



Universidade Federal do Pará

Instituto de Ciências Exatas e Naturais

Faculdade de Física

QUANTIZAÇÃO CANÔNICA

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação

por

WILLIAN OLIVEIRA DE CARVALHO

Orientador: Prof. Dr. André Carlos Lehum

Belém, PA, Outubro / 2021

WILLIAN OLIVEIRA DE CARVALHO

QUANTIZAÇÃO CANÔNICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Física, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Física pela Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof. Dr. André Carlos Lehum

Belém, PA

2021

"QUANTIZAÇÃO CANÔNICA"

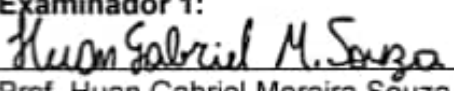
Monografia apresentada como requisito para obtenção do título de Bacharelado em Física pela Faculdade de Física do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal Pará, submetida à apreciação da banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Orientador:



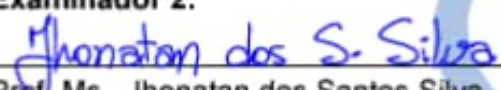
Prof. Dr. André Carlos Lehum
(UFPA)

Examinador 1:



Prof. Huan Gabriel Moreira Souza
(UFPA)

Examinador 2:



Prof. Ms. Jhonatan dos Santos Silva
(UFPA)

Belém, 07 de outubro de 2021.

Agradecimentos

Ao Prof^o. Dr. André Carlos Lehum pela paciência e dedicação para me orientar na elaboração e desenvolvimento desse trabalho. Não poderia estar mais agradecido.

A Vilce de Oliveira, minha mãe, que tem sido minha fortaleza todos esses anos, me apoiando e me incentivando. Ao meu pai, Elcy Carvalho, por ser, antes de tudo, meu amigo e por ser aquele que me fez gostar de física e matemática. Ao meu irmão Arlon Carvalho, pelas conversas sobre física e matemática e por ser meu grande amigo.

Aos meus tios, Edilton de Carvalho e Keila Viana, pelas boas conversas sobre a vida, universo e tudo mais. A minha tia, Elidiane de Carvalho por me oferecer seu lar e acreditar sempre em mim. As minhas tias, Vera, Vilma, Shirley e Valmira pelo enorme carinho e conforto que sempre me deram.

Aos meus primos, Samaronhe, Gabriel, Matheus e Lyandra pela boa companhia de sempre. Aos meu amigos, Gabriel Pacheco, Ruan, Leonardo e Jhon, pelos momentos, conversas inspiradoras e momentos de estudo e diversão, meu muito obrigado.

A Universidade Federal do Pará (UFPA), a Faculdade de Física e ao grupo Clube do Problema.

E por fim, a banca por aceitar o convite.

The career of a young theoretical physicist consists of treating the harmonic oscillator in ever-increasing levels of abstraction.

Sidney Coleman

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso tem como objetivo estudar a quantização de campos regidos por equações relativísticas. Esse processo é feito mediante o estudo de osciladores harmônicos cujo papel é fundamental em física de partículas e campos. O desenvolvimento foi feito através da quantização canônica, i.e., as funções de onda são promovidas a operadores que satisfazem relações de comutação (campos bosônicos) ou anticomutação (campos fermiônicos). No contexto da teoria quântica de campos, calculamos o propagador de Feynman para os campos de Klein-Gordon, Dirac e de Maxwell, essenciais em processos de espalhamentos mediante as regras de Feynman.

Palavras-chave: Quantização canônica. Comutação. Anticomutação. Propagador de Feynman.

ABSTRACT

This work aims to study the quantization of fields governed by relativistic equations. This process is done through the study of harmonic oscillators whose role is fundamental in physics of particles and fields. The development was done through canonical quantization, that is, the wave functions are promoted to operators that satisfy non trivial commutation (bosonic fields) or anticommutation (fermionic fields) relations. In the context of quantum field theory, we calculate the Feynman propagator for the Klein-Gordon, Dirac and Maxwell's fields, essential in the study of scattering processes using Feynman rules.

Keywords: Canonical quantization. Commutation, Anticommutation, Feynman propagator.

FIGURAS

2.1	Cadeia longitudinal de N partículas	15
2.2	Integração sobre uma superfície no espaço-tempo a tempo constante.	19
3.1	Placas paralelas de dimensões L e separação d	25
3.2	Deslocamento do pólo $-E_p$ em $+i\epsilon$ e fechamento de contorno pela parte negativa do eixo imaginário. Imagem adaptada.	30
3.3	Deslocamento do pólo E_p em $-i\epsilon$ e fechamento de contorno pela parte positiva do eixo imaginário. Imagem adaptada.	30
3.4	Férmion entrando.	36
3.5	Férmion saindo.	36
3.6	Antiférmion entrando.	36
3.7	Antiférmion saindo.	37
3.8	Fixando o calibre.	39

SUMÁRIO

1	Introdução	10
2	Teoria Clássica de Campos	14
2.1	Campo de Osciladores	14
2.2	Teorema de Noether	17
3	Teoria Quântica de Campos	20
3.1	Campo de Spin-0: A equação de Klein-Gordon	20
3.1.1	Quantização de um campo escalar real	21
3.1.2	Quantização de um campo complexo	25
3.1.3	O propagador de Feynman para o campo de Klein-Gordon	28
3.2	Campo de Spin- 1/2: A equação de Dirac	31
3.2.1	O propagador de Feynman para o campo de Dirac	35
3.3	Campo de Spin-1: Equações de Maxwell	37
3.3.1	Quantização do Campo A^μ no Calibre de Coulomb	39
3.3.2	O propagador de Feynman do campo eletromagnético	42
4	CONCLUSÃO	43
	REFERÊNCIAS	45

Capítulo 1

Introdução

Ainda na Grécia antiga surgiam as primeiras ideias a respeito da causa de alguns fenômenos físicos. Diziam, por exemplo, que um objeto apresentava a tendência natural de pertencer a um lugar ou o “desejo” de estar em um dado lugar. Francis Bacon e Descartes cunharam a frase “Éter é o meio no qual os planetas se movem ao redor da terra”, para se referir a “substância” a qual estamos mergulhados, porém hoje sabemos que este meio não existe, bem como os planetas não se movem ao redor da terra, [1], [2].

O que está por trás da tentativa de compreender alguns fenômenos físicos é o conceito de ação à distância. Um elétron ou um planeta não pode sentir imediatamente quando um próton ou o sol se move. Paralelo a isso, em 1831, Faraday introduz o termo “campo” para se referir às condições do espaço produzidas por cargas. Maxwell, anos depois, descreve matematicamente o campo eletromagnético tornando a noção de campo inevitável quando propõe que a luz se propaga com velocidade finita. Em física clássica, a razão pela qual se introduz o conceito de campo decorre de uma estrutura da natureza local [3], isto implica que leis como de Coulomb e Newton levam em consideração a chamada ação instantânea à distância, significando que o elétron ou o planeta considerado, sentem forças imediatas em qualquer ponto do espaço. É uma questão filosoficamente insatisfatória e sabe-se que é experimentalmente inconsistente. Desta forma, é válida a exigência da localidade para se estudar teorias de campos aplicadas também ao mundo quântico.

A Teoria Quântica de Campos (TQC) é a combinação entre mecânica quântica e relatividade especial. De um ponto de vista histórico, esta surgiu como consequência de pesquisas em áreas como física de partículas e nuclear, em particular com previsões

de Paul Dirac acerca da teoria de elétron e pósitron [4]. Neste sentido, o processo de quantização canônica como estrutura geral da física de partículas implica que o conceito de partículas deve ser entendido como excitações de um campo, logo, explica o porquê de um elétron na ponta de um alfinete ser exatamente igual àquele encontrado na superfície de qualquer estrela. Na mecânica quântica padrão, os graus de liberdade clássicos são tidos como operadores que atuam no espaço de Hilbert. As regras para quantizar um campo não são diferentes na TQC, implicando que os graus básicos de liberdade agora são funções definidas pelo operador de espaço e tempo, tornando os graus de liberdade infinitos, um para cada ponto do espaço [5].

A necessidade de uma nova teoria de partículas foi antecipada em 1905 com o artigo de Einstein sobre o efeito fotoelétrico. Tornar a ideia de campo primordial faz com que as partículas sejam mais bem definidas e unicamente universais. A principal motivação para esses desenvolvimentos foi a necessidade de unificar a mecânica quântica e a relatividade especial, uma vez que a equação de Schrödinger se mostrou inadequada para descrever fenômenos físicos como o spin do elétron-pósitron e a criação de fótons. Nos anos de 1920, duas propostas ligeiramente antagônicas foram consideradas para resolver essas questões. A primeira proposta foi manter a estrutura básica da mecânica quântica de partículas e escrever uma versão relativisticamente invariável da equação de Schrödinger,

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0. \quad (1.1)$$

Nesse sentido, a equação de Klein-Gordon (1.1), parecia suprir essas necessidades por ser invariante sob transformação de Lorentz e sua função de onda ser também um escalar sob a mesma transformação. Contudo, esta equação tem problemas em descrever partículas com spin. Em particular, a lei de dispersão sugere energias negativas e positivas como soluções. De um ponto de vista de partículas, estados de energia negativa seriam inaceitáveis, uma vez que implicariam em não ter estado fundamental, no entanto, a TQC possui explicações consistentes para esses tipos de estados no qual resultariam em um novo tipo de partícula, a antipartícula. A segunda proposta foi apresentada em 1928 por Dirac, na qual estabeleceu uma equação linear nas derivadas. Esta equação é na verdade uma matriz de equações covariantes sob transformação de Lorentz, cuja equação de onda $\Psi(x, t)$ tem a forma de um espinor. Espinores são entidades matemáticas semelhantes a tensores que permitem um tratamento geral da noção de invariância sob rotação de

Lorentz. Em outras palavras, pode-se dizer que um espinor é o tipo mais básico de objeto matemático que pode ser transformado por Lorentz, [6].

A equação de Dirac (1.2) é uma equação de onda relativística que descreve a dinâmica de espinores e é considerada a equação de movimento de um campo complexo ψ ,

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc^2)\Psi = 0. \quad (1.2)$$

Essas equações não garantiam a generalização da equação de Schrödinger em termos de partículas. Ao invés disso, descreviam equações de movimentos de campos, cujas excitações são as próprias partículas, da mesma maneira que fótons são excitações do campo eletromagnético. A interação do fóton com a matéria cria pares elétron-pósitron cujo processo não viola o princípio da conservação da carga, porém o número de partículas sim. Com isso o espaço de Hilbert agora é denominado espaço de Fock que abrange um número arbitrário e indefinido de partículas em Teoria Quântica de Campos.

Por fim, tem-se a quantização do Campo Eletromagnético livre. Basicamente, a quantização deste campo clássico, no qual é descrito pelas equações de Maxwell, é o início da chamada Eletrodinâmica Quântica (EDQ) - a teoria da luz interagindo com a matéria. O caminho para a quantização deste campo será postulando uma lagrangiana clássica e, ao quantizar, observar que esta leva à dupla polarização do fóton, porém ao tentar quantizar esse campo, é conveniente escolher o calibre a ser trabalhado, nesse caso ao fixar o calibre de Coulomb elimina-se as inconsistências relacionadas aos graus de liberdade do fóton. Vale ressaltar que ao utilizar esse calibre, elimina-se também a necessidade de estabelecer relações de comutação de Φ com Π (operadores de campo) e passa-se a definir as relações de comutação do vetor campo \vec{A} e seu conjugado canônico \vec{E} , também conhecido como vetor campo elétrico.

Dentre todos os tipos de movimento presentes na natureza, os oscilatórios ganham destaque por surgirem em um grande número de situações físicas aparentemente distintas. Seguindo o curso da história, um dos primeiros a estudar analiticamente o problema do oscilador e resolver sua equação de movimento foi o físico e matemático Leonhard Euler [7]. É importante salientar que a base fundamental deste trabalho leva em consideração o estudo da física dos osciladores harmônicos, a medida em que lida-se com a passagem de um discreto número para um infinito número de partículas, formando assim um campo de osciladores.

Por fim, vale a pena ressaltar que no capítulo 2 deste trabalho discute-se a teoria clássica de campos em seu sentido fundamental, evocando ideias de partículas ligadas por um potencial oscilatório e como pode ser generalizado a fim de formar um campo clássico. Além disso, ainda neste capítulo há a exposição do Teorema de Noether essencial no processo da teoria clássica e quântica. Em seguida, no capítulo 3, aborda-se a Teoria Quântica de Campos sob uma visão canônica de quantização. Neste, quantizamos três campos clássicos: O campo de Spin-0 (Klein-Gordon), o campo de Spin-1/2 (Dirac) e o campo de spin-1 (Equações de Maxwell). Além disso calculamos os chamados Propagadores de Feynman em cada processo de quantização. E por fim, no último capítulo faz-se um apanhado geral a respeito do que foi exposto nestes capítulos para concluir o trabalho.

Capítulo 2

Teoria Clássica de Campos

Em física clássica o conceito de campo evoca ideias sobre sistemas macroscópicos como campos de velocidades ou temperatura de gases por exemplo. Contudo, o que será mostrado neste trabalho são campos fundamentais que descrevem a matéria num nível microscópico, tratando a função de onda $\Psi(x, t)$ de um dado sistema como um operador campo de onde grandezas físicas como energia e momentum podem ser deduzidas e que satisfazem certas relações de comutação num processo conhecido como segunda quantização.

2.1 Campo de Osciladores

Qualquer sistema físico que apresente uma frequência de oscilação pode ser descrito por um conjunto de osciladores harmônicos. Os chamados modos normais são importantes para o entendimento do comportamento dinâmico de sistemas constituídos de osciladores que vibram com baixa amplitude, cuja dinâmica pode ser reduzida a uma superposição de osciladores harmônicos simples. Um exemplo realístico para tal sistema ocorre em física da matéria condensada, onde propriedades relevantes de sólidos podem ser investigados a partir da dinâmica dos átomos que oscilam em torno de suas posições de equilíbrio na rede cristalina. A construção de um sistema contínuo a partir da consideração inicial de um sistema discreto de partículas, responde grande parte das perguntas a respeito da origem e dinâmica das partículas fundamentais da natureza. Esse processo é feito considerando que o espaço é dotado de partículas pontuais de massa m que por sua vez são ligadas entre si por um potencial elástico independente do tempo. Considerando uma

cadeia unidimensional de N massas pontuais, sendo separadas da posição de equilíbrio e cujas coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_N , definem a posição no espaço de configuração do ponto de equilíbrio, pode-se construir sua dinâmica a partir da definição de sua lagrangiana que por sua vez depende da velocidade com que a coordenadas q_i mudam no tempo e o potencial ao qual as partículas estão conectadas, figura (2.1).

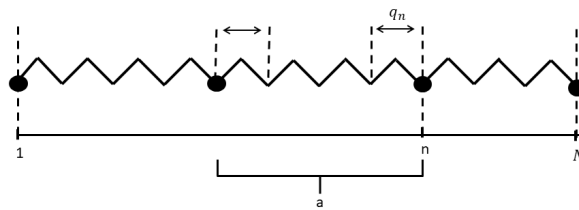


Figura 2.1: Cadeia longitudinal de N partículas
Imagem autoral

O potencial ao qual as massas estão ligadas se assemelha ao potencial elástico relacionado à Lei de Hooke, cujas constantes elásticas são iguais a k . Então, define-se a lagrangiana da cadeia longitudinal de partículas como sendo simplesmente,

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[m \left(\frac{d^2 q_i}{dt^2} \right) - k(q_{i+1} - q_i)^2 \right]. \quad (2.1)$$

A energia cinética total do sistema é definido como o somatório de cada contribuição de energia das partículas individuais, no qual o parâmetro velocidade é simplesmente definido como a variação infinitesimal das coordenadas generalizadas. O potencial por sua vez depende da posição q_i de uma partícula qualquer e a posição posterior q_{i+1} a ser deslocada para tirar do seu ponto de equilíbrio. O caso limite, no qual a distância entre cada partícula tende para zero, leva a uma distribuição contínua de massa. Aplicando a equação de Euler-Lagrange [8], leva naturalmente a equação de movimento do sistema,

$$\frac{m}{a} \left(\frac{d^2 q_i}{dt^2} \right) - Y \left(\frac{q_{i+1} - q_i}{a^2} \right) + Y \left(\frac{q_i - q_{i-1}}{a^2} \right) = 0, \quad (2.2)$$

onde estabelecendo o limite quando a tende a zero, os termos se tornam derivadas parciais

como nas relações

$$\frac{q_i - q_{i+1}}{a} \rightarrow \frac{q(x) - q(x+a)}{a} \rightarrow -\frac{\partial q}{\partial x},$$

$$\frac{q_{i-1} - q_i}{a} \rightarrow \frac{q(x-a) - q(x)}{a} \rightarrow -\frac{\partial q}{\partial x}.$$

A grandeza Y é conhecido como módulo de Young $Y = ak$, uma grandeza que mede a rigidez de um material sólido. Ao tomar a equação de movimento, observa-se a definição da derivada segunda em relação ao espaço quando se toma o limite no qual as distâncias entre as massas tende a zero,

$$\mu \frac{d^2 q}{dt^2} = Y \frac{d^2 q}{dx^2}. \quad (2.3)$$

Então, no limite, a equação (2.2) se torna uma equação de onda (2.3) que descreve a excitação de uma corda contínua definido por $q(x, t)$, cuja velocidade de propagação é $v = \sqrt{a^2 k/m}$. A princípio, a construção foi realizada unidimensionalmente, todavia, pode-se estender para as três dimensões tornando-a uma equação de onda de um campo definido por $q(\vec{r}, t)$. O formalismo hamiltoniano, segundo [3], é a melhor ferramenta para se chegar a quantização canônica de fato, definindo antes de tudo o momentum canônico conjugado π^n do campo, ressaltando que este não deve ser confundido com o momento total da configuração. Dessa forma, no caso de teoria de campos é possível contruir as relações de comutação bem como o espaço de Fock de cada campo.

Em se tratando de uma cadeia de N átomos, onde cada massa m é conectada por molas, é possível escrever a Hamiltoniana do sistema em termos do momento da i -ésima massa e sua posição,

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2}k(x_{i+1} - x_i)^2. \quad (2.4)$$

Cada massa está conectad ao seu vizinho de maneira que se considera elas independentes. Contudo, a excitação nesse sistema se comporta como o conjunto total dos osciladores harmônicos. Com isso, pode se pensar a equação (2.4) do ponto de vista da

mecânica quântica escrevendo a hamiltoniana como

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2q^2, \quad (2.5)$$

considerando que q e p seguem relações de comutação (princípio da incerteza). Para encontrar o espectro de (2.4), define-se operadores, posteriormente nomeados de criação e aniquilação,

$$\begin{aligned} \hat{a}_k &= \sqrt{\frac{m\omega_k}{2\hbar}} \left(\hat{x}_k + \frac{i}{m\omega_k} \hat{p}_k \right), \\ \hat{a}_k^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega_k}{2\hbar}} \left(\hat{x}_k - \frac{i}{m\omega_k} \hat{p}_k \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Com essa nova representação do espaço de configuração, a hamiltoniana da cadeia pode ser expressa em termos de um somatório de modos de oscilação. Esses modos se comportam de maneira independente no campo e são chamados de fônons. Cada modo de fônons é dado por um número inteiro múltiplo de um quantum de energia $\hbar\omega_k$,

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^N \hbar\omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right). \quad (2.7)$$

Essa hamiltoniana leva a auto-estados de energia do oscilador harmônico simples cujos níveis de energia são fixos e quantizados. Neste sentido, os níveis de energia se comportam como partículas do campo. Ficará claro neste trabalho que cada campo tem sua partícula com suas devidas propriedades. Veremos por exemplo que a partícula do campo eletromagnético é o fóton com dois estado de polarização e dotado de momento magnético intrínseco chamado spin.

2.2 Teorema de Noether

O papel das simetrias em teoria de campos de acordo com [3] é mais importante que em mecânica de partículas pois trabalha-se com simetrias de calibre, simetrias internas, supersimetrias, etc. Em outras palavras, em teoria de campos, transformações contínuas de coordenadas dos campos (simetrias), implicam na existência de uma quantidade conservada que pode ser deduzida.

Em qualquer ramo da física, quantidades como energia, momento linear e momento angular devem ser conservadas para garantir uma descrição válida da natureza. De um ponto de vista fundamental, essas quantidades só se conservam devido propriedades de simetrias do sistema. A fundamentação matemática dessa conexão foi formalizada no começo do século XIX por Emmy Noether, no teorema conhecido como Teorema de Noether, sendo um dos teoremas físicos mais bem postos e mais bem construídos da história. Emmy propõe que toda transformação de simetria nas coordenadas dos campos da lagrangiana, leva a uma corrente conservada $j^\mu(x)$, para isso dizemos que uma transformação infinitesimal num campo,

$$\delta\phi_a = X_a(\phi),$$

é uma simetria se a lagrangiana muda por uma derivada total do tipo

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu, \quad (2.8)$$

para algum conjunto de funções $F^\mu(\phi)$. Assim, para encontrar o teorema de Noether, faz-se uma transformação arbitrária $\delta\phi_a$, então

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a}\delta\phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\partial_\mu(\delta\phi_a), \\ &= \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} \right] \delta\phi_a + \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} \delta\phi_a \right). \end{aligned}$$

O termo entre colchetes vai naturalmente a zero quando as equações de movimento são satisfeitas. Sobra somente

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} \delta\phi_a \right).$$

Aplicando a condição (2.8) e usando a transformação de simetria vista inicialmente, chegamos em,

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (2.9)$$

onde,

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} X_a(\phi) - F^\mu.$$

Como se trata de quatro equações independentes, é possível escrevê-las na forma de integrais de fácil solução. Tomando $\mu = 0$ e aplicando o Teorema de Gauss é levado

naturalmente a conservação de uma carga Q definida em um volume finito V ,

$$Q_V = \int_V d^3x j_N^0. \quad (2.10)$$

Correntes conservadas são importantes pois elas geram cargas conservadas, também chamada carga de Noether. Uma maneira útil de aplicar essa ideia é realizar a integração sobre uma superfície no tempo constante como visto na figura (2.2).

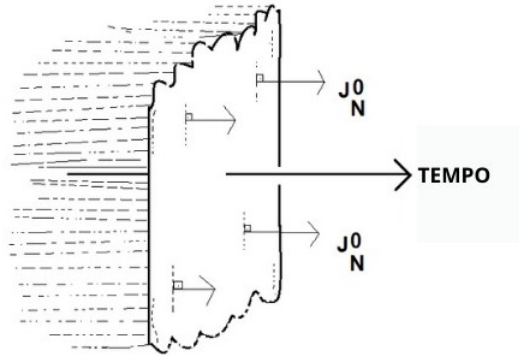


Figura 2.2: Integração sobre uma superfície no espaço-tempo a tempo constante.

Onde j_N^0 é a componente tipo tempo que é normal a superfície. Todo esse desenvolvimento é válido para teorias clássicas de campos. Porém, o teorema de Noether pode ser levado para a teoria quântica pressupondo que todas as simetrias importantes clássicas se tornarão simetrias quânticas levando a um operador carga conservada, cujos auto-valores, i.e., observáveis físicos, serão também taxas conservadas.

A existência de uma corrente é uma afirmação mais importante que a definição de uma carga conservada pois implica que esta é conservada localmente e pode ser generalizado para qualquer teoria de campo local.

Capítulo 3

Teoria Quântica de Campos

A quantização de campos tem consequências de longo alcance e é referência na física moderna [9] uma vez que trabalha com uma elegante linguagem matemática para descrever sistemas de partículas. Uma das consequências é de que a teoria naturalmente leva à necessidade da existência de quanta de campo que podem ser criados e aniquilados [10]. Um campo é uma quantidade definida em qualquer ponto do espaço e no tempo (\vec{x}, t) . A partir de agora, define-se o campo $\phi_a(\vec{x}, t)$ como um ente capaz de sofrer dinâmica como um todo, ao contrário do tratamento clássico dado a uma partícula com um infinito número de coordenadas generalizadas. Agora os índices a indicam um sistema com infinitos graus de liberdade, um para cada ponto do espaço.

Em mecânica quântica, o tratamento dado para a quantização canônica é a promoção de um formalismo hamiltoniano clássico para a teoria de campos, tomando coordenadas generalizadas e seus momentos canônicos e transformando-os em operadores que respeitam algumas relações de comutação. O mesmo em teoria de campos, porém agora o campo $\phi_a(\vec{x})$ e seu momentum conjugado é que obedecem tais relações.

3.1 Campo de Spin-0: A equação de Klein-Gordon

A quantização do campo clássico de Klein-Gordon (KG) é a mais simples teoria de campo livre relativística uma vez que lida com um campo escalar maciço de spin nulo que descreve uma coleção de partículas idênticas de spin zero,

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0. \quad (3.1)$$

Segundo [9], por ser a mais simples generalização, a introdução de agentes físicos como partículas e antipartículas surgem quando se lida com operadores campos não-hermitianos.

É aplicada a Equação (3.1) unidades naturais de medidas ($\hbar = c = 1$), comum em teoria de campos para simplificar as equações. Estas podem ser reinseridas utilizando conhecimentos de análise dimensional. A solução da Equação (3.1) é dado pela transformada de Fourier a fim de separar os graus de liberdade,

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \phi(\vec{p}, t), \quad (3.2)$$

onde $\phi(\vec{p}, t)$ satisfaz a equação do oscilador harmônico, cuja frequência de oscilação é $\omega_{\vec{p}}$,

$$\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (3.3)$$

A solução geral da equação de Klein-Gordon é uma superposição linear de osciladores harmônicos simples, cada um vibrando em diferentes frequências com diferentes amplitudes. A quantização deste campo é basicamente escrevê-lo em termos de operadores de criação e aniquilação e verificar que estes obedecem relação de comutação.

3.1.1 Quantização de um campo escalar real

A quantização de um campo escalar é feita postulando uma densidade de lagrangiana clássica para depois quantificá-lo,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (3.4)$$

Onde $\eta^{\mu\nu}$ é a métrica do espaço de Minkowski e m o termo massivo. Esta quantificação é verificada ao mostrar que os coeficientes de Fourier da expansão em ondas planas obedecem relações de comutação. A aplicação da equação de Euler-Lagrange para campos leva à equação de Klein-Gordon, cuja solução é dada em ondas planas na forma geral,

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left[a(\vec{k}) e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k}) e^{ikx} \right]. \quad (3.5)$$

O segundo coeficiente de Fourier é conjugado hermitiano do primeiro, e isto garante que o campo escalar seja invariante sob uma conjugação complexa, portanto é real. A grandeza escalar integrada é um invariante de Lorentz. O campo conjugado é tomado a

partir da equação de Euler-Lagrange quando $\mu = 0$,

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0\phi)} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} (-i\omega) \left[a(\vec{k})e^{-ikx} - a^\dagger(\vec{k})e^{ikx} \right]. \quad (3.6)$$

Em mecânica quântica, os campos $\phi(\vec{x}, t)$ e $\pi(\vec{x}, t)$ devem ser encarados como operadores ao invés de números que satisfazem relações de comutação específicas. Isto deve ocorrer também para os coeficientes de Fourier, onde satisfazem algumas relações de comutação particulares e então o campo é quantizado,

$$\left[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}') \right] = 2\omega(2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (3.7)$$

$$\left[a(\vec{k}), a(\vec{k}') \right] = \left[a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}') \right] = 0.$$

Com as relações de comutação estabelecidas, define-se a hamiltoniana do sistema em termos dos coeficientes de Fourier. Se dá por integração da densidade da hamiltoniana encontrada a partir do tensor energia momentum do teorema de Noether ou diretamente pela equação de Legendre conhecida da teoria clássica,

$$H_n = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \omega a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}). \quad (3.8)$$

A utilização do chamado ordenamento normal na equação (3.8) é formalmente definida como o posicionamento de todos os operadores $a^\dagger(\vec{k})$ à esquerda dos operadores $a(\vec{k})$ e é necessária pois produz expressões físicas de acordo com a mecânica quântica. Isso se deve ao fato da ordenação dos campos serem arbitrárias no regime clássico, dessa forma o hamiltoniano original foi gerado inserindo campos quantizados (operador campo) em fórmulas clássicas. O ordenamento normal no hamiltoniano é visto como um recurso em teoria de campos para não produzir respostas físicas inconsistentes, uma vez que lida-se com campos clássicos. Com o hamiltoniano da Equação (3.8) é possível encontrar o espectro de energia dos estados da teoria usando a equação de autovetor-autovalor da mecânica quântica fazendo atuar os operadores $a(\vec{k})$ e $a^\dagger(\vec{k})$ nos auto-estados com energia E ,

$$H_n |E\rangle = E |E\rangle, \quad (3.9)$$

$$H_n a(\vec{k}) |E\rangle = (E - \omega) a(\vec{k}) |E\rangle, \quad (3.10)$$

$$H_n a^\dagger(\vec{k}) |E\rangle = (E + \omega) a^\dagger(\vec{k}) |E\rangle .$$

Os operadores $a^\dagger(\vec{k})$ e $a(\vec{k})$ são conhecidos como operadores de criação e aniquilação, nos quais têm o papel de adicionar e retirar uma quantum de energia, respectivamente. É preciso ter em mente que esses operadores são estruturas não físicas ou seja, não é possível medi-los. Para uma energia limitada por baixo, deve haver um estado inicial $|0\rangle$ que satisfaz $a(\vec{k}) |0\rangle = 0$, conhecida como energia de estado fundamental. Fundamentalmente, na hamiltoniana da Equação (3.8) há o termo $\delta(0)$ que gera infinitos e por esta razão é retirado desta equação sem perda de generalidade e de maneira prática. Diferentemente da mecânica clássica, em teoria quântica, segundo [11] e [12], ainda que haja ausência de partículas, há energia de ponto zero ou energia de vácuo E_o , no qual gera uma densidade de energia também infinita conhecida como divergência de ultra-violeta. Esse tipo de absurdo surge devido a imposição de que a teoria é válida para escalas curtas de distância, correspondendo a altas energias.

Um estado $|\vec{p}\rangle$ nesta teoria é definido como o operador criação atuando no vácuo $|0\rangle$ cuja energia é ω . O estado é interpretado como um autoestado de momento \vec{p} de uma única partícula de massa m . Dessa forma é possível criar estados de multipartículas por atuação do operador $a^\dagger(\vec{p})$ n vezes no estado fundamental,

$$|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle = a^\dagger(\vec{p}_1) \dots a^\dagger(\vec{p}_n) |0\rangle . \quad (3.11)$$

Devido os operadores de criação comutarem entre si, para qualquer duas partículas o estado é simétrico de forma que isto representa partículas bosônicas ou bósons como se observa na equação (3.12). Em outras palavras, duas partículas podem existir no mesmo estado, contudo na próxima seção este conceito não será tido como verdade,

$$|\vec{p}, \vec{q}\rangle = |\vec{q}, \vec{p}\rangle . \quad (3.12)$$

Todo o espaço de Hilbert da teoria é estendida por atuação do operador criação no estado de vácuo e este novo espaço é conhecido como espaço de Fock no qual é simplesmente definido como o somatório das n partículas no espaço de Hilbert. Usualmente

o operador N conta o número de partículas em um dado estado no espaço de Fock,

$$N = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}). \quad (3.13)$$

Este operador naturalmente satisfaz a equação de autovalor-autovetor bem como comuta com o Hamiltoniano, $[N, H] = 0$, garantindo que o número de partículas é conservado. Diferentemente dos operadores criação e aniquilação isolados, este operador é hermitiano,[11,12]. Esta é uma propriedade de teorias livres que não é válida quando se considera interações uma vez que a ação de criar e destruir partículas presume uma não conservação dos quanta.

Em física, há o interesse somente das diferenças de energias e dessa forma, não há maneira de medir E_0 diretamente. A redefinição da hamiltoniana por meio do ordenamento normal exclui essa inconsistência e elimina a ambiguidade. Sendo E_0 o nível de energia mais baixo não-nulo, um efeito em especial foi previsto teoricamente em 1948 pelo físico holandês Hendrick Brugt Gerhardt Casimir [13],

$$E_0 = \sum_{\omega} \frac{1}{2} \hbar \omega. \quad (3.14)$$

Normalmente a energia de vácuo não tem nenhum efeito sobre fenômenos observáveis, porém o chamado efeito Casimir é um dos efeitos notáveis no qual ela se manifesta. Ao se considerar o espaço inteiro como vácuo completo obtém-se qualquer frequência de oscilação de zero a infinito. Neste caso, a teoria quântica para um campo escalar massivo de acordo com [3] prevê que a energia de vácuo é infinita. Esta energia infinita é destituída de significado físico e pode ser ignorada. Entretanto quando se considera uma região espacialmente limitada por duas placas condutoras paralelas onde o campo quantizado é confinado, suas oscilações devem satisfazer certas condições de contorno bem como só podem ter valores específicos de frequências.

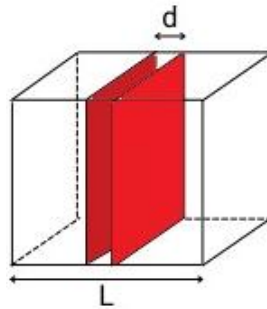


Figura 3.1: Placas paralelas de dimensões L e separação d

O efeito Casimir resulta da alteração do espectro de frequências de vibração do estado fundamental em razão das condições de contorno impostas (placa metálica). No caso do campo eletromagnético entre as placas a manifestação é uma força de atração entre as placas, que é de fato observada. Segundo [13], do mesmo modo pelo qual a energia de interação entre duas cargas estáticas está associada uma força, a energia de interação entre as placas também está associada uma força, que no caso é atrativa dada pela equação

$$\frac{\partial E}{\partial d} = A \frac{\pi^2}{480d^4}. \quad (3.15)$$

Todas essas considerações levam a afirmar que a força de Casimir é uma manifestação macroscópica das propriedades microscópica do vácuo quântico.

3.1.2 Quantização de um campo complexo

Para a quantização de um campo escalar complexo, diferentemente da lagrangiana do caso anterior, não há o fator 1/2 na frente da lagrangiana,

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi - M^2 \psi^* \psi. \quad (3.16)$$

A aplicação da equação de Euler-Lagrange resulta naturalmente em duas equações de Klein-Gordon para ψ^* e ψ . Verifica-se que as fases e^{ipx} e e^{-ipx} são soluções desta equação de forma que sua solução geral é dada por combinação linear arbitrária dessas fases,

$$\psi = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3 2\omega} [b(\vec{p})e^{-ipx} + c^\dagger(\vec{p})e^{ipx}], \quad (3.17)$$

$$\psi^\dagger = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3 2\omega} [c(\vec{p})e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{p})e^{ipx}].$$

No caso de um campo complexo, $b(\vec{p})$ e $c^\dagger(\vec{p})$ devem ser independentes e não mais o conjugado um do outro como caso do campo real, isso significa que o campo ψ é não hermitiano ou seja este operador não realiza nenhum tipo de medida no sistema. Usa-se a relação $\pi_\psi = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\psi}$ para encontrar o campos clássicos para os momentum conjugados, onde

$$\begin{aligned}\pi_\psi &= \dot{\psi}^\dagger = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3 2\omega} (-i\omega) [c(\vec{p})e^{-ipx} - b^\dagger(\vec{p})e^{ipx}], \\ \pi_{\psi^\dagger} &= \dot{\psi} = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3 2\omega} (-i\omega) [b(\vec{p})e^{-ipx} - c^\dagger(\vec{p})e^{ipx}].\end{aligned}\quad (3.18)$$

Em mecânica quântica, estes quatro campos clássicos são vistos como operadores que obedecem a oito relações de comutação. A utilização da transformada de Fourier inversa gera coeficientes de Fourier $c(\vec{p})$, $c^\dagger(\vec{p})$, $b(\vec{p})$ e $b^\dagger(\vec{p})$ em função dos campos, de forma que a quantização canônica se dá por meio das relações de comutação entre estes coeficientes na forma

$$\begin{aligned}[b(\vec{p}), b^\dagger(\vec{q})] &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}), \\ [c(\vec{p}), c^\dagger(\vec{q})] &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}).\end{aligned}\quad (3.19)$$

A comutação entre os operadores em (3.16) se anula quando $\vec{p} = \vec{q}$, bem como para outras combinações de comutação,

$$[b(\vec{p}), b(\vec{q})] = [c(\vec{p}), c(\vec{q})] = [b(\vec{p}), c(\vec{q})] = [b(\vec{p}), c^\dagger(\vec{q})] = 0. \quad (3.20)$$

Esses operadores são chamados de operadores de criação e aniquilação do oscilador harmônico devido suas propriedades similares ao problema da equação de Schrodinger para um potencial oscilatório. Com isso, a quantização do campo escalar complexo gera dois operadores de criação, $b^\dagger(\vec{p})$ e $c^\dagger(\vec{p})$ que definem a criação de dois tipos de partículas, ambas de massa M e spin zero. Elas são interpretadas como a criação de partículas e antipartículas, ao contrário do campo escalar real que gera somente um tipo.

Essas relações permitem a construção do hamiltoniano do sistema no qual abrange os dois tipos de partículas. Analogamente ao caso anterior, utiliza-se o ordenamento normal na hamiltoniana a fim de gerar expressões físicas sem absurdos. Isto é feito para

corrigir o fato de usar expressões quantizadas em uma hamiltoniana clássica,

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega [b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p}) + c^\dagger(\vec{p})c(\vec{p})]. \quad (3.21)$$

Com isso, é possível gerar algumas relações importantes. Primeiro, devido o hamiltoniano ser uma integral sob $b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p})$ e $c^\dagger(\vec{p})c(\vec{p})$, obtêm-se um valor esperado não negativo e isto leva a definição de estado fundamental pois $b(\vec{p})$ e $c(\vec{p})$ abaixam o valor do autovalor em um quantum. Há um estado mais baixo que deve ser zerado quando $c(\vec{p})|0\rangle = 0$ ou $b(\vec{p})|0\rangle = 0$. Esse estado fundamental pode ser tomado como a definição de vácuo pois não há quanta de energia a ser aniquilado. Os quanta de energia podem ser interpretados como partículas pois trata-se do caso de duas partículas massivas de spin zero. Em uma determinada frequência, somente níveis discretos de energias são permitidos e correspondem a diferentes números inteiros de partículas ou quanta do campo.

Outra relação que advém do fato da lagrangiana (3.16) ter uma simetria global que permite que uma corrente de Noether seja conservada é a definição de carga Q , que também pode ser interpretada como a carga elétrica usual. Uma simetria global ocorre quando a lagrangiana é invariante sob uma transformação no campo do tipo

$$\phi \rightarrow \phi + \delta\phi,$$

onde $\delta\phi$ não depende dos pontos do espaço-tempo.

Do ponto de vista clássico pelo teorema de Noether, a carga conservada é definida na forma

$$Q = i \int d^3x [\psi^*\dot{\psi} - \dot{\psi}^*\psi]. \quad (3.22)$$

Este operador revela que diferentes tipos de partículas nesta teoria tem cargas opostas. Para isso, é preciso sua definição em termos dos operadores de criação e aniquilação,

$$Q = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [c^\dagger(\vec{p})c(\vec{p}) - b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p})] = N_c - N_b. \quad (3.23)$$

Nesse caso, o ordenamento normal ignora a divergência da comutação do operador b para evitar as ambiguidades da teoria clássica. Lembrando que o operador número N , tem autovalor igual o número de quanta de momento \vec{p} em um dado estado $|p\rangle$ do espaço de Fock. Além disso, o operador carga conta o número de antipartículas criadas por $c^\dagger(\vec{p})$

menos o número de partículas criadas por $b^\dagger(\vec{p})$. O operador carga mostra então que os dois tipos de partículas tem cargas opostas pois seus operadores números aparecem na carga com sinal oposto. Esse resultado permite interpretar o tipo a como partícula e b como antipartícula. Além disso, o comutador da hamiltoniana com o operador carga se anula, $[H, Q] = 0$, garantindo que Q seja uma grandeza conservada em teoria de campos segundo [10]. Em teoria de campos livres, Q é conservado pois N_c e N_b também são, contudo, em teorias interagentes, a carga permanece como quantidade conservada apesar de N_c e N_b individualmente não.

Um fato importante que ainda se encontra em intenso estudo é o fato de que no universo, observa-se naturalmente mais partículas do que antipartículas. Estas surgiram teoricamente a partir da reformulação de Dirac da mecânica quântica relativística, e que levou à equação com seu nome e são caracterizadas por possuir todas os números quânticos opostos aos das suas respectivas partículas. Todavia, desde essa descrição teórica observou-se que há uma simetria na criação de um par de partícula/antipartícula: sempre que surge um, o outro também deve aparecer. Se os processos puderem ser vistos deste ponto de vista, deveria haver quantidades iguais de matéria e antimatéria.

3.1.3 O propagador de Feynman para o campo de Klein-Gordon

Em teoria relativística de campos quânticos o lagrangiana a ser quantizada é uma invariante de Lorentz. Todavia, na quantização canônica tratamos espaço e tempo de maneiras separadas, o que implica em relações de comutação no espaço e no tempo independentes. A princípio, a invariância de Lorentz seria quebrada, porém após a quantização a teoria permanece relativisticamente causal. Basicamente, a causalidade relativística significa que nenhum sinal pode ter velocidade maior que a da luz. Em TQC, isso significa que dois operadores de campos separados espacialmente, não podem influenciar um ao outro no estado em que estão atuando. Ou seja, a medida em x e em y não estão causalmente conectadas,

$$[\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y})] |\psi\rangle = 0. \quad (3.24)$$

Utilizando a forma do campo ϕ , avalia-se a relação de comutação para separações tipo espaço, por meio das relações de comutações dos operadores de criação e aniquilação.

E então define-se uma importante propriedade em teoria de campos,

$$[\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y})] = \Delta(x - y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega} (e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}). \quad (3.25)$$

Essa nova função é um invariante de Lorentz, onde para separações tipo espaço, $(x - y)^2 < 0$, tende naturalmente para zero garantindo a continuidade da causalidade com comutadores tendendo a zero fora do cone de luz. Em teoria quântica de campos livres essa propriedade é tida como axioma abrindo uma nova classe de estruturas físicas chamado propagadores. O propagador de Feynman para o campo de Klein-Gordon é definido como o valor esperado do produto dos operadores de campo. Em outras palavras, segundo [14] a definição do propagador calcula a amplitude de probabilidade do sistema não mudar seu estado fundamental após a criação e aniquilação de uma partícula no ponto no ponto de campo,

$$i\Delta_F(x - y) = \langle 0 | T(\phi(x)\phi^\dagger(y)) | 0 \rangle. \quad (3.26)$$

Onde T denota o produto ordenado temporal de Wick dos operadores [9]. O fator funciona como uma instrução para colocar o tempo posterior do lado esquerdo ou à frente. Esta foi uma ferramenta utilizada pelo físico norte americano Richard Feynman para incluir a contribuição das antipartículas. Dessa forma, o propagador de Feynman torna-se

$$\Delta_F(x - y) = \Theta(x_0 - y_0) \langle 0 | \phi(x)\phi^\dagger(y) | 0 \rangle + \Theta(y_0 - x_0) \langle 0 | \phi^\dagger(y)\phi(x) | 0 \rangle. \quad (3.27)$$

O propagador é então dividido em duas partes. A primeira, cujo tempo $x_0 > y_0$, cria uma partícula no ponto y e propaga para x onde é aniquilada. A segunda parte onde $y_0 > x_0$, cria-se uma antipartícula em x que se propaga para o ponto y onde é aniquilada, [14]. Neste processo, o estado fundamental permanece inalterado. O propagador de Feynman pode ser escrito sob forma de integral de contorno a partir da forma dos operadores de campo atuando no estado fundamental por meio dos operadores de criação e aniquilação. A função Θ é uma expansão no plano complexo fazendo com que a integral convirja. Então o propagador se torna

$$\Delta_F(x - y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \Delta'(p), \quad (3.28)$$

onde o termo $\Delta'(p)$ é a componente da transformada de Fourier do propagador de Feynman

correspondendo a uma partícula de momento p . Este propagador define a massa da partícula na posição do pólo ou singularidade. A definição de Θ permite o deslocamento do pólo $\pm E_p$ em $\pm i\epsilon$, para que a integral convirja de acordo com o teorema do resíduo de Cauchy. As figuras (3.2) e (3.3) mostram os contornos usados depois do deslocamento dos pólos.

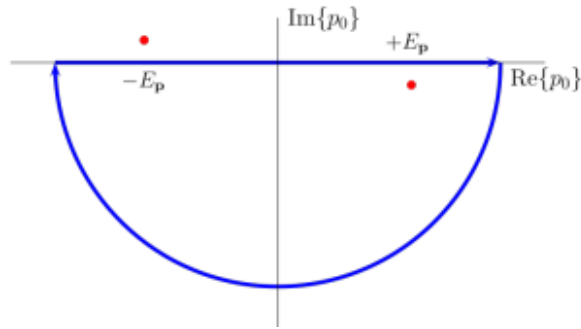


Figura 3.2: Deslocamento do pólo $-E_p$ em $+i\epsilon$ e fechamento de contorno pela parte negativa do eixo imaginário. Imagem adaptada.

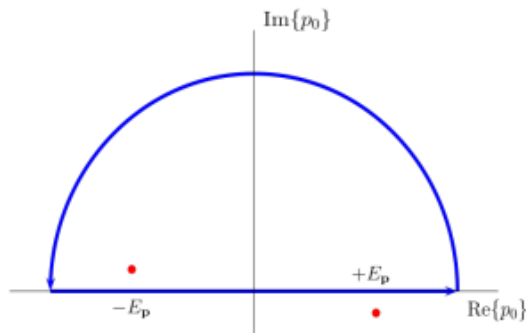


Figura 3.3: Deslocamento do pólo E_p em $-i\epsilon$ e fechamento de contorno pela parte positiva do eixo imaginário. Imagem adaptada.

Função de Green do Campo de Klein-Gordon

A função de Green é um método de resolução de equações diferenciais não-homogêneas, representado na maioria das vezes pela função $G(x|\xi)$, também conhecida como função influência. Segundo [15], a função de Green expressa a resposta física de um sistema quando este é submetido a um impulso definido pela função delta de Dirac

$$f(x) = \delta(x - \xi),$$

passando, dessa forma, a tratar o problema sob o ponto de vista da teoria das distribuições.

No âmbito da teoria quântica de campos, é relativamente fácil ver que o propagador de Feynman $\Delta_F(x - y)$ é também a função de Green do campo de Klein-Gordon. A aplicação da relação (3.28) no operador diferencial do campo de spin nulo resulta na função delta de Dirac como termo fonte definido pela função de Green,

$$(\partial_t - \nabla^2 + m^2)\Delta_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(-p^2 + m^2)e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2} = i\delta^4(x - y).$$

3.2 Campo de Spin- 1/2: A equação de Dirac

A primeira descrição de partículas em mecânica quântica foi feita por Erwin Schrodinger na qual sua equação mostrava a dinâmica de partículas não relativísticas em diferentes tipos de potenciais. A equação de Klein-Gordon por sua vez tem uma relação de energia-momentum relativística em segunda ordem que gera derivadas temporais de segunda ordem que causam problemas relacionados à densidade de probabilidade. Com isso, Dirac em 1928 propôs uma equação que descreve partículas relativísticas cuja relação energia-momentum produz derivadas de primeira ordem solucionando o problema da equação anterior e abrindo uma nova forma de estudo das partículas de spin 1/2. A equação de Dirac é formalmente derivada por teoria de grupo e é uma equação matricial cujos parâmetros estão relacionados às matrizes de Pauli e que atuam na função de onda ψ . A equação é descrita por

$$(i\gamma^\mu - m)\psi_{\vec{p}}^{(r)}(\vec{x}, t) = 0, \quad (3.29)$$

onde o índice r na função de onda $\psi_{\vec{p}}^{(r)}(\vec{x}, t)$ denota quatro soluções. Para $r = 1, 2$ denota soluções com energia positiva, $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ e para $r = 3, 4$ soluções de energia negativa, $E = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. A quadrimatriz γ^μ segundo [16] traduz a mais elegante álgebra de operadores que anticomutam, que são definidas por

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Um mecanismo utilizado por Paul Dirac mas primeiro formalizado por Pauli no contexto não-relativístico, i.e., baixas velocidades, para modelar o spin do elétron intro-

duzindo as conhecidas matrizes de Pauli, σ , foi o conceito de *espinor*. Espinores são entidades matemáticas largamente utilizada em física e são a generalização do conceito de vetor ou tensor. Formalmente, de acordo com [6], os *espinores* permitem o tratamento mais geral da noção de invariância sob rotação e transformação de Lorentz. Dirac em 1928 fez uso desses mecanismos para encontrar uma equação que descrevesse o elétron por combinação da matemática de *espinores* e a mecânica quântica das funções de onda. A introdução de um quadri-vetor complexo chamado de *espinor* de Dirac foi fisicamente interpretado como a função de onda e pôde predizer a existência de antimatéria. A quantização do campo de Dirac é feita considerando um "ansatz" de uma lagrangiana clássica no qual após a aplicação da equação de Euler-Lagrange resulta naturalmente na equação de Dirac,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x). \quad (3.31)$$

A solução da equação de Dirac é dada em ondas planas como no caso da equação de Klein-Gordon, entretanto considerando agora que há termos relacionados a rotação, i.e., espinores,

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}) &= \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega} [b_s u_s(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + c_s^\dagger v_s(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}], \\ \psi^\dagger(\mathbf{x}) &= \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega} [b_s^\dagger u_s^*(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + c_s v_s^*(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Os operadores b_s^\dagger criam partículas relacionadas ao espinores $u_s(\mathbf{p})$ enquanto c_s^\dagger criam antipartículas relacionadas ao espinores $v_s(\mathbf{p})$. O processo de quantização dessas partículas fermiônicas se dá tomando os espinores $\psi(\vec{x}, t)$ e $\psi^\dagger(\vec{x}, t)$ como sendo operadores que satisfazem as regras de anticomutação de Jordan e Wigner segundo [9], a fim de garantir que os estados obedeçam à estatística de Fermi-Dirac,

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(\mathbf{x}), \psi_\beta^\dagger(\mathbf{y})\} &= \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \{\psi_\alpha(\mathbf{x}), \psi_\beta(\mathbf{y})\} &= \{\psi_\alpha^\dagger(\mathbf{x}), \psi_\beta^\dagger(\mathbf{y})\} = 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Usando condições de ortogonalidade dos espinores é possível reescrever ψ em termos dos operadores de criação e aniquilação. Sobretudo, nota-se que estes operadores também

obedecem a regras de anticomutação,

$$\begin{aligned}\{b_r(\mathbf{p}), b_s^\dagger(\mathbf{q})\} &= \frac{\omega}{m}(2\pi)^3 \delta_{rs} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \\ \{c_r(\mathbf{p}), c_s^\dagger(\mathbf{q})\} &= \frac{\omega}{m}(2\pi)^3 \delta_{rs} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}).\end{aligned}\quad (3.34)$$

A quantização do campo de Dirac só é completo de fato quando encontramos as regras de anticomutação dos operadores representados pelos seus osciladores (partículas).

O fato de usar regras de anticomutação nos livra de ter estados excitados com norma negativa, o que implicaria na impossibilidade de definir o estado fundamental $|0\rangle$. Além disso, os anticomutadores levam a uma hamiltoniana bem definida e sem inconsistências quando usado o ordenamento normal para definir os operadores de criação à esquerda dos operadores de aniquilação. Sobretudo, mudanças infinitas e finitas no ponto zero da escala de energia não podem ser medidos, então pode-se ignorar o termo $-\delta^3(0)$ da hamiltoniana,

$$H = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} m [b_s^\dagger(\mathbf{p})b_s(\mathbf{p}) + c_s^\dagger(\mathbf{p})c_s(\mathbf{p})]. \quad (3.35)$$

A construção do espaço de Fock para partículas fermiônicas é feita atuando o operador criação de partículas ou antipartículas no estado fundamental $|0\rangle$, análogo ao campo de Klein-Gordon. No entanto, em se tratando de férmions que obedecem às regras de anticomutação, para dois estados de partículas $|\mathbf{p}_1, r_1; \mathbf{p}_2, r_2\rangle$, nos quais apresentam comportamento anti-simétrico, ocorre o princípio da exclusão de Pauli que impede que duas partículas ocupem o mesmo estado quântico. Isso significa que se dois elétrons tem o mesmo momento eles devem ter *spin* opostos.

Com isso é possível definir operadores essenciais para a teoria. O operador momento da teoria de campo tem contribuição de partículas e antipartículas, além disso a isotropia do espaço garante que não haja momentum de vácuo,

$$\hat{\mathbf{P}} = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega} \mathbf{p} [b_s^\dagger(\mathbf{p})b_s(\mathbf{p}) + c_s^\dagger(\mathbf{p})c_s(\mathbf{p})]. \quad (3.36)$$

Analogamente às relações (3.30) e (3.31), o operador momentum angular também pode ser escrito em função dos coeficientes de Fourier, i.e., os operadores de criação e aniquilação. Salienta-se ainda que a expansão em ondas planas da solução de Dirac não

leva em consideração a definição de momentum angular, contudo há um resultado obtido a partir da helicidade de estados na qual o eixo de quantização do spin é direcionado ao longo do vetor momentum. O operador de projeção de *spin* na direção do movimento em termos dos operadores é definido por

$$\hat{S}_p = \frac{1}{2} \left[b_s^\dagger(p)b_s(p) - b_{-s}^\dagger(p)b_{-s}(p) + c_s^\dagger(p)c_s(p) - c_{-s}^\dagger(p)c_{-s}(p) \right], \quad (3.37)$$

onde os operadores números definem contribuição de partículas e antipartículas, cada uma carregando projeção de *spin* $1/2$ e $-1/2$, i.e., o sinal de s define a direção da quantização do *spin*. Isso significa que a falta de uma partícula no extremo inferior do contínuo que tem *spin* $1/2$ corresponde a uma antipartícula de *spin* $1/2$, [9].

Outra relação importante em TQC é a definição do operador carga \hat{Q} a partir do vetor densidade de corrente j_μ do teorema de Noether. Vale ressaltar que o resultado a seguir é consequência direta da definição de anticomutadores que introduz a carga às partículas. Este operador é obtido excluindo-se a carga do vácuo por meio do ordenamento normal, uma vez que este é um operador não físico. Como resultado, partículas e antipartículas carregam cargas opostas $+e$ e $-e$ na forma,

$$\begin{aligned} \hat{Q}b_s^\dagger(p) |0\rangle &= eb_s^\dagger(p) |0\rangle \\ \hat{Q}c_s^\dagger(p) |0\rangle &= -ec_s^\dagger(p) |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Originalmente, Dirac visualizou sua equação como uma versão relativística da equação de Schrödinger, ou seja, interpretando ψ como uma função de onda de uma única partícula com *spin*. As soluções em ondas planas da equação são autoestados de energia cujo autovalor são energias positivas e negativas e isto a princípio seria desastroso para a teoria. Com isso, a solução de Dirac foi considerar que elétrons são férmions ou seja obedecem ao princípio da exclusão de Pauli e então estipular que no vácuo real, todos os estados com energias negativas estão preenchidas por partículas e os estados positivos são propensos a serem preenchidos. Esses estados preenchidos com energia negativa são conhecidos como o *Mar de Dirac*. Sua proposição o levou a considerar que quando um estado de energia negativa é excitado para um estado de energia positiva, deixa para trás um buraco e este tem todas as propriedades do elétron com exceção da sua carga que é positiva. Sua primeira consideração foi que esse buraco seria um fóton, porém, mais

tarde, concluiu que se tratava de uma nova partícula chamado pósitron. Contudo, as previsões teóricas diziam que quando o pósitron encontra um elétron eles se aniquilam e isto foi comprovado experimentalmente em 1932 provando a existência de antimatéria.

Segundo [3], o *insight* original de Dirac em considerar o spinor como sendo uma função de onda de uma única partícula não estava correto, uma vez que antipartículas parecem também no estudo do campo de Klein-Gordon, i.e., para bósons e não somente para férmions como argumentou. Isso significa que não há uma maneira consistente de interpretar a equação de Dirac segundo a ótica de uma só partícula, mas sim pensando como um campo clássico dotado de soluções de energia positiva cuja quantização de campo dá origem a excitações de partículas e antipartícula.

3.2.1 O propagador de Feynman para o campo de Dirac

O propagador de Feynman para o campo do elétron é análogo ao do campo de Klein-Gordon. Agora, o valor esperado do produto ordenado dos tempos dos operadores de campo são descritos por uma matriz 4×4 , os quais são tomados em diferentes pontos do espaço-tempo,

$$iS_{F_{\alpha\beta}}(x-y) = \langle 0 | T(\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y)) | 0 \rangle. \quad (3.39)$$

Para diferenciar o propagador de partículas bosônicas de fermiônicas, na definição de $S_{F_{\alpha\beta}}(x-y)$ tem-se o sinal de menos acoplado a criação e aniquilação de uma antipartícula como visto na Equação (3.40). Isso faz com que o valor o produto do tempo ordenado não seja afetado por um transformação de Lorentz. Caso contrário, não teria um significado de invariância de Lorentz. Assim, usando a decomposição de Fourier em ondas planas do operador de Dirac, bem como relações de anticomutação e definição de vácuo, chega-se a

$$iS_{F_{\alpha\beta}}(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega} \left(\Theta(x_0 - y_0) e^{-ip(x-y)} \sum_s u_\alpha^s \bar{u}_\beta^s - \Theta(y_0 - x_0) e^{+ip(x-y)} \sum_s v_\alpha^s \bar{v}_\beta^s \right). \quad (3.40)$$

Segundo [16], o somatório dos spins tem forma bem conhecida e pode ser facilmente substituído na Equação (3.40), podendo ser escrito na representação de Fourier quadridimensional,

$$S_{F_{\alpha\beta}}(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (3.41)$$

A equação (3.41) é definida por uma matriz 4×4 , evidenciado no termo $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$. Esta contém o somatório das amplitudes, correspondendo a possibilidade de uma excitação ser de uma partícula ou uma antipartícula no campo. O propagador do elétron, um férmion de spin $1/2$ é representado por linhas internas nos diagramas de Feynman. Essas linhas simbolizam partículas virtuais e seus propagadores são levados em conta no cálculo das amplitudes de espalhamento. Para cada férmion de entrada com momento p e spin s , associa-se um espinor $u_s(\vec{p})$, figuras (3.4) e (3.5). E para férmions de saída associa-se o espinor $\bar{u}_s(\vec{p})$, figuras (3.6) e (3.7).

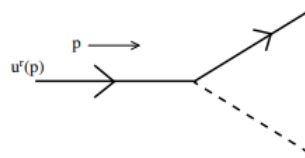


Figura 3.4: Férmion entrando.

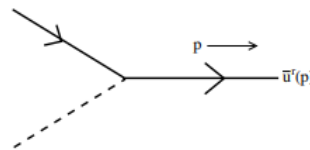


Figura 3.5: Férmion saindo.

Analogamente para antipartículas fermiônicas. Para cada anti-férmion entrando com momento p e spin s , associa-se um spinor $\bar{v}_s(\vec{p})$. Enquanto que para um anti-férmion saindo, associa-se um espinor $v_s(\vec{p})$

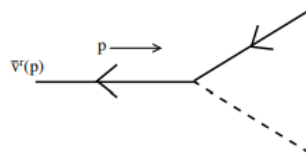


Figura 3.6: Antiférmion entrando.

Há também adição de um fator $-i\lambda$ para cada vértice que aparecer, dependendo do processo. Além disso, cada linha contínua leva em consideração o propagador fermiônico no espaço do momento,

$$S_F(p) = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (3.42)$$

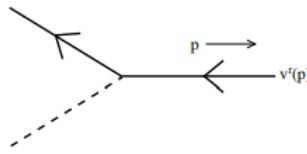


Figura 3.7: Antiférmion saindo.

3.3 Campo de Spin-1: Equações de Maxwell

A eletrodinâmica quântica (EDQ) é o estudo da interação da luz com a matéria carregada. Para isso, o processo de quantização passa primeiramente pela compreensão das equações de Maxwell que descrevem o comportamento dos campos elétricos e magnéticos não massivos. O caminho é feito de maneira análoga aos casos anteriores postulando a lagrangiana clássica para as equações de Maxwell e ver como a teoria de campos dá origem a dois estados de polarização do fóton.

A lagrangiana das equações de Maxwell é obtida por integração da equação de Euler-Lagrange no qual os parâmetros dos campos estão postos em linguagem tensorial,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (3.43)$$

As componentes dos campos \vec{E} e \vec{B} estão definidos no tensor força do campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$,

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

As equações de Maxwell, portanto, são resultados da aplicação da chamada identidade de Bianchi e da equação de movimento que segue da lagrangiana. A solução das equações de Maxwell são definidas em termos do quadritensor potencial $A^\mu = (\psi, \vec{A})$,

$$\vec{E} = \nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (3.45)$$

A teoria eletromagnética é uma teoria de calibre e isto leva a uma aparente discrepância a respeito dos graus de liberdade nos estados. É bem conhecido que o fóton tem

dois estados de polarização apesar do quadritensor A_μ apresentar quatro componentes. Dito isto, há dois pontos a se considerar para garantir que A_μ seja quantizado e que gere apenas dois graus de liberdade ao invés de quatro:

- O campo A_0 não tem componente cinético na lagrangiana, i.e., não é dinâmico. Isso significa que dado condições iniciais $A(t=0)$ e $\dot{A}(t=0)$, o campo é totalmente determinado pela lei de Gauss, cuja solução é trivial. E assim seu momento canônico, essencial para a teoria, resulta em zero,

$$A_0(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\nabla \cdot (\partial \vec{A} / \partial t)}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (3.46)$$

Isto implica dizer que A_0 não é independente, i.e., não há como especificá-lo no intervalo de tempo inicial e isto diminui para três graus de liberdade de acordo com [3].

- A lagrangiana clássica (3.34) tem uma simetria de grupo relacionado ao tensor potencial na forma:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x), \quad (3.47)$$

onde $\lambda(x)$ é qualquer função que no infinito tende a zero. Isso se chama simetria de calibre e o campo força $F_{\mu\nu}$ é invariante sob essa simetria.

A princípio $\lambda(x)$ pode ser qualquer função e a Equação (3.38) poderia afirmar, a partir do teorema de Noether, que essa simetria gera infinitas leis de conservação, uma para cada $\lambda(x)$. Contudo, simetrias de calibre tem interpretação diferente das simetrias globais identificadas pelo teorema de Noether. Simetrias globais tomam um estado físico em outro estado físico com as mesmas propriedades, enquanto que para simetrias de calibre, dois estados físicos são tidos como os mesmos. Isso significa que as equações de Maxwell não são suficientes para especificar a evolução de A_μ dado condições iniciais. O aniquilamento da função $\partial\lambda(x)$ torna impossível a distinção entre A_μ e $A_\mu + \partial\lambda(x)$ mesmo se este fosse um objeto físico.

A quantização do campo eletromagnético também é uma teoria de calibre, i.e., há uma redundância do sistema. No espaço de configuração do campo potencial, um ponto corresponde a uma escolha específica de A_μ . E existem infinitos outros pontos no espaço de configuração que representam o mesmo estado físico, de forma que a coleção

dos diferentes A_μ que são fisicamente equivalentes é chamada órbita de calibre, que para fins práticos pode se imaginar como uma curva no espaço como visto na figura (3.8). Em outras palavras, escolhe-se um representante de cada órbita do calibre, uma vez que são fisicamente equivalentes, e escolhe-se o melhor calibre que corta todas as órbitas.

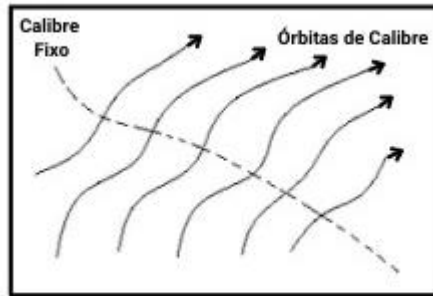


Figura 3.8: Fixando o calibre.
Imagem Autoral

3.3.1 Quantização do Campo A^μ no Calibre de Coulomb

O calibre de Coulomb é um caso especial do calibre de Lorentz, todavia, ele é manifestamente invariante sob transformações de Lorentz. Neste calibre, existe-se dois graus de liberdade para o fóton, i.e., dois estados de polarização,

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0. \quad (3.48)$$

A consequência de fixar este calibre é que a equação (3.46) se torna simplesmente $A_0 = 0$. Dessa forma, da lagrangiana (3.43) é possível extrair o campo canonicamente conjugado do campo A_μ ,

$$\begin{aligned} \pi^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 A_\mu} = -F^{0\mu} = F^{\mu 0}, \\ \pi^0 &= 0 \quad \pi^i = E^i. \end{aligned} \quad (3.49)$$

A princípio $\pi^0 = 0$ seria um problema, porém o calibre escolhido implica em um \vec{A} também nulo e portanto é viável ignorar estes conjuntos de campos não físicos. Por outro lado, poderia se pensar em escolher regras de comutação para os campos A_i e E_i , semelhante às aquelas propostas nas seções anteriores. Todavia, esta escolha resultaria

em inconsistências relacionadas a divergência dos campos. Segundo [3] e [9], este é um problema na teoria clássica dos parênteses de Poisson, no qual sua redefinição deve estar compatível com a condição de transversalidade dos vetores de estado,

$$[A_i(\mathbf{x}, t), E_j(\mathbf{y}, t)] = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\mathbf{k}^2|} \right) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}. \quad (3.50)$$

O termo do lado direito da equação (3.50) define uma delta transversal no espaço do momento representado por uma integral de Fourier que satisfaz a condição de quantização. Neste calibre, a equação de movimento para \vec{A} é

$$\partial_\mu \partial^\mu \vec{A} = 0. \quad (3.51)$$

De maneira análoga ao caso da equação de Klein-Gordon e de Dirac, a solução de (3.51) é decomposta em termos de ondas planas na forma,

$$\vec{A} = \vec{\epsilon} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (3.52)$$

Onde \mathbf{k} indica a direção de propagação da onda plana. Além disso, $\vec{\epsilon}$ define dois estados de polarização do fóton ou vetor polarização, semelhante ao u e v do campo de Dirac. A aplicação do calibre de Coulomb na solução (3.43) leva a transversalidade do duplo vetor polarização com o eixo de propagação, $\vec{k} \cdot \vec{\epsilon}$. Dessa forma, a solução geral de \vec{A} e \vec{E} como uma combinação linear das duas polarizações e dos coeficientes de Fourier são,

$$\vec{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \vec{\epsilon}_r \left[a_r(\vec{k}) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + a_r^\dagger(\vec{k}) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right], \quad (3.53)$$

$$\vec{E}(\mathbf{x}, t) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} (-i\omega) \vec{\epsilon}_r \left[a_r(\vec{k}) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} - a_r^\dagger(\vec{k}) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right]. \quad (3.54)$$

Os coeficientes de Fourier são conjugados hermitianos um do outro para garantir que os campos $\vec{A}(\mathbf{x}, t)$ e $\vec{E}(\mathbf{x}, t)$ sejam reais. A aplicação da transformada de Fourier inversa nas equações (3.53) e (3.54) levam à forma dos coeficientes, bem como é possível mostrar que eles também satisfazem a relações de comutação semelhantes às vistas anteriormente,

$$[a_r(\vec{k}), a_s^\dagger(\vec{k}')] = (2\pi)^3 \delta_{rs} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (3.55)$$

A combinação dos outros comutadores vão naturalmente a zero. A função hamiltoniana, essencial para a teoria, é contruída a partir da clássica transformada de Legendre, resultando em uma hamiltoniana em função dos campos \vec{E} e \vec{B} já quantizados. Usando condições de ortogonalidade entre os estados de polarização e o vetor unitário,

$$\vec{\epsilon}_r(\vec{k}) \cdot \vec{k} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{\epsilon}_r(\vec{k}) \cdot \vec{\epsilon}_s(\vec{k}) = \delta_{rs}. \quad (3.56)$$

A hamiltoniana em termos do operador número \hat{N} composto pelo operador de criação e aniquilação de fótons é dada pela equação a seguir,

$$H = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \omega a_r^\dagger(\vec{k}) a_r(\vec{k}). \quad (3.57)$$

O teorema de Noether permite calcular o momento angular de uma configuração de campo A_μ através de uma transformação de Lorentz infinitesimal no campo. De acordo com [9] usando a álgebra de Lie do grupo de Lorentz é possível encontrar o tensor densidade de momento angular $M^{\mu\nu\lambda}$ em termos do campo potencial e do tensor energia momento $\Theta^{\mu\lambda}$,

$$M^{\mu\nu\lambda} = \Theta^{\mu\lambda} x^\nu - \Theta^{\mu\nu} x^\lambda + (F^{\mu\lambda} A^\nu - F^{\mu\nu} A^\lambda). \quad (3.58)$$

O último termo descreve o momento angular intrínseco, i.e., o operador spin do vetor campo potencial para $\mu = 0$,

$$\hat{\mathbf{S}} = \int d^3x : \mathbf{E} \times \mathbf{A} :. \quad (3.59)$$

Assim é possível escrever o spin do campo do fóton em termos dos vetores de polarização e dos operadores de criação e aniquilação usando o ordenamento normal. Além disso, o campo A_μ é composto de momento linear, onde cada quanta de campo transversal contribui para o momento total,

$$\hat{\mathbf{P}} = \int d^3x : \mathbf{E} \times \mathbf{B} : = \sum_{\lambda=1}^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \mathbf{k} a_r^\dagger(\vec{k}) a_r(\vec{k}). \quad (3.60)$$

Por fim, conclui-se que as excitações do campo eletromagnético são fótons pois são partículas de spin $S = 1$, de maneira que podem ser observadas polarizações transversais. Apesar das complicações inerentes a compatibilização das relações de comutação com a escolha do calibre, a quantização do campo eletromagnético é considerado essencial para

o desenvolvimento da Eletrodinâmica e Cromodinâmica Quântica.

3.3.2 O propagador de Feynman do campo eletromagnético

Analogamente aos casos anteriores, o propagador de Feynman do campo eletromagnético é tomado como o valor esperado do produto ordenado no tempo dos campos $A_i(x)$ e $A_j(y)$. A grande vantagem em utilizar o calibre de Coulomb nesse processo é a manifestação dos graus físicos de liberdade, muito embora, o preço a se pagar por esta escolha é a perda da invariância de Lorentz. No calibre de Coulomb o propagador é definido como,

$$D_{ij}^{tr}(x-y) \equiv \langle 0 | T A_i(x) A_j(y) | 0 \rangle ,$$

$$D_{ij}^{tr}(x-y) = \int \frac{d^3k}{2\omega(2\pi)^3} \left(\sum_{\lambda=1}^2 \epsilon^i(\vec{k}, \lambda) \epsilon^j(\vec{k}, \lambda) \right) \left(\Theta(x_0 - y_0) e^{-i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} + \Theta(y_0 - x_0) e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \right), \quad (3.61)$$

$$D_{ij}^{tr}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - i\epsilon} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) e^{-ik(x-y)}, \quad (3.62)$$

onde o sobrescrito tr no propagador se refere à parte transversa da polarização do fóton, identificada pela relação de completude. Os vetores polarização transversa $\vec{\epsilon}(\vec{k}, 1)$ e $\vec{\epsilon}(\vec{k}, 2)$ junto com o vetor unitário na direção do momentum $\vec{k}/|\vec{k}|$ formam uma base ortogonal tridimensional.

Vale a pena ressaltar que o somatório contido no propagador de Feynman não se restringe somente ao fenômeno físico da polarização transversa, segundo [9]. Há termos adicionais aos quais o propagador é decomposto, que garantem a descrição completa sob todos os quatro estados de polarização,

$$D_F^{\mu\nu} = D_F^{\mu\nu}_{tr}(k) + D_F^{\mu\nu}_{(coul)}(k) + D_F^{\mu\nu}_{(residuo)}(k). \quad (3.63)$$

Como no propagador transversa os vetores polarização, $\epsilon^i(\vec{k}, \lambda)$ e $\epsilon^j(\vec{k}, \lambda)$, tem somente componentes espaciais é necessário subtrair os termos $D_F^{\mu\nu}_{(coul)}(k)$ e $D_F^{\mu\nu}_{(resid)}(k)$ que envolvem termos somados para $i = 1$ ou $j = 0$, o que era esperado uma vez que no calibre ao qual estamos trabalhando $A_0(x) = 0$, [9].

Capítulo 4

CONCLUSÃO

Neste trabalho analisamos a importância da construção do conceito de campo com base em estruturas físicas chamadas osciladores harmônicos. Além disso, vimos o papel fundamental do teorema de Noether tanto no regime clássico quanto no regime das teorias de campos em relação as grandezas conservadas camufladas em Lagrangianas simétricas.

Na quantização canônica do campo de Klein-Gordon a expansão do campo em modos leva a uma relação de dispersão negativa, i.e., energias negativas. A interpretação física de Feynman é de que se trata de uma antipartícula com energia positiva cujo momento é oposto ao da partícula, bem como sua carga. O campo portanto é tomado como uma superposição de energias positivas de partículas aniquiladas e antipartículas criadas. Além disso, o processo de quantização desse campo implica em uma energia de vácuo não nula e esta gera efeitos quânticos observáveis como o chamado efeito Casimir.

Como visto, a equação de Dirac também prevê antipartículas, contudo diferentemente dos bósons da equação de Klein-Gordon, estes são férmions de spin-1/2 que obedecem à estatística de Fermi-Dirac, i.e., a relação de anti-comutação dos spinores levam ao princípio da exclusão de Pauli.

A quantização do campo eletromagnético é o início da chamada eletrodinâmica quântica. No processo, vimos que a teoria quântica dá origem ao fóton com dois estados de polarização e spin-1. Nesse caminho, foi necessário escolher o calibre ideal para revelar aspectos diferentes do mesmo problema e neste caso, utilizamos o método de quantização pelo calibre de Coulomb. Assim, os estados de polarização do fóton estariam de acordo com os graus de liberdade do mesmo.

Por fim, verificamos a importância do propagador de Feynman para o campo de

Klein-Gordon e Dirac, tanto na manutenção da chamada microcausalidade quanto na descrição de criação e aniquilação de partículas e antipartículas a partir do vácuo. O estudo do propagador de Feynman é o início da teoria de campos que interagem, utilizando as regras de Feynman, no qual é uma ferramenta essencial para a medição de parâmetros relacionado a amplitudes de espalhamento.

REFERÊNCIAS

- [1] CANTOR, G.; HODGE, M. *Conceptions of Ether: studies in the history of ether theories*. [S.l.]: Cambridge, 1981.
- [2] PIETROCOLA, M. *Fresnel e o arrastamento parcial do éter: A influência do movimento da terra sobre a propagação da luz*. [S.l.]: Caderno Catarinense de Ensino de Física.
- [3] TONG, D. *Quantum Field Theory*, Cambridge, 2007. Available at: <<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft.html>>.
- [4] DIRAC, P. The quantum theory of the electron. 1928.
- [5] FRADKIN, E. *General Field Theory*, University of Illinois, p. 197 – 217, 2019. Available at: <<http://eduardo.physics.illinois.edu/phys582/physics582.html>>.
- [6] STEANE, A. *An Introduction To Spinors*, Oxford, 2013.
- [7] BASSALO, J.; CATTANI, M. *Osciladores Harmônicos Clássicos e Quânticos*. [S.l.: s.n.], 2009.
- [8] GREINER, W. *Classical Mechanics: Systems of particles and Hamiltonian dynamics*. New York: [s.n.], 1989.
- [9] GREINER, W.; REINHARDT, J. *Field Quantization*. [S.l.: s.n.], 1996. (Third Edition). ISBN 3-540-67457-8.
- [10] KAKU, M. *Quantum Field Theory: a modern introduction*. [S.l.]: Oxford University Press, 1993.
- [11] SAKURAI, J.; NAPOLITANO, J. *Modern Quantum Mechanics*. [S.l.]: Jim Smiths, 2010. (Second Edition). ISBN 978-0-80538291-4.

- [12] TANNOUJJI, C.; DIU, B.; LALOE, F. *Quantum Mechanics*. New York: John Wiley Sons, 1977.
- [13] PINTO, M.; FARINA, C.; TORT, A. *The Casimir Effect*, Revista Brasileira de Ensino de Física, 2000.
- [14] LANCASTER, T.; STEPHEN, J. *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*. [S.l.]: Oxford University Press, 2014.
- [15] BUTKOV, E. [S.l.: s.n.].
- [16] GREINER, W. *Relativistic Quantum Mechanics*. [S.l.: s.n.], 2010. (Third Edition). ISBN 3-540-67457-8.