período arcaico, as figuras de mulher eram esculpidas sempre vestidas. As principais características desse período são o realismo idealizado, o naturalismo, o equilíbrio e a serenidade.

Em contrapartida, na Grécia as obras tentavam refletir os costumes e as mudanças que ocorreram na sociedade naquela época. Nesse período, uma característica marcante conhecida como antropocêntrica ficou bem evidente, focada no realismo, destacando a beleza do ser humano, e assim como no Egito, havia a forte atenção na suavidade das formas, colocando a beleza do humano no centro das obras.

1.2.3 Idade Medieval

Na Idade Medieval, cerca de 350 d.C. até o ano de 1450, o cristianismo dominou a cultura ocidental, e por conta disso, a Arte se torna essencialmente religiosa pela influência da Igreja Católica. Construção de templos, igrejas, mosteiros e palácios marcaram esse tempo. Assim, Hausser (2000, p. 123 e 124) expõe,

> A unidade da Idade Média como período histórico é inteiramente artificial. Na realidade, ela se divide em três períodos culturais muito distintos: a economia natural da fase inicial da Idade Média; a cavalaria galante da Alta Idade Média; e a cultura burguesa urbana do final da Idade Média. [...]. A maioria dos aspectos que são usualmente considerados característicos da arte medieval, como o desejo de simplificação e estilização, a renúncia à profundidade espacial e à perspectiva, o tratamento arbitrário das proporções e funções corporais, só são típicos, na verdade, da fase inicial da Idade Média. [...]. Na transição da fase inicial para a Alta Idade Média, a arte se emancipa da maioria das limitações que lhe eram impostas, mas conserva, ainda, um caráter profundamente religioso e espiritual, sendo a expressão de uma sociedade inteiramente cristã no sentimento.

O propósito da Arte era ensinar religião e a arquitetura passou a ser utilizada para fazer esculturas e monumentos. Os artistas tinham como objetivo contar histórias sobre a Bíblia em suas produções, além de fazer objetos religiosos para serem usados durante as celebrações religiosas. Pinturas eram feitas para ornamentar o interior das igrejas, com os temas que abordavam histórias bíblicas, a vida dos santos, a ascensão de Jesus e o juízo final.

1.2.4 Idade Moderna

Conhecida como o Renascimento Cultural, a Arte na Idade Moderna foi definida por importantes transformações sociais, econômicas e políticas. Resgatando a arte greco-romana nas pinturas, arquitetura e escultura, as fundações das renovações aparecem nesses três eixos. Em relação a esse período, Hausser (2000, p. 284 e 285) esclarece,

> Todo desenvolvimento artístico passa a ser parte do processo total de racionalização. O irracional deixa de causar qualquer impressão mais profunda. As coisas que são agora sentidas como "belas" são a conformidade lógica das partes individuais de um todo, a harmonia aritmeticamente definível das relações e o ritmo calculável de uma composição, a exclusão de discordâncias na relação das figuras com o espaço que ocupam e o relacionamento mútuo das várias partes do próprio espaço.

E para o artista ser considerado adequado para a época, precisaria ter o conhecimento de teologia, história e mitologia. E suas obras precisariam ter como foco central o ser humano, não deixando de lado a essência religiosa da Idade Média, mas sim, mostrando o divino na perspectiva humana.

1.2.5 Idade Contemporânea

A Arte neste período compreende-se após a Revolução Francesa, e é caracterizada por mudanças artísticas, demográficas, sociais, políticas, tecnológicas e econômicas. Com a chegada do século XX, o principal traço é a liberdade de expressão, deixando de lado a imitação da natureza e dando lugar ao sensível, conceitual e a linguagem das formas. Destaca Fischer (1987, p. 15),

> A obra de arte deve apoderar-se da plateia não através da identificação passiva, mas através de um apelo à razão que requeira ação e decisão. As normas que fixam as relações entre os homens hão de ser tratadas no drama como "temporárias e imperfeitas", de maneira que o espectador seja levado a algo mais produtivo do que a mera observação, seja levado a pensar no curso da peça e incitado a formular um julgamento, afinal, quanto ao que se viu: "Não era assim que devia ser. É estranho, quase inacreditável. Precisa deixar de ser assim."

Se direcionando ao abstrato, as pinturas e esculturas quebram com as linhas retas, com o correto, cores tradicionais e com o ponto de vista único. Os desenhos geométricos são introduzidos nas pinturas, monumentos e arquiteturas, abandonando a simetria e concedendo lugar a assimetria.

2 A RELAÇÃO ENTRE MATEMÁTICA E A ARTE

A Matemática e a Arte devem ter muito em comum, pois ambas surgiram através das inspirações do homem, estão presentes no cotidiano das pessoas. Enquanto a Matemática estuda os conceitos abstratos, com ênfase a essa palavra "abstrato", aquilo que não é concreto e está além do nosso mundo de *imperfeições*. Afirma Silva (2007, p. 37) "ideias e as essências perfeitas, as ideias de circularidade, a bondade sem jaça e os círculos perfeitos" é nesse local que a Matemática se encontra.

Por outro lado, a Arte é a produção consciente de obras ou formas voltados para a concretização de um ideal, ou seja, torna verdadeiro, real, existente e manipulável o objeto. Mas quando há o encontro entre essas duas áreas do conhecimento, emoções, sentidos, memórias e pensamentos florescem. Conforme Wagner *et al.* (2020, p. 15),

> Na travessia com a arte e a matemática, um cotidiano perpassado pela geometria acontece. Um evento vivido salta à memória, se faz corpo, se faz língua e inventa possibilidades. Matemática e arte entrelaçam-se para falar do cotidiano, para explicar, organizar e dar sentido àquilo que movimenta nossos dias. Inventam-se problemas, aplicam-se conceitos. Inventam-se modos de relacionar matemática e arte, fazendo de situações corriqueiras motivos que possibilitam tornar o discurso matemático um agente de interpretação das imagens.

E assim a compreensão começa a surgir, sabendo que a Matemática perpassa as demais ciências, pelos relatos mencionados anteriormente que ela tenha sido a primeira área a ser descoberta, notavelmente é o suporte para as outras, incluindo a Arte. E tendo noção sobre isso, por meio da Arte a Matemática pode ser ensinada, explicada e abordada.

Então, percebe-se que ao longo da história a Matemática e a Arte sempre estiveram interligadas, pois elas se faziam presentes no diário do ser humano, mas de forma implícita, onde os conceitos matemáticos envolvidos foram descobertos após anos das realizações dessas produções. Isso pode ser observado na Arquitetura, nos monumentos, na construção de edifícios, pinturas e entre outros. Diz Wagner *et al.* (2020, p.11),

> Contudo, ao ver, falar e imaginar matemática na arte, um modo de compreender matemática acontece, aparece, mostra-se e pulsa na interação entre imagens e olhares. Ao ver, falar e imaginar matemática na arte, pulsa um modo de se compreender a matemática que ganha vida através daquilo que se fala, daquilo que se vê, daquilo que se imagina: "tanto olhando para arte, você vê matemática como você vai se utilizar da matemática para fazer arte".

Isso é perceptível, que a Matemática tem favorecido a Arte e vice-versa, um exemplo disso, estão nas artes plásticas que tem como fundamento conceitos matemáticos perspectiva, proporção, simetria. Tendo consciência de tudo que foi descrito acima, a pintura, os monumentos, construções, esculturas, deveriam ser tratados como objetos matemáticos, a fim de ressaltar e desenvolver os sentidos de cada pessoa. Além disso, a Arte é uma forma de comunicar, emocionar e conectar pessoas do mundo todo, por isso, continua evoluindo e inspirando outras pessoas.

2.1 ALGUMAS ARTES FAMOSAS QUE ENVOLVEM MATEMÁTICA

Se pararmos para pensar, a relação entre a Arte e a Matemática surgiu a muito tempo atrás. Fazendo um pequeno aparato na história, nota-se que uma parte dos artistas usavam a Matemática sem a intenção, e a outra parte estudava e a entendia para que pudessem fazer uso dela, dependendo do que queriam retratar em suas realizações.

As produções, onde as duas ciências se encontram com mais clareza acontece no Renascimento, os artistas observaram que fazer uso de algumas noções matemáticas traria mais realismo para as suas inspirações. Abaixo, serão listadas algumas obras que se tem a conexão entre as duas áreas:

2.1.1 Origami

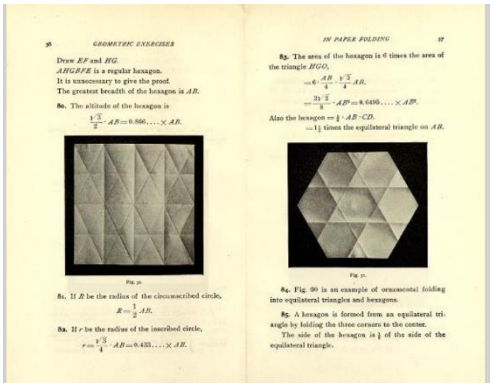
O origami é uma arte oriental que consiste em fazer dobraduras de papel para construir esculturas. Etimologicamente, a palavra advém das junções dos termos em japonês *ori* (dobrar) e *kami* (papel). Sua origem remonta um pouco depois da invenção do papel, onde a partir do século VII, os monges budistas chineses teriam levado essa técnica de dobradura para outros países, entre eles, o Japão. Conforme Oliveira (2005),

> O trabalho manual das dobraduras estimula também as habilidades motoras com uma ênfase no desenvolvimento da organização, na elaboração de seqüências de atividades, na memorização de passos e coordenação motora fina do aluno. Atividades em grupo favorecem a cooperação, bem como a paciência e a socialização. O resultado das dobraduras, além de um incentivo à realização pessoal e à auto-estima, é um motivo especial para presentear pais, amigos criando uma saudável conexão escola/casa.

Normalmente, as figuras representadas eram elementos da natureza, como animais e plantas, sendo que cada um tem um significado em particular. Mas em 1893, um

matemático chamado Tandalam Sundara Row, publicou um livro (Figura 5) que aborda exercícios geométricos com dobraduras de papel, seria ele o responsável por popularizar essa abordagem na Matemática.

Figura 5 – Página do livro "Exercícios Geométricos"



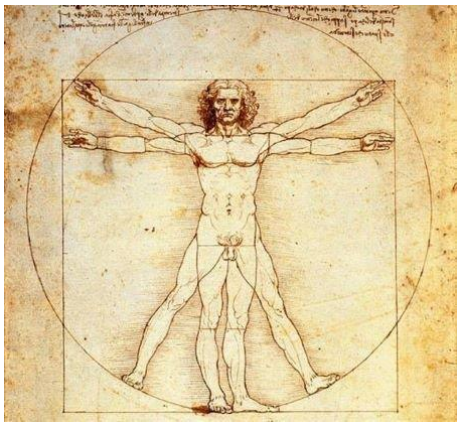
Fonte: Site *www.archive.org.com.br*

Desta forma, o Origami traz o conhecimento de conceitos geométricos que normalmente não é percebida, mas é nessa concepção que tende a aprendizagem das propriedades e definições matemáticas por parte dos discentes.

2.1.2 O Homem de Vitrúvio

No ano de 1490, surge esse trabalho (Figura 6) elaborado pelo anatomista, arquiteto, músico, pintor, escritor e matemático Leonardo da Vinci, representando as proporções perfeitas do corpo humano.

Figura 6 - Obra "O Homem Vitruviano"



Fonte: Site *www.mahvis.net/renaissance.php*

Inspirado no conceito de proporção proposta por um arquiteto romano chamado Vitrúvio, este esboço se tornou o ideal de beleza. Note, que Da Vinci posicionou o homem em duas formas geométricas círculo e quadrado, além dos cálculos que mostram a medida

do comprimento dos braços abertos que se iguala à sua altura, de forma organizada foi uma composição que se tornou digna de estudo. Explica Chaves (2008, p. 22 e 23),

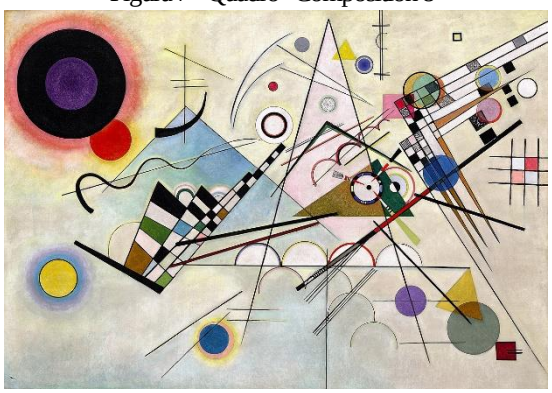
> Um antebraço ou cúbito é a largura de seis palmos; um passo é quatro antebraços; A longitude dos braços estendidos de um homem é igual à altura dele; [...] A distância do fundo do queixo para o nariz é um terço da longitude da face; A distância do nascimento do cabelo para as sobrancelhas é um terço da longitude da face.

Depois, percebeu-se que a área total do círculo é igual à do quadrado, e que a obra podia ser considerada como um algoritmo matemático capaz de calcular o número irracional *PHI* (1,618). Portanto, quando se acha algo bonito e harmonioso, é sinal que tenha uma regra geométrica chamada Proporção Aurea.

2.1.3 *Composition 8* (Composição 8)

No ano de 1923, fim do Renascimento e chegada da Idade Moderna, surge o artista Wassily Kandinsky que utiliza a arte abstrata em suas obras.

Figura 7 - Quadro "Composition 8"



Fonte: Site *www.pinterest.co.uk/pin/325525879296631730*

Usando conceitos matemáticos da Geometria em seus trabalhos (Figura 7) como círculos concêntricos, linhas abertas, linhas fechadas, triângulos, quadrados, ele elabora essa bela obra de arte. Diz Spector (2018),

> Na *Composição 8*, as formas geométricas coloridas e interativas criam uma superfície pulsante que é alternadamente dinâmica e calma, agressiva e silenciosa. A importância dos círculos nesta pintura prefigura o papel dominante que desempenhariam em muitos trabalhos subsequentes, culminando em sua imagem cósmica e harmoniosa *Vários Círculos*. "O círculo", afirmou Kandinsky, "é a síntese das maiores oposições. Combina o concêntrico e o excêntrico em uma única forma e em equilíbrio. Das três formas primárias, ela aponta mais claramente para a quarta dimensão.

Apesar de ele adotar aspectos das tendências do Suprematismo (movimento artístico russo, centrado em formas geométricas básicas) e Construtivismo (tese epistemológica que defende o papel ativo do sujeito na criação e modificação de suas representações do objeto do conhecimento). Kandinsky, buscava ampliar o conceito de arte, evidenciando as inúmeras possibilidades para trabalhos que estavam de alguma forma ligadas ao Cálculo.

2.1.4 São Paulo

No ano de 1924, Tarsila do Amaral ficou conhecida por algum tempo em retratar em suas produções um estilo cubista. As suas obras se baseiam em elementos marcados pelo contraste, componentes geométricos e que retratam o dia a dia das pessoas. Certifica Cruz (2017, p. 29 e 30),

> Tarsila relê os elementos de sua própria composição, como se construísse nas telas 30 fotografias das cenas do cotidiano. Sem este exercício, talvez não houvesse a maturação necessária na obra para conferir a liberdade existente na fase antropofágica, em que esta busca da objetividade não é mais priorizada, possibilitando a realização plena do seu estilo [...].

Podemos perceber essas características em seu trabalho intitulado “São Paulo” (Figura 8), essa intensa e inovadora concepção estrutural do espaço pitoresco é acentuada, por espécie de jogo de encaixes, que divertem e intrigam o olhar.

Figura 8 - Quadro "São Paulo"

Fonte: Site *www.pinterest.com/pin/426856870913867293*

E esse movimento ficou conhecido como Cubismo, que se destaca pelas formas geométricas como meio de expressão cones, cilindros, retângulos, quadrados, esferas,

pirâmides, prismas. As pinturas com tonalidades variadas, faz com que o espectador tenha uma visualização espacial, isto é, a imagem pode ser vista de diferentes ângulos.

2.1.5 *Number 1* (Número 1)

No ano de 1948, o brilhante pintor Jackson Pollock com a origem do Expressionismo, nos traz um quadro que tem ligação com o modelo geométrico dos fractais (Figura 9). Assegura Taylor (2006, p. 110 e 118),

> Virando as costas à técnica artística tradicional e europeia desenvolveu o que ficou conhecido como o estilo ‘pouring’ ou 'drip and splash'. [...] Em vez de utilizar um pincel para tocar a superfície da tela, ele simplesmente mergulhou-a numa lata e depois verteu pintar diretamente sobre a tela horizontal abaixo. Usando este verter criou imagens vastas e puramente abstratas e, ao fazê-lo tornou-se a figura principal de um movimento artístico conhecido como Abstrato Expressionismo. [...] Na realidade, parece que Pollock possuía uma capacidade inata de gerar fractais a uma velocidade igualada apenas por computadores! Para enfatizar este facto, no início artigos e conferências públicas introduzi o termo "Fractal Expressionismo" para distinguir entre o número matemático esmagamento dos fractais gerados por computador e os mais intrínsecos, fonte humana dos fractais de Pollock.

Os fractais são figuras geométricas formadas a partir de equações matemáticas que podem ser interpretadas como formas e cores por programas de computador. São ferramentas importantes para diversas áreas, desde os estudos sobre mudanças climáticas até pesquisas sobre o câncer (capaz de identificar o crescimento das células mutantes). E essa técnica está presente nos quadros de Pollock, como na figura abaixo:

Figura 9 - Quadro "Number 1"

Fonte: Site *www.en.artsdot.com*

A principal característica dos fractais é a autossimilaridade, encontrada na obra *Number 1*, é notável quando a pintura é ampliada que foi utilizado quadrado de várias

formas, um padrão geométrico que se repete, além da técnica de *dripping* (salpicar) aplicada aleatoriamente no trabalho.

2.1.6 Catedral Metropolitana de Brasília

A construção teve início no ano de 1913 e finalizou em 1970, a estrutura do monumento (figura 10) foi feita com 16 colunas curvas que honram a Matemática. Elaborada pelo arquiteto Oscar Niemeyer e engenheiro Joaquim Cardozo, o perfil da catedral é hiperbólico e a seção é transversal parabólica, as colunas afinam na base dando a impressão que tocam de leve o chão. O conjunto de colunas formam um feixe que sugere mãos elevadas para o alto. Fala Vasques (2018, p. 39),

> Sua Base estrutural é formada por 16 pilares, distribuídos em uma planta circular de 70 metros de diâmetro curvos apoiando uma laje de cobertura logo abaixo do topo dos pilares. Primeiramente, sua estrutura conteria 21 pilares e altura de 40 m, porém foram reduzidos por motivos estéticos para 16 pilares e a altura de 30 m. Niemeyer, conseguiu, primordialmente, representar os espaços da Catedral como sagrado de uma forma simples.

A Catedral foi um dos primeiros monumentos projetados por Oscar Niemeyer inaugurado em Brasília. E a partir dessa e outras obras, a capital passou a ser considerada como ícone do modernismo arquitetônico brasileiro.

Figura 10 - Monumento "Catedral Metropolitana de Brasília"

Fonte: Site *www.arteforadomuseu.com.br*

O monumento tem características marcantes do artista que a criou, concreto armado aparente, simplicidade, curvas harmoniosas, ousadia estrutura e formas audaciosas. Além de evidenciar a cultura religiosa percebida na paisagem, que pode ser interpretada pelas formas que a compõem.

2.1.7 *Liberty and Anarchy* (Liberdade e Anarquia)

No ano de 2013, a artista australiana Nike Savvas, fez uma exposição de esculturas (Figura 11) que utilizavam equações matemáticas para o desenvolvimento delas. Apresentou a primeira e maior exposição individual do trabalho no Leed Art Gallery (Galeria de Arte do Leed), onde construiu 18 grandes telas com os materiais lã, fitas de plástico, bases de madeira e entre outros.

Figura 11 – Exposição "Liberty and Anarchy"

Fonte: Site *www.mymodernmet.com.br*

Em cada projeto, Savvas utilizou fórmulas matemáticas especificas para fazer as estruturas tridimensionais de madeira. Após a construção, foram utilizados para cobrir os espaços vazios, os materiais de forma padronizada. Todo esse trabalho, resultou em uma série de esculturas geométricas de diversas formas e tamanhos. Externa Lillington (2013),

> [...] três matemáticos que vieram ver a exposição. Eles ficaram encantados com as peças da Escada Deslizante, construções geométricas 3D – algumas muito grandes – com molduras de madeira firmemente amarradas com fios de lã de cores vivas. Eles analisaram a geometria, a beleza. Eles conheciam a matemática que Savvas havia usado para projetá-los.

Não há uma técnica específica que Savvas utiliza, apenas as fórmulas que utilizou para criar as grandes construções geométricas, diz a própria artista "então o fato de eles serem baseados em matemática não os torna ruins, afinal!" (Savvas, 2013), pois foi a primeira vez que fez a junção entre Matemática e Arte, e pode-se dizer que deu certo.

3 MATEMÁTICA, ARTE E A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC)

A Arte na BNCC, tem como teses que a sensibilidade, intuição, o pensamento e as subjetividades se manifestem como formas de expressão no processo de aprendizagem. Desta forma, é proposto o desenvolvimento de habilidades e competências de modo que as práticas investigativas e o fazer artístico faça com que cada indivíduo perceba o mundo em sua complexidade, contextualizando saberes e interagindo com a arte e a cultura.

Existem quatro tipos de linguagens, onde a arte está inserida na BNCC, são elas: artes visuais, dança, música e teatro. Cada linguagem artística é considerada de acordo com sua especificidade, entendendo que cada pessoa compreende a arte de uma forma, ou seja, essa experiência não pode ser dividida.

Além do mais, expressa que a abordagem das linguagens articule em seis dimensões criação, crítica, estesia, expressão, fruição, reflexão. E quatro unidades temáticas, podendo receber mais destaque dependendo do ano de escolaridade. De acordo com Brasil (2016, p. 112),

> Engloba quatro linguagens: Arte Visual, Dança, Música e Teatro. Cada linguagem tem seu próprio campo epistemológico, seus elementos constitutivos e estatutos, com singularidades que exigem abordagens pedagógicas específicas das artes e, portanto, formação docente especializada.

Desta maneira, as quatro unidades temáticas são:

Artes Visuais: conhecer e explorar múltiplas culturas visuais em diversos tempos históricos junto com o diálogo acerca das diferenças entre elas, para ampliar os limites escolares e criar formas de interação artística e produção cultural.

Dança: articular os processos cognitivos e as experiências sensíveis no movimento dançado, discutindo o significado das relações entre a corporeidade e produção estética para repensar e transformar percepções acerca do corpo e dança.

Música: ampliar a produção dos conhecimentos musicais para vivenciar a música inter-relacionada à diversidade, desenvolver saberes musicais fundamentais para sua inserção, participar criticamente e ativamente na sociedade.

Teatro: desenvolver uma experiência artística e multissensorial para criar diferente tempos, espaços, e sujeitos envolvendo a si próprio e o coletivo.

A Matemática na BNCC, aconselha que as habilidades e competências possam permitir que o aluno tenha a percepção de entender a importância dessa área na vida

pessoal e social. Além, de desenvolver o pensamento matemático para depois dos cálculos numéricos, dando ênfase na resolução de problemas, investigação, progressos em projetos e modelagem como um meio de aperfeiçoar o letramento matemático.

Ela também se divide em cinco temáticas, dependendo do ano de escolaridade requer um maior cuidado e atenção, com o intuito de dar autonomia ao aluno para tomar decisões nas diversas situações que podem surgir. Segundo Brasil (2015, p. 12),

> As áreas e componentes curriculares se articulam para promover a apropriação por crianças, jovens e adultos de diferentes linguagens e interpretar fenômenos e processos naturais, sociais e culturais, para enfrentar problemas práticos, para argumentar e tomar decisões, individual e coletivamente.

Assim, é notório a necessidade do conhecimento matemático como linguagem, onde em combinação com outros conhecimentos amplia o entendimento e articulação da mesma. Porém, é preciso ter consciência sobre as temáticas, são elas:

Números: desenvolver o pensamento numérico, para conhecer maneiras e quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades.

Álgebra: desenvolver o pensamento algébrico, para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas. E, situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e símbolos.

Geometria: estudar posição, deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais, para desenvolver o pensamento geométrico, que é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes.

Grandezas e Medidas: estudar medidas e relações entre elas, ou seja, as relações métricas, o que favorece a integração da Matemática a outras áreas do conhecimento.

Probabilidade e Estatística: coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, para fazer julgamentos bem fundamentados e tomar decisões adequadas.

4 O SOFTWARE GEOGEBRA

Criado por Markus Hohenwarter, o projeto iniciou no ano de 2001 na Universidade de Salzburgo na Áustria, passou pela Universidade Flórida Atlântica na Flórida, e finalizou na Universidade Estadual da Flórida em 2009. Atualmente, o projeto continua com uma equipe de desenvolvedores *open-source* na Universidade de Linz localizada na Áustria.

O *software GeoGebra* é um aplicativo de matemática dinâmica e livre, ou seja, pode ser baixado gratuitamente. Disponível em múltiplas plataformas como *iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook e Linux*, que combina dois ramos: Geometria e Álgebra. Devido a isso, torna-se uma ferramenta útil em sala de aula para ensinar de maneira mais simples os assuntos mais complexos, pois reúne também planilhas, gráficos, estatística e cálculo.

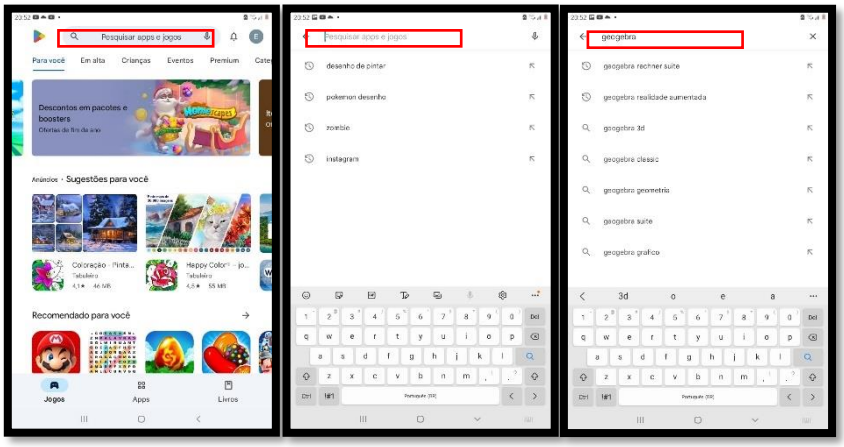
Ademais, existe uma comunidade chamada *ogeogebra* com milhões de usuários espalhados por diversos países, que apoiam a educação em ciência, tecnologia, engenharia e matemática, inovando a partir das propriedades do *Software*.

4.1 DEFINIÇÃO E INSTALAÇÃO

O *GeoGebra*, é um *software* livre segundo a GUI (*General Public License* – Licença Pública Geral). Pode ser instalado acessando o *Play Store* ou o site oficial *www.geogebra.org*. Para *smartphones* e *tablets* o ideal é acessar o *Play Store*, e baixar o Suíte *GeoGebra* Calculadora, pois ele mostra várias ferramentas que podem ser trabalhadas, ou seja, as calculadoras que você pode escolher. Em especial, as janelas 2D (bidimensional) e 3D (tridimensional), que abrangem um amplo número de recursos a ser utilizado, por isso, o desejado é que seja instalado essa versão do aplicativo. Abaixo, estarão os passos para o *download* dele:

Passo 1 – Acessar o *Play Store* e digitar no campo de pesquisa *GeoGebra* (Figura 12)*;*

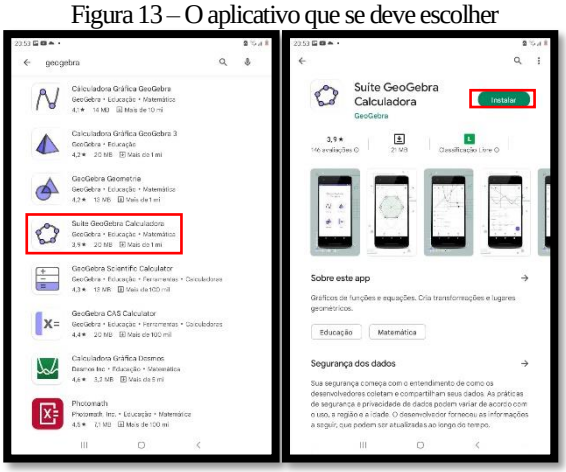
Figura 12 – Como pesquisar o aplicativo no celular ou tablet



Fonte: Própria da autora

Passo 2 – Buscando, aparecerá vários aplicativos relacionados. Então, acesse Suíte *GeoGebra* Calculadora e realize a instalação (Figura 13);

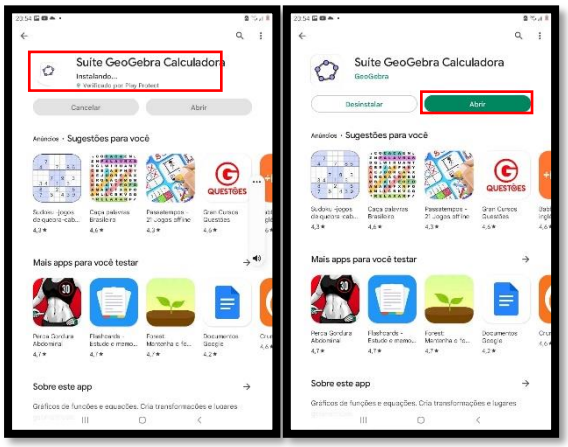
Figura 13 – O aplicativo que se deve escolher



Fonte: Própria da autora

Passo 3 – Finalizado o processo de instalação, o aplicativo já estará baixado em seu aparelho. Depois, basta clicar em abrir para entrar no *software* (Figura 14);

Figura 14 – Como instalar e abrir



Fonte: Própria da autora

Passo 4 – No momento que você clicar em abrir, aparecerá a *interface* inicial do *software* (Figura 15).

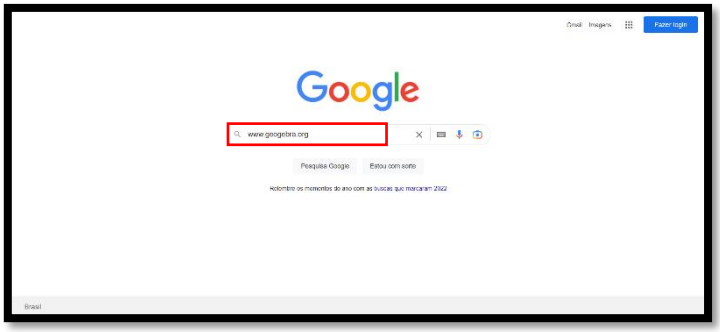
Figura 15 – Interface do GeoGebra para celular e tablet

Fonte: Própria da autora

Para notebooks e computadores de mesa, é recomendado efetuar a instalação pelo site oficial, como mostrarei abaixo.

Passo 1 – Acessar através da sua barra de navegação o site *www.geogebra.org* (Figura 16);

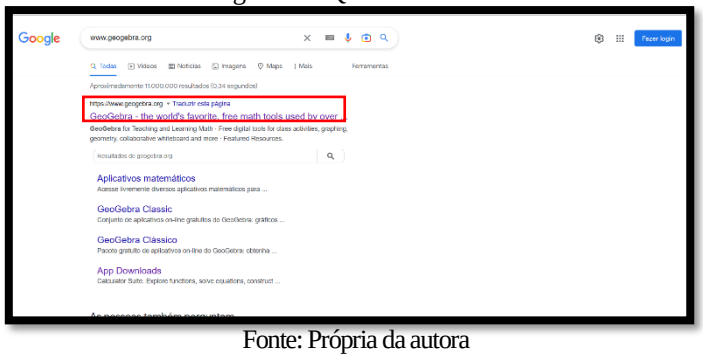
Figura 16 – Como pesquisar o *GeoGebra* no notebook e computadores de mesa



Fonte: Própria da autora

Passo 2 – Entre no site oficial, normalmente é o primeiro site da lista de pesquisa (Figura 17);

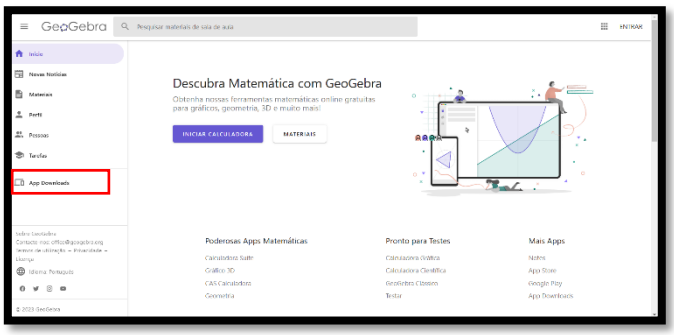
Figura 17 – Qual *site* escolher



Fonte: Própria da autora

Passo 3 – Clique no site oficial, aparecerá a tela inicial dela. Então, no canto superior esquerdo, acesse *App Downloads* (Figura 18);

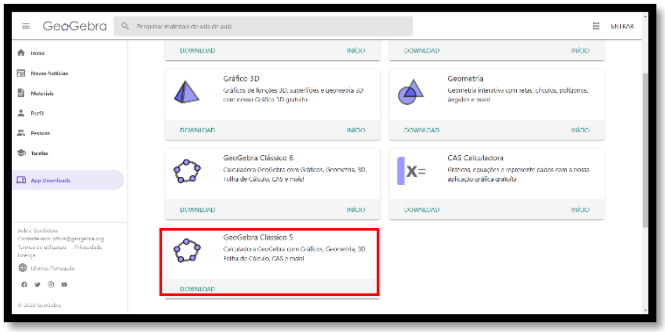
Figura 18 – Qual ícone buscar no *site* para baixar o aplicativo



Fonte: Própria da autora

Passo 4 – Clicado em *App Downloads*, abrirá vários aplicativos relacionados ao *GeoGebra*, cujo recomendado é o *GeoGebra* Clássico 5 e clicará em *download* (Figura 19);

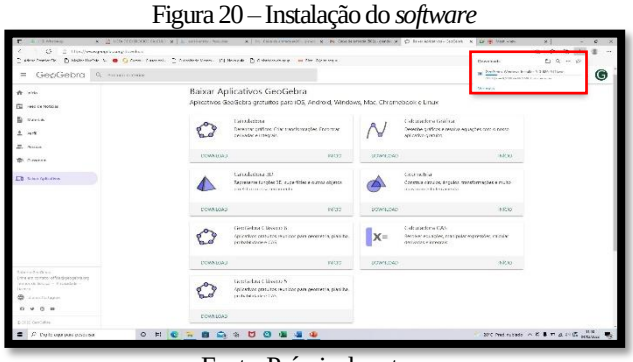
Figura 19 – Qual calculadora escolher



Fonte: Própria da autora

Passo 5 – Clicado em *download*, começará o processo de instalação do *software* (Figura 20);

Figura 20 – Instalação do *software*



Fonte: Própria da autora

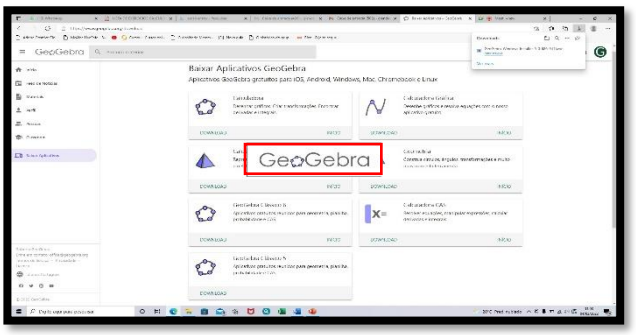
Passo 6 – Finalizado o processo de instalação, clicar em abrir arquivo e aparecerá as seguintes notificações que devem ser respondidas:

1- Deseja permitir que este aplicativo faça alterações no seu aplicativo? **Sim**;

2- Verificar se o idioma está correto, clicar em **próximo**;
3- Concordar com os termos de uso, clicar em **eu concordo**;
4- E por conseguinte, clicar em **instalar**;
5- Por último, clicar em **terminar.**

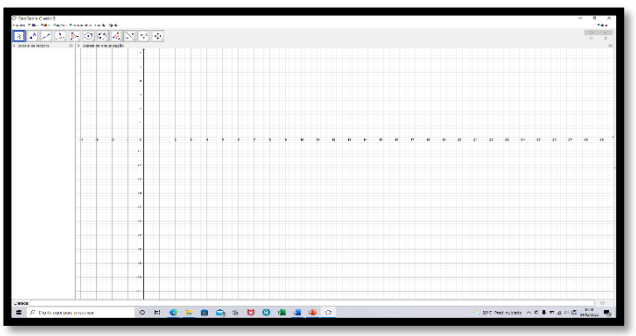
Passo 7 – Em seguida o *software* iniciará automaticamente (Figura 21 e 22).

Figura 21 – Como abrir o aplicativo



Fonte: Própria da autora

Figura 22 – Interface inicial do *GeoGebra* para notebooks e computadores de mesa

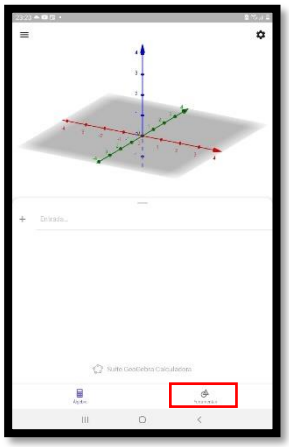


Fonte: Própria da autora

4.2 FERRAMENTAS BÁSICAS

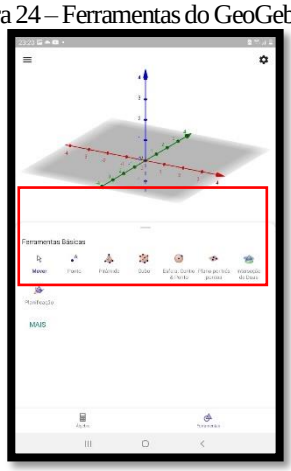
O *GeoGebra* Clássico 5 oferece várias ferramentas, quando acessado pelo *smartphones* ou *tablets*, aparecerá na tela inicial algumas calculadoras que podem ser selecionadas, na calculadora gráfica e 3D. Pode-se observar algumas ferramentas básicas padrão que estão localizadas na parte inferior (Figura 23 e 24).

Figura 23 – Interface inicial do GeoGebra 3D



Fonte: Própria da autora

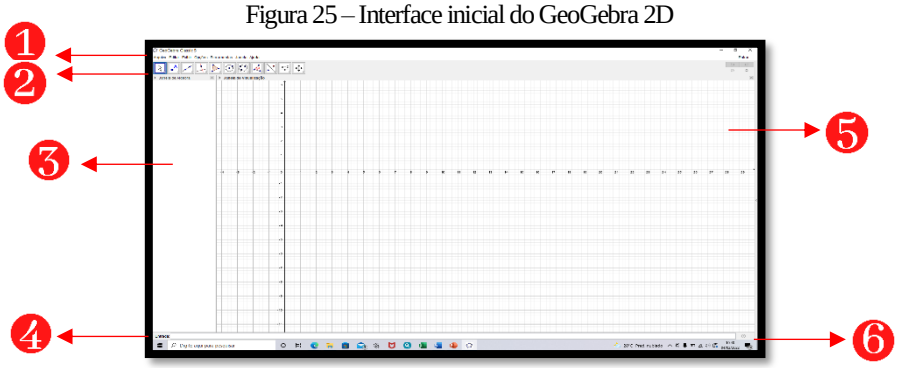
Figura 24 – Ferramentas do GeoGebra 3D



Fonte: Própria da autora

Para *notebooks* e computadores de mesa, ao acessar a *interface* inicial (figura 25), será exibida a janela de visualização 2D (bidimensional), que obedecem às mesmas ferramentas. A única diferença é que nos aparelhos celulares está em utilizar a pressão dos dedos para criar os objetos, enquanto nos computadores utiliza o *mouse*.

Figura 25 – Interface inicial do GeoGebra 2D



Fonte: Própria da autora

❶ **Barra de Menus:** disponibiliza opções para salvar o projeto em arquivo (.ggb) e para controlar configurações gerais.

❷ **Barra de Ferramentas:** concentra todas as ferramentas úteis para construir pontos, retas, figuras geométricas, obter medidas de objetos construídos, entre outros. Cada ícone dessa barra contém outros ícones que podem ser acessados clicando com o *mouse* em seu canto inferior direito.

❸ **Janela de Álgebra:** área em que é exibida as coordenadas, equações, medidas e outros atributos dos objetos construídos.

❹ **Entrada:** campo de entrada para digitação de comandos.

❺ **Janela de Visualização:** área de visualização gráfica de objetos que possuam representação geométrica e que podem ser desenhados com o *mouse* usando ícones da Barra de ícones ou comandos digitados na Entrada.

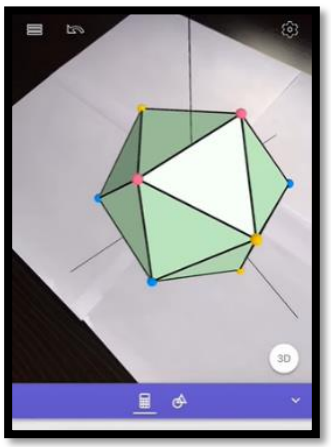
❻ **Lista de Comandos:** listagem de comandos predefinidos. Entre eles há comandos relacionados aos ícones da Barra de Ferramentas.

Essas são as ferramentas básicas para dar início ao acesso, também são similares para a janela de visualização 3D (tridimensional), que pode ser acessada, clicando no Menu, ao selecionar em Exibir, trocar a visualização da Janela 2d para 3d. Para *smartphones* e *tablets*, acontece da mesma forma. Porém, as ferramentas estão localizadas na parte inferior.

4.3 REALIDADE AUMENTADA NO *GEOGEBRA*

Em setembro de 2017, foi lançada a Realidade Aumentada (Figura 26) nas atualizações do *software GeoGebra*. Esse novo recurso disponível apenas para aparelhos *iOS*, permite que as construções criadas na janela de visualização 3D possam ser colocadas em qualquer superfície plana, apenas apontando a câmera do celular na superfície que deseja plotar o objeto, assim ele identificará o local e fará a sobreposição da construção no lugar.

Figura 26 – Realidade Aumentada no GeoGebra



Fonte: Vídeo do Youtuber (*https://youtu.be/P4PshBxYUkw*)

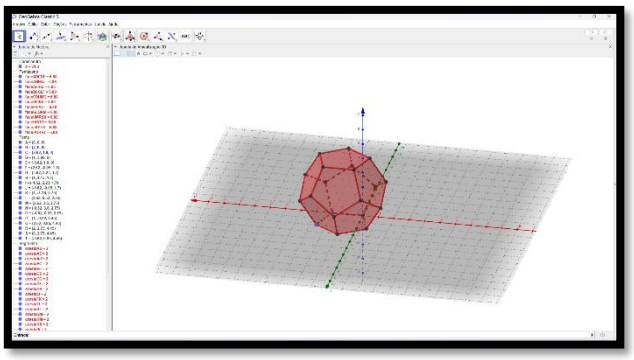
Essa inovação do aplicativo, faz a conexão entre o mundo físico e virtual, aprimorando as técnicas de ensino. Desta forma, fornece ao professor recursos visuais que permitem ajustar os conceitos de diferentes pontos de vista e noções, que podem ir de uma visão geral até o menor detalhe facilitando a compreensão e aproveitamento das aulas.

4.4 COMO ENSINAR MATEMÁTICA COM O *GEOGEBRA*?

Por ser um *software* de acessível e gratuito, se torna um forte aliado para o desenvolvimento das aulas, pois como já foi dito, ele abrange dois ramos da Matemática, Geometria e a Álgebra que acompanham Educação Básica, isto é, alunos do Ensino Fundamental Menor até o Ensino Médio. Tornando a Matemática mais tangível, os alunos podem manusear, investigar, tocar e experimentar o aplicativo, como consequência, deixar mais acessível e prazeroso o aprendizado.

Há inúmeros pontos positivos para utilizá-lo, mas a pergunta é "Como ensinar Matemática com o *GeoGebra*?" para responder a esse questionamento, darei alguns exemplos de como fazê-lo. Iremos por etapa, a primeira coisa que tem que ser feito, acredito que o mais viável para começar, é ensinar aos alunos a forma de instalar e apresentar as ferramentas básicas, pois os estudantes precisam saber como manipular o *software*. Após isso, o professor pode começar o processo de ligação entre o conteúdo e aplicativo, por exemplo, se quiser ministrar uma aula sobre poliedros, precisará fazer um exemplo e mostrar as ferramentas usadas para tal, para que os estudantes possam seguir e entender como a Matemática pode ser contemplada (Figura 27).

Figura 27 – Exemplo de como utilizar o GeoGebra



Fonte: Própria da autora

Nota-se que foi desenhado com o auxílio das ferramentas disponíveis um dodecaedro, mas o professor a partir da construção do objeto juntamente com os seus alunos, pode realizar questionamentos sobre a quantidade de arestas, faces e vértices que o poliedro possui, além de relacionar os dados encontrados com o nome que o poliedro recebe por isso. Também, poderá associar a Relação de Euler que diz:

$$V + F = A + 2$$

ou seja, a igualdade relaciona o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo (qualquer segmento com extremidades precisa estar totalmente contido dentro do poliedro), é o caso de nosso exemplo acima.

Um outro exemplo de como ensinar Matemática com o *GeoGebra* é através da sua comunidade, que hoje em dia possui milhares de usuários. Para ter acesso a essa comunidade basta fazer seu login no site oficial. A comunidade se assemelha com uma rede social, onde pode ser criado seus materiais e deixar público ou privado o compartilhamento deles, permissão para ver e usar os materiais de outros usuários, além de interagir e seguir os autores.

Neste ponto, há vários materiais de todos os ramos da Matemática, atividades que podem ser pesquisadas e utilizadas de forma prática e rápida, atendendo os quesitos necessários que o docente necessita naquele momento. Logo, é evidente que a forma como a Matemática e a expressão artística são ensinados na escola precisa ser repensada, de modo que as duas ciências possam ser trabalhadas em conjunto. Então, fazer o uso da criatividade para desenvolver uma arte que será única, empregando a percepção e lógica-matemática possibilita ao professor ampliar os conteúdos que deseja ministrar e como consequência, o aluno sente a carência de interagir, seja por curiosidade ou para sanar suas dúvidas.

5 METODOLOGIA

5.1 TIPO DE PESQUISA

Para que o trabalho se concretize e os objetivos sejam alcançados, a pesquisa utilizará de métodos práticos, ou seja, além de encontros com os alunos, será entregue ao final um questionário onde contém perguntas de múltipla escolha e abertas. Então, se dará por meio de uma pesquisa qualitativa e quantitativa, isto é, será feito através da observação, descrição, compreensão e pôr fim interpretação pelo pesquisador com base nos fenômenos pesquisados. Conforme Godoy (1995, p. 22), "Partindo de questões amplas que vão se aclarando no decorrer da investigação, o estudo qualitativo pode, no entanto, ser conduzido através de diferentes caminhos", o que viabiliza nosso trabalho em várias vertentes que queiramos escolher.

Para que isso se realizasse, foi escolhida a escola do município de Bragança/PA, Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Padre Luiz Gonzaga, como o *lócus* da pesquisa. Os sujeitos foram os 20 alunos de uma turma do 3º ano do Ensino Médio no período da manhã. Em todos os momentos de planeamento e atividade, o professor de Matemática da turma Prof.º Marsily Andrei Farias Risuenho, fez a supervisão enquanto a discente (autora do trabalho) aplicava a pesquisa.

Ao todo, foram realizados quatro encontros nos dias das aulas de Matemática, um com interação de 30 minutos e os outros três com duração de 90 minutos. Como o docente estava trabalhando Geometria Espacial, foi decidido que o novo assunto que seria tratado pelo professor, no caso, prismas, aconteceria com a ajuda do *software GeoGebra* e a Arte.

Dentro desses encontros, uma atividade tem como referência um trabalho elaborado por Lopes e Orzechowski em seu artigo "O Uso do *GeoGebra* na Construção de conceitos de Geometria Plana e Espacial". Ademais, outras inspirações como o Origami e a exposição de arte da artista Nike Savvas "*Liberty and Anarchy*" "Liberdade e Anarquia" para o presente trabalho.

O intuito das atividades feitas em sala, é fazer com que o aluno identifique o nome do prisma através da observação do sólido e de sua planificação. Com o auxílio da Arte como complemento desse estudo para o melhor entendimento, dinâmica e prazer em estudar a Matemática.

5.2 APLICAÇÃO

1º dia de encontro: O professor me apresentou a turma e pediu para que eu conversasse sobre como seria o funcionamento do trabalho, rapidamente, expliquei que trataríamos de um *software* chamado *GeoGebra* e que ao final uniríamos com a Arte. Como a sala de informática ainda não estava em funcionamento, optamos por usar os aparelhos eletrônicos, *smarthphones* e *tablets*, pois a maioria dos alunos tinham disponíveis esses recursos. Expliquei que poderiam baixar por meio do *Play Store* ou do site oficial *www.geogebra.org*, a forma de instalação e qual aplicativo baixar. No final entreguei a cada aluno um termo de autorização para que os responsáveis concordassem que seus filhos participassem do projeto.

2º dia de encontro: Houve o primeiro contato dos alunos com o aplicativo, iniciamos o trabalho com a apresentação por meio do *Power Point* (Figura 28) sobre prismas, definição, elementos e classificação quanto ser reto e oblíquo.

Figura 28 – Apresentação no Power Point sobre prismas

Fonte: Própria da autora

Após, apresentei o *software GeoGebra* Clássico 5, suas definições, ferramentas básicas e as funções relacionadas a construção dos prismas (Figura 29). Neste momento, ainda na primeira hora de aula, construí e expliquei o passo a passo da construção de um prisma de base quadrangular, o paralelepípedo. Focamos em todos os encontros em prismas convexos, ou seja, aqueles em que suas bases opostas são paralelas e congruentes formadas por polígonos, suas faces laterais retangulares quando reto e paralelogramos quando oblíquos.

Figura 29 – Alunos observando como manusear o *GeoGebra*

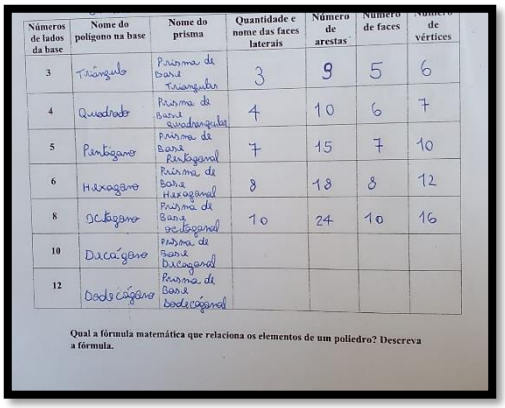
Fonte: Própria da autora

Observei que os alunos ficaram bem surpresos e entusiasmados para começar a construir por conta própria. Então, após ter mostrado como construir o paralelepípedo no *notebook*, deixei que eles colocassem em prática o que haviam aprendido. Porém, a construção teria que ser feita pelo celular, pois a maioria tinha disponível esse recurso tecnológico.

Neste momento inicial, de conhecimento e descoberta, uma parte dos alunos conseguiam fazer rapidamente o objeto, e assim que finalizavam me mostravam para saber se estava correto. Por outro lado, outros tinham dificuldade em acessar as ferramentas e se confundiam com as etapas para fazer o prisma, mas no final conseguiram concluir essa atividade com êxito. E se esperava esses obstáculos, pois era um aplicativo desconhecido, com a prática iriam ter mais confiança e autonomia para fazer as manipulações de forma mais clara.

Decorrente a esse processo, fomos para o segundo momento desse dia. Apliquei uma segunda atividade a fim de observar as características do prisma, quantidade de arestas, faces e vértices. E ao final da atividade proposta, coloquei uma pergunta associando a relação de Euler, uma dica para que eles pudessem compreender a conexão entre os prismas e a fórmula. Assim que preenchida a linha correspondente a um tipo de prisma, os alunos teriam que fazer a construção no *GeoGebra* (Figura 30 e 31).

Figura 30 – Atividade realizada pelo aluno A

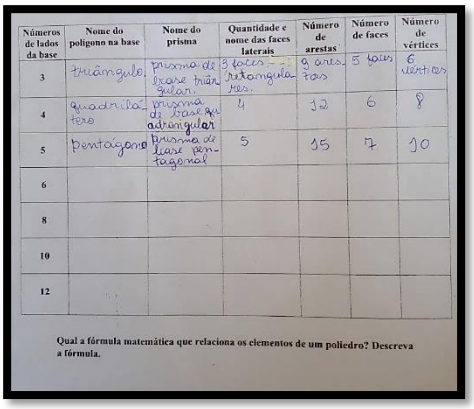


Números de lados da base	Nome do polígono na base	Nome do prisma	Quantidade e nome das faces laterais	Número de arestas	Número de faces	Número de vértices
3	Triângulo	Prisma de base Triangular	3	9	5	6
4	Quadrado	Prisma de base Quadrangular	4	10	6	7
5	Pentágono	Prisma de base Pentagonal	7	15	7	10
6	Hexágono	Prisma de base Hexagonal	8	18	8	12
8	Octógono	Prisma de base octogonal	10	24	10	16
10	Decágono	Prisma de base Decagonal				
12	Dodecágono	Prisma de base dodecagonal				

Qual a fórmula matemática que relaciona os elementos de um poliedro? Descreva a fórmula.

Fonte: Baseada na atividade feita no artigo "O Uso do GeoGebra na construção de conceitos de Geometria Plana e Espacial"

Figura 31 – Atividade realizada pelo aluno B



Números de lados da base	Nome do polígono na base	Nome do prisma	Quantidade e nome das faces laterais	Número de arestas	Número de faces	Número de vértices
3	triângulo	prisma de base triangular	3 faces triangulares	9 arestas	5 faces	6 vértices
4	quadrilátero	prisma de base quadrangular	4	12	6	8
5	pentágono	prisma de base pentagonal	5	15	7	10
6						
8						
10						
12						

Qual a fórmula matemática que relaciona os elementos de um poliedro? Descreva a fórmula.

Fonte: Baseada na atividade feita no artigo "O Uso do GeoGebra na construção de conceitos de Geometria Plana e Espacial"

Planejei para essa atividade cerca de 45 minutos, que não foram suficientes para o término dela. Parte da turma quase conseguiu preencher a tabela (por completo), e esses entenderam de forma nítida a tarefa, enquanto os outros colegas chegaram a responder somente até a terceira linha.

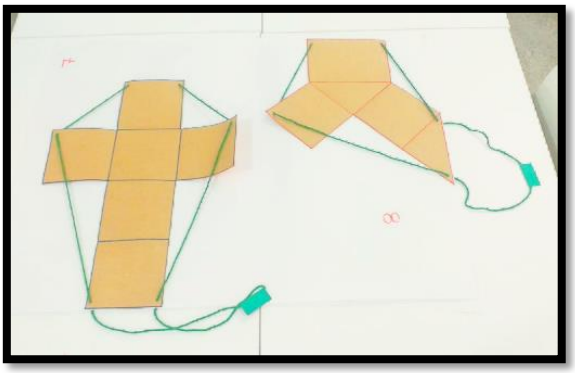
Isso se deve por não compreenderem as características básicas do prisma. Me indagavam a todo momento sobre o que era aresta, face e vértice, e para isso foi necessário explicar sobre, utilizando o *software*. Desta forma, se tornou mais claro para os alunos. Um dos alunos mencionou que a partir da explicação no aplicativo, ele conseguiu entender e compreender o que estava sendo pedido na atividade, mas não conseguiria finalizar o trabalho pelo tempo que nos restava.

3º dia de encontro: Iniciei com o *software GeoGebra* abordando 8 tipos de prismas, são eles: prisma de base triangular, quadrangular (cubo), quadrangular

(paralelepípedo), pentagonal, hexagonal, heptagonal, decagonal e dodecagonal. Havia feito todos eles e levei construídos para escola, quando começamos o trabalho fiz a planificação de cada um e mais uma vez, salientei sobre as características e os polígonos que formavam os prismas. Além disso, mostrei passo a passo como fazer o objeto no aplicativo, para que os alunos a todo momento se lembrassem e praticassem a manipulação.

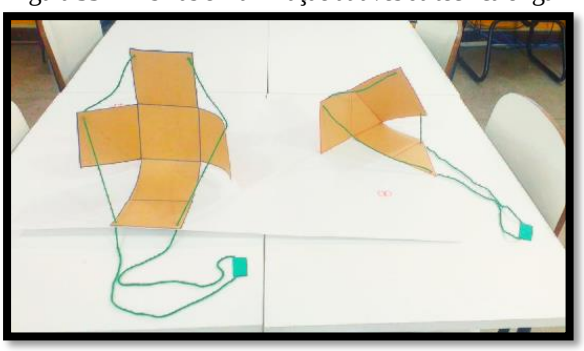
Em seguida, fomos para uma atividade prática envolvendo a Arte, o chamado origami (arte oriental que consiste em fazer dobraduras de papel). Apesar, que algumas pessoas pensem que o Origami não se encaixe nas figuras tridimensionais, ela sim, se encaixa, pois a definição dessa arte é realizar dobraduras de papel, afirma Rancan (2011, p. 18) "trata-se de uma forma de representação visual/escultural definida principalmente pela dobradura de papéis. De uma ou mais folhas simples de papel, emerge um universo de formas". Através dessa técnica, fiz a adaptação para a sala de aula, desenvolvi os 8 tipos de prismas apresentados inicialmente no *GeoGebra* para os alunos com papel cartão (Figura 32, 33 e 34).

Figura 32 – Os prismas planificados em origami



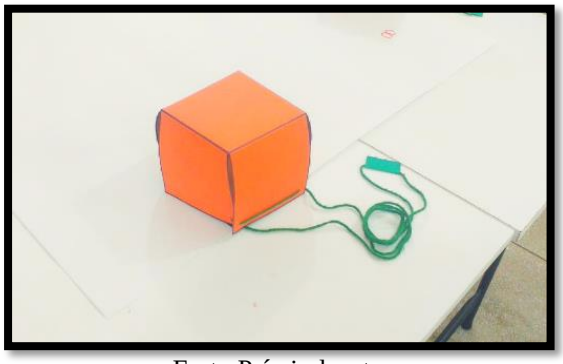
Fonte: Própria da autora

Figura 33 – Prismas em animação através da técnica origami



Fonte: Própria da autora

Figura 34 – Prisma no formato 3D



Fonte: Própria da autora

Para o início da atividade, a turma foi dividida em 4 equipes contendo 5 alunos cada, onde todos os grupos receberam uma folha para colocar as suas respostas. Em primeiro lugar, os grupos teriam que se aproximar dos prismas planificados, após a observação das características se reunirão com a equipe para a classificação deles (Figura 35 e 36).

Figura 35 – Atividade levada para a sala de aula sobre planificação de objetos

Fonte: Própria da autora

Figura 36 – Folha de exercício para a realização da atividade

Fonte: Própria da autora

Constatei que os alunos estavam mais preparados para realizar a atividade, e notaram que a nomenclatura do prisma é feita por meio da observação das bases e discutiam sobre isso com a equipe pertencente.

Terminada essa etapa, corrigimos em conjunto a atividade com a ajuda dos próprios origamis. Observe que há um fio em cada lado do prisma planificado, ao puxar esse fio ele varia sua estrutura em planificação e sólido, foi por meio desta observação que cada grupo ficou responsável de verificar se suas respostas estavam corretas.

Logo depois, foi feita a segunda etapa da atividade, com as mesmas equipes do trabalho anterior. No quadro passei três problemas envolvendo a Relação de Euler, que diz,

$$V + F = A + 2$$

ou seja, o número de vértices (F) somado com o número de faces (F) é igual ao número de arestas (A) crescido de dois. Essa fórmula normalmente é usada para simplificar alguns problemas, que envolvem poliedros convexos. Então, fazendo o uso dessa relação, montei três problemas, que forneciam dois dados e o último precisaria ser encontrado, números de vértices, faces ou arestas, segue abaixo:

1º Problema: Encontre o número de vértices, cujo número de faces é 9 e o de arestas 21.

$$V + F = A + 2$$
$$V + 9 = 21 + 2$$

2º Problema: Encontre o número de arestas, cujo número de vértices é 8 e o de faces 6.

$$V + F = A + 2$$
$$8 + 6 = A + 2$$

3º Problema: Encontre o número de faces, cujo número de vértices é 12 e o de arestas 18.

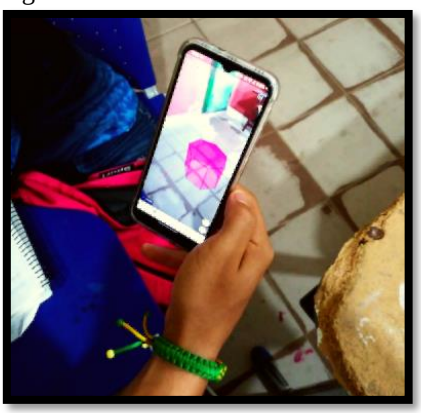
$$V + F = A + 2$$

$$12 + F = 18 + 2$$

e ao solucionar a questão, os alunos teriam as informações necessárias para saber sobre qual prisma estavam trabalhando na atividade dada.

A partir do conhecimento sobre o prisma em questão, voltariam para o *software GeoGebra* para construí-lo e usariam pela primeira vez a Realidade Aumentada (RA), no aplicativo é possível colocar os objetos matemáticos 3D em qualquer superfície para serem visualizados de qualquer ângulo. No entanto, o aplicativo RA está disponível apenas para dispositivos iOS, ou seja, é um sistema operacional disponível apenas para aparelhos da *Apple*, quem tiver esse tipo de dispositivo quando baixar o *GeoGebra*, automaticamente a Realidade Aumentada será inclusa. E em cada equipe havia um ou mais membros que possuam esse dispositivo, desta forma, não afetando o desenvolvimento da atividade (Figura 37 e 38).

Figura 37 – Atividade utilizando o *GeoGebra* 3D



Fonte: Própria da autora

Figura 38 – Explicação sobre o uso da Realidade Aumentada

Fonte: Própria da autora

Os alunos ficaram impressionados com essa atividade, além do trabalho que tinham efetuado, queriam construir outros objetos para usar a Realidade Aumentada.

Quanto ao uso dessa ferramenta só tem a contribuir, pois é um grande facilitador para o ensino-aprendizagem entre o professor e aluno.

4º dia de encontro: Para o início deste último dia de atividade, dividi a turma em 5 equipes com quatro alunos em cada, não utilizei o *software GeoGebra*, mas sim, a Arte para concluir o projeto. Seis questões foram escolhidas, são elas:

Tabela 1 – Questões passadas em sala

Perguntas
Questão 1 **– Sabendo que um prisma possui 8 vértices e que em cada vértice se encontram 3 arestas. Determine o número de faces dessa figura.**
Questão 2 **– Quantas faces, arestas e vértices possuem um prisma reto de base pentagonal?**
Questão 3 **– (FAAP-SP) Num prisma reto, o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades. Calcule o número de faces.**
Questão 4 **– (MGS-IBFC 2016) Um prisma é formado por dois triângulos e três retângulos. Desse modo, o número de vértices desse prisma é?**
Questão 5 **– Determine o número de vértices de um prédio no formato de prisma, onde ele possui 9 faces e 21 arestas.**
Questão 6 **– Quantas arestas tem um aquário com tampa, onde tem 4 faces laterais retangulares, 2 faces quadrangulares e 8 vértices?**

Fonte: Própria da autora

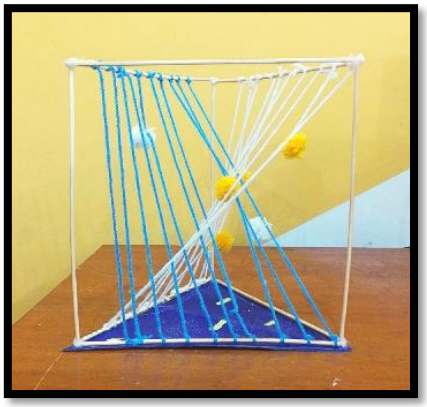
Escrevi a numeração em um papel, dobrei e chamei um aluno de cada grupo para sortear as questões que iriam resolver. Lembrando que ainda estávamos trabalhando com conteúdo prismas, porém trouxe questões que precisariam de atenção e exigiam dos alunos interpretação para realizar os cálculos e chegar na solução correta. E ao finalizar a questão, as equipes chegariam em um tipo de prisma que guardariam para a segunda etapa da atividade.

Para esse momento, a atividade foi inspirada em uma exposição de arte chamada "Liberty and Anarchy – Liberdade e Anarquia" realizada pela artista Nike Savvas, onde através de equações matemáticas ela elabora as estruturas e realiza as construções geométricas para expor. Então, fiz a adaptação para a sala de aula, com base na atividade anterior, os alunos teriam que construir somente com as arestas dos prismas a sua arte (Figura 39 e 40).

Figura 39 – Arte feita pelo grupo de alunos C

Fonte: Própria da autora

Figura 40 – Arte feita pelo grupo de alunos D



Fonte: Própria da autora

Essas foram algumas das construções produzidas por dois grupos, coloquei sobre a mesa alguns materiais lã, palito de churrasco, papel cartão, tinta, bastão de cola quente, cola de isopor, pistola de cola, bolas de isopor com tamanhos variados, fio nylon e pincel, para que eles pudessem ficar à vontade para usar a imaginação e a criatividade. O intuito dessa atividade, além de deixar a Matemática mais prazerosa de se aprender, também fez com que o aluno soubesse o que elaborar sem a ajuda do *software GeoGebra.*

Ao final da atividade, foi passado para cada aluno um questionário a respeito do projeto, para ter o conhecimento sobre suas opiniões e fazer a discussão dos dados para análise.

5.3 MINI TUTORIAL DO GEOGEBRA EM RELAÇÃO AS ATIVIDADES

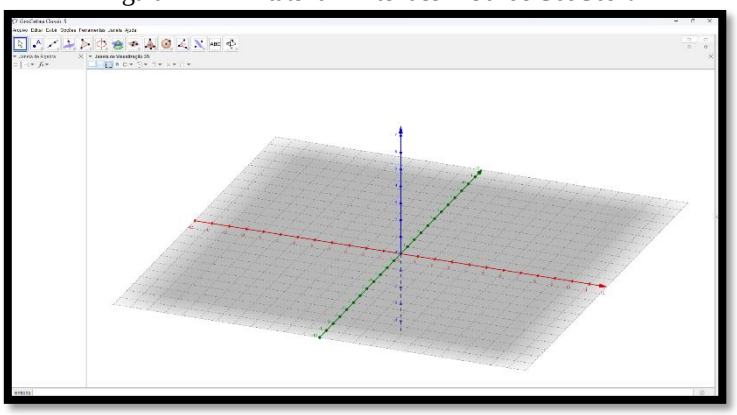
Ao todo, foram realizadas três atividades no *GeoGebra* que direi como foram feitas e elaboradas em um mini tutorial. A calculadora utilizada para os exercícios foi a calculadora 3D (janela tridimensional), que mostrarei posteriormente.

Antes de iniciar com a primeira atividade, apresentei o *software* para todos os alunos, as ferramentas e definições. Depois, passamos para a prática, mudamos para a

janela 3D, onde seria feita as construções. Na primeira atividade, criei um prisma de base quadrangular, o intuito era ver o passo a passo da construção e deixar que eles mesmos manuseassem para as demais criações, lembrando que eu utilizava o *software* no notebook e eles utilizavam o celular. Segue os passos do exemplo para a professor(a) usando o notebook:

1º Passo: abrir a calculadora 3D (Figura 41);

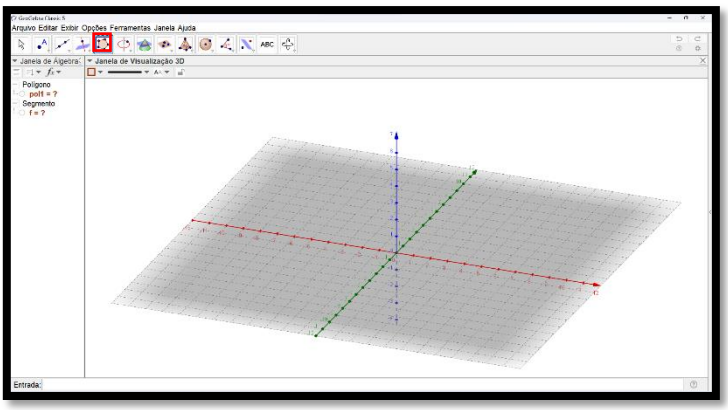
Figura 41 – Mini tutorial – Interface inicial do *GeoGebra*



Fonte: Própria da autora

2º Passo: selecionar o quinto bloco de ferramentas, o ícone polígono regular para criar a base do prisma (Figura 42);

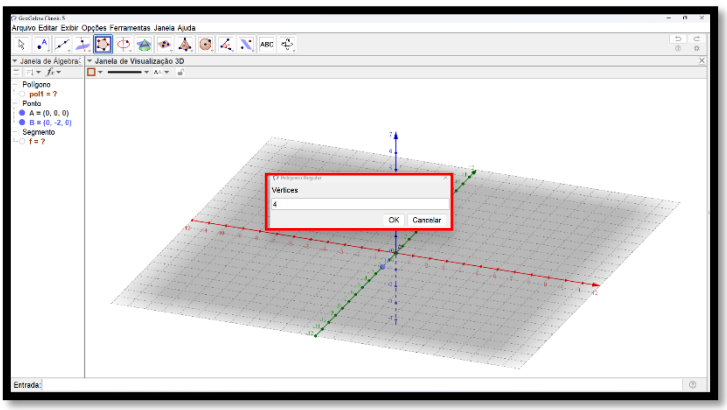
Figura 42 – Mini tutorial – bloco de ferramentas



Fonte: Própria da autora

3º Passo: para utilizar a ferramenta polígono regular, você terá que selecionar dois pontos e depois escolher o número de vértices. Tendo o cuidado de começar sempre na origem para se obter prismas retos, caso queira um prisma oblíquo, pode escolher qualquer outro ponto para começar. No caso do exemplo, será feito um prisma reto de base quadrangular (Figura 43).

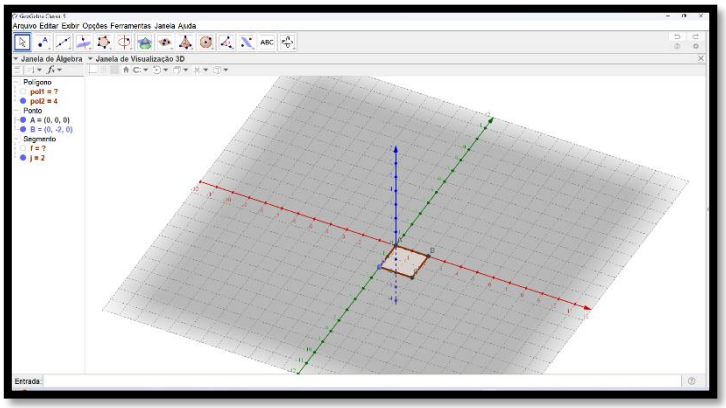
Figura 43 – Mini tutorial – como construir prismas



Fonte: Própria da autora

4º Passo: selecionando a ferramenta, iniciando na origem e escolhido o número de vértices, no caso, quatro por conta da base quadrangular, clicar em OK para a base ser construída (Figura 44).

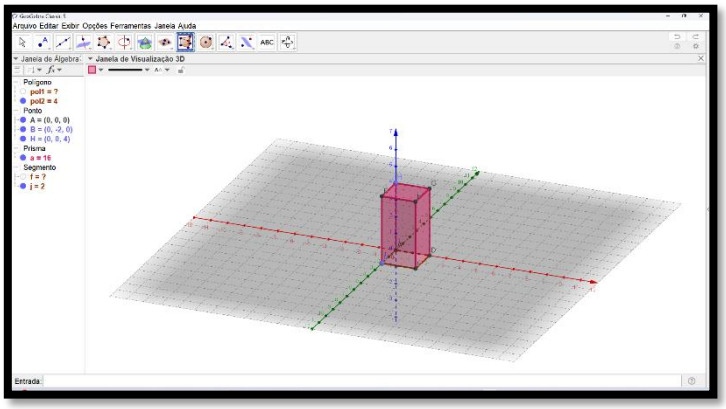
Figura 44 – Mini tutorial – execução da construção



Fonte: Própria da autora

5º Passo: clicar no nono bloco de ferramentas, após o ícone prismas. Ao escolher essa ferramenta, basta selecionar a base criada na janela de visualização e depois no eixo z (o em azul) para a altura do prisma. Desta forma, estará feita o seu prisma (Figura 45).

Figura 45 – Mini tutorial – finalização do objeto



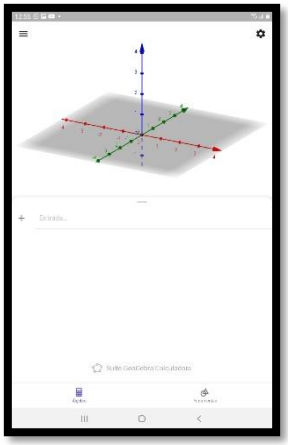
Fonte: Própria da autora

Você também pode criar o prisma, selecionando diretamente essa ferramenta, basta começar pela base e depois colocar a altura.

Para os alunos, funciona de outra maneira, pois eles utilizarão o aparelho celular. Abaixo segue os passos que os estudantes precisam fazer para chegar na mesma construção:

1º Passo: escolher a calculadora 3D (Figura 46);

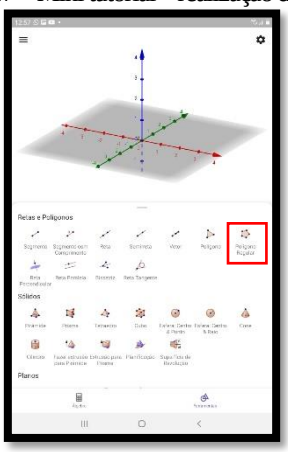
Figura 46 – Mini tutorial – Tela inicial do *GeoGebra* para tablets e celulares



Fonte: Própria da autora

2º Passo: selecionar as ferramentas e escolher o ícone polígono regular (Figura 47).

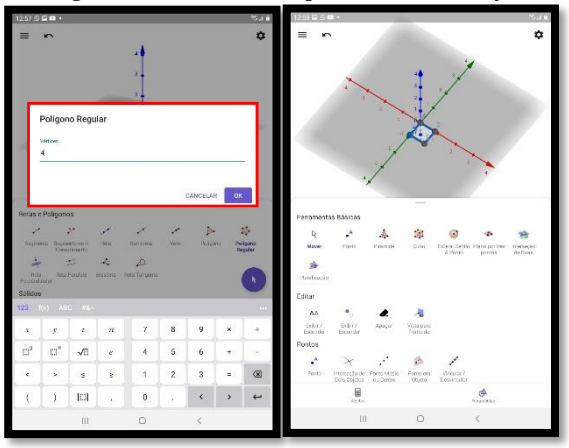
Figura 47 – Mini tutorial – realização do prisma



Fonte: Própria da autora

3º Passo: ao escolher essa ferramenta, basta criar a base que será um polígono. Tendo o cuidado de começar sempre na origem para se obter prismas retos, caso queira um prisma oblíquo, pode escolher qualquer outro ponto para começar. No caso do exemplo, será feito um prisma reto de base quadrangular (Figura 48).

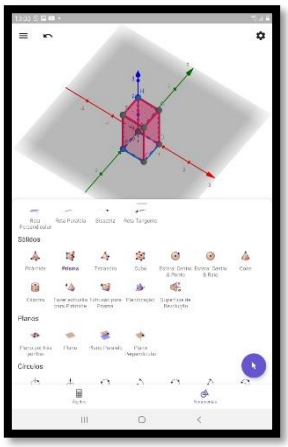
Figura 48 – Mini tutorial – processo de construção



Fonte: Própria da autora

4º Passo: agora, selecione a ferramenta prisma. Ao ativar o ícone, basta clicar na base e depois no eixo z (o em azul) para concluir a construção (Figura 49).

Figura 49 – Mini tutorial – conclusão do objeto



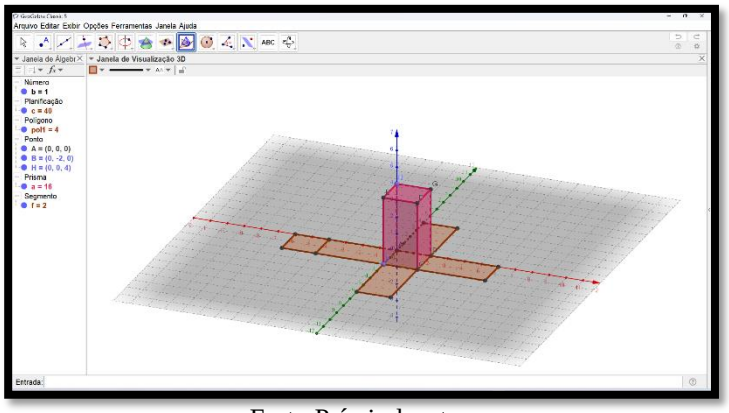
Fonte: Própria da autora

Assim, terá realizado a construção. No segundo dia de atividades, foram feitos dois momentos com o *GeoGebra*. O primeiro momento, foi falado sobre a planificação, utilizando esses mesmos passos, mas com a introdução de uma ferramenta a mais, que foi a de planificação. Para o professor que desejar utilizar o notebook ou computador de messa, será feito os seguintes passos:

1º Passo: realizar todos os passos da atividade anterior;

2º Passo: selecionar o nono bloco de ferramentas, o ícone planificação. Ao escolher esta ferramenta, basta clicar no objeto construído, no caso, o prisma que será planificado automaticamente (Figura 50).

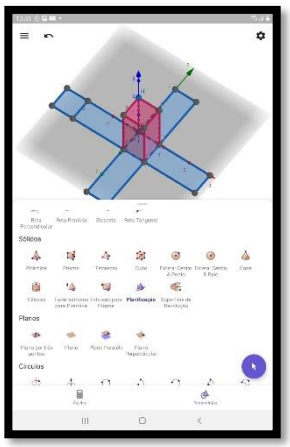
Figura 50 – Mini tutorial – planificação do prisma de base quadrangular



Fonte: Própria da autora

Isso também serve para aparelhos celulares. Veja (Figura 51):

Figura 51 – Mini tutorial – planificação do objeto



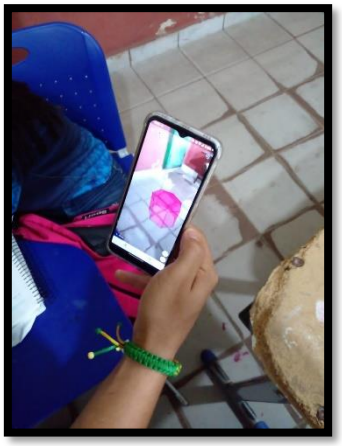
Fonte: Própria da autora

No segundo momento, deste mesmo dia de atividades, fiz uso da Relação de Euler, que diz:

$$V + F = A + 2$$

Forneci dois dados para as equipes de alunos, ou seja, eu entregava o número de vértices e faces, pedia o número de arestas e assim, sucessivamente. Ao chegar no resultado, eles teriam todos os dados para saber sobre qual prisma estava sendo retratado na questão. Desta forma, tendo conhecimento disso, pedi para que eles construíssem o objeto no celular que tivesse o sistema operacional iOS, pois usaríamos a Realidade Aumentada. Fazendo a construção normalmente, é só clicar no botão escrito RA que aparece no lado direito na parte inferior para ativar a ferramenta, posicionar em uma superfície reta para plotar o objeto, como a seguir (Figura 52):

Figura 52 – Mini tutorial – alunos utilizando o RA



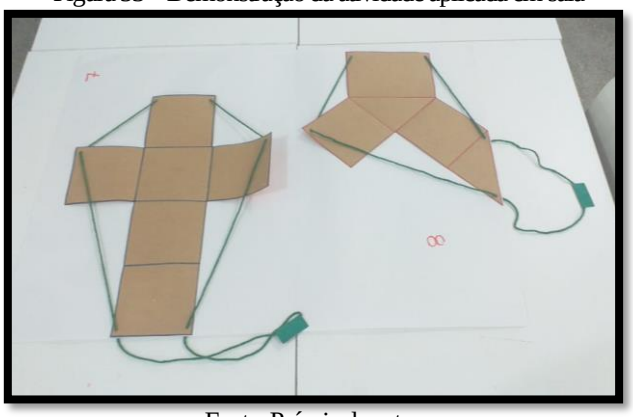
Fonte: Própria da autora

5.4 ATIVIDADES REALIZADAS EM SALA DE AULA DE FORMA DETALHADA

As demais atividades que não envolveram o *software GeoGebra* foram feitas em quatro momentos divididos nos três dias de aplicação. A primeira atividade, fiz uma tabela no *Word*, onde fornecia apenas o número de lados da base, com a ajuda do *software GeoGebra* teriam que realizar a construção e percebendo as características de cada prisma, preencher a tabela com nome do polígono na base, prisma, quantidade de faces laterais, número de arestas, faces e vértices.

No segundo dia houve dois momentos, o primeiro foram os prismas que recortei com papel cartão, ao todo foram 8 tipos de prismas: base triangular, quadrangular (cubo), quadrangular (paralelepípedo), pentagonal, hexagonal, heptagonal, decagonal e dodecagonal. Esses prismas foram elaborados em uma forma maior, onde uma das bases era colada na cartolina, e em volta era passado um fio de lã para conseguir manusear e mostrar o objeto sólido e depois planificado. O objetivo era fazer com que os alunos olhassem os exemplos dos prismas planificados que fiz no *software* e após, observando as propriedades de cada um, registrar o nome dele estava sendo conferido. Veja em seguida (Figura 53):

Figura 53 – Demonstração da atividade aplicada em sala



Fonte: Própria da autora

No segundo momento deste mesmo dia, foi colocado no quadro três problemas envolvendo a Relação de Euler. Os alunos teriam que resolver o problema e colocar suas respostas na mesma folha da atividade anterior, exigia ter conhecimento da manipulação dos dados para encontrar o valor correto, o que foi tranquilo em relação ao processo de desenvolvimento das soluções.

Na quarta e última atividade, resolvi entregar problemas mais elaborados para cada equipe, ao resolver chegariam na conclusão de prismas com bases diferentes. Então, teriam que construir sem o auxílio do *GeoGebra* uma arte envolvendo aquele prisma encontrado nos problemas, tendo como inspiração a Exposição de Arte da Nike Savvas. Para isso, disponibilizei palitos de churrasco, pistola de cola quente, cola para a pistola, tinta, lã, papel cartão, bolas de isopor com tamanhos variados, tudo isso, para que pudessem sozinhos ter a ciência de como é a estrutura do prisma, como um teste de conhecimento. Confira um modelo (Figura 54):

Figura 54 – Arte feita pela autora para demostração

Fonte: Própria da autora

Todos as atividades realizadas no *Word*, estarão disponibilizadas nos anexos do trabalho.

6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

6.1 DISCUSSÃO SOBRE O PROJETO

Antes de iniciar os encontros, quando falei com o professor responsável pela turma, sobre esse projeto de ensinar Matemática através do *software GeoGebra* e da Arte, pude notar o entusiasmo dele. E a confirmação para fazer a aplicação se deu em parte por ele, pois foi um incentivador cheio de ideias de como proceder e introduzir essa metodologia em sala de aula.

Após, durante os encontros com os estudantes, pude perceber essa mesma empolgação, os alunos se sentiram motivados a investigar sobre o assunto que estava sendo abordado. E isso, se sucedeu pelas diferentes formas que as atividades foram apresentadas, ora utilizando o aplicativo, em outro fazendo o uso da Arte ou trabalhando em equipe, enfim, distintas maneiras de intervenção.

E cada atividade, foi planejada minuciosamente a fim de alcançar o objetivo principal, a compreensão do assunto prismas. No segundo dia de encontro, onde forneci o primeiro trabalho, eu tinha o conhecimento sobre as aulas anteriores do professor na turma, ele estava ministrando o conteúdo de Geometria Espacial, finalizando o assunto poliedros e iria para o próximo tópico prismas. Então, por isso, a atividade para esse dia foi voltada para as características do prisma, que se assemelham com as do poliedro, a questão do vértice, aresta e face.

No terceiro encontro, trouxe a Arte por meio do Origami, com o propósito de mostrar que a Matemática não é algo difícil, complexo e abstrato. Mas sim, que os conceitos matemáticos podem ser compreendidos com métodos que estão em nosso cotidiano. Além disso, no mesmo dia a Realidade Aumentada foi apresentada, com a finalidade de melhorar o ambiente de ensino, desenvolver a criatividade e estimular o pensamento matemático do aluno.

E no quarto encontro, tendo como inspiração a exposição de Arte de Nike Savvas juntamente com questões relacionadas aos prismas, mostrei que se pode aprender Matemática, explorando o olhar artístico em prol do aprimoramento e exploração de conceitos matemáticos.

Ao final do projeto, em um dos diálogos com os estudantes, eles relataram que foi proveitoso, facilitou e enriqueceu o aprendizado. Ademais, o questionário que responderam dirá melhor a opinião de cada aluno.

6.2 APRESENTAÇÃO DOS DADOS

As tabelas e gráficos que serão expostos abaixo, tem como base o questionário passado no último dia de encontro, com a intenção de verificar a opinião sobre os dias do projeto. O referido contém questões de resposta única e aberta a serem analisadas, abaixo segue as tabelas e gráficos obtidos a partir dele:

1ª Pergunta. Você gosta de estudar Matemática?

Tabela 2 – Resultado da 1ª pergunta do questionário

Você gosta de estudar Matemática?	
Alternativas	**Nº de respostas**
Sim	15
Não	5
Total	**20**

Fonte: Própria da autora

Gráfico 1 – Resultado da 1ª pergunta do questionário

Fonte: Própria da autora

Note que a maioria dos alunos gosta de Matemática, eles me confessaram que passaram a ter um apresso por essa área do conhecimento após a introdução das atividades que ministrei em sala.

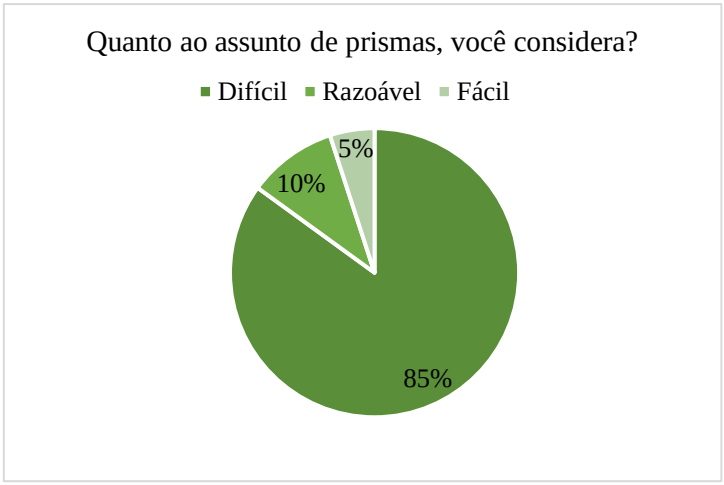
2ª Pergunta. Quanto ao assunto de prismas, você considera?

Tabela 3 – Resultado da 2ª pergunta do questionário

Quanto ao assunto de prismas, você considera?	
Alternativas	**Nº de respostas**
Difícil	2
Razoável	17
Fácil	1
Total	**20**

Fonte: Própria da autora

Gráfico 2 – Resultado da 2ª pergunta do questionário



Fonte: Própria da autora

Por grande parte dos alunos, o conteúdo em questão era considerado razoável. Isso porque, envolve características que não são totalmente compreendidos ao longo dos anos anteriores, causando lacunas que comprometem os estudos no assunto.

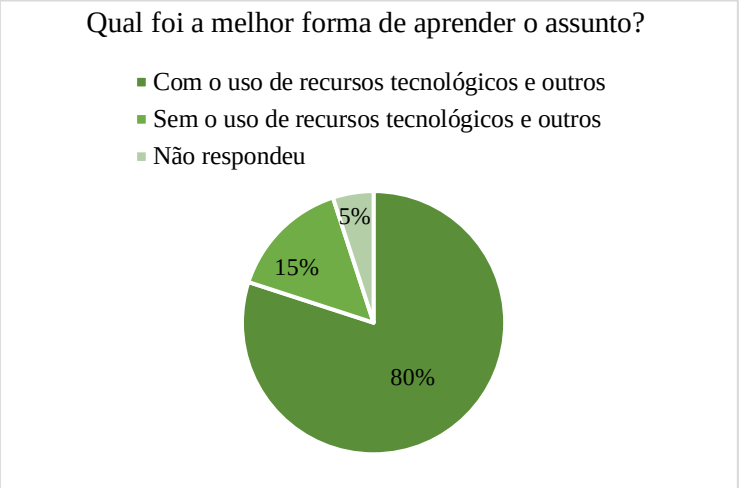
Pergunta 3. Qual foi a melhor forma de aprender o assunto?

Tabela 4 – Resultado da 3ª pergunta do questionário

Qual foi a melhor forma de aprender o assunto?	
Alternativas	**Nº de respostas**
Com o uso de recursos tecnológicos e outros	16
Sem o uso de recursos tecnológicos e outros	3
Não respondeu	1
Total	**20**

Fonte: Própria da autora

Gráfico 3 – Resultado da 3ª pergunta do questionário



Fonte: Própria da autora

Foi notório que a ajuda das metodologias empregadas, facilitou o aprendizado dos alunos que pode ser visto no processo de desenvolvimento de cada um.

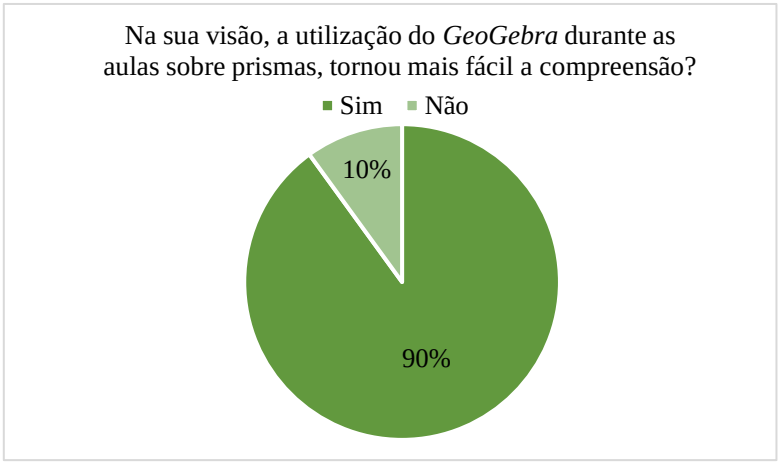
Pergunta 4. Na sua visão, a utilização do *GeoGebra* durante as aulas sobre prismas, tornou mais fácil a compreensão?

Tabela 5 – Resultado da 4ª pergunta do questionário

Na sua visão, a utilização do *GeoGebra* durante as aulas sobre prismas, tornou mais fácil a compreensão?	
Alternativas	**Nº de respostas**
Sim	18
Não	2
Total	**20**

Fonte: Própria da autora

Gráfico 4 – Resultado da 4ª pergunta do questionário



Fonte: Própria da autora

O *software GeoGebra* é um importante auxiliador na compreensão de assuntos envolvendo diversos assuntos matemáticos, os estudantes confirmam ao sinalizar que facilita a compreensão, em especial, o conhecimento sobre prismas.

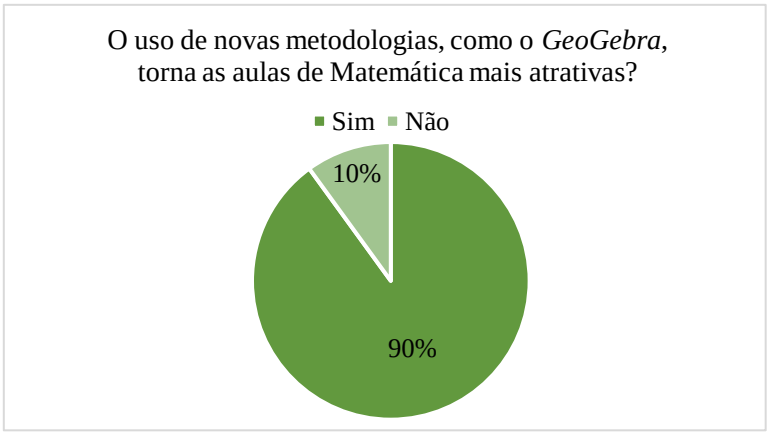
Pergunta 5. O uso de novas metodologias, como o GeoGebra e a Arte, torna as aulas de Matemática mais atrativas?

Tabela 6 – Resultado da 5ª pergunta do questionário

O uso de novas metodologias, como o *GeoGebra*, torna as aulas de Matemática mais atrativas?	
Alternativas	**Nº de respostas**
Sim	18
Não	2
Total	**20**

Fonte: Própria da autora

Gráfico 5 – Resultado da 5ª pergunta do questionário



Fonte: Própria da autora

Assim, como facilita a compreensão do que está sendo estudado, seja na área da Geometria ou Álgebra, com certeza, a inserção de um instrumento tecnológico torna a aula mais prazerosa, atrativa e curiosa, fazendo que o aluno tenha um engajamento maior.

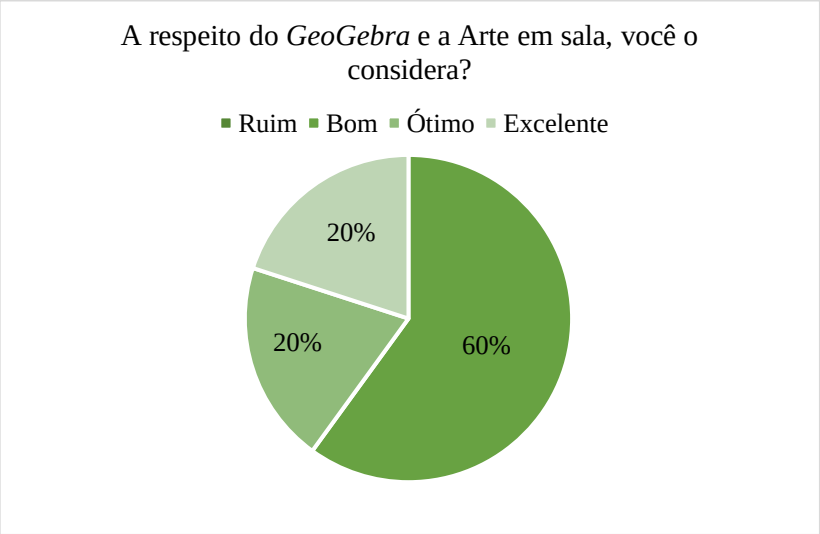
Pergunta 6. A respeito do *GeoGebra* e a Arte em sala, você o considera?

Tabela 7 – Resultado da 6ª pergunta do questionário

A respeito do *GeoGebra* e a Arte em sala, você o considera?	
Alternativas	**Nº de respostas**
Ruim	0
Bom	12
Ótimo	4
Excelente	4
Total	**20**

Fonte: Própria da autora

Gráfico 6 – Resultado da 6ª pergunta do questionário



Fonte: Própria da autora

Por ser um aplicativo de rápido manuseio e acessível, não há pontos negativos em relação ao *GeoGebra* em sala como uma ferramenta, pois o professor pode rapidamente chamar a atenção dos alunos para correção e sanar as dúvidas que podem surgir utilizando o *software*. Ademais, temos a Arte, uma outra área do conhecimento que pode ser usada para agregar o conhecimento do aluno, pois é por meio da interdisciplinaridade que habilidades como criatividade, observação, integração e pensamento crítico são desenvolvidos nos alunos.

Pergunta 7. A respeito do manuseio do recurso *GeoGebra*, você o considera?

Tabela 8 – Resultado da 7ª pergunta do questionário

A respeito do manuseio do recurso *GeoGebra*, você o considera?	
Alternativas	**Nº de respostas**
Difícil	1
Moderado	17
Fácil	2
Total	**20**

Fonte: Própria da autora

Gráfico 7 – Resultado da 7ª pergunta do questionário

Fonte: Própria da autora

Entende-se que por ser a primeira vez que os alunos tiveram o acesso a esse aplicativo, o consideraram pela maioria ser moderado.

Pergunta 8. Comente um pouco sobre como foi sua experiência com esse projeto?

Tabela 9 – Resultado da 8ª pergunta do questionário

Comente um pouco sobre como foi sua experiência com esse projeto?
Muito bom, é uma nova experiência que consegui aprender o assunto e o app é ótimo.
Este recurso facilitou muito o meu aprendizado, também me ajudou a compreender melhor o assunto, aprendi como construir a figura e resolver questões através desse método de ensino.
Eu não conhecia o GeoGebra, mas gostei muito dessa experiência.
Aprendi tudo e sanei as dúvidas que tinha.
Minha experiência foi excelente, aprendi muito e nunca tinha ouvido falar sobre o GeoGebra.

Foi uma experiência incrível, nunca tinha ouvido, nunca tinha usado.
Não conhecia, mas é um ótimo App.
Minha experiência foi boa, aprendi a compreender mais um pouco a Matemática e não, nunca tinha ouvido falar.
Eu não conhecia, mas a experiência foi muito boa.
Aprendi tudo e tirei minhas dúvidas.
Facilitou bastante e aprendi.
Foi uma ótima experiência, uma nova experiência que agregou bastante o meu aprendizado.
Não conhecia o App e não sabia que a Arte combinar com a Matemática, as aulas ficaram mais atrativas com eles.
Eu não conhecia o recurso, mas facilitou a minha compreensão juntamente com a Arte.
Nunca tinha ouvido falar sobre o aplicativo, mas achei interessante.
Nunca tinha visto, confesso que gostei bastante, ajudou mais na compreensão do assunto, tornando as aulas mais atrativas e deixando o estudo divertido.
Achei um pouco diferente e não tinha conhecimento sobre o App.
Não tinha conhecimento sobre o recurso, é interessante. Porém, precisa de atenção e estudo para conhecer melhor.
Gostei, as aulas foram boas.
Gostei, mas prefiro o método tradicional.

Fonte: Própria da autora

De acordo com o questionário, é notório que a maioria dos alunos gosta de Matemática, acredito que o prazer por essa área do conhecimento tenha facilitado para a introdução do *software GeoGebra* e a Arte. Além disso, 85% da turma relatou que o conteúdo prismas é razoável de se aprender, pela dificuldade que tiveram de identificar e nomear os prismas no segundo dia de encontro, é aceitável que eles tenham colocado em suas respostas que esse conteúdo tem seu grau de complexidade. Porém, com o passar dos encontros, esses entraves foram sendo moldados de forma que os alunos conseguiram atingir, não completamente, mas em boa parte as lacunas sobre o assunto fazendo apropriação da Matemática e Arte.

Ademais, 80% dos estudantes concordam que a melhor forma de compreender o assunto é com o uso de recursos tecnológicos e outros métodos de ensino. Assim, a

utilização do *GeoGebra* tornou o assunto mais fácil de assimilar, pois faz com que os alunos explorem os problemas com menos impasse.

E mais, 90% da turma afirma que tanto o *GeoGebra* quanto a Arte tornam as aulas de Matemática mais atrativas. De fato, principalmente o uso do recurso tecnológico faz com a aprendizagem se transforme em algo dinâmico e interativo, pois utilizarão os seus celulares em sala de aula de maneira construtiva. Também, todos os alunos colocam que no mínimo a utilização de novos recursos é bom.

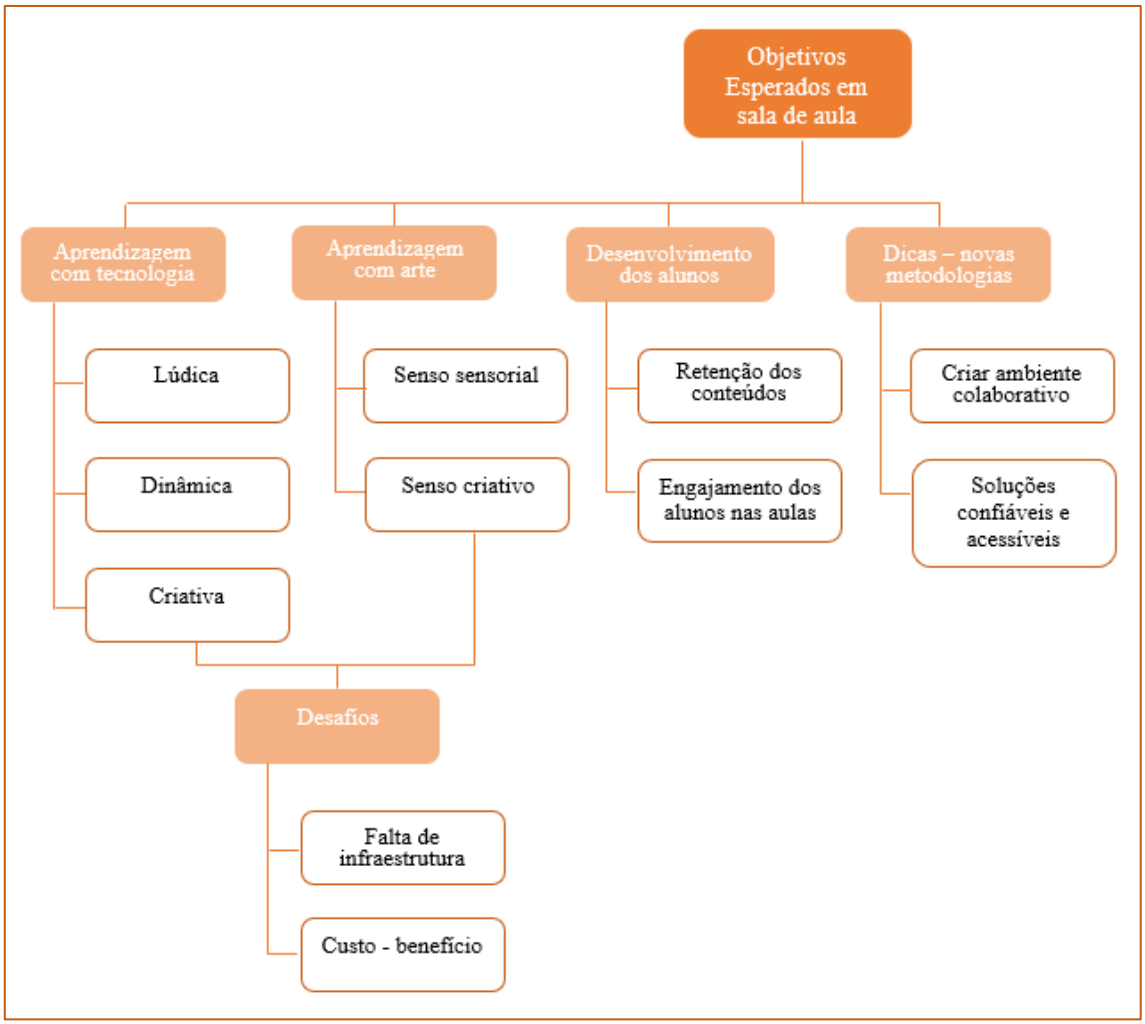
Quando se fala sobre o manuseio do *software*, 85% o consideram moderado, por ser o primeiro contato de todos se esperava que colocassem essa resposta. Mas os observando, notei que gostavam de passar o tempo praticando e os encorajava para explorar mais a fundo o aplicativo. É perceptível, pelas respostas na última pergunta do questionário que todos os estudantes, mesmo sendo uma experiência nova, aprovaram os novos métodos empregados na sala de aula.

6.3 FLUXOGRAMA DOS OBJETIVOS ESPERADOS E ALCANÇADOS

Um fluxograma é um tipo de diagrama, e pode ser entendido como uma representação esquemática de um processo ou algoritmo, muitas vezes feito através de gráficos que ilustram de forma descomplicada a transição de informações entre os elementos que o compõem, ou seja, é a sequência operacional do desenvolvimento de um processo, o qual caracteriza: o trabalho que está sendo realizado, o tempo necessário para sua realização, a distância percorrida pelos documentos, quem está realizando o trabalho e como ele flui entre os participantes deste processo.

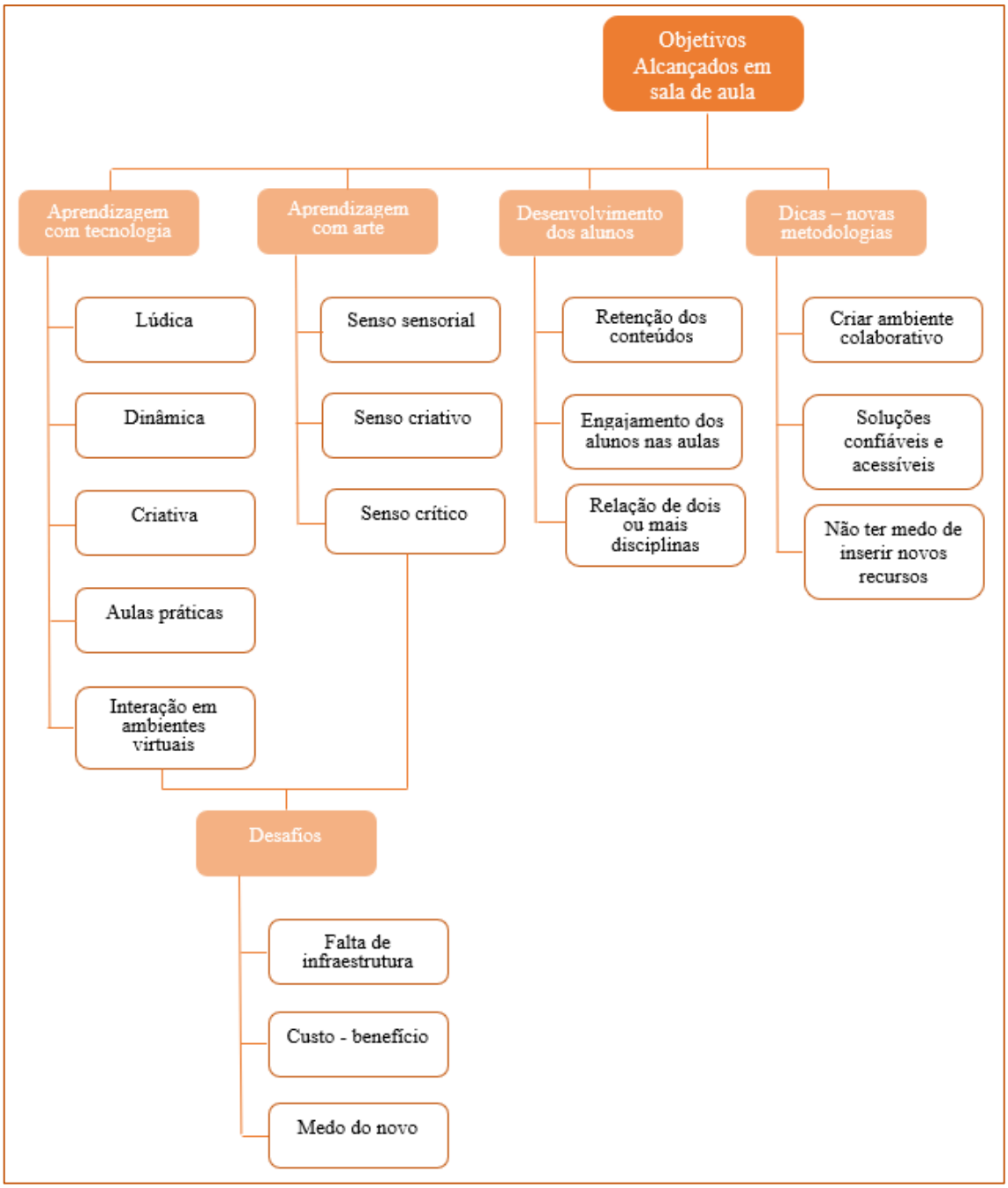
Abaixo, segue dois fluxogramas criados para representar melhor o processo das atividades em sala de aula, isto é, os objetivos almejados e alcançados ao longo das aplicações realizadas. É uma ótima maneira de esclarecer o desenvolvimento do trabalho e mostrar as etapas com mais nitidez, sem deixar dúvidas sobre a logística empregada. Além disso, é uma representação do desempenho do trabalho criado com figuras geométricas, setas ou linhas para unir a mesma. Isso faz com que as transições se tornem leves, rápidas e fáceis de compreender. Veja em seguida, para melhor entendimento:

Fluxograma 1 – Objetivos esperados em sala de aula



Fonte: Própria da autora

Fluxograma 2 – Objetivos alcançados em sala de aula



Fonte: Própria da autora

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a finalização do projeto, foi possível responder ao questionamento motivador para esse trabalho “De que forma o uso da Arte e o *software GeoGebra* podem se tornarem agentes facilitadores para o ensino de Geometria Espacial?”. Através de muitas formas, sabendo que os alunos estão a cada dia mais inseridos no mundo tecnológico, fazer o uso de um aplicativo em sala, os aproxima da realidade em que estão.

Além do mais, a Arte e o *software GeoGebra* evidência no aluno a vontade de investigar e explorar as construções feitas. Pois, enquanto o *GeoGebra* apresenta a teoria de forma exata, onde é possível manusear e observar, a Arte traz algo palpável, ou seja, a Matemática se torna concreta. O que é positivo, assim o estudante consegue se familiarizar com que está sendo examinado e materializado.

As atividades elaboradas em sala tendo como base os dois métodos de ensino, possibilita que o aluno participe ativamente do processo e atue como protagonista de seu aprendizado. Estimulando em cada estudante, a ação de propor soluções para os problemas que podem ocorrer, pesquisar e debater entre os outros colegas sobre suas descobertas e formas de chegar em determinada resposta.

Mas é claro, que todas as atividades de investigação Matemática, exige tempo e conhecimento por parte do professor, para que ele possa atuar como mediador durante o período que deseja para implantar essa nova metodologia. Uma dica valiosa, é procurar no seu navegador o seguinte termo “ogeogebra”, clicando no primeiro site que aparecer, encontrarás tutoriais e cursos que ensinam como trabalhar o *software GeoGebra*.

Algo a pontuar, era que o professor tinha conhecimento sobre o aplicativo e me ajudou com os alunos que tinham dificuldade nos primeiros momentos. Como os educandos não estão habituados a esse novo método, é claro que encontraremos obstáculos, mas eles podem ser alcançados com dedicação, interesse e comprometimento.

Portanto, a utilização da Arte e do *software GeoGebra* mostra a necessidade de formar indivíduos na atual era do conhecimento, prezando a autonomia, praticidade, autogestão e protagonismo do estudante no processo de aprendizagem. Assim, o professor é capaz de transformar a forma como ensina a Matemática e o aluno de como aprende, ao utilizar o celular, tão temido por distrair os alunos no momento das aulas, um facilitador no seu processo de aquisição de novos saberes.

REFERÊNCIAS

BONUMÁ, T.; VAINDINER, R. **Pitágoras não criou o Teorema de Pitágoras.** Disponível em: https://aventurasnahistoria.uol.com.br/noticias/almanaque/pitagoras-nao-criou-o-teorema-de-pitagoras.phtml. Acessado em 27 de dezembro de 2022.

BOYER, Carl Benjamim. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Ed. Edgard, 1996.

BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. **Ensinar e aprender matemática: possibilidades para a prática educativa.** Ponta Grossa. Ed. UEPG, 307 p. 2016.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). **Educação é a base**. Brasília. MEC/CONSED/UNDIME, 2017.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Introdução. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CEZARO, H. S.; FERREIRA, J. R.; SANTOS, M. C. P.; ZOCCHE, J. J.; CAMPOS, J. B. **Gravuras rupestres registradas no projeto de pesquisa arqueologia entre rios: do Urussanga ao Mampituba**. Revista Tecnologia e Ambiente, Dossiê IX Jornadas de Arqueologia Iberoamericana e I Jornada de Arqueologia Transatlântica, v. 19, n.1. Santa Catarina: Criciúma, 2013.

CHARPIN, Dominique. **Lire et écrire à Babylone**. Paris: PUF, 2008.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FAINGUELERNT, E. K. **Tecendo matemática com arte**. Porto Alegre: Artemed, 2009.

FERREIRA, R. **Arte e Matemática – a estética dos cálculos**. Disponível em: https://citaliarestauro.com/arte-e-matemática/. Acessado em 14 de dezembro de 2022.

FILHO, F. H. C.; ALMEIDA, S. N. C. **A evolução histórica da arte e o processo de regulamentação jurídica do trabalho artístico**. Disponível em: https://www.publicadireito.com.br/artigos/?cod=d736bb10d83a904a. Acessado em 10 de dezembro de 2022.

FISCHER, Ernst. **A Necessidade da Arte**. 9. ed. Editora LTC: Rio de Janeiro, 1987.

FUKS, R. **Os 7 principais artistas do Cubismo.** Disponível em: https://www.ebiografia.com/principais_artistas_cubismo/. Acessado em 14 de dezembro de 2022.

FRISKE, A. L.; CRUZ. B, A.; GOMES, B. S.; DRESH, D. C.; SANTOS, D. R.; LUMERTZ, G. R.; GODOY, G. S.; FROZZA, I. C.; ZANON, L. S.; LORA, M.; RUTKOSKI, M.; DAMBROS, T.; MATHIAS, C. V. **Minicurso de GeoGebra**. Santa Maria. 2016. Disponível em: https://www.ufsm.br./app/uploads/sites/783/2020/02/Apostila_GeoGebra.pdf. Acessado em 12 de dezembro de 2022.

GARBI, G. **Como a Matemática se tornou a rainha das ciências**. Revista do professor de Matemática. RPM: Rio de Janeiro, 2018.

GODOY, A. S. **Pesquisa Qualitativa: tipos fundamentais**. Revista de Administração de empresas, São Paulo, v. 35, n. 3, p. 20-29. 1995. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rae/a/ZX4cTGrqYfVhr7LvVyDBgdb/?format=pdf. Acessado em 12 de dezembro de 2022.

HAUSER, Arnold. **História Social da Arte e da Literatura**. Martins Fontes: São Paulo, 2000.

HAYMAN, D'Arcy. **As Três Faces da Arte**. FGV: Rio de Janeiro, 1975.

MENTALIDADESMATEMÁTICAS. **6 frases que descrevem a poesia do pensamento matemático**. Disponível em: mentalidadesmatematicas.org.br. Acessado em 10 de dezembro de 2022.

MUELLER, Liliane Carine. **Uso de recursos computacionais nas aulas de Matemática.** 2013. 117 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) - UNIVATES, Osório - RS, 2013. Disponível em: Acesso em: 20 dez. 2022.

OHSE, M. L. **A Matemática na Idade Moderna: do Renascimento à Revolução Industrial**. Ponta Grossa: 2010.

ORZECHOWSKI, T. P.; LOPES, M. R. C. M. **O uso do geogebra na construção de conceitos de geometria plana e espacial**. Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE. Paraná, v.1. 2016.

PROVERBIOS. **Bíblia Sagrada**. Ed 210ª. Ave-Maria: São Paulo, 2017.

RANCAN, G. **Origami e tecnologia: investigando possibilidades para ensinar geometria no ensino fundamental**. Faculdade de Física Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Porto Alegre, RS, 2011.

ROBERTO, A. **História da Arte**. Disponível em https://www.webartigos.com/artigos/historia-da-arte/22631/. Acesso em 02 de janeiro de 2023.

SAINT-EXUPÉRY, A de. **O pequeno príncipe**. 48. ed. Rio de Janeiro: Agir, 2009.

SAVVAS, N. **Esculturas Geométricas formadas com equações matemáticas.** Disponível em: https://mymodernmet.com/nike-savvas-liberty-and-anarchy/. Acesso em 10 de dezembro de 2022.

SILVA, M. A. **Elaborações de estudantes do 7° ano do ensino fundamental sobre números inteiros e suas operações**. 2012. 120 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de

Ciências Exatas) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2012.

TRIÂNGULO de Pitágoras – **Derivando a Matemática**. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/~apmat/teorema-de-pitagoras/. Acessado em 15 de dezembro de 2022.

ANEXOS

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE BRAGANÇA
FACULDADE DE MATEMÁTICA

Número de lados da base	Nome do polígono da base	Nome do prisma	Quantidade e nome das faces laterais	Número de arestas	Número de faces	Número de vértices
3						
4						
5						
6						
8						
10						
12						

Qual a fórmula matemática que relaciona os elementos de um poliedro? Descreva a fórmula.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE BRAGANÇA
FACULDADE DE MATEMÁTICA

Nome do Grupo:

Coloque o nome dos prismas de acordo com as características da planificação.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE BRAGANÇA
FACULDADE DE MATEMÁTICA

Nome do Grupo:

Atividade passada no quadro para cada equipe desenvolver.

Teorema de Euler

V + F = A + 2

V + 9 = 21 + 2

V + 9 = 23

V = 23 - 9

V = 14

Prisma de base pentagonal.

Teorema de Euler

V + F = A + 2

8 + 6 = A + 2

14 = A + 2

14 – 2 = A

A = 12

Prisma de base quadrangular

Teorema de Euler

V + F = A + 2

12 + F = 18 + 2

12 + F = 20

F = 20 – 12

F = 8

Prisma de base hexagonal