



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ABAETETUBA
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

PAULO KADU MOURA DE SOUZA

**Simulação Numérica da Propagação de Ondas Sísmicas em 2D
Utilizando Diferenças Finitas**

**ABAETETUBA - PA
2026**

PAULO KADU MOURA DE SOUZA

**Simulação Numérica da Propagação de Ondas Sísmicas em 2D
Utilizando Diferenças Finitas**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado na Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, como requisito obrigatório para obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rômulo Correa Lima

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com
ISBD Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

S719s Souza, Paulo Kadu Moura de.
Simulação Numérica da Propagação de Ondas Sísmicas em 2D
Utilizando Diferenças Finitas / Paulo Kadu Moura de Souza. — 2026.
47 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Rômulo Correia Lima
Trabalho de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Pará, Campus
Universitário de Abaetetuba, Curso de Matemática, Abaetetuba, 2026.

1. Equações diferenciais. 2. Sísmica. 3. Modelagem Matemática. 4.
Trabalho de Conclusão. I. Título.

CDD 515.35

PAULO KADU MOURA DE SOUZA

Simulação Numérica da Propagação de Ondas Sísmicas em 2D Utilizando Diferenças Finitas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, como requisito obrigatório para obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Aprovado em: 21 / 07 / 2026.

Conceito: Excelente

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Rômulo Correa Lima
Orientador – FACET/Campus de Abaetetuba/UFPA

Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa
Membro – FACET/Campus de Abaetetuba/UFPA

Prof. Dr. José Francisco da Costa
Membro – FACET/Campus de Abaetetuba/UFPA

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, quero agradecer imensamente a Deus, a origem de todo conhecimento e vigor, agradeço por iluminar meu caminho. Assim como também, agradeço a Nossa Senhora, pois, essa foi uma das minhas mãezinhas que me acolheu e me embalou em seu colo nos momentos mais difíceis dessa jornada.

Aos meus queridos pais, minha Mãe Maria Nazilda e ao meu Pai Amauri André, dedico minha eterna gratidão. Apesar da ausência física de vocês dois, senti a presença de vocês em cada momento, transmitindo apoio sem limites, palavras de motivação e a confiança de que jamais estaria só. Eu amo muito profundamente do meu coração vocês dois e amarei vocês dois por toda a eternidade.

Aos meus irmãos, Pedro Henrick e Adria Nicolly, quero expressar meu profundo agradecimento pelo carinho, pelo afeto, pelas ajudas, incentivo e pelas mensagens de encorajamento que constantemente me deram forças.

A minha companheira, Ruanny dos Anjos, não sei nem como expressar e como agradecer o que você fez. Obrigado meu amor, por sempre permanecer ao meu lado, por me motivar a cada dia em ser uma pessoa melhor e por sempre acreditar nas minhas capacidades.

A minha Família do Moju, meu muito obrigado. Vocês foram uma peça chave na minha formação. Quero agradecer imensamente e especialmente a Tia Leide Jane, a senhora sem dúvida nenhuma tem um cantinho especial no céu, pois, com o seu amor de mãe a senhora me acolheu e me embalou no seu colo.

Ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Pará, obrigado professores que compartilharam seus conhecimentos e contribuíram para a minha formação acadêmica e profissional. Em especial, agradeço ao meu professor e orientador Profº. Dr. Rômulo Correa Lima, por ter aceitado o convite de enfrentar essa caminhada como meu orientador. Obrigado por todas as orientações, correções e conselhos que o senhor me proporcionou.

Aos meus amigos e colegas da turma de matemática 2020, meu obrigado por todo o companheirismo, pelas risadas compartilhadas, onde cada um de vocês deixou uma marca especial na minha vida.

Por fim, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização da minha formação. O meu muito obrigado!

“A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo”
(Galileu Galilei)

RESUMO

A propagação de ondas sísmicas desempenha um papel fundamental nos estudos geofísicos, permitindo a investigação das estruturas presentes na subsuperfície terrestre por meio da análise do comportamento das ondas em diferentes meios. Nesse contexto, este trabalho teve como objetivo estudar a propagação de ondas sísmicas em um meio bidimensional por meio da aplicação do Método de Diferenças Finitas (MDF) aplicado a equação da onda. Para isso, foram abordados conceitos de geologia e geofísica relacionados às propriedades físicas das rochas e à propagação sísmica, além da formulação matemática da equação da onda, desde sua dedução até sua representação em 2D com a inclusão de um termo fonte. O desenvolvimento do trabalho consistiu na discretização da equação diferencial parcial por meio das aproximações obtidas a partir das expansões em série de Taylor, possibilitando sua implementação computacional no software Scilab. As simulações foram realizadas em uma malha bidimensional composta por quatro camadas com diferentes velocidades de propagação e interfaces horizontal, inclinada e senoidal, representando estruturas geológicas distintas. Os resultados obtidos permitiram observar fenômenos característicos da propagação sísmica, como reflexão, refração, interferência e espalhamento da energia, evidenciando a influência das variações de velocidade e da geometria das interfaces na trajetória da frente da onda. Também foram identificados artefatos numéricos decorrentes das condições de contorno utilizadas, demonstrando limitações presente ao modelo computacional adotado. Conclui-se que o Método das Diferenças Finitas apresentou desempenho satisfatório na simulação da propagação de ondas sísmicas, reproduzindo adequadamente os principais fenômenos físicos envolvidos e demonstrando sua relevância como ferramenta para a modelagem computacional e para o estudo de problemas geofísicos associados à subsuperfície terrestre.

Palavras-chave: propagação de ondas sísmicas; método das diferenças finitas; equação da onda; 1D e 2D; simulação computacional.

ABSTRACT

Seismic wave propagation plays a fundamental role in geophysical studies, enabling the investigation of subsurface structures through the analysis of wave behavior in different media. In this context, this work aimed to study seismic wave propagation in a two-dimensional medium by applying the Finite Difference Method (FDM) to the wave equation. To achieve this, concepts of geology and geophysics related to the physical properties of rocks and seismic propagation were addressed, as well as the mathematical formulation of the wave equation, from its derivation to its 2D representation with the inclusion of a source term. The development of the work consisted of discretizing the partial differential equation using approximations obtained from Taylor series expansions, enabling its computational implementation in the Scilab software. The simulations were performed on a two-dimensional grid composed of four layers with different propagation velocities and horizontal, inclined, and sinusoidal interfaces, representing distinct geological structures. The results obtained allowed the observation of characteristic seismic propagation phenomena, such as reflection, refraction, interference, and energy spreading, highlighting the influence of velocity variations and interface geometry on the wavefront trajectory. Numerical artifacts arising from the boundary conditions were also identified, demonstrating limitations present in the adopted computational model. It is concluded that the Finite Difference Method presented satisfactory performance in simulating seismic wave propagation, adequately reproducing the main physical phenomena involved and demonstrating its relevance as a tool for computational modeling and for the study of geophysical problems associated with the Earth's subsurface.

Keywords: seismic wave propagation; finite difference method; wave equation; 1D and 2D; computational simulation.

Lista de Figuras

Figura 1 – Rochas Ígneas, A – Basalto, B - Obsidiana -----	13
Figura 2 – Rochas Sedimentares, A – Arenito, B – Carvão Mineral -----	14
Figura 3 – Rochas Metamórficas, A – Xisto, B – Mármore -----	14
Figura 4 - Ciclo das Rochas -----	15
Figura 5 – Ilustração à propagação e reflexão das ondas no subsolo -----	16
Figura 6 – Esquema simplificado do registro de aquisição sísmica -----	17
Figura 7 – Deslocamento da onda ao longo do tempo -----	17
Figura 8 – Variação da inclinação de uma curva entre os pontos $x + \Delta x$ -----	18
Figura 9 – Representação gráfica das aproximações por Diferenças Finitas-----	28
Figura 10 – Malha de Descrição no plano (x,z) -----	30
Figura 11 – Início da propagação da onda -----	35
Figura 12 – O desenvolvimento da propagação da onda sísmica -----	36
Figura 13 – Aproximação da onda sísmica a primeira interface -----	36
Figura 14 – Interceptação da onda sísmica com a primeira interface -----	37
Figura 15 – Avanço da propagação da onda sísmica -----	37
Figura 16 – Interceptação da onda com a segunda interface -----	38
Figura 17 – Propagação da onda se aproximando da interface senoidal -----	39
Figura 18 – Surgimento dos efeitos numéricos -----	39
Figura 19 – Propagação avançada da onda -----	40
Figura 20 – Fase final da simulação da propagação da onda sísmica -----	41

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
2 INTRODUÇÃO À GEOLOGIA E GEOFÍSICA	12
2.1 Geologia das Rochas	12
2.2 Noção de Aquisição Sísmicas	15
3 MODELAGEM DA EQUAÇÃO DA ONDA	17
4 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	26
4.1 Aplicação do MDF a equação da onda em 2D	29
4.2 Critério de Estabilidade	31
5 SIMULAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS NA SUBSUPERFÍCIE	33
6 CONCLUSÃO	41
REFERÊNCIAS	43
APÊNDICE - Código do software SCILAB da Simulação da propagação da onda	46

1 INTRODUÇÃO

A propagação de ondas sísmicas constitui um dos principais fenômenos estudados pela geofísica, sendo amplamente utilizada na investigação das estruturas internas da Terra. A análise dessas ondas permite compreender características físicas e geológicas presentes na subsuperfície, auxiliando assim, aplicações relacionadas à exploração mineral, prospecção de petróleo e estudos tectônicos. Conforme discutido por Jorge (2021), a geologia tornou-se imprescindível para a investigação da subsuperfície terrestre, demonstrando estudos econômicos voltados à obtenção de bens minerais, com destaque para petróleo, sendo que os métodos sísmicos fornecem dados cruciais sobre a disposição estrutural das camadas sedimentares.

Nesse contexto, Penha, Barreiros e Neto (2012) destacam que, na modelagem sísmica, a equação da onda é utilizada para simular a propagação das ondas através das diferentes formações geológicas do subsolo, contribuindo para a compreensão dos fenômenos físicos envolvidos e auxiliando na interpretação de estruturas geológicas complexas. Dessa forma, a equação da onda representa um dos modelos matemáticos mais importantes para a descrição de fenômenos ondulatórios presentes na natureza. Sua aplicação não se limita apenas à geofísica, estando também associada à acústica, eletromagnetismo, vibrações mecânicas, propagação sonora e etc. No caso da sísmica, essa equação permite representar matematicamente o deslocamento da onda ao longo do tempo e do espaço em meio homogêneo.

É justamente que Souza e Gandolfo (2023) tem a ideia de que na geofísica, essa abordagem permite representar fenômenos como reflexão, refração, difração e dispersão das ondas sísmicas ao atravessarem diferentes camadas geológicas. Ademais, a análise da propagação de pulsos ondulatórios na subsuperfície terrestre possibilita a obtenção de informações físicas das rochas, contribuindo para a interpretação das estruturas geológicas e para a investigação de recursos presentes na subsuperfície. Porém, para que esse fenômeno possa ser simulado computacionalmente, no entanto, a equação da onda, precisa ser transformada em uma formulação discreta e possível de cálculo.

É dessa forma que se insere o Método das Diferenças Finitas (MDF) o qual apresenta grande importância na modelagem computacional por fornecer soluções aproximadas para problemas que não possuem resolução analítica simples. Esse método baseia-se na

discretização do espaço e do tempo, substituindo derivadas por aproximações numéricas construídas a partir das expansões em série de Taylor. Conforme, Penha, Barreiros e Neto (2012) e Jorge (2021), a aplicação do MDF à equação da onda sísmica requer cuidados especiais com as condições de contorno, sendo possível implementar aproximações de diferentes ordens de precisão para capturar com mais fidelidade o comportamento físico da propagação da onda. A partir dessa formulação, torna-se possível calcular de forma o comportamento da onda em diferentes instantes temporais.

Assim, o MDF é potencializado pelo avanço do desenvolvimento computacional, que conforme discutido por Moreira (2024), tem permitido que métodos numéricos forneçam soluções aproximadas cada vez mais viável para a modelagem de fenômenos sísmicos. Com isso, o avanço do desenvolvimento computacional, as simulações numéricas passaram a apresentar maior precisão e eficiência na resolução de problemas físicos complexos. Sendo assim, tendo como o MDF uma ferramenta indispensável.

Diante desse contexto, o presente trabalho tem como objetivo estudar a propagação de ondas sísmicas em um meio bidimensional por meio da aplicação do MDF aplicado a equação da onda. Busca-se, especificamente, simular numericamente o comportamento das frentes de onda ao interagirem com diferentes estruturas geológicas, incluindo tipos como interfaces horizontal, inclinada e senoidal, onde cada uma está associada a diferentes velocidades de propagação.

2 INTRODUÇÃO À GEOLOGIA E GEOFÍSICA

Nesta seção serão apresentadas as noções básicas de geologia e geofísica necessários para o entendimento deste trabalho, abordando os principais conceitos relacionados à estrutura da terra, à composição, à classificação das rochas, bem como os processos físicos que atuam no interior da crosta terrestre.

2.1 Geologia das Rochas

A geologia constitui o fundamento essencial para a compreensão dos fenômenos relacionados à propagação de ondas sísmicas, pois aborda a formação, composição e estrutura dos materiais que compõem a crosta terrestre. A partir da análise dos métodos geológicos, onde é possível identificar as propriedades físicas que influenciam a maneira como as rochas respondem à passagem da energia mecânica (Bertolino; Parlemo; Bertolino, 2012; Guimarães; Liccardo, 2014).

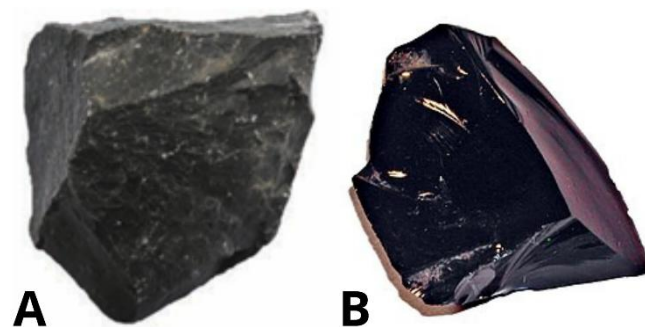
A aparência física de uma rocha é determinada através de sua mineralogia, da textura e estrutura da rocha, as quais são estabelecidas pelo tempo e local de origem. A textura é um termo que indica os tamanhos e as formas das rochas, já a mineralogia diz respeito às propriedades químicas destes elementos (Press; *et al.*, 2006).

Onde para utilização em obras de engenharia civil, o material rochoso deve apresentar padrões de qualidade adequados, garantindo comportamento satisfatório frente às diversas solicitações mecânicas e ambientais às quais será submetido (Siegesmund; Török, 2011). Entretanto, por ser um elemento natural, as rochas podem sofrer alterações ao longo do tempo, principalmente sob condições climáticas agressivas (chuva ácida, presença de produtos químicos corrosivos, etc.). Nesse contexto, o conhecimento dos parâmetros geotécnicos torna-se essencial assegurar maior durabilidade e desempenho estrutural da obra civil. (Frasca; Yamamoto, 2006).

Desse modo, as rochas podem ser classificadas em três grandes grupos: as ígneas (ou magmáticas), as sedimentares e as metamórficas, cada qual com suas propriedades particulares que as tornam adequadas ou não para o uso na construção civil (Frasca, 2014).

Dessa forma, as rochas ígneas, tendo origem do magma encontrado no interior da Terra. Podem ser formadas de dois modos, sendo o primeiro por resfriamento da lava dos vulcões quando chegam à superfície, como nos casos do basalto, obsidiana, entre outras, assim como é mostra na figura 1.

Figura 1 --- Rochas Ígneas, A – Basalto, B - Obsidiana



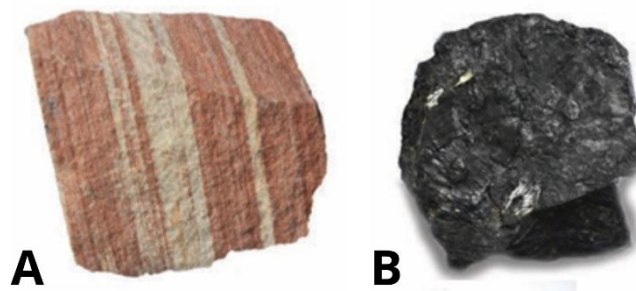
Fonte: Compilação do autor.

Em segundo modo, o resfriamento do magma ainda no interior da crosta terrestre. Após esse processo, as rochas estão dispostas à ação do intemperismo ou erosão, o qual as transforma em sedimentos que podem ser petrogênese (transportados). A partir da deposição,

acontece a compactação e a diagênese (litificação dos sedimentos), formando assim as rochas sedimentares (Crist; Pinto, 2014; Pereira; *et al.*, 2018).

Outro tipo de rocha são as sedimentares o qual é ilustrado na figura 2, como exemplo, temos o arenito como uma rocha sedimentar inorgânica e o carvão mineral que é uma rocha sedimentar orgânica, essas rochas são formadas da compactação de fragmentos de outras rochas ou matéria orgânica, gerados por diferentes processos que ocorrem no ambiente natural (Pereira; *et al.*, 2018).

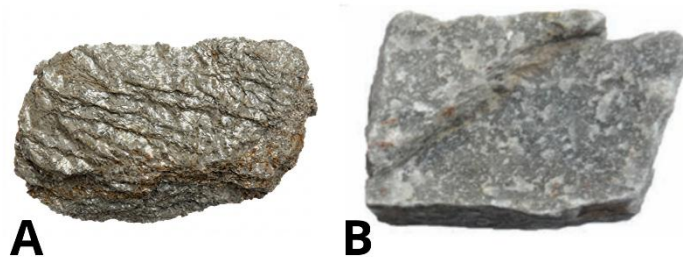
Figura 2 --- Rochas Sedimentares, A – Arenito, B – Carvão Mineral



Fonte: Compilação do autor

O último tipo é o das rochas metamórficas, que é após o segundo modo do resfriamento das rochas ígneas onde ocorre no interior da crosta terrestre, que são caracterizadas por terem sido transformadas em outras rochas devido ao aumento da pressão e temperatura, como exemplo do xisto, o qual é ilustra na figura 3. Isso ocorre quando submetido a pressões e temperaturas altas na natureza, onde se transformam em mármore (Crist; Pinto, 2014).

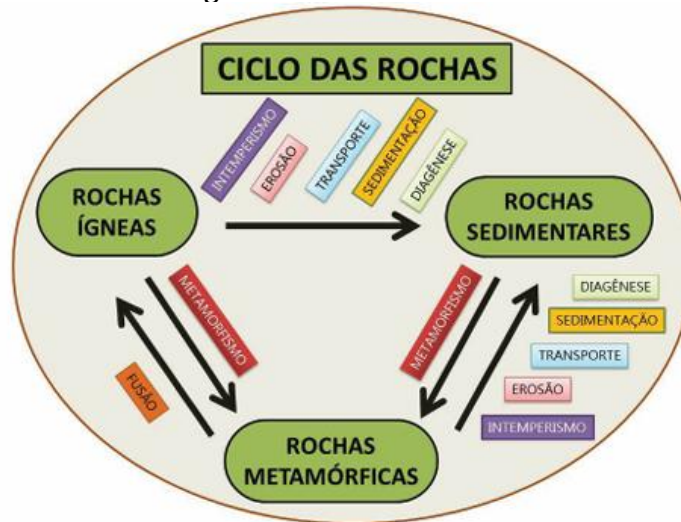
Figura 3 --- Rochas Metamórficas, A – Xisto, B – Mármore



Fonte: Compilação do autor

Assim, a figura 4, ilustra o processo de representação desses três grupos de rochas.

Figura 4 --- Ciclo das Rochas



Fonte: Crist e Pinto, 2014.

Milani *et al* (2007) demonstram como a porosidade e o tipo de cimento em rochas sedimentares são fatores determinantes para a simplificação de ondas e a velocidade sísmica. Desse modo, a origem de cada rocha influencia diretamente seu comportamento sísmico.

2.2 Noção de Aquisição Sísmicas

Kearey, Brooks e Hill (2002) a geofísica é a aplicação dos princípios da física ao estudo da Terra, sendo a sismologia uma de suas principais subdivisões. Essa concepção reforça que o entendimento da geologia estrutural constitui a ligação fundamental entre a teoria física e a modelagem matemática aplicada à investigação do subsolo.

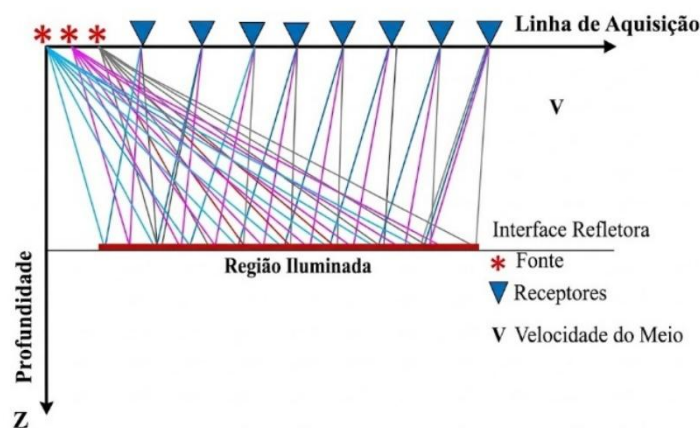
É importante observar que Souza e Gandolfo (2023) define, as propriedades físicas como densidade e elasticidade, o qual exercem o controle significativo sobre a dinâmica das ondas no subsolo. Bertolino, Parlemo e Bertolino, (2012) diz que enquanto a densidade das rochas está relacionada à sua composição mineralógica e grau de compactação, a elasticidade determina a capacidade de deformação da rocha diante da vibração induzida pela onda. Onde, em meios rígidos e bem consolidados, a propagação ocorre com menor perda de amplitude, ao passo que formações fraturadas ou pouco compactadas tendem a dispersar a energia ao longo do caminho (Kearey; Brooks; Hill, 2012; Souza; Gandolfo, 2023).

A velocidade de propagação das ondas sísmicas varia de acordo com as propriedades físicas das rochas (Souza; Gandolfo, 2023). Em geral, materiais menos consolidados apresentam menores velocidades, temos como o Basalto que contém um índice de velocidade variando de 2000m/s à 6500m/s, temos como por exemplo a obsidiana que já contém um

índice que varia de 3800m/s à 4500m/s , assim por diante. Essa diferença de velocidades constitui o principal mecanismo responsável pela ocorrência dos fenômenos de reflexão e refração nas interfaces geológicas.

Na figura 5, tem-se um exemplo de como dados sísmicos obtidos em várias posições ao longo da superfície, mostrando a propagação e o comportamento das ondas refletidas em profundidade. A análise desses sinais permite identificar interfaces geológicas e compreender a resposta sísmica das camadas subterrâneas.

Figura 5 --- Ilustração à propagação e reflexão das ondas no subsolo

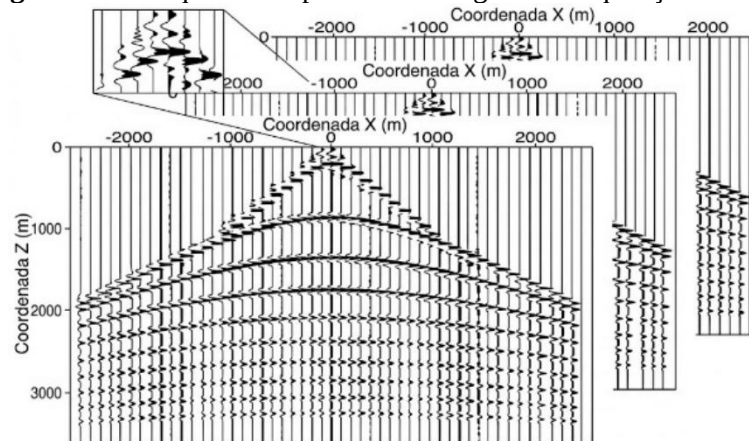


Fonte: Penha; Barreiros e Neto, 2012

Isso reforça a relação entre as propriedades da rocha e os métodos de investigação indireta no capítulo de Geologia do Manual de Agregados, destacando que “a primeira etapa na prospecção de agregados é a definição do tipo de material rochoso necessário, e que irá guiar a pesquisa mineral para determinados ambientes geológicos” (Bertolino; Palermo; Bertolino, 2012, p.75). Essa definição inicial do material-alvo, é baseada em suas propriedades geológicas, o qual o primeiro passo para a seleção é a aplicação eficaz de métodos geofísicos, como a sismica, na modelagem do subsolo.

Além de que, as ondas geradas na subsuperfície, se propagam, refletem nas discontinuidades geológicas e retornam aos receptores, permitindo delimitar estruturas subterrâneas com base no tempo de resposta e na amplitude dos sinais como é mostrado na figura 6.

Figura 6: --- Esquema simplificado do registro de aquisição sísmica



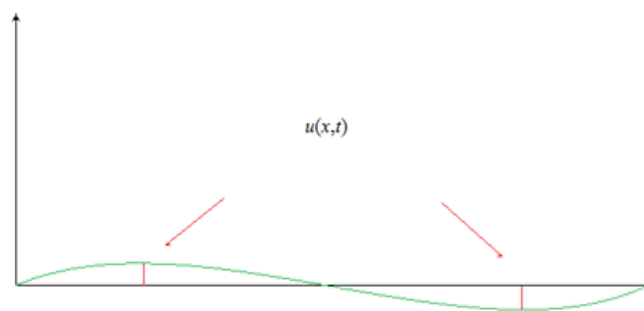
Fonte: Penha, Barreiros e Neto, 2012

Dessa forma, compreender as propriedades das rochas ajudam muito a interpretar de forma correta os padrões de transmissão, reflexão e atenuação observados em dados sísmicos (Bertolino, Palermo; Bertolino, 2012; Souza; Gandolfo, 2023). O qual, as diferenças estruturais no interior da terra, provocam mudanças na trajetória e velocidade das ondas, permitindo inferir detalhes sobre camadas subterrâneas. Por isso, a integração entre conhecimentos geológicos e formulações matemáticas é essencial para a construção de modelos confiáveis (Souza; Gandolfo, 2023).

3 MODELAGEM DA EQUAÇÃO DA ONDA

A equação da onda unidimensional, pode ser interpretada a partir da análise de vibrações transversais de uma corda esticada, de forma homogênea e perfeitamente flexível, a qual ela está submetida a uma tensão constante (Butkov, 1978; Nussenzveig, 2014). Imagine-se que a corda possui densidade linear uniforme μ e que suas oscilações ocorrem no plano vertical, sendo possível descrever por uma função deslocamento $u(x, t)$ assim como pode ser representado na figura 7, que depende da posição ao longo da corda e do tempo.

Figura 7 --- Deslocamento da onda ao longo do tempo

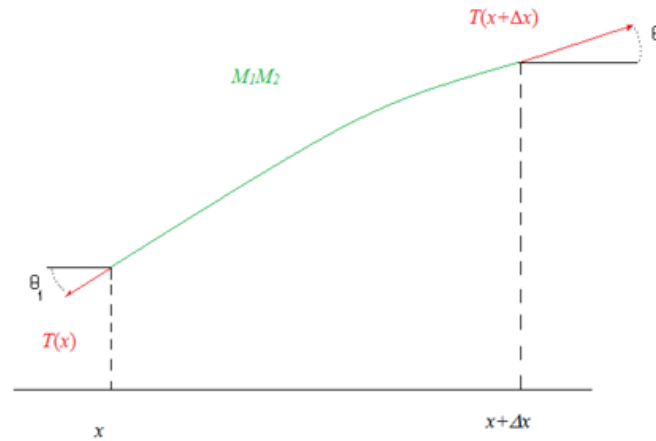


Fonte: Adaptado de Magalhães [s.d]

Para essa dedução clássica da equação da onda baseia-se na aplicação da Segunda Lei de Newton a um elemento infinitesimal da corda, considerando apenas a força de tensão que atua sobre esse elemento e assumindo que os deslocamentos são suficientemente pequenos para que a tensão permaneça constante em módulo (Nussenzveig, 2014).

Para realizar a dedução, analisa-se um elemento infinitesimal da corda de comprimento dx , situado entre as posições x e $x + \Delta x$. Esse elemento possui massa $dm = \mu dx$ e está sujeito às forças de tração exercidas nas extremidades da corda. Onde seja T a tensão constante aplicada à corda e $\theta(x)$ o ângulo que a corda faz com a horizontal em cada ponto (Butkov, 1978; Nussenzveig, 2014). Onde, as componentes verticais das forças de tração da corda podem ser observadas na figura 8, o qual são dadas por $T \sin \theta(x)$ e $T \sin \theta(x + \Delta x)$, respectivamente:

Figura 8 --- Variação da inclinação de uma curva entre os pontos x e $x + \Delta x$



Fonte: Adaptado de Magalhães [s.d]

A modelagem dinâmica desse problema parte da aplicação da Segunda Lei de Newton a um segmento diferencial, assumindo-se que a tensão é grande e os deslocamentos são suficientemente pequenos para que a aproximação $\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{\partial u}{\partial x}$ seja válida (Butkov, 1978; Boulos, 1999; Nussenzveig, 2014).

A força resultante vertical atuando sobre o elemento infinitesimal pode ser escrita como a diferença entre essas duas componentes verticais, isto é,

$$F_y = T \sin \theta(x + \Delta x) - T \sin \theta(x) \quad (1)$$

Para que ocorra pequenas oscilações, podemos assumir que $\sin \theta \approx \tan \theta$, sendo esta última é igual à derivada espacial do deslocamento, ou seja,

$$\tan\theta \approx \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2)$$

Essa aproximação linear, é válida para pequenas inclinações, onde é um pressuposto fundamental para a obtenção da equação linear da onda, o qual Nussenzveig (2014) ao abordar o problema da corda vibrante para deduzir a equação da corda, supomos que os deslocamentos são pequenos, de modo que a inclinação $\frac{\partial u}{\partial x}$ seja muito menor do que a unidade. Dessa forma, pode-se aproximar a componente vertical da tensão, considerando que as inclinações da corda são pequenas, hipótese frequentemente adotada na dedução da equação da onda (Boulos, 1999; Nussenzveig, 2014).

Assim, a força resultante passa a ser expressa como

$$F_y = T \left(\frac{\partial u}{\partial x} |_{x+dx} - \frac{\partial u}{\partial x} |_x \right) \quad (3)$$

Aplicando uma expansão da série de Taylor para o termo $\frac{\partial u}{\partial x} |_{x+dx}$, obtém-se que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} |_{x+\Delta x} \approx \frac{\partial u}{\partial x} |_x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \quad (4)$$

Substituindo essa aproximação na equação (3), resulta-se em

$$F_y = T \left(\frac{\partial u}{\partial x} |_x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx - \frac{\partial u}{\partial x} |_x \right) \quad (5)$$

Simplificando $\frac{\partial u}{\partial x} |_x$ na equação (5), obtém-se então que:

$$F_y = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \quad (6)$$

essa força é responsável pela aceleração transversal do elemento da corda.

De acordo com a segunda lei de Newton, a força resultante é igual ao produto da massa do elemento pela sua aceleração transversal.

$$F_r = m \cdot a \quad (7)$$

A aceleração é dada pela segunda derivada temporal do deslocamento, isto é, tendo a aceleração como:

$$a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (8)$$

Portanto, substituindo a derivada temporal da força resultante presente na equação (5), a massa do elemento previamente descrita e a aceleração apresentada na equação (8), resulta-se em:

$$T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = \mu dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (9)$$

Cancelando o termo dx em ambos os lados da equação (9), obtém-se:

$$T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (10)$$

Dividindo ambos os lados da equação (10) por μ e reorganizando a expressão, tem-se que:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (11)$$

A partir dessa relação, define-se a velocidade de propagação da onda na corda como:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (12)$$

Ao levar ao quadrado ambos os lados da equação (12), obtém-se então que:

$$v^2 = \frac{T}{\mu} \quad (13)$$

Dessa forma, substituindo a equação (13) na equação (11), tem-se a forma mais compacta da equação da onda, podendo ser descrita como:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (14)$$

Onde, seja:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (15)$$

De modo que a solução pode ser escrita como o produto da equação (15).

Logo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t), \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)T''(t). \quad (17)$$

Substituindo na equação (14), obtém-se que,

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t). \quad (18)$$

Dividindo por $X(x)T(t)$, para valores não nulos, isto é,

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (19)$$

O lado esquerdo depende só de t e o direito só de x . Isso só é possível se ambos forem iguais a uma constante, $-\lambda$. Logo,

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda \text{ e } c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad (20)$$

Assim, obtemos duas EDOs dadas por:

$$X''(x) + \frac{\lambda}{c^2} X(x) = 0$$

e

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0$$

Resolvendo as equações em $X(x)$ e $T(t)$

Considere que $\lambda > 0$, que é o caso típico para modos oscilatórios.

Definindo então, temos:

$$k^2 = \frac{\lambda}{c^2} \Rightarrow \lambda = c^2 k^2 \quad (21)$$

Então:

$$X''(x) + k^2 X(x) = 0 \quad (22)$$

$$T''(t) + c^2 k^2 T(t) = 0 \quad (23)$$

Solução para equação (22), temos:

$$X(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) \quad (24)$$

Solução para a equação (23), temos:

$$T(t) = C \cos(ckt) + D \sin(ckt) \quad (25)$$

Assim, solução separada $u(x, t)$, temos, multiplicando que:

$$u(x, t) = X(x) T(t)$$

Tem-se que,

$$u(x, t) = (A \cos(kx) + B \sin(kx))(C \cos(ckt) + D \sin(ckt)). \quad (26)$$

em que cada escolha de constantes A, B, C, D e de k dá um “modo” de oscilação que satisfaz a equação de onda.

Essa equação descreve matematicamente o comportamento das ondas transversais que se propagam ao longo da corda. A equação resultante da equação (14) corresponde a uma equação diferencial parcial (EDP) linear, homogênea e de segunda ordem, classificada como hiperbólica (Smith, 1985; Butkov, 1978). A equação da onda constitui um dos modelos fundamentais da física-matemática e serve como base para a compreensão de diversos fenômenos ondulatórios, o qual além das sísmicas tem também como ondas sonoras e eletromagnéticas em meios simplificados (Nussenzveig, 2014).

A equação diferencial parcial de segunda ordem da onda é dada por (Butkov, 1978; Penha; Barreiros; Neto, 2012; Nussenzveig, 2014):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) = v^2 \nabla^2 p \quad (27)$$

em que $p(x, z, t)$ representa o campo de pressão ao longo do tempo; v corresponde à velocidade de propagação da onda no meio, o qual x (horizontal) e z (profundidade) são as variáveis espacial e t é o tempo.

Seja a equação da onda (27) em que ela é a função em 2D.

Realizando a separação de variáveis em 2D, ou seja,

$$p(x, z, t) = X(x) Z(z) T(t).$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = X(x) Z(z) T''(t) \quad (28)$$

e

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = X''(x) Z(z) T(t) \quad (29)$$

e

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = X(x) Z''(z) T(t). \quad (30)$$

Substituindo na equação (27), obtém-se que,

$$XZT'' = c^2(X''ZT + XZ''T). \quad (31)$$

Dividindo por XZT , tem-se que,

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \left(\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} \right) \quad (32)$$

O lado esquerdo depende só de t e o direito só de x, z , então ambos devem ser iguais a uma constante, digamos $-\omega^2$. Neste caso, vem que,

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\omega^2 \text{ e } c^2 \left(\frac{X''}{X} + \frac{Z''}{Z} \right) = -\omega^2 \quad (33)$$

Portanto,

$$T''(t) + \omega^2 T(t) = 0 \quad (34)$$

e

$$\frac{X''}{X} + \frac{Z''}{Z} = -\frac{\omega^2}{c^2} \quad (35)$$

Separando x e z na equação (35). Tem-se que,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k_x^2 \text{ e } \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -k_z^2, \quad (36)$$

de modo que é válida a relação,

$$k_x^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (37)$$

Assim sendo, obtém-se três EDOs dadas por,

$$X''(x) + k_x^2 X(x) = 0, \quad (38)$$

$$Z''(z) + k_z^2 Z(z) = 0, \quad (39)$$

$$T''(t) + \omega^2 T(t) = 0, \text{ com } \omega^2 = c^2(k_x^2 + k_z^2) \quad (40)$$

As soluções são senoidais e dadas por,

$$X(x) = A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x), \quad (41)$$

e

$$Z(z) = C \cos(k_z z) + D \sin(k_z z) \quad (42)$$

e

$$T(t) = E \cos(\omega t) + F \sin(\omega t). \quad (43)$$

Multiplicando na função $p(x, z, t)$, tem-se que,

$$p(x, z, t) = X(x) Z(z) T(t)$$

Ou após a substituição,

$$p(x, z, t) = (A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x))(C \cos(k_z z) + D \sin(k_z z))(E \cos(\omega t) + F \sin(\omega t)),$$

Onde,

$$\omega = c \sqrt{k_x^2 + k_z^2}. \quad (44)$$

Uma forma compacta muito usada é a onda plana dada por,

$$p(x, z, t) = A \cos(k_x x + k_z z - \omega t + \phi), \quad (45)$$

Ao levar ao quadrado ambos os lados da equação (44), obtém-se então que:

$$\omega^2 = c^2(k_x^2 + k_z^2). \quad (46)$$

Usando a equação de onda em 2D. Isto é,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right),$$

onde $p(x, z, t)$ representa o deslocamento do solo.

Para resolver a equação dada, escolhe-se um modelo físico simples que seja caracterizado por: a) Meio homogêneo: mesma velocidade em todo lugar; b) Ondas P (compressivas) em rocha: Velocidade típica dada por $v \approx 5000$ m/s; c) Plano 2D: x horizontal, z profundidade; d) Fonte sísmica: um pulso localizado no hipocentro (x_0, z_0) .

Um modelo bem simples de fonte é:

$$f(x, z, t) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2}{R^2}} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{\tau^2}}, \quad (47)$$

onde: A é a amplitude do abalo (por exemplo, $A = 0,01$ m, deslocamento máximo de 1 cm), R : raio espacial da fonte (por exemplo, $R = 100$ m), τ : duração característica do pulso (por exemplo, $\tau = 0,5$ s), (x_0, z_0) : posição do hipocentro (por exemplo, $x_0 = 0$, $z_0 = 5\,000$ m), t_0 : instante em que o abalo começa (por exemplo, $t_0 = 0$).

A equação de onda com fonte fica da seguinte forma,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) + f(x, z, t). \quad (48)$$

Fisicamente, tem-se que: a) Antes de t_0 : $f \approx 0$, o meio está em repouso ($p \approx 0$). b) Perto de t_0 : o termo $f(x, z, t)$ “empurra” o meio na região em torno de (x_0, z_0) , gerando um deslocamento inicial. c) Depois: a equação de onda faz essa perturbação se propagar em todas as direções com velocidade $v \approx 5\,000$ m/s.

Se colocar receptores (sismógrafos) na superfície, por exemplo em pontos $(x, z = 0)$, o sinal que eles medem é $p(x, 0, t)$. Esse $p(x, 0, t)$ é exatamente o que a equação de onda prevê. Para aplicar a equação no caso de um abalo sísmico, considere que: a) Receptor em: $(x_r, z_r) = (10\,000\text{m}, 0)$, b) Hipocentro em: $(x_0, z_0) = (0, 5\,000\text{m})$ e c) Velocidade: $v = 5000$ m/s.

A distância entre fonte e receptor é aproximadamente dada pela distância entre dois pontos. Ou seja:

$$d = \sqrt{(x_r - x_0)^2 + (z_r - z_0)^2} = \sqrt{(10\,000)^2 + (5\,000)^2} \approx 11.180\text{m}.$$

Tempo de chegada da frente de onda (aproximando por onda esférica) dada por,

$$t_{\text{chegada}} \approx \frac{d}{v} \approx \frac{11\,180}{5000} \approx 2,24\text{s}.$$

ou seja, nesse modelo simples, o sismógrafo a 10 km de distância “começa a sentir” o abalo cerca de 2,2 segundos depois da ruptura.

Essa equação expressa que a aceleração temporal da pressão no ponto analisado é proporcional à curvatura espacial do campo de pressão, implicando que uma perturbação inicial se difunde para regiões vizinhas ao longo do tempo (Butkov, 1978). Dessa forma, o modelo bidimensional fornece uma representação eficiente do comportamento de ondas sísmicas em escala simplificada, sendo amplamente aplicado em estudos de prospecção geofísica e em simulações numéricas baseadas em métodos computacionais (Butkov, 1978; Piskounov, 2000; Penha; Barreiros; Neto, 2012).

Matematicamente, a principal diferença entre as equações da onda em 1D e 2D, está no operador espacial envolvido. Ao mesmo tempo que a escrita unidimensional considera apenas a segunda derivada em relação a uma única coordenada espacial encontrada na equação (14), a equação (27) representada bidimensional, incorporando o operador Laplaciano, em que leva em conta as variações espaciais em duas direções (Smith, 1985; Piskounov, 2000).

Zill e Cullen (2001) ao discutir métodos numéricos, justifica nos casos em que a geometria do problema ou a natureza da propagação torna inadequada a simplificação unidimensional, exigindo abordagens multidimensionais para soluções acuradas. Em virtude dessa ampliação da descrição, a bidimensional passa a representar de maneira mais realista a propagação de ondas em meios físicos complexos.

4 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

O Método das Diferenças Finitas, constitui uma das técnicas numéricas mais tradicionais e antigas Smith (1985), para a solução de derivadas, que descrevem fenômenos físicos contínuos, foi adotado neste trabalho a obtenção de soluções aproximadas para equações diferenciais parciais cuja solução analítica é inviável ou de difícil obtenção.

Onde, inicialmente os primeiros estudos na área da propagação de ondas sísmicas, foram investigadas por meio do MDF que para a obtenção de soluções numéricas, a propagação de ondas sísmicas é descrita por meio desse método (Alterman; Karal, 1968; Zhang; Chen, 2006).

No MDF, se uma função u e todas as suas derivadas são bem definidas, possuem valores finitos e são contínuas em x , então, de acordo com o teorema de Taylor (Smith, 1985;

Franco, 2006), tem-se que:

$$u(x + h) = u(x) + hu'(x) + \frac{1}{2}h^2u''(x) + \frac{1}{6}h^3u'''(x) + \dots \quad (49)$$

e

$$u(x - h) = u(x) - hu'(x) + \frac{1}{2}h^2u''(x) - \frac{1}{6}h^3u'''(x) + \dots \quad (50)$$

A adição dessas expansões tem-se

$$u(x + h) + u(x - h) = 2u(x) + h^2u''(x) + O(h^4) \quad (51)$$

em que h representa um pequeno passo da variável x e $O(h^4)$ representa termos que envolvem a quarta potência e/ou superiores ordem de h . Considerando que esses termos são desprezíveis em relação às potências menores de h (Smith, 1985; Franco, 2006), conclui-se que

$$u''(x) = \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)_{x=x_0} \simeq \frac{1}{h^2} \{u(x + h) - 2u(x) + u(x - h)\} \quad (52)$$

com um erro dominante no lado direito de ordem h^2 .

Subtraindo a equação (50) da equação (49) e desconsiderando os termos de ordem h^3 , obtém-se que

$$u'(x) = \left(\frac{du}{dx} \right)_{x=x_0} \simeq \frac{1}{2h} \{u(x + h) - u(x - h)\} \quad (53)$$

obtendo assim, um erro da ordem de h^2 .

Com a equação (53), é uma interpretação de como a aproximação da inclinação da tangente em P por meio da corda AB , sendo conhecida como aproximação por diferença centrada (Smith, 1985; Franco, 2006).

De outra maneira, a inclinação da tangente em P pode ser pela a inclinação da corda PB , o que conduz à chamada de diferença avançada, tendo-se que é dada por

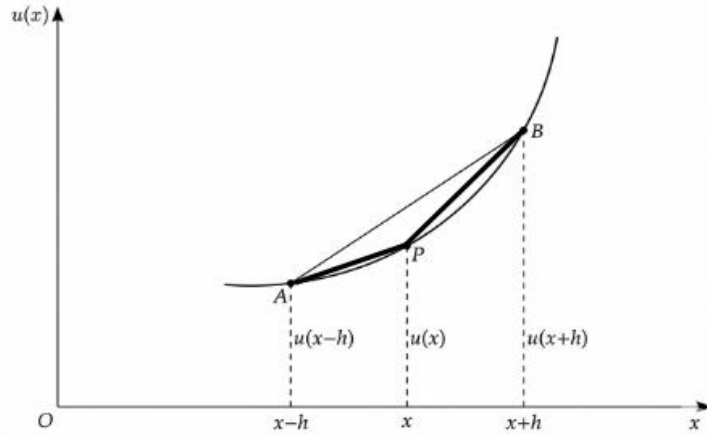
$$u'(x) = \left(\frac{du}{dx} \right)_{x=x_0} \simeq \frac{1}{h} \{u(x + h) - u(x)\} \quad (54)$$

Ou se for pela inclinação da tangente P na corda AP , resulta-se na equação chamada de diferença atrasada, dada por

$$u'(x) = \left(\frac{du}{dx} \right)_{x=x_0} \simeq \frac{1}{h} \{u(x) - u(x - h)\} \quad (55)$$

A figura 9 mostra estas aproximações, do ponto de vista geométrico:

Figura 9 --- Representação gráfica das aproximações por Diferenças Finitas



Fonte: Smith, 1985

Ao desprezar os termos de ordem h^2 e superiores, observa-se que as equações (54) e (55) decorrem diretamente de (49) e (50), respectivamente, evidenciando que as fórmulas de diferenças finitas avançada e atrasada, possuem erro principal da ordem de $O(h)$ (Smith, 1985; Franco, 2006).

Suponha-se que u seja uma função das variáveis independentes x e t , sendo o plano $x - t$ dividido em uma malha composta por retângulos iguais, com lados de $\Delta x = h$ e $\Delta t = k$. Nesse contexto, as coordenadas (x, t) de um ponto representativo da malha P são dadas por:

$$x = ih; \quad t = jk;$$

onde, i e j são valores inteiros.

Indica-se assim o valor de u no ponto P , por

$$u_p = u(ih, jk) = u_{i,j}.$$

Logo, obtém-se assim a seguinte equação

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_P = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{u[(i+1)h, jk] - 2u(ih, jk) + u[(i-1)h, jk]}{h^2} \quad (56)$$

Isto, é

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad (57)$$

com um erro principal, na ordem de h^2 .

Semelhante, tem-se

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} \quad (58)$$

com um erro principal, na ordem de k^2 .

Perante as equações, a aproximação por diferença avançada para $\frac{\partial u}{\partial t}$ em P , é

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} \quad (59)$$

com erro principal de $O(k)$.

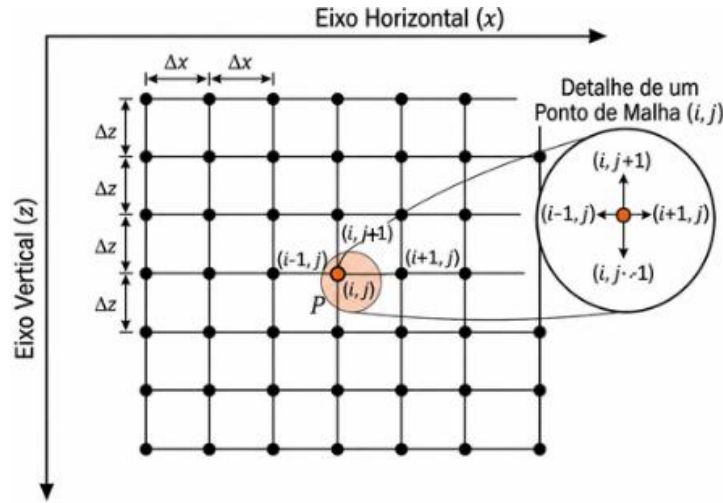
Essa formulação baseia-se no princípio de que o espaço quanto e o tempo podem ser representados de forma discreta, ou seja, subdivididos em pequenas unidades elementares nas quais o estado do sistema é definido (Smith, 1985; Franco, 2006).

Dessa forma, quando se tratam de domínios complexos, torna-se necessário recorrer a métodos de aproximação numérica. Nesses casos, os modelos físicos são geralmente formulados por sistemas de EDP que incorporam as propriedades do meio Zhang e Chen, (2006). Com o avanço do poder computacional, os métodos numéricos têm se destacado por fornecer soluções aproximadas cada vez mais precisas para problemas que não admitem solução analítica (Alterman; Karal, 1968; Moreira, 2024).

4.1 Aplicação do MDF a equação da onda em 2D

Para que a formulação contínua da equação da onda se torne operacional em ambiente computacional, é necessário convertê-la em uma versão discreta. Esse processo consiste em transformar as derivadas originalmente definidas em um domínio contínuo e em aproximações numéricas avaliadas em pontos específicos de uma malha (Smith, 1985; Zill; Cullen, 2001).

No cenário considerado, tem-se que o espaço físico é segmentado em pequenos intervalos igualmente espaçados ao longo das dimensões x e z , conforme é ilustrado na seguinte figura 10.

Figura 10 --- Malha de Descrição no plano (x,z)

Fonte: Compilação do Autor

Onde, cada ponto dessa malha constitui um local no qual a variável física p , entendida como pressão acústica, será calculada e atualizada no decorrer do tempo, Smith (1985) e Zill e Cullen (2001) que esses pontos são identificados por dois índices inteiros, i e j , onde i representa a posição no eixo horizontal (x) e j indica a posição na direção vertical (z).

Aplicando a diferenças finitas. Vamos pegar a mesma equação de onda em 2D:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) + f(x, z, t).$$

seja as grades: a) Grade em x : pontos $x_i = i \Delta x$, $i = 0, 1, \dots, N_x$; b) Grade em z : pontos $z_j = j \Delta z$, $j = 0, 1, \dots, N_z$; c) Tempo: $t^n = n \Delta t$, $n = 0, 1, \dots, N_t$.

Denota-se

$$p_{i,j}^n \approx p(x_i, z_j, t^n).$$

Fazendo as aproximações por diferenças centrais e derivando o tempo até a segunda ordem,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x_i, z_j, t^n) \approx \frac{p_{i,j}^{n+1} - 2p_{i,j}^n + p_{i,j}^{n-1}}{(\Delta t)^2} \quad (60)$$

Derivando a segunda ordem em x :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x_i, z_j, t^n) \approx \frac{p_{i+1,j}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} \quad (61)$$

Derivando novamente a segunda ordem em z :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}(x_i, z_j, t^n) \approx \frac{p_{i,j+1}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i,j-1}^n}{(\Delta z)^2}. \quad (62)$$

Logo,

Substituindo tudo na equação de onda, vem que,

$$\frac{p_{i,j}^{n+1} - 2p_{i,j}^n + p_{i,j}^{n-1}}{(\Delta t)^2} = v^2 \left[\frac{p_{i+1,j}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{p_{i,j+1}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i,j-1}^n}{(\Delta z)^2} \right] + f_{i,j}^n. \quad (63)$$

Isolando $p_{i,j}^{n+1}$ na equação (62), tem-se que,

$$p_{i,j}^{n+1} = 2p_{i,j}^n - p_{i,j}^{n-1} + (v \Delta t)^2 \left[\frac{p_{i+1,j}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{p_{i,j+1}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i,j-1}^n}{(\Delta z)^2} \right] + (\Delta t)^2 f_{i,j}^n \quad (64)$$

Esse método é muito importante, pois representa o estado de dois tempos anteriores (n e $n - 1$) e nesse caso, calcula-se o próximo ($n + 1$).

Para o caso práticos de abalo sísmico, define-se a grade. Isto é, a) escolhe-se $\Delta x, \Delta z, \Delta t$ e o tamanho do domínio; b) Impõe condições iniciais: $p_{i,j}^0$ (por exemplo, tudo zero) e $p_{i,j}^1$ usando a velocidade inicial ou uma aproximação da fonte. c) Fonte sísmica: definir $f_{i,j}^n$ (por exemplo, um pulso gaussiano em torno de (i_0, j_0) em alguns passos de tempo); d) Condições de contorno: fixas ($p=0$), absorventes, periódicas, etc; e) Iterar no tempo: usar a fórmula acima para ir de $n = 1$ até $N_t - 1$.

Conforme Smith (1985) e Jorge (2021), o conjunto entre parênteses expressam o comportamento espacial, indicando como a onda se distribui para pontos vizinhos na malha, definindo a forma da frente de onda. Onde, o termo associado à fonte $f_{i,j}^n$ acrescenta energia ao sistema, sendo empregado para representar eventos como disparos sísmicos, simulando a ativação de um impulso.

Esta forma permite calcular a propagação da onda de forma incremental, atualizando todos os pontos da malha a cada passo de tempo (Jorge, 2021). De forma resumida, o MDF transforma uma equação diferencial contínua complexa em um conjunto de operações algébricas simples como somas e multiplicações (Franco, 2006).

4.2 Critério de Estabilidade

Uma vez obtida a formulação discretiva da equação, torna-se necessário verificar a

estabilidade numérica do esquema empregado. Segundo Smith (1985) e Jorge (2021), o métodos explícitos de diferenças finitas, o qual exigem que a relação entre os incrementos espaciais e temporais seja coerente com determinadas condições para que erros numéricos não cresçam indefinidamente ao longo da simulação.

No caso da equação da onda no modelo bidimensional, a estabilidade do esquema explícito pode ser analisada por meio do critério de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL). Esse critério estabelece uma relação entre a velocidade máxima de propagação do meio, o passo temporal e os passos espaciais da malha. Para uma malha uniforme, a condição pode ser expressa por:

$$v \Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}} \quad (65)$$

Na prática, você escolhe Δt um pouco menor que esse limite.

Considerando os dados do problema anterior, tem-se que: a) Velocidade da onda sísmica: $v = 5\,000\text{m/s}$; b) Hipocentro (fonte): $(x_0, z_0) = (0, 5\,000\text{m})$; c) Receptor (sismógrafo na superfície): $(x_r, z_r) = (10\,000, 0\text{m})$

Distância entre fonte e receptor:

$$d = \sqrt{(10\,000 - 0)^2 + (0 - 5\,000)^2} = \sqrt{10\,000^2 + 5\,000^2} \approx 11\,180\text{m}. \quad (66)$$

Tempo de chegada teórico (contínuo):

$$t_{\text{chegada}} \approx \frac{d}{v} = \frac{11\,180}{5\,000} \approx 2,24\text{s}. \quad (67)$$

Escolhendo a malha de diferenças finitas e considerando os valores de passo espacial em x : $\Delta x = 100\text{m}$ e passo espacial em z : $\Delta z = 100\text{m}$

Assim, o receptor está em:

$$\begin{aligned} x_r = 10\,000 &\Rightarrow i_r = \frac{x_r}{\Delta x} = 100, \\ z_r = 0 &\Rightarrow j_r = 0. \end{aligned}$$

A fonte está em: $x_0 = 0 \Rightarrow i_0 = 0$,

$$z_0 = 5\,000 \Rightarrow j_0 = \frac{5\,000}{100} = 50. \quad (68)$$

Escolhendo o passo de tempo Δt (estabilidade), vem que a condição de estabilidade (CFL) aproximada em 2D:

$$v \Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{(100)^2}}} = \frac{100}{\sqrt{2}} \approx 70,71\text{m.} \quad (69)$$

Logo:

$$\Delta t \leq \frac{70,71}{v} = \frac{70,71}{5\,000} \approx 0,014\text{s.} \quad (70)$$

Seja, por exemplo o valor, $\Delta t = 0,01\text{s}$.

Comparando com o tempo de chegada: $t_{\text{chegada}} \approx 2,24\text{s}$.

Número de passos de tempo necessários no esquema de diferenças finitas:

$$n_{\text{chegada}} \approx \frac{t_{\text{chegada}}}{\Delta t} = \frac{2,24}{0,01} \approx 224\text{passos.}$$

ou seja, no modelo contínuo, a frente de onda chega ao receptor em cerca de 2,24 s.

No modelo de diferenças finitas com $\Delta t = 0,01\text{s}$, isso corresponde a aproximadamente 224 iterações de tempo até que a onda “alcance” o ponto ($i_r = 100, j_r = 0$).

Dessa forma, segundo Smith (1985) e Nussenzveig (2014), fisicamente essa condição estabelece que a onda não deve percorrer uma distância superior àquela permitida pela discretização espacial durante um único passo de tempo. Caso essa restrição seja violada, a solução numérica deixa de representar adequadamente o fenômeno físico, produzindo oscilações artificiais que tendem a crescer progressivamente ao longo da simulação. Como consequência, o campo de ondas pode apresentar amplitudes irreais e perda completa da estabilidade numérica do método.

A partir da formulação discreta apresentada, torna-se possível implementar computacionalmente o MDF para simular a propagação de ondas sísmicas em diferentes cenários geológicos.

5 SIMULAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS NA SUBSUPERFÍCIE

No presente trabalho, a simulação permitiu observar o comportamento da propagação das ondas sísmicas em um meio bidimensional, integrada por múltiplas camadas de meio homogêneo com diferentes velocidades de propagação. A simulação foi gerado a partir da

utilização do software Scilab, sendo aplicado ao MDF e em seguida aplicando à equação da onda. Possibilitando assim, analisar fenômenos físicos como reflexão, refração e também a presença de artefatos numéricos associados às condições de contorno implementadas no modelo.

Deste modo, no presente modelo adotado, considerou-se uma malha regular contendo 100 ponto na direção horizontal e 100 ponto na direção vertical (profundidade). O passo espacial utilizado foi de $dx = dz = 1m$, enquanto o passo temporal foi de $dt = 0,1s$. A simulação foi executada ao longo de 700 passos de tempo, permitindo observar diferentes etapas da propagação.

O modelo ainda apresenta múltiplas interfaces representando diferentes estruturas geológicas. Esse modelo considera quatro camadas distintas, cada uma associada a diferentes velocidades de propagação. A Interface 1 corresponde à camada horizontal, já a Interface 2 representa a interface inclinada e a Interface 3 corresponde à interface senoidal, simulando a irregularidades de estruturas típicas da subsuperfície. Cada camada possui uma velocidade diferente de propagação, representadas por $v_1 = 1$, $v_2 = 2$, $v_3 = 3$ e $v_4 = 4$, associadas respectivamente aos valores de 1000 m/s, 2000 m/s, 3000 m/s e 4000 m/s.

O modelo desenvolvido neste trabalho, foram adotados os valores $dx = dz = 1m$ e $dt = 0,1s$ e velocidade máxima de propagação igual a $v = 4$, correspondente à camada mais rápida do modelo. Substituindo esses valores na equação (34), obtém-se então,

$$\frac{v\Delta t}{n} = \frac{4 \times 0,1}{1} = 0,4 \quad (71)$$

por outro lado,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \quad (72)$$

assim,

$$0,4 < 0,707 \quad (73)$$

o que dessa maneira, demonstra que a condição de estabilidade é satisfeita para todos os meios considerados na simulação.

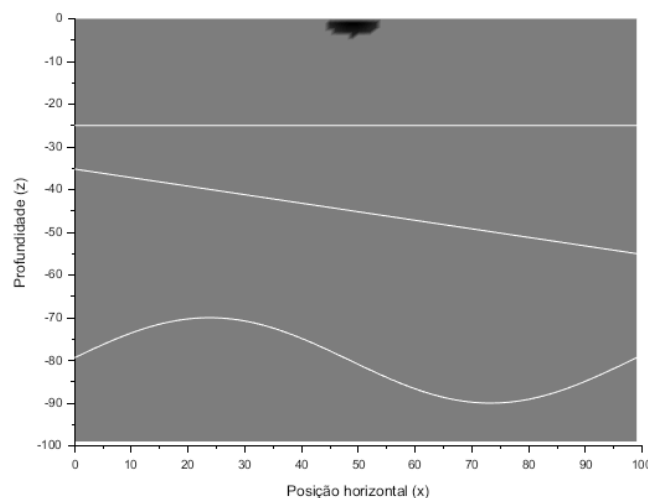
Assim, verifica-se que os parâmetros adotados encontram-se dentro dos limites

estabelecidos pelo critério CFL. Isso garante que o esquema explícito empregado na discretização da equação da onda permaneça numericamente estável durante toda a execução da simulação, impedindo o crescimento descontrolado dos erros de truncamento e assegurando que os resultados obtidos representem de maneira coerente o comportamento físico esperado para a propagação.

Além disso, a verificação do critério CFL constitui uma etapa indispensável na implementação computacional do MDF, pois, fornece uma garantia matemática de que a escolha dos passos espacial e temporal é compatível com a velocidade de propagação presente no modelo.

Dessa forma, no instante inicial $t = 0$, ocorre o acionamento da fonte sísmica localizada próxima à superfície. Nesse momento, a energia começa a ser injetada no sistema através de uma função do tipo gaussiana, produzindo um pequeno pulso concentrado de energia, conforme observado na figura 11.

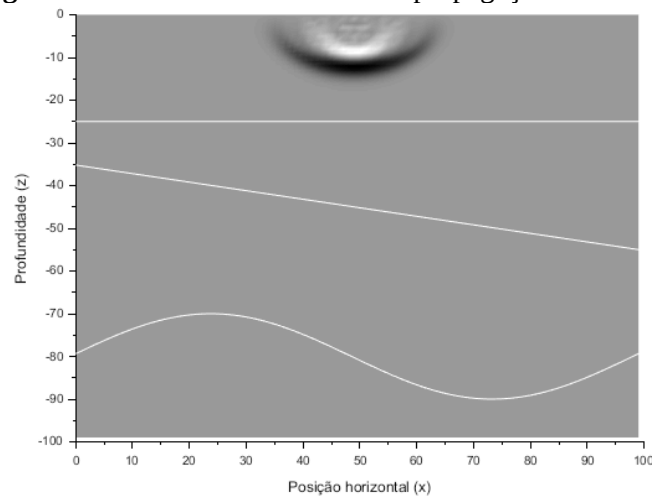
Figura 11 --- Início da propagação da onda



Fonte: Compilação do Autor

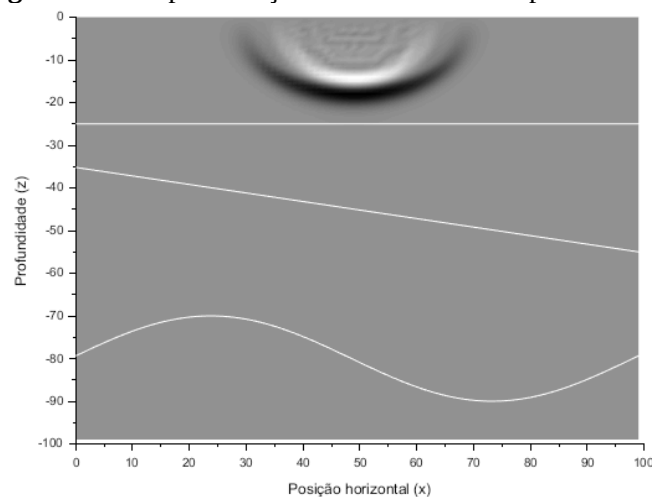
À medida que o tempo avança, a energia sísmica passa a se propagar radialmente na primeira camada, apresentando um comportamento aproximadamente semicircular devido à homogeneidade local do meio.

Com podemos observar, na figura 12, agora no instante $t = 120$, a frente de onda na camada superior começa a se desenvolver o seu espalhamento, onde ainda está mantendo uma propagação relativamente uniforme.

Figura 12 --- O desenvolvimento da propagação da onda sísmica**Fonte:** Compilação do Autor

É possível perceber que, com o decorrer do tempo, a amplitude da onda tende a se distribuir espacialmente uniformemente, reduzindo sua intensidade nas regiões mais afastadas da fonte sísmica. Esse fenômeno está associado ao espalhamento geométrico da energia durante a propagação da onda.

Posteriormente, já na figura 13, a onda sísmica aproxima-se da primeira interface horizontal.

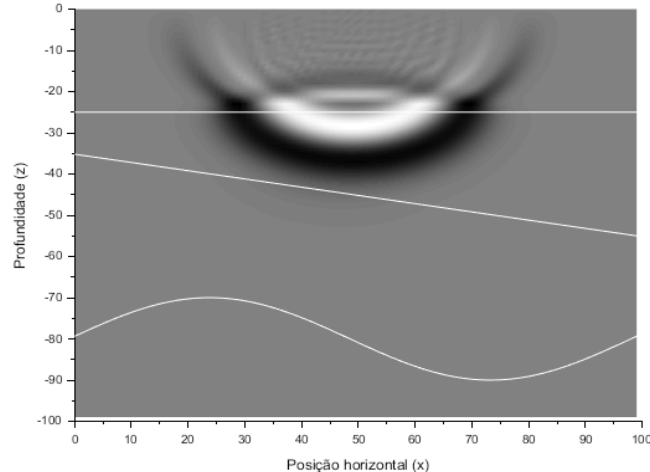
Figura 13 --- Aproximação da onda sísmica a primeira interface**Fonte:** Compilação do Autor

Nesse instante $t = 180$, é possível perceber um aumento da expansão espacial da frente de onda, indicando a aproximação de uma nova região. Como as camadas mais profundas possuem velocidade maiores que a atual, a propagação passa a ocorrer de maneira mais rápida após atravessar a interface.

Dessa forma, a frente de onda quando atinge o instante $t = 300$, efetivamente atinge a

primeira interface. Nesse momento, ocorreu a divisão da energia sísmica em dois fenômenos principais: uma parte da energia retorna para a camada superior caracterizando como reflexão, enquanto outra parte da energia atravessa a interface sofrendo alteração em sua velocidade e na direção de propagação, caracterizando a refração como podemos observa na figura 14. Esse comportamento está diretamente relacionado ao contraste de velocidades entre as camadas do modelo.

Figura 14 --- Intercepção da onda sísmica com a primeira interface

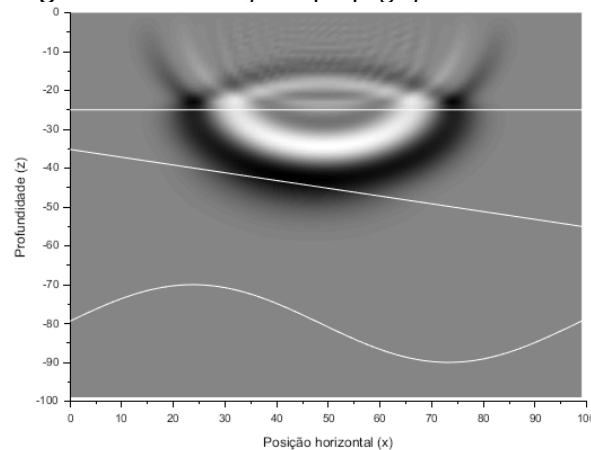


Fonte: Compilação do Autor

Nota-se ainda que a onda refratada apresenta um espalhamento espacial maior na camada inferior, pois, isso ocorre devido ao aumento da velocidade de propagação nesse meio. Com isso, a energia sísmica percorre distâncias maiores em intervalos de tempo menores, tornando a frente de onda mais aberta e acelerada.

Agora no instante $t = 330$, é possível observar que apresenta uma etapa bem avançada da propagação da onda, mostrando a interação da energia com as diferentes interfaces de velocidade presentes, conforme a figura 15,

Figura 15 --- Avanço da propagação da onda sísmica

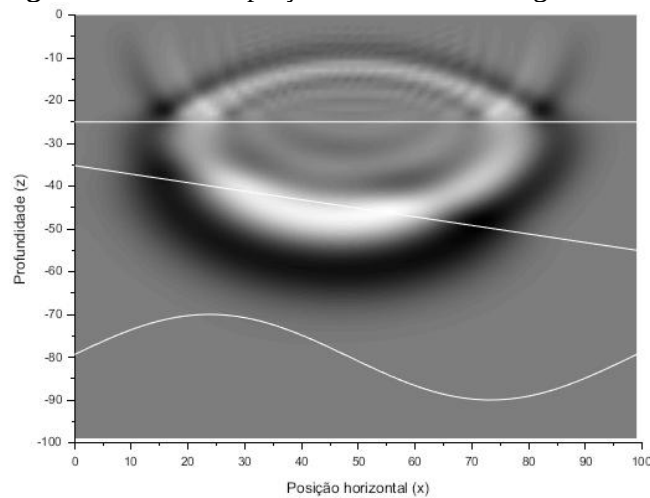


Fonte: Compilação do Autor

Observa-se que a frente de onda já atravessou a primeira interface horizontal, localizada aproximadamente na profundidade $z = -25$, e continua se propagando em direção às camadas inferiores.

Na sequência temporal das simulações, observa-se que a propagação da onda sísmica continua avançando para regiões mais profundas, intensificando as interações com as interfaces presentes no modelo. Na figura 16 que ocorre no instante $t = 390$, percebe-se que a frente de onda já atravessou a interface inclinada, sofrendo alterações significativas em sua forma inicial.

Figura 16 --- Intercepção da onda com a segunda interface

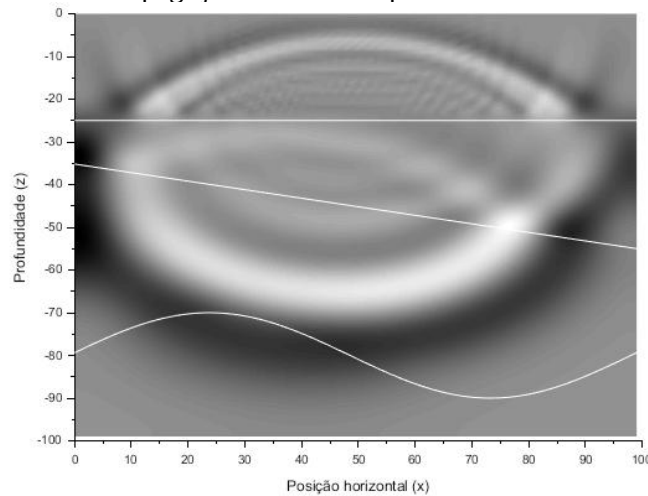


Fonte: Compilação do Autor

A interface inclinada provoca uma refração assimétrica a energia, fazendo com que diferentes partes da frente de onda se propagam com velocidades distintas ao longo do domínio. Como consequência, a forma original aproximadamente circular da onda passa a apresentar deformações espaciais. Além disso, parte da energia continua sendo refletida para regiões superiores, produzindo múltiplas reflexões internas.

Na figura 17, a propagação alcança regiões mais profundas e próximas à interface senoidal.

Figura 17 --- Propagação da onda se aproximando da interface senoidal

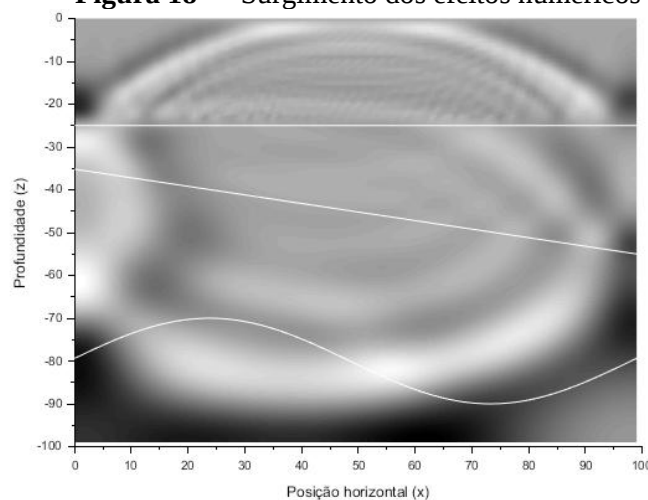


Fonte: Compilação do Autor

Nessa etapa, nota-se que a geometria ondulatória da interface altera localmente o comportamento da propagação, produzindo mudanças na curvatura das frentes de onda. Esse fenômeno ocorre porque diferentes segmentos da onda atingem a interface em diferentes pontos, resultando em padrões variados de reflexão e refração ao longo da estrutura. Observa-se também, que a presença da última interface favorece a dispersão espacial da energia sísmica, tornando o campo de ondas mais complexas.

O qual, já na figura 18 ocorrendo no instante $t = 510$, as reflexões provenientes das interfaces mais profundas tornam-se mais evidentes, pois, com a continuidade da propagação e do espalhamento da energia, começam a surgir reflexões nas bordas laterais do domínio computacional.

Figura 18 --- Surgimento dos efeitos numéricos



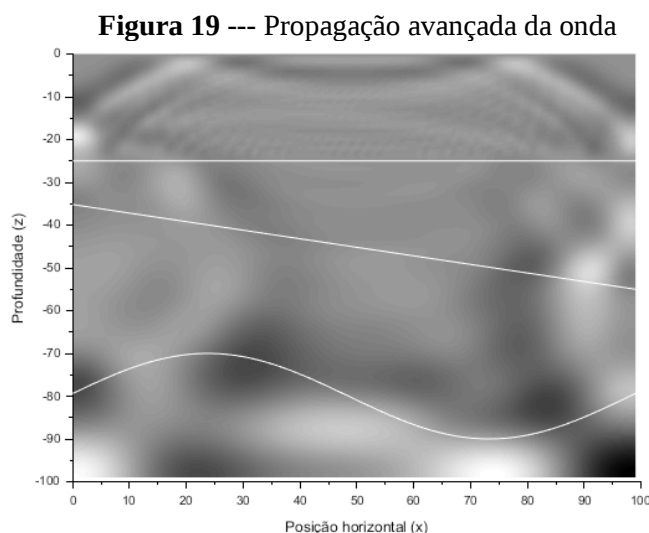
Fonte: Compilação do Autor

Parte da energia retorna em direção às camadas superiores após interagir com a interface senoidal, gerando eventos secundários que se sobrepõem às frentes de onda principais. Essa superposição produz padrões de interferência construtiva e destrutiva, característicos de modelos sísmicos compostos por múltiplas interfaces.

Além dos fenômenos físicos associados à propagação, as figuras também evidenciam a amplificação gradual dos artefatos numéricos nas bordas do domínio computacional. O qual não representam fenômenos físicos reais, sendo classificadas como artefatos numéricos decorrentes das limitações das condições de contorno utilizadas no modelo. Logicamente, a energia da onda deveria continuar se propagando para fora do domínio de forma uniforme em forma circular e sem retornar ao interior da malha.

Essas reflexões artificiais observadas nas extremidades estão associadas à discretização e à aplicação das condições de contorno do tipo Neumann, nas quais a derivada normal nas bordas é considerada nula. Durante esse processo, os pontos externos ao domínio acabam assumindo valores semelhantes aos pontos internos adjacentes, fazendo com que o algoritmo interprete as bordas como superfícies refletoras artificiais.

Logo, já na figura 19, correspondente ao início dos instantes finais da simulação, percebe-se que grande parte da energia sísmica já se distribuiu pelas camadas inferiores do modelo.

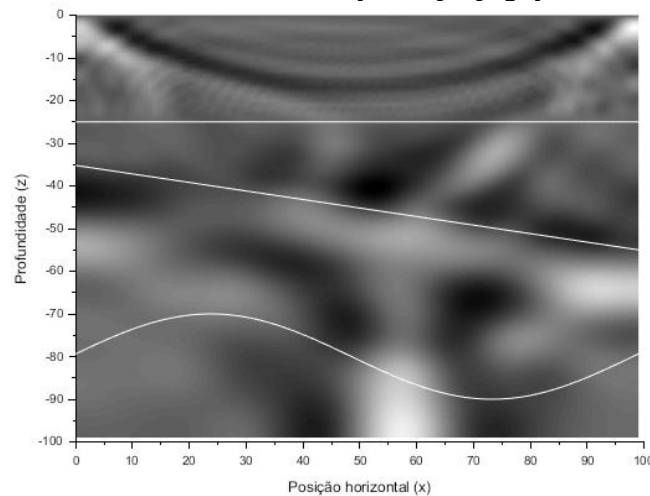


Fonte: Compilação do Autor

As múltiplas interações entre reflexão, refração, difração e artefatos numéricos, o qual tornam o campo de ondas mais complexo, dificultando a distinção visual.

Assim finalizando a simulação no instante $t = 700$, com é mostrado na figura 20.

Figura 20 --- Fase final da simulação da propagação da onda sísmica



Fonte: Compilação do autor

O comportamento global da propagação permanece coerente com os princípios físicos esperados para meios estratificados com contraste de velocidades. Assim, percebe-se que os resultados obtidos demonstram que o método numérico empregado foi capaz de reproduzir adequadamente a evolução temporal das ondas sísmicas em diferentes contextos geométricos da subsuperfície. A presença de interfaces horizontal, inclinada e senoidal permitiu avaliar como mudanças estruturais influenciam diretamente a trajetória, a velocidade e o espalhamento das frentes de onda.

Além disso, a análise das imagens geradas pela a simulação, evidencia a importância das condições de contorno em simulações numéricas de propagação sísmica. Por mais que as condições absorventes reduzam parcialmente as reflexões artificiais, ainda é possível observar a presença de energia residual nas extremidades do domínio, indicando limitações inerentes à discretização espacial e ao tamanho finito da malha computacional.

Logo, as simulações apresentaram resultados consistentes no ponto de vista físico quanto numérico, permitindo representar fenômenos fundamentais da propagação sísmica, como reflexão, refração, interferência e dispersão da energia em meio homogêneo. Esses resultados reforçam a aplicabilidade das EDP e dos métodos numéricos na modelagem computacional de processos geofísicos associados à propagação de ondas sísmicas.

6 CONCLUSÃO

A modelagem numérica da propagação de ondas sísmicas presente no trabalho, demonstrou a capacidade das EDP's de representar fenômenos físicos presentes na subsuperfície terrestre. A partir da discretização da equação da onda pelo MDF, aplicado à

equação da onda bidimensional constitui uma ferramenta computacional eficaz para a simulação da propagação de ondas sísmicas em meios geológicos estratificados.

Por meio da implementação computacional no software Scilab, foi possível construir um modelo computacional capaz de reproduzir a evolução temporal e espacial da energia sísmica em um meio bidimensional. Essa abordagem evidenciou a importância dos métodos numéricos como ferramentas para a análise de problemas físicos complexos que não possuem soluções analíticas simples.

Dessa forma, foi permitido visualizar de forma clara o comportamento das frentes de onda ao longo do domínio estudado. Durante as simulações, foram observados fenômenos característicos da propagação sísmica, como reflexão, refração, interferência e espalhamento da energia. Além disso, verificou-se que as diferenças de velocidade entre as camadas influenciam diretamente a trajetória das ondas, produzindo alterações em sua forma e em sua velocidade de propagação à medida que atravessam diferentes estruturas geológicas.

Assim, também evidenciaram a influência da geometria das interfaces na dinâmica da propagação. Enquanto as interfaces horizontais produziram padrões mais regulares de reflexão e refração, as interfaces inclinada e senoidal geraram comportamentos mais complexos, resultando em deformações nas frentes de onda e em diferentes padrões de distribuição da energia sísmica.

Outro aspecto observado, foi a presença de reflexões artificiais nas bordas do domínio computacional. Esses efeitos estão associados às condições de contorno adotadas e constituem uma limitação comum em simulações numéricas desse tipo. Apesar da ocorrência desses artefatos, o comportamento geral da propagação manteve-se coerente com os princípios físicos esperados, permitindo uma análise consistente dos fenômenos estudados e demonstrando a eficiência do modelo implementado.

Por fim, conclui-se que a integração entre conhecimentos geológicos, formulação matemática da equação da onda e métodos numéricos como o MDF constitui uma abordagem favorável para o estudo da propagação sísmica. A pesquisa contribuiu não apenas para a compreensão de como ondas se comportam ao atravessar diferentes camadas de rocha, mas também para a formação de um arcabouço metodológico que pode ser estendido a problemas mais complexos, como meios heterogêneos ou tridimensionais. Servindo assim, como base para estudos futuros e mais avançados na área.

REFERÊNCIAS

ALTERMAN, Z.; KARAL, F. C. **Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods**. 1968.

BERTOLINO, Luiz Carlos; PALERMO, Nely; BERTOLINO, Ana Valéria F. A. Geologia. In: CENTRO DE TECNOLOGIA MINERAL (Org.). **Manual de Agregados para Construção Civil**. 2. ed. Rio de Janeiro: CETEM/MCTI, 2012. Cap. 4, p. 69-79. Disponível em: https://mineralis.cetem.gov.br/bitstream/cetem/2043/1/manual_de_agregados_para_construcao_civil.pdf. Acesso em: 26 jan. 2026.

BOULOS, Paulo. **Cálculo Diferencial e Integral** – Volume 1. São Paulo: Pearson Makron Books, 1999.

BUTKOV, E. **Mathematical Physics**. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1978.

CRIST, Pedro. PINTO, Vagner André Moraes. **Rochas -Ambientes Ígneos, sedimentares e metamórfico**. In: GUIMARÃES, Gilson Burigo; LICCARDO, Antônio. (Org.). **Geodiversidade na educação**/Ponta Grossa: Estúdio Texto, 2014. 136p. p.; il. Disponível em: <https://www2.uepg.br/proex/wp-content/uploads/sites/8/2018/10/LIVRO-Geodiversidade-na-Educacao.pdf>. Acesso em: 07 mar. 2026.

FRANCO, Neide Maria Bertoldi. **Cálculo numérico**. São Paulo: Pearson, 2006.

FRASCÁ, M. H. B. O. **Tipos de Rochas Ornamentais e Características Tecnológicas. Tecnologias de Rochas Ornamentais: Pesquisa, Lavra e Beneficiamento**. Centro de Tecnologia Mineral, 2014. Rio de Janeiro: CETEM/ MCTI, 2014, p. 43-97.

FRASCÁ, M. H. B. O.; YAMAMOTO, J. K. **Ageing tests for dimension stone – experimental studies of granitic rocks from Brazil**. In: IAEG 2006 - 10th Internacional Congress of the International Association of Engineering Geology and the Environment, 2006, Nottingham – UK. IAEG 2006 Pre-Congress proceedings. London: The Geological Society of London, 2006.

GUIMARÃES, Gilson Burigo; LICCARDO, Antônio. (Org.). **Geodiversidade na educação**/Ponta Grossa: Estúdio Texto, 2014. 136p. p.; il. Disponível em: <https://www2.uepg.br/proex/wp-content/uploads/sites/8/2018/10/LIVRO-Geodiversidade-na->

[Educao.pdf](#). Acesso em: 07 mar. 2026.

JORGE, Vinicius Theobaldo. **Aproximação da solução de ondas sísmicas 3D pelo método de diferenças finitas**. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2021. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Geologia) — Instituto de Geociências, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Disponível em: <https://pantheon.ufrj.br/bitstream/11422/16165/1/JORGE%2C%20V.T.pdf>. Acesso em: 07 jan. 2026.

KEAREY, P.; BROOKS, M.; HILL, I. **An Introduction to Geophysical Exploration**. 3. ed. Oxford: Blackwell Science, 2002. Disponível em: https://www.academia.edu/10084349/An_Introduction_to_Geophysical_Exploration. Acesso em: 25 jan. 2026.

MILANI, Edison José; MELO, José Henrique G.; SOUZA, Paulo Alves; FERNANDES, Luiz Alberto; FRANÇA, A. Barros. **Bacia do Paraná. Boletim de Geociências da Petrobras**, Rio de Janeiro, v. 15, n. 2, p. 265-287. 2007. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/265291564_Bacia_do_Parana. Acesso em: 25 jan. 2026.

MOREIRA, Pedro Huan. **Modelagem e Simulação da Propagação de Ondas Sísmicas P-SV de Terremotos em Território Brasileiro: Aplicação aos Terremotos Profundos no Acre. 2024. Dissertação** (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2024. Disponível em: <https://pos.uel.br/pgmac/wp-content/uploads/2024/10/Pedro-Huan-Moreira.pdf>. Acesso em: 08 jan. 2026.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica 2: Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor**. 5. ed. São Paulo: Blucher, 2014. v. 1.

PENHA, Lidiane Nazaré Monteiro; BARREIROS, Alessandra Natasha Alcântara; NETO, Francisco de Assis Silva. **Simulação da propagação de onda 2D em um meio acústico – aferição da performance de um cluster Beowulf**. In: **V Simpósio Brasileiro de Geofísica**, 2012, Salvador. Anais [...]. Salvador: SBGf, 2012.

PEREIRA, A. M.; BEMFEITO, A. P.; PINTO, C. E.; ARCANJO-FILHO, M.; WALDHELM, M. **Ciências 6º ano (Ensino fundamental)**. São Paulo: Editora do Brasil, 2018. Coleção poema.

PISKOUNOV, N. **Cálculo diferencial e integral**. v. 1. Tradução de Antônio Eduardo Pereira Teixeira e Maria José Pereira Teixeira. 18. ed. em língua portuguesa. Porto: Lopes da Silva, 2000. [1988].

PRESS, F.; SIEVER, R.; GROTZINGER J.; JORDAN T. H. **Para Entender a Terra**. Tradução Rualdo Menegat. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2006. 656p.

SAIKI, Marcelo Eiji. **Equação da onda unidimensional: um estudo analítico e numérico**. [S.l.: s.n.]. Disponível em: <https://repositorio.ucb.br:9443/jspui/bitstream/10869/1637/5/Marcelo%20Eiji%20Saiki.pdf>. Acesso em: 02 fev 2026.

SIEGESMUND, S.; TÖRÖK, A. **Building Stones. Stone in Architecture**. 4. ed. Heidelberg, 2011, p. 11-96. Disponível em: https://www.academia.edu/80530336/Stone_in_Architecture. Acesso em: 02 mar 2026.

SOUZA, Luiz Antônio Pereira de; GANDOLFO, Otávio Coaracy Brasil. **NORMA ABGE 201/2023: investigação geofísica em terra – métodos sísmicos**. 1. ed. São Paulo: ABGE, 2023. Disponível em: https://www.abge.org.br/wp-content/uploads/2026/03/DTP_NormaABGE_201.pdf. Acesso em: 03 maio 2026.

SMITH, Gordon D. **Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods**. 3. ed. Oxford: Clarendon Press, 1985.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais**. Volume 2. São Paulo: Editora MAKRON Books, 2001.

ZHANG, W.; CHEN, X. **Traction image method for irregular free surface boundaries in finite difference seismic wave simulation**. Geophysical Journal International 167, pág. 337-353. 2006.

APÊNDICE – Código do software SCILAB da Simulação da propagação da onda

```
// Parâmetros da simulação
nx = 100; // número de pontos na direção x
nz = 100; // número de pontos na direção z (representando a profundidade)
nt = 700; // número de passos no tempo
dx = 1; // passo espacial em x (m)
dz = 1; // passo espacial em z (m)
dt = 0.1; // passo no tempo (s)
x = 0:nx-1;
z = 0:nz-1;
z = -z; // Ajustando z para representar profundidade (negativo)

// Velocidades de propagação
v1 = 1; // velocidade no meio superior (m/s)
v2 = 2; // velocidade na segunda camada (m/s)
v3 = 3; // velocidade na terceira camada (m/s)
v4 = 4;

// Matriz de velocidades com três subdomínios
v = v1 * ones(nx, nz); // Inicialmente, o meio superior com velocidade v1
v(:, nz/4:nz) = v2; // A segunda camada recebe a velocidade v2

// Definir a interface inclinada entre a segunda e terceira camadas
for ix = 1:nx
    z_incline = -nz/4 - 0.2 * ix - 10; // Inclinação da interface
    if z_incline > -nz then
        v(ix, find(z <= z_incline)) = v3; // Terceira camada com velocidade v3
    end
end

// Adicionar uma quarta camada no formato de uma função seno
for ix = 1:nx
    for iz = 1:nz
        z_seno(ix,iz) = -nz/2 + 10 * sin(2 * %pi * (ix)/(nx-1)) - 30; // Função seno com um período
        if z(iz) <= z_seno(ix,iz)
            v(ix, iz) = v4; // Quarta camada recebe a velocidade v3
        end
    end
end

// Interfaces para plotagem
interface1(1:nx) = -nz/4; // Primeira interface (horizontal)
interface2(1:nx) = -nz/4 - 0.2 * (1:nx) - 10; // Segunda interface (inclinada)
interface_seno(1:nx) = -nz/2 + 10 * sin(2 * %pi * (1:nx)/(nx-1)) - 30; // Terceira interface (senoidal)

// Fonte de distúrbio na superfície
source_x = nx / 2;
source_z = 0; // Fonte na superfície
f0 = 10; // frequência da fonte (Hz)
r_source = 5; // raio da região de influência da fonte (suavização)

// Inicialização das matrizes
p = zeros(nx,nz); // campo de pressão atual
p_old = zeros(nx,nz); // campo de pressão anterior
p_new = zeros(nx,nz); // campo de pressão futuro

// Função de fonte suave com um raio de influência
function wavelet=gaussian_source(ix, iz, source_x, source_z, t, f0, r_source)
    distance = sqrt((ix - source_x)^2 + (iz - source_z)^2);
    if distance <= r_source then
        wavelet = exp(-distance^2 / (2 * r_source^2)) * (1 - 2 * %pi^2 * f0^2 * t^2) * exp(-%pi^2 * f0^2 * t^2);
    else

```

```

    wavelet = 0;
end
endfunction

// Simulação de propagação de ondas sísmicas com interfaces de velocidade
ifr = 1;
for it = 1:nt
    // Atualização do campo de pressão usando diferenças finitas
    for ix = 2:nx-1
        for iz = 2:nz-1
            p_new(ix,iz) = 2 * p(ix,iz) - p_old(ix,iz) + ...
                (v(ix,iz)^2 * dt^2 / dx^2) * ...
                (p(ix+1,iz) - 2 * p(ix,iz) + p(ix-1,iz)) + ...
                (v(ix,iz)^2 * dt^2 / dz^2) * ...
                (p(ix,iz+1) - 2 * p(ix,iz) + p(ix,iz-1));
        end
    end

    // Condições de Neumann nos contornos laterais e no fundo
    p_new(1,:) = p_new(2,:); // Condição de Neumann à esquerda
    p_new(nx,:) = p_new(nx-1,:); // Condição de Neumann à direita
    p_new(:,nz) = p_new(:,nz-1); // Condição de Neumann no fundo
    // Inserção da fonte suavizada na região ao redor da posição central
    t = it * dt;
    for ix = source_x - r_source:source_x + r_source
        for iz = source_z - r_source:source_z + r_source
            if ix > 1 & ix < nx & iz > 1 & iz < nz then
                p_new(ix,iz) = p_new(ix,iz) + gaussian_source(ix, iz, source_x, source_z, t, f0, r_source);
            end
        end
    end

    // Atualização dos campos de pressão
    p_old = p;
    p = p_new;

    // Gerar e salvar frame para o vídeo
    if ifr == it
        clf();
        Sgrayplot(x, z, p); // Inversão de z para representar a profundidade para baixo
        gca().data_bounds = [0, -100; nx-1, 0]; // Limitar profundidade de -100 a 0
        gcf().color_map = gray(64); // Aplicar escala de cor gray
        xlabel("Posição horizontal (x)");
        ylabel("Profundidade (z)");
        title("Propagação de onda sísmica com interfaces de velocidade");

        // Adicionar as linhas das interfaces entre os três meios
        plot(x, interface1, 'w'); // Primeira interface
        plot(x, interface2, 'w'); // Segunda interface inclinada
        plot(x, interface_seno, 'w'); // Terceira interface (senoidal)
        mtlb_hold();

        // Salvar cada frame como imagem
        file_name = sprintf("frame_%04d.png", it);
        xs2png(0, file_name); // Salva o gráfico como imagem PNG
        ifr = ifr + 30;
    end
end
drawnow();
end

```