



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ABAETETUBA
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RIVALDO DE LIMA PEREIRA

FORMAS BILINEARES: Reconhecimento de cônicas em \mathbb{R}^2 e
quádricas em \mathbb{R}^3

ABAETETUBA - PA

2021

RIVALDO DE LIMA PEREIRA

FORMAS BILINEARES: Reconhecimento de cônicas em \mathbb{R}^2 e
quádricas em \mathbb{R}^3

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia do Campus Universitário de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará - UFPA como requisito obrigatório para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Suellen Cristina Queiroz Arruda

ABAETETUBA - PA

2021

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

P436f Pereira, Rivaldo de Lima.
Formas bilineares : reconhecimento de cônicas no r^2 e
quádricas no r^3 / Rivaldo de Lima Pereira. — 2021.
105 f. : il. color.

Orientador(a): Prof^ª. Dra. Suellen Cristina Queiroz Arruda
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade
Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Curso de
Matemática, Abaetetuba, 2021.

1. Formas bilineares. 2. Cônicas e quádricas. 3. Álgebra
linear. I. Título.

CDD 512.5

RIVALDO DE LIMA PEREIRA

**FORMAS BILINEARES: Reconhecimento de cônicas em \mathbb{R}^2 e
quádricas em \mathbb{R}^3**

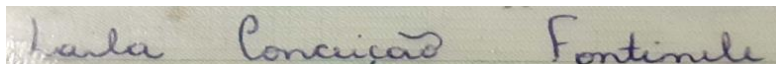
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia do
Campus Universitário de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará - UFPA como requisito
obrigatório para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Data da aprovação: 18/10/2021

Banca Examinadora:



Profa. Dra. Suellen Cristina Queiroz Arruda
Orientadora - FACET/UFPA



Profa. Ma. Laila Conceição Fontinele
Membro - FACET/UFPA



Profa. Dra. Sara Raissa Silva Rodrigues
Membro - ICE/UFAM

A Deus aos meus pais e professores pela formação, ensino e incentivo para que esse trabalho tornasse possível.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela minha vida, e por me permitir ultrapassar todos os obstáculos encontrados ao longo da realização deste trabalho.

Aos meus pais, familiares, especialmente, ao meu avô que veio a falecer nesse período, pelo apoio e ajuda nas horas que mais preciso, que apesar de todos os meus defeitos, me abraçam e dividem suas vidas comigo. Quero deixar registrado aqui o meu muito obrigado pelo incentivo a continuar estudando, AMO TODOS VOCÊS!

Aos amigos, que sempre estiveram ao meu lado, pelas felizes e incontáveis conversas, pelo apoio demonstrado ao longo de todo o período de tempo em que me dediquei a este trabalho.

Aos professores da UFPA que se mostraram mais que docentes, foram companheiros e amigos durante todo o curso. Em especial, a professora Suellen Arruda, por ter sido uma extraordinária orientadora e ter desempenhado tal função com total dedicação e amizade, e que palavra alguma pode dizer a gratidão que sinto pela amizade e ensinamentos nos projetos partilhados.

RESUMO

Este trabalho consiste no estudo de formas bilineares, funções que a cada par de vetores em um espaço vetorial associa um número real de modo que uma vez fixado o primeiro vetor, a função seja uma transformação linear em relação ao segundo vetor, e vice-versa, para o reconhecimento de cônicas em \mathbb{R}^2 e superfícies em \mathbb{R}^3 , a partir da diagonalização da matriz associada à forma bilinear e mudanças de coordenadas. Para isto, veremos a teoria básica da Álgebra Linear dando, sempre que possível, um enfoque geométrico aos conceitos apresentados.

Palavras-chave: Forma bilinear; Álgebra Linear; Cônicas e quádras.

ABSTRACT

This work consists in the study of bilinear forms, functions that each pair of vectors in a vector space associate a real number so that once fixed the first vector the function is a linear manner in relative to the second vector and vice versa, for the recognition of conics en \mathbb{R}^2 and surfaces in \mathbb{R}^3 from the diagonalization of the matrix associated with the bilinear form and coordinate changes. For this, we will see the basic theory of Linear Algebra giving, whenever possible, a geometric approach to the presented concepts.

Key words: Bilinear form; Linear Algebra; Conics; Surfaces.

Lista de Figuras

1.1 Uma reta em \mathbb{R}^2 .	10
1.2 Retas em \mathbb{R}^2 .	11
1.3 Soma de vetores em \mathbb{R}^2 .	11
1.4 Vetores no \mathbb{R}^2 .	12
1.5 Interseção de dois planos no \mathbb{R}^3 .	13
1.6 Interpretação geométrica de combinação linear de dois vetores no \mathbb{R}^2 .	15
1.7 Reta gerada por v_1 no \mathbb{R}^3 .	17
1.8 Reta gerada por dois vetores v_1 e v_2 colineares entre si no \mathbb{R}^3 .	17
1.9 Plano que contém origem, v_1 e v_2 no \mathbb{R}^3 .	18
1.10 Plano que contém origem, v_1 e v_2 e v_3 no \mathbb{R}^3 .	18
1.11 Subespaço gerado por v_1, v_2, v_3 e v_4 no \mathbb{R}^3 .	19
1.12 Conjunto de dois vetores L.I ou L.D no \mathbb{R}^3 .	20
1.13 Conjunto de três vetores L.I ou L.D no \mathbb{R}^3 .	21
1.14 Vetor no plano cartesiano.	25
1.15 Desigualdade Triangular.	26
1.16 Distância e ângulo entre dois vetores.	28
1.17 Vetor $v_2 - a_1 w_1$.	31
1.18 Vetor $v_3 - a_1 w_1 - a_2 w_2$.	32
1.19 Aplicação T leva \mathbb{R}^2 no plano $3x - 2y + z = 0$.	34
1.20 Dilatação e contração do vetor u .	34
1.21 Diagrama núcleo e imagem.	35
1.22 Autovetor no plano.	40
1.23 Autoespaço S_{-1} e S_6 .	43

3.1 Plano paralelo intercepta cone duplo de revolução.	62
3.2 Plano inclinado intercepta cone duplo de revolução.	63
3.3 Plano intercepta cone duplo de revolução em suas duas metades.	64
3.4 Plano paralelo a geratriz do cone duplo de revolução.	65
3.5 Hipérbole degenerada.	66
3.6 Parábola degenerada.	67
3.7 Parábola degenerada (2).	67
3.8 Elipse degenerada.	68
3.9 Hipérbole.	74
3.10 Elipse.	75
3.11 Parábola.	76
3.12 Esfera.	78
3.13 Elipsoide.	78
3.14 Hiperboloide de uma folha.	79
3.15 Hiperboloide de duas folhas.	80
3.16 Paraboloides elíptico.	80
3.17 Elipsoide (2).	87
3.18 Hiperboloide de uma folha (2).	88
3.19 Paraboloides elíptico (2).	89

LISTA DE SÍMBOLOS

\forall	Para todo;
\in	Pertence;
\exists	Existe;
\emptyset	Conjunto vazio;
$V \times V$	Produto cartesiano de V com V ;
\subset	Subconjunto ou contido;
$Proj_v u$	Projeção ortogonal de u sobre v .

Sumário

INTRODUÇÃO	1
1 PRELIMINARES	3
1.1 Espaços vetoriais reais	4
1.1.1 Subespaços vetoriais	8
1.1.2 Combinações lineares e subespaços gerados	15
1.1.3 Base e dimensão	19
1.1.4 Mudança de base	22
1.2 Espaço com produto interno	23
1.2.1 Norma ou módulo de um vetor	24
1.2.2 Ângulo entre dois vetores	27
1.2.3 Bases ortogonais e ortonormais	28
1.3 Transformações lineares	32
1.3.1 Núcleo e imagem de uma transformação linear	35
1.3.2 Matriz de uma transformação linear	36
1.3.3 Matrizes semelhantes	38
1.4 Autovetores e autovalores	39
1.4.1 Determinação dos autovalores e dos autovetores	41
1.4.2 Diagonalização de operadores lineares	44
1.4.3 Operadores ortogonais e auto-adjuntos	46
2 FORMAS BILINEARES	48
2.1 Matriz de uma forma bilinear	50
2.2 Formas bilineares simétricas	54

2.3 Formas quadráticas	57
3 RECONHECIMENTO DE CÔNICAS EM \mathbb{R}^2 E QUÁDRICAS EM \mathbb{R}^3	61
3.1 Cônicas em \mathbb{R}^2	61
3.1.1 Equação reduzida de uma cônica	69
3.1.2 Classificação das cônicas	71
3.2 Quádricas em \mathbb{R}^3	77
3.2.1 Equação reduzida de uma quádrlica	81
3.2.2 Classificação das quádrlicas	84
CONSIDERAÇÕES FINAIS	90
REFERÊNCIAS	91

INTRODUÇÃO

A Álgebra Linear é um dos principais ramos da Matemática onde se estuda aspectos relacionados a uma coleção de objetos chamada vetores, que podem ser somados um a outro e multiplicados por números, denominados escalares, chamada *espaços vetoriais*. A vantagem de se estudar os espaços vetoriais de forma mais abstrata é que estamos estudando propriedades que são válidas em conjuntos diferentes. Por exemplo, vemos que os mesmos resultados encontrados usando o conjuntos de matrizes são válidos para o plano.

Normalmente, nas disciplinas de Introdução à Álgebra Linear em cursos de graduação em Ciências Exatas, surge a famosa pergunta: Para que estudar Álgebra Linear?. A resposta nem sempre é simples e suficiente para compreender a vasta aplicabilidade em outras áreas da Matemática, da Biologia, da Engenharia, da Economia e assim por diante. Porém, o fato é que o rigor matemático se faz necessário para a compreensão da grandiosidade e beleza da disciplina.

A proposta deste trabalho segue a ideia em proporcionar ao leitor a conhecer uma das diversas relações entre a Álgebra Linear e a Geometria Analítica, possibilitando estudar funções que a cada par de vetores em um espaço vetorial associa um número real de modo que uma vez fixado o primeiro vetor, a função seja uma transformação linear em relação ao segundo vetor, e vice-versa que serão denominadas *formas bilineares*, para o reconhecimento de cônicas em \mathbb{R}^2 e superfícies quádricas em \mathbb{R}^3 , teoria com importantes aplicações em otimização e programação linear. Além disso, o nosso objetivo é dar, sempre que possível, um tratamento geométrico aos conceitos abstratos da Álgebra Linear, fazendo uso do software GeoGebra, de modo que o leitor observe, ao longo do trabalho, que a Geometria está intrinsecamente relacionada com a Álgebra, conforme é comemorado na frase atribuída a Lagrange (1736-1813):

"Desde que a álgebra e a geometria foram separadas, seu progresso foi lento e seus

usos limitados; mas quando essas duas ciências foram unidas, elas emprestaram a cada uma forças mútuas e marcharam juntas para a perfeição."(LAGRANGE, 1736 - 1813).

O primeiro capítulo será destinado ao estudo preliminar sobre espaços vetoriais, transformações lineares, espaço com produto interno e autovalores e autovetores, isto é, toda teoria básica da Álgebra Linear necessária para o entendimento dos demais capítulos.

No segundo capítulo, seguiremos com a fundamentação teórica sobre formas bilineares, estudando os seus resultados técnicos, principalmente o seu relacionamento com matrizes. Em seguida, veremos sob quais condições uma matriz associada a forma bilinear é diagonal.

Por fim, No terceiro e último capítulo, apresentaremos um método algébrico baseado na diagonalização de formas bilineares capaz de classificar as cônicas e as quádricas.

É importante informar que, as principais fontes de pesquisa para o desenvolvimento do trabalho foram as obras dos autores BOLDRINI; COSTA; FIGUEIREDO [1], COELHO [2], HOWARD; RORRES [4], KOLMAN; HILL [5] e STEINBRUCH; WINTERLE [12], as quais devem ser consultadas pelos leitores para aprofundamento teórico e demonstrações aqui omitidas.

PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentaremos conceitos e resultados essenciais estudados em uma disciplina introdutória de Álgebra Linear, com o objetivo de recordarmos assuntos necessários para a compreensão do capítulo final. Para tanto, enunciaremos o conceito de uma estrutura algébrica de grande importância para o desenvolvimento de toda teoria aqui abordada.

Um conjunto não vazio \mathbb{K} é um *corpo* se em \mathbb{K} pudermos definir duas operações, denotadas por $+$ (adição) e \cdot (multiplicação), satisfazendo as seguintes propriedades para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{K}$:

- (1) $a + b = b + a$ (propriedade comutativa em relação à adição).
- (2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (propriedade associativa em relação à adição).
- (3) Existe um elemento em \mathbb{K} , denotado por 0 e chamado de elemento neutro da adição, que satisfaz $a + 0 = 0 + a = a$.
- (4) Para cada $a \in \mathbb{K}$, existe um elemento em \mathbb{K} , denotado por $-a$ e chamado de simétrico de a (ou oposto de a ou inverso aditivo de a), tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
- (5) $a \cdot b = b \cdot a$ (propriedade comutativa em relação à multiplicação).
- (6) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (propriedade associativa em relação à multiplicação).
- (7) Existe um elemento em \mathbb{K} , denotado por 1 e chamado de elemento neutro da multiplicação, tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

- (8) Para cada $a \in \mathbb{K}$, existe um elemento em \mathbb{K} , denotado por a^{-1} e chamado de inverso multiplicativo de a , tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.
- (9) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (propriedade distributiva).

É trivial as demonstrações da unicidade dos elementos descritos nas propriedades (3), (4), (7) e (8). E como é de costume, vamos muitas vezes simplificar a notação do produto indicando simplesmente ab para o produto $a \cdot b$.

Decorre da definição acima que o conjunto \mathbb{R} dos números reais e o conjunto \mathbb{C} dos números complexos são exemplos de corpos. Deste modo, toda teoria básica da Álgebra Linear a ser desenvolvida neste capítulo admite como escalares os elementos de qualquer corpo \mathbb{K} , porém, como o nosso objetivo central é o reconhecimento de cônicas e quádras, restringiremos o nosso estudo ao corpo real.

1.1 Espaços vetoriais reais

Seja V um conjunto não vazio sobre o qual estão definidas duas operações: uma adição, que associa cada par de elementos $u, v \in V$ um elemento $u + v \in V$, chamado soma de u e v , e uma multiplicação por escalar, que associa a cada escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ e a cada elemento $u \in V$ um elemento $\alpha u \in V$. Dizemos que o conjunto V munido dessas duas operações é um espaço vetorial real (ou espaço vetorial sobre \mathbb{R}) se os seguintes axiomas são satisfeitos:

Em relação à adição:

$$(A1) \quad u + v = v + u, \forall u, v \in V \text{ (comutatividade).}$$

$$(A2) \quad (u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in V \text{ (associatividade).}$$

$$(A3) \quad \exists 0 \in V \text{ tal que } 0 + u = u, \forall u \in V \text{ (existência de elemento neutro para a adição).}$$

$$(A4) \quad \forall u \in V, \exists (-u) \in V \text{ tal que } u + (-u) = 0 \text{ (existência de elemento simétrico ou oposto).}$$

Em relação à multiplicação por escalar:

$$(M1) \quad (\alpha\beta)u = \alpha(\beta u), \forall u \in V \text{ e } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$(M2) \quad 1u = u, \forall u \in V \text{ (onde } 1 \text{ é o elemento neutro da multiplicação em } \mathbb{R}\text{)}.$$

$$(M3) \quad \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \forall u, v \in V \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$(M4) \quad (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u, \forall u \in V \text{ e } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Note que o conjunto \mathbb{N} dos números naturais e o conjunto \mathbb{Z} dos números inteiros não são espaços vetoriais reais. Em nenhum dos dois conjuntos numéricos, a operação multiplicação por escalar está bem definida, isto é, nem sempre a multiplicação de qualquer número real por um elemento do conjunto \mathbb{N} (ou \mathbb{Z}) é um elemento do conjunto \mathbb{N} (ou \mathbb{Z}).

Observação 1.1.

- 1) *Os elementos de um espaço vetorial são chamados de vetores, independentemente de sua natureza. O elemento neutro da adição é chamado vetor nulo.*
- 2) *A partir deste momento, quando se disser que V é um espaço vetorial, deve ficar subentendido que V é um espaço vetorial real.*

Exemplos de espaços vetoriais

De acordo com a definição acima, para verificar se um conjunto é ou não um exemplo de espaço vetorial, é necessário a princípio que no conjunto as operações de adição e multiplicação por escalar estejam bem definidas. A seguir, veremos alguns exemplos importantes de espaços vetoriais.

Exemplo 1.1. O espaço \mathbb{R}^n , com n natural não nulo qualquer.

O conjunto \mathbb{R}^n é formado pelas n -uplas de números reais

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n); a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

é um espaço vetorial com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar definidas da seguinte maneira: dados $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

e

$$\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n).$$

O vetor nulo de \mathbb{R}^n é a n -nupla de zeros $0 = (0, 0, \dots, 0)$ e o simétrico de um elemento qualquer $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ é dado por $(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$.

Os três casos especiais mais importantes do espaço vetorial \mathbb{R}^n são \mathbb{R} (os números reais), \mathbb{R}^2 (os vetores do plano) e \mathbb{R}^3 (os vetores do espaço tridimensional).

Exemplo 1.2. Espaço matricial $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

O conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ de todas as matrizes de ordem $m \times n$ com coeficientes reais é um espaço vetorial com as operações usuais de adição de matrizes e multiplicação por escalar, a saber:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{ij}, \text{ com } A = (a_{ij})_{ij}, B = (b_{ij})_{ij} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

e

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{ij}, \text{ com } A = (a_{ij})_{ij} \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}.$$

O vetor nulo de $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ é a matriz nula $0_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ e o simétrico de uma

matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ é dado por

$$-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Em particular, o conjunto $M_n(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas de ordem n é um espaço vetorial relativamente às mesmas operações definidas em $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Exemplo 1.3. Espaço polinomial $\mathcal{P}_n(t)$, com n natural não nulo qualquer.

O conjunto $\mathcal{P}_n(t)$ de todos os polinômios com coeficientes reais de grau $\leq n$, acrescido do polinômio nulo, dado por:

$$\mathcal{P}_n(t) = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n; a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, n\}$$

é um espaço vetorial com as operações usuais de adição de polinômios e multiplicação por escalar. Mais especificamente, sejam $p, q \in \mathcal{P}_n(t)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n$ e $q(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \cdots + b_nt^n$, com $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ e $\forall i = 1, 2, \dots, n$, então, definimos:

$$(p + q)(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + \cdots + (a_n + b_n)t^n$$

e

$$(\alpha p)(t) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)t + (\alpha a_2)t^2 + \cdots + (\alpha a_n)t^n.$$

O vetor nulo de $\mathcal{P}_n(t)$ é o polinômio nulo $0 = 0 + 0t + 0t^2 + \cdots + 0t^n$ e o simétrico de um polinômio arbitrário $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n \in \mathcal{P}_n(t)$ é dado por $-p(t) = (-a_0) + (-a_1)t + (-a_2)t^2 + \cdots + (-a_n)t^n$.

Exemplo 1.4. Espaço das funções $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$, onde X é um conjunto não vazio qualquer.

O conjunto $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ constituído por todas as funções $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é um espaço vetorial com as seguintes operações de adição e multiplicação por escalar: dadas as funções $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \text{ para cada } x \in X$$

e

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \text{ para cada } x \in X.$$

O vetor nulo de $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ é a função nula e o simétrico de uma função $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ é dada por $(-f)(x) = -f(x)$.

Observação 1.2. De acordo com exemplos dados, vetores de um espaço vetorial podem ser números reais, matrizes, polinômios e funções. A justificativa está no fato de que as operações

de adição e multiplicação por escalar realizadas com esses elementos de natureza tão distinta possuírem comportamentos idênticos de vetores do \mathbb{R}^2 e do \mathbb{R}^3 .

Propriedades elementares dos espaços vetoriais

Em decorrência dos axiomas da definição de um espaço vetorial, algumas propriedades, apesar de básicas, são importantes no estudo desta estrutura algébrica. As demonstrações destas propriedades abaixo podem ser consultadas em [12].

Seja V um espaço vetorial. Temos que:

(P1) Existe um único vetor nulo em V .

(P2) Para cada $u \in V$, existe um único simétrico $-u \in V$.

(P3) Se $u + w = v + w$ então $u = v$, $\forall u, v \in V$.

(P4) $-(-u) = u$, $\forall u \in V$.

(P5) $0u = 0$, $\forall u \in V$.

(P6) $\alpha 0 = 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(P7) Se $\alpha u = 0$ então $\alpha = 0$ ou $u = 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in V$.

(P8) $(-1)u = -u$, $\forall u \in V$.

(P8) $(-\alpha)u = \alpha(-u) = -\alpha u$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in V$.

1.1.1 Subespaços vetoriais

Considere V um espaço vetorial. Um subconjunto não vazio S de V é um subespaço vetorial de V se S for um espaço vetorial com relação às mesmas operações definidas em V .

O teorema abaixo estabelece condições necessárias e suficientes para que um subconjunto de um espaço vetorial seja subespaço.

Teorema 1.1. *Seja S um subconjunto de um espaço vetorial V . Então S é um subespaço vetorial de V se, e somente se, S satisfaz as seguintes condições:*

(i) $S \neq \emptyset$;

(ii) Para todo $u, v \in S$, a soma $u + v \in S$;

(iii) Para todo $u \in S$ e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o produto escalar $\alpha u \in S$.

Note que, para provar o item (i), basta exibir um elemento qualquer de S , porém, é usual exibir o vetor nulo. Tal escolha não é por caso, pois se o vetor nulo não fosse elemento de S , então S não seria ele mesmo um espaço vetorial. Além disso, os itens (ii) e (iii) do Teorema 1.1 nos dizem que S é fechado em relação à adição e em relação à multiplicação por escalar, respectivamente.

Exemplos de subespaços vetoriais

Aqui, veremos alguns exemplos de subespaços comuns a qualquer espaço vetorial. E ainda, determinaremos geometricamente os subespaços do \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .

Exemplo 1.5. Seja V um espaço vetorial qualquer, o conjunto $\{0\}$, conjunto consistindo apenas pelo vetor nulo, e o próprio espaço V são subespaços vetoriais de V . Esses dois subespaços são chamados subespaços triviais de V . Os demais subespaços são chamados subespaços próprios de V .

Exemplo 1.6. Dados V um espaço vetorial e w um elemento arbitrário de V , o conjunto $S = \{\lambda w; \lambda \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de V . De fato,

(i) Pela propriedade (P5), $0 = 0w \in S, \forall w \in V$, logo, $S \neq \emptyset$;

(ii) Se $u, v \in S$, digamos, $u = \lambda_1 w$ e $v = \lambda_2 w$ com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, então $u + v = (\lambda_1 + \lambda_2)w \in S$;

(iii) Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in S$, então $\alpha u = (\alpha \lambda)w \in S$.

Neste exemplo, os elementos de S são caracterizados por serem todos produto de um número real qualquer por um elemento fixo de V . Note que variando w em V , existem infinitos subespaços. Em particular, se w é o vetor nulo, temos o subespaço trivial $\{0\}$.

Exemplo 1.7. Identificação geométrica dos subespaços no \mathbb{R}^2

Já conhecemos alguns subespaços do \mathbb{R}^2 :

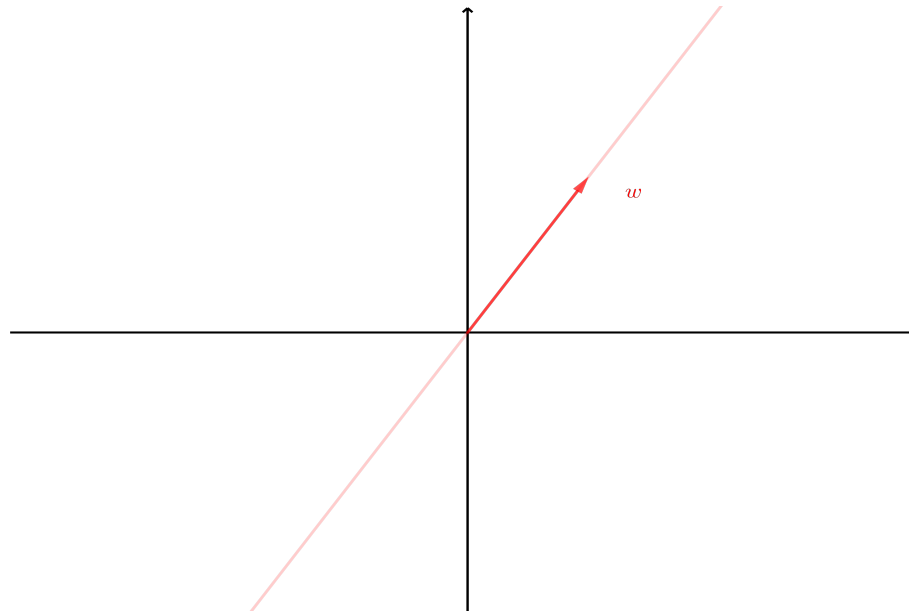
a) $\{(0, 0)\}$ e \mathbb{R}^2 , que são os subespaços triviais;

b) $\{\lambda w; \lambda \in \mathbb{R}\}$, onde $w \in \mathbb{R}^2$. Note que, variando w , existem infinitos exemplos de subespaços.

Veremos que esses são os únicos subespaços de \mathbb{R}^2 : são em número infinito, mas são todos de algum dos tipos acima. Para isso, vamos considerar o plano cartesiano, que é a representação geométrica do conjunto \mathbb{R}^2 . Cada elemento $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é representado como um vetor com origem no ponto $(0, 0)$ e fim no ponto (x, y) .

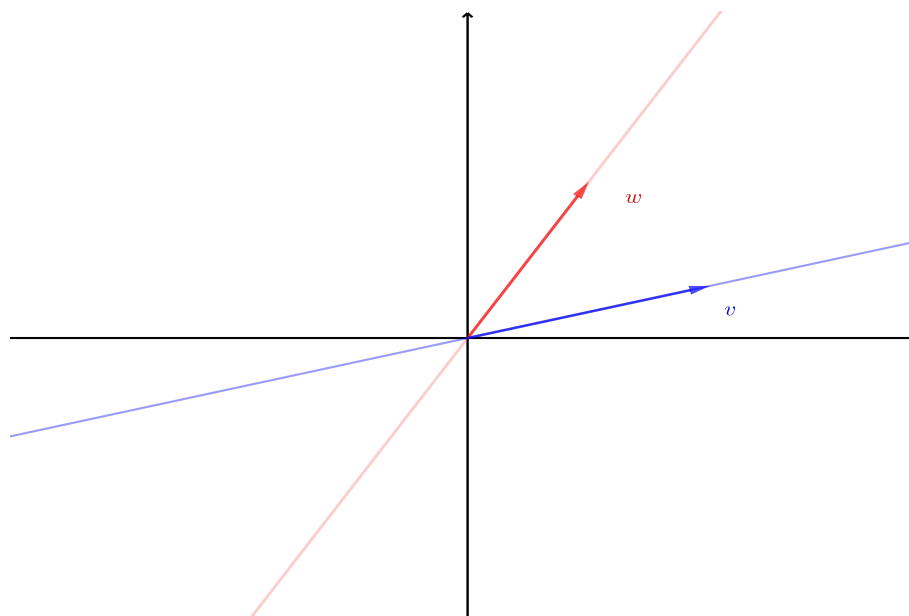
Considere S um subespaço de \mathbb{R}^2 diferente do $\{(0, 0)\}$. Então, um vetor w não nulo pertence a S . Como S é fechado em relação a multiplicação por escalar, todos os múltiplos de w também são elementos de S . Com isso, conforme mostra a Figura [1.1](#), a reta que contém w está contida em S e passa pela origem.

Figura 1.1: Uma reta em \mathbb{R}^2 .

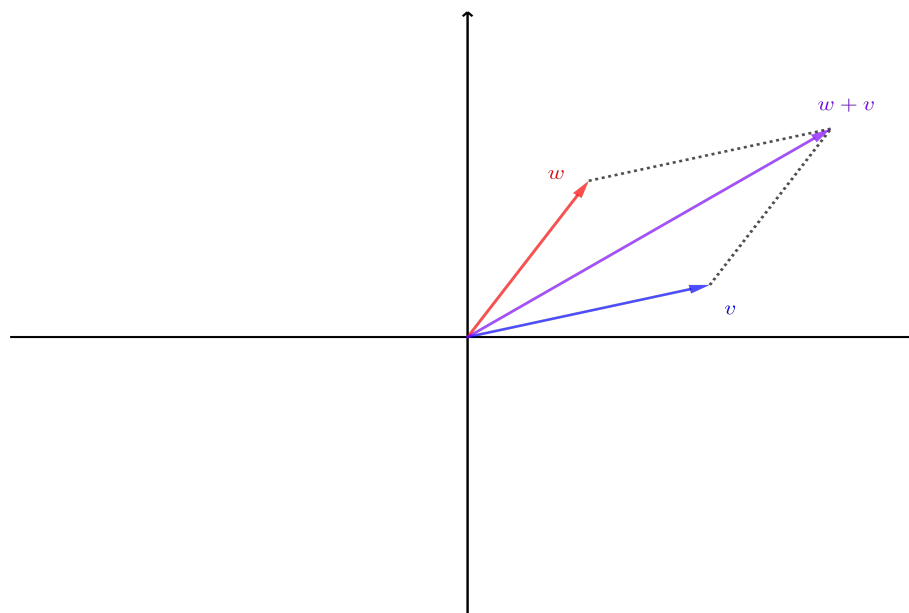


Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Suponhamos agora que, além de conter w , S também contenha algum outro vetor v de \mathbb{R}^2 que não pertença à reta que contém w . Nesse caso, S também deve conter a reta dos múltiplos de v , como mostra a Figura [1.2](#).

Figura 1.2: Retas em \mathbb{R}^2 .

Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Figura 1.3: Soma de vetores em \mathbb{R}^2 .

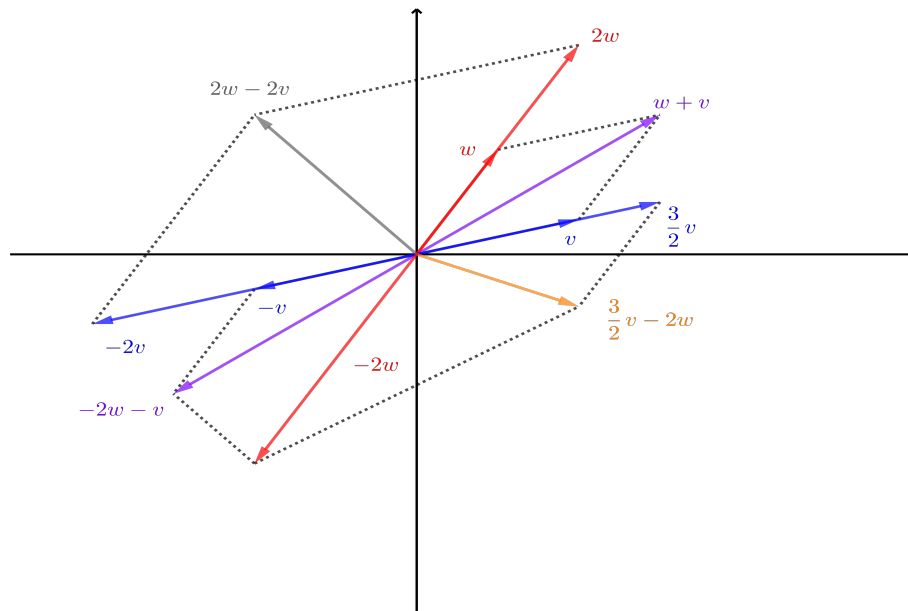
Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Note que, neste caso, o subespaço S não pode consistir apenas das duas retas, pois a adição não está bem definida no conjunto formado pela união das duas retas. Se

considerarmos, por exemplo, o vetor $w + v$, veremos que ele não pertence a nenhuma das duas retas, veja a Figura 1.3.

Observe, agora, que qualquer vetor de \mathbb{R}^2 pode ser obtido pela soma de vetores pertencentes a duas retas diferentes, e isso significa que, nesse caso, $S = \mathbb{R}^2$. Na Figura 1.4, vemos alguns exemplos de vetores em diversas direções, obtidos pela soma de dois vetores.

Figura 1.4: Vetores no \mathbb{R}^2 .



Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Resumindo, temos as seguintes afirmações para um subespaço S de \mathbb{R}^2 :

- (a) Se S não contém vetores não nulos, $S = \{(0, 0)\}$;
- (b) Se S contém um vetor não nulo, então S também contém a reta que contém esse vetor e que passa pela origem;
- (c) Se S contém dois vetores não nulos, que não estejam sobre uma mesma reta, então $S = \mathbb{R}^2$.

Com isso, os únicos subespaços vetoriais de \mathbb{R}^2 são $\{(0, 0)\}$, \mathbb{R}^2 e as retas de \mathbb{R}^2 que passam pela origem.

Exemplo 1.8. Identificação geométrica dos subespaços no \mathbb{R}^3 . De modo análogo ao caso do \mathbb{R}^2 , os subespaços vetoriais de \mathbb{R}^3 são do seguinte tipo:

- a) $\{(0, 0, 0)\}$ e \mathbb{R}^3 (triviais);
- b) retas do \mathbb{R}^3 que contêm a origem ($0 = (0, 0, 0)$ neste caso);
- c) planos de \mathbb{R}^3 que contêm a origem.

Exemplo 1.9. Interseção de dois subespaços.

Sejam S_1 e S_2 dois subespaços de um espaço vetorial V . A interseção $S_1 \cap S_2$ também é um subespaço de V . De fato, note que:

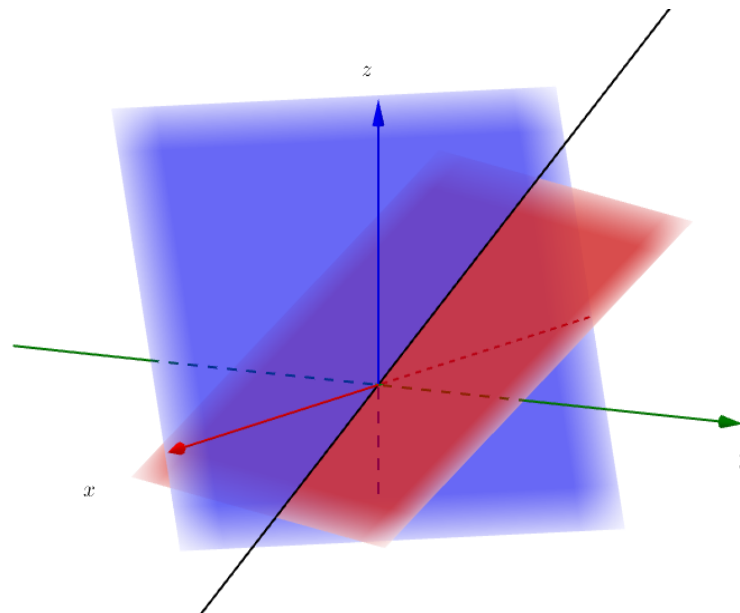
- (i) $0 \in S_i, \forall i = 1, 2$, pois S_1 e S_2 são subespaços de V . Logo, $0 \in S_1 \cap S_2$ e, portanto, $S \neq \emptyset$.

Supondo que $u, v \in S_1 \cap S_2$, então $u, v \in S_i, \forall i = 1, 2$. Assim, como S_1 e S_2 são subespaços de V temos que:

- (ii) $u + v \in S_i, \forall i = 1, 2$, logo, $u + v \in S_1 \cap S_2$;

- (iii) Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha u \in S_i, \forall i = 1, 2$, o que implica que $\alpha u \in S_1 \cap S_2$.

Figura 1.5: Interseção de dois planos no \mathbb{R}^3 .



Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Observe na figura acima que a interseção dos dois planos que passam pela origem, os quais são subespaços de \mathbb{R}^3 , é uma reta que passa pela origem, e portanto, pelo Exemplo 1.9, é um subespaço de \mathbb{R}^3 .

Exemplo 1.10. Soma de dois subespaços.

Sejam S_1 e S_2 dois subespaços de um espaço vetorial V . A soma $S_1 + S_2$ dada pelo conjunto:

$$S_1 + S_2 = \{u \in V; u = u_1 + u_2, u_1 \in S_1 \text{ e } u_2 \in S_2\}$$

é um subespaço vetorial de V . Com efeito,

(i) $S \neq \emptyset$, pois $0 = 0 + 0 \in S_1 + S_2$.

Agora, tome $u, v \in S_1 + S_2$, então existem $u_1, v_1 \in S_1$ e $u_2, v_2 \in S_2$ tais que $u = u_1 + u_2$ e $v = v_1 + v_2$. Assim, como S_1 e S_2 são subespaços de V temos que:

(ii) $u_i + v_i \in S_i, \forall i = 1, 2$, portanto,

$$u + v = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) = (u_1 + v_1) + (v_1 + v_2) \in S_1 + S_2;$$

(iii) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha u_i \in S_i, \forall i = 1, 2$, logo,

$$\alpha u = \alpha(u_1 + u_2) = \alpha u_1 + \alpha u_2 \in S_1 + S_2.$$

Sejam U e W dois subespaços vetoriais de V . Dizemos que V é a soma direta de U e W , simbolizada por $V = U \oplus W$, se $V = U + W$ e $U \cap W = \{0\}$.

A proposição abaixo nos diz que a soma direta está relacionada à decomposição única de um vetor como soma de dois subespaços.

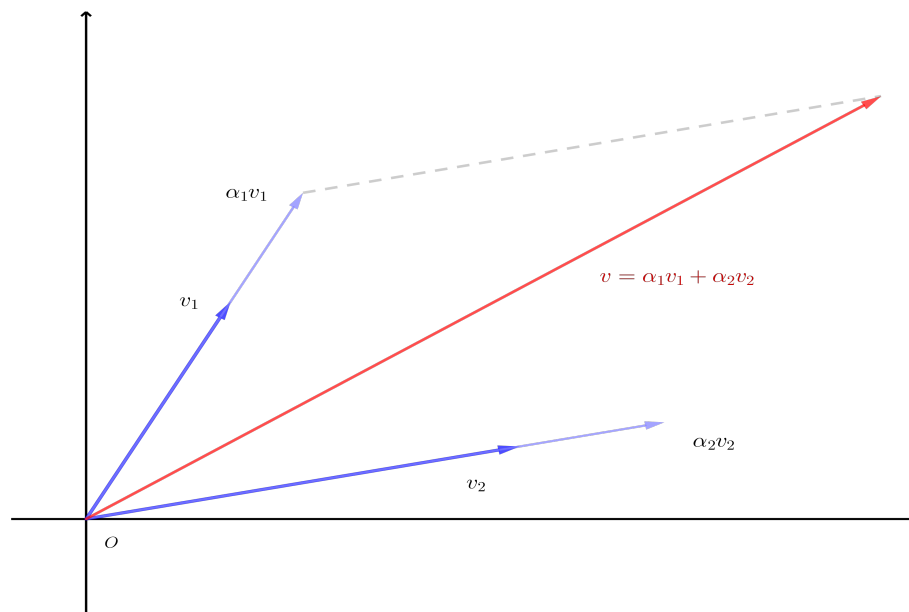
Teorema 1.2. *Sejam U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V . Então, $V = U \oplus W$ se, e somente se, cada vetor $v \in V$ pode ser escrito de modo único como $v = u + w$, com $u \in U$ e $w \in W$.*

1.1.2 Combinações lineares e subespaços gerados

Sejam V um espaço vetorial e $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Dizemos que um vetor $v \in V$ é *uma combinação linear* dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ se existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i.$$

Figura 1.6: Interpretação geométrica de combinação linear de dois vetores no \mathbb{R}^2 .



Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Considere v_1, v_2, \dots, v_n vetores em um espaço vetorial V . O conjunto S formado por todos vetores de V que são combinações lineares dos vetores v_1, v_2, \dots, v_n é um subespaço vetorial de V , chamado *subespaço gerado pelos vetores* v_1, v_2, \dots, v_n . De fato, o conjunto S de todas as combinações lineares de v_1, v_2, \dots, v_n é expresso por

$$S = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n; \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Para mostrar que S é um subespaço vetorial de V , devemos provar as três condições do Teorema [1.1](#). Assim, note que

(i) $S \neq \emptyset$, pois $0 = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n \in S$.

Se $u, v \in S$ então existem escalares $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, n$, tais que

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \quad \text{e} \quad v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n.$$

Assim,

(ii) desde que $\alpha_i + \beta_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, n$, obtemos

$$u + v = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + (\alpha_2 + \beta_2)v_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)v_n \in S;$$

(iii) dado $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que $\lambda \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, n$, logo,

$$\lambda u = (\lambda \alpha_1)v_1 + (\lambda \alpha_2)v_2 + \cdots + (\lambda \alpha_n)v_n \in S.$$

Denotamos este subespaço S por $[v_1, v_2, \dots, v_n]$ e, dizemos que v_1, v_2, \dots, v_n são geradores de $[v_1, v_2, \dots, v_n]$. Assim,

$$S = [v_1, v_2, \dots, v_n] = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n; \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Exemplo 1.11. Os vetores $i = (1, 0)$ e $j = (0, 1)$ geram o espaço vetorial \mathbb{R}^2 , pois podemos escrever qualquer vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ como combinação linear dos vetores i e j : $(x, y) = xi + yj = x(1, 0) + y(0, 1)$ então $[i, j] = \mathbb{R}^2$.

Interpretação geométrica de subespaço gerado no \mathbb{R}^3 .

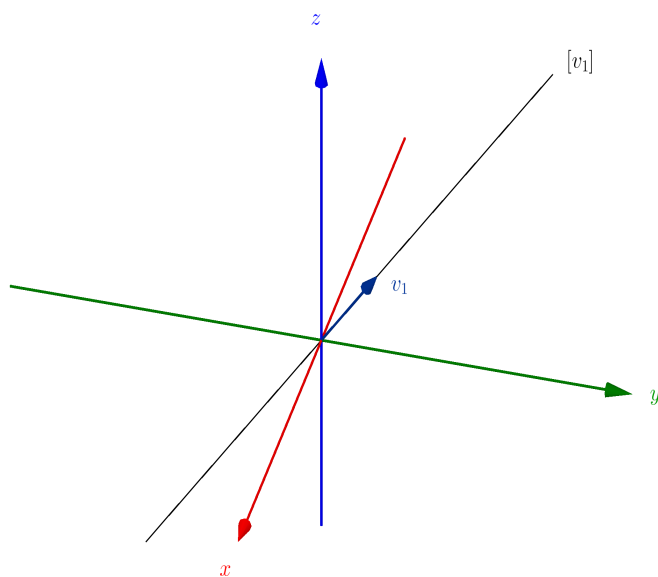
O subespaço gerado por um vetor $v_1 \in \mathbb{R}^3$, com $v_1 \neq 0$, é uma reta que passa pela origem, veja Figura 1.7. Se a esse vetor acrescentarmos v_2 , colineares entre si, o subespaço $[v_1, v_2]$ continuará sendo a mesma reta, isto é, $[v_1] = [v_1, v_2]$, como mostra a Figura 1.8.

Na Figura 1.9, vimos que se $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ tais que $\alpha v_1 \neq v_2$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, então o subespaço gerado por $[v_1, v_2]$ será o plano que passa pela origem e contém v_1 e v_2 .

Note que se tivermos um $v_3 \in [v_1, v_2]$, então o subespaço gerado por $[v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2]$, visto que todo vetor escrito como combinação linear de v_1, v_2, v_3 é escrito como

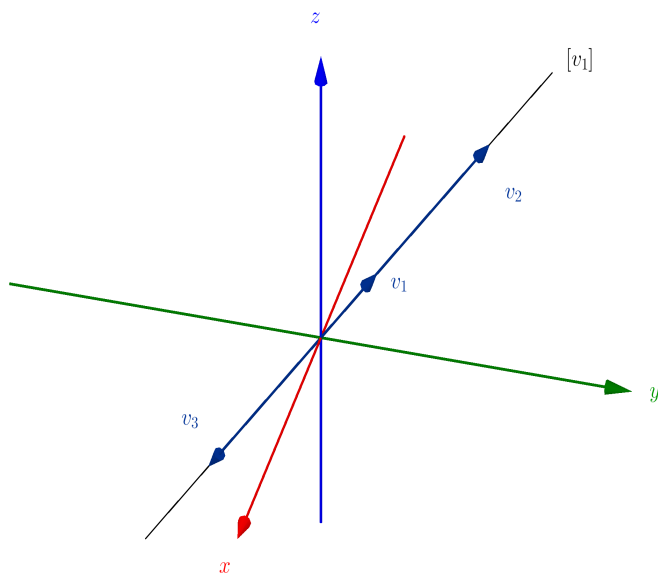
combinação linear apenas de v_1 e v_2 , dado que v_3 é combinação de v_1 e v_2 , conforme vemos na Figura [1.10](#).

Figura 1.7: Reta gerada por v_1 no \mathbb{R}^3 .



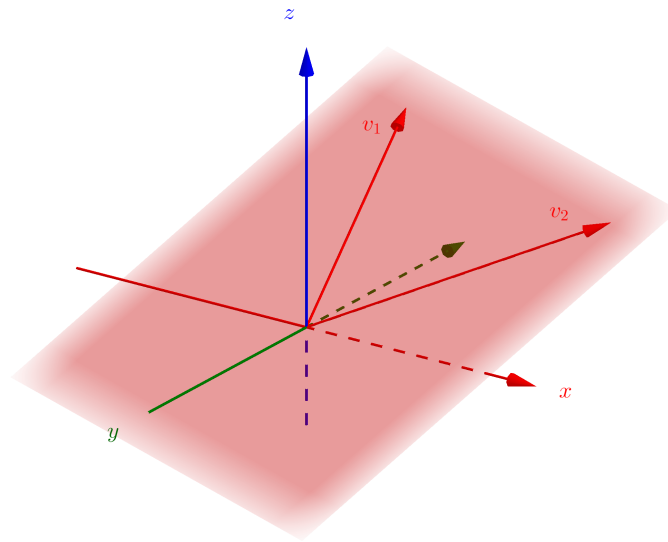
Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Figura 1.8: Reta gerada por dois vetores v_1 e v_2 colineares entre si no \mathbb{R}^3 .



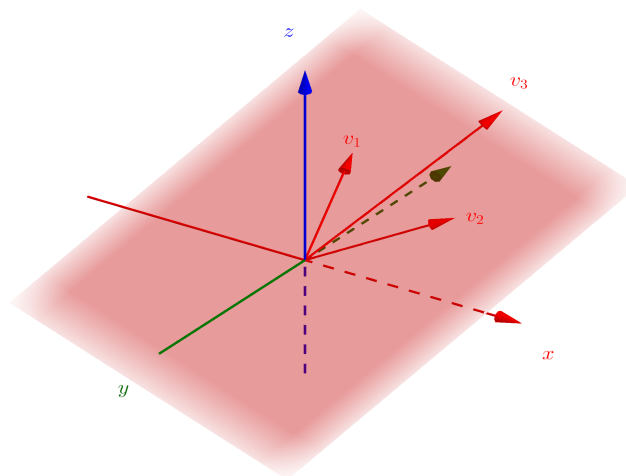
Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Figura 1.9: Plano que contém origem, v_1 e v_2 no \mathbb{R}^3 .



Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Figura 1.10: Plano que contém origem, v_1 e v_2 e v_3 no \mathbb{R}^3 .

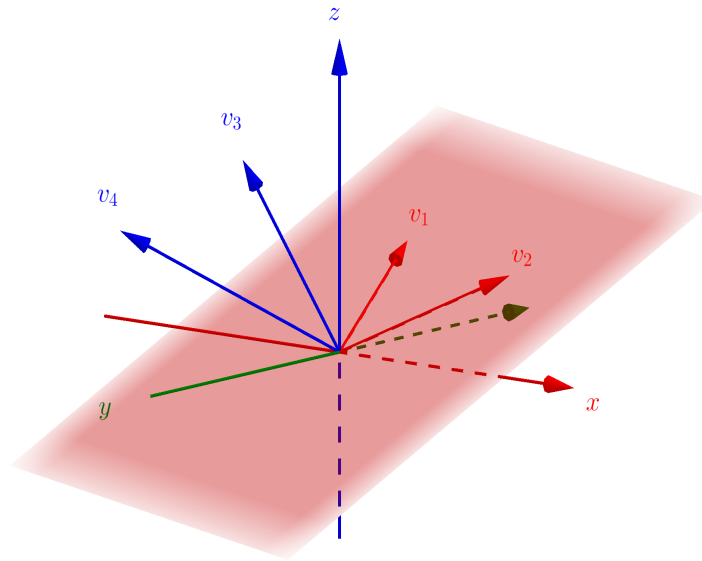


Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

O subespaço gerado por três vetores não coplanares é o próprio \mathbb{R}^3 , ver Figura [1.11](#). Se a estes vetores acrescentarmos um vetor v_4 qualquer, o subespaço gerado pelos quatros

vetores continuará sendo o \mathbb{R}^3 , isto é, $[v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2, v_3, v_4] = \mathbb{R}^3$.

Figura 1.11: Subespaço gerado por v_1, v_2, v_3 e v_4 no \mathbb{R}^3 .



Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

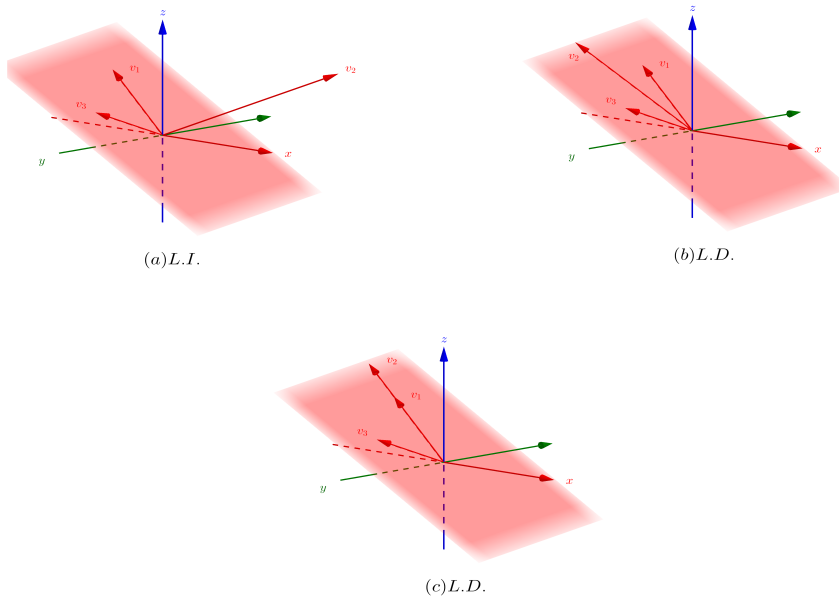
1.1.3 Base e dimensão

De acordo com a subseção anterior, um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ gera um dado espaço vetorial V , se cada vetor em V pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores v_1, v_2, \dots, v_n . No entanto, vimos que, em geral, há mais de um conjunto de vetores que descreve V . A situação ideal é determinar o menor conjunto gerador de V de modo que cada elemento de V se escreva de maneira única como combinação linear dos vetores deste conjunto gerador. Conjuntos geradores com esta propriedade são chamados de conjuntos linearmente independentes, desempenhando um papel importante na teoria sobre espaços vetoriais.

Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ em um espaço vetorial V é chamado *linearmente independente (LI)* se a equação vetorial:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

Figura 1.13: Conjunto de três vetores L.I ou L.D no \mathbb{R}^3 .



Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Exemplo 1.13. O conjunto $B = \{(1, 1), (0, -1)\}$ é uma base de \mathbb{R}^2 . De fato,

(i) B gera \mathbb{R}^2 , pois cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é escrito de forma única como

$$(x, y) = x(1, 1) + (x - y)(0, -1).$$

(ii) B é LI, pois a equação $a(1, 1) + b(0, -1) = (0, 0)$ implica em $a = b = 0$.

Observação 1.3. Por convenção, o conjunto vazio é uma base do espaço vetorial $\{0\}$.

Dizemos que um espaço vetorial V é finitamente gerado se possuir um conjunto gerador finito. Uma consequência do próximo resultado é que duas bases quaisquer de um espaço vetorial finitamente gerado não nulo possuem o mesmo número de vetores.

Teorema 1.3. Se $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base de um espaço vetorial V , então todo conjunto com mais de n vetores será linearmente dependente.

Seja V um espaço vetorial. Se V admite uma base finita, V é chamado *espaço vetorial de dimensão finita* e chamamos de dimensão de V , denotada por $\dim V$, o número de vetores em tal base. Caso contrário, dizemos que V é um *espaço vetorial de dimensão infinita*.

Exemplo 1.14.

(i) $\dim\{0\} = 0$,

(ii) $\dim \mathbb{R}^n = n$. Em particular, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ e $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

1.1.4 Mudança de base

Considere $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $B' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ bases ordenadas de um espaço vetorial V de dimensão finita. Se v é um vetor qualquer em V , então existem $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}, \forall 1 \leq i \leq n$, tais que:

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n \quad (1.1)$$

e

$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n. \quad (1.2)$$

Como cada um dos vetores da base B pode ser escrito como combinação linear dos vetores da base B' segue que:

$$\begin{aligned} u_1 &= x_{11}v_1 + x_{21}v_2 + \dots + x_{n1}v_n \\ u_2 &= x_{12}v_1 + x_{22}v_2 + \dots + x_{n2}v_n \\ &\vdots \\ u_n &= x_{1n}v_1 + x_{2n}v_2 + \dots + x_{nn}v_n. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Substituindo os vetores u_i de (1.3) em (1.1), obtemos

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1(x_{11}v_1 + \dots + x_{n1}v_n) + \alpha_2(x_{12}v_1 + \dots + x_{n2}v_n) + \dots + \\ &\quad \alpha_n(x_{1n}v_1 + \dots + x_{nn}v_n) \\ &= (\alpha_1 x_{11} + \dots + \alpha_n x_{1n})v_1 + (\alpha_1 x_{21} + \dots + \alpha_n x_{2n})v_2 + \dots + \\ &\quad (\alpha_1 x_{n1} + \dots + \alpha_n x_{nn})v_n. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Comparando (1.2) e (1.4), temos que:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha_1 x_{11} + \alpha_2 x_{12} + \cdots + \alpha_n x_{1n} \\ \beta_2 &= \alpha_1 x_{21} + \alpha_2 x_{22} + \cdots + \alpha_n x_{2n} \\ &\vdots \\ \beta_n &= \alpha_1 x_{n1} + \alpha_2 x_{n2} + \cdots + \alpha_n x_{nn}.\end{aligned}$$

Em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

ou

$$[v]_{B'} = M[v]_B, \quad (1.5)$$

onde $[v]_B$ e $[v]_{B'}$ são as matrizes-coordenada de v em relação às bases B e B' , respectivamente. A matriz $M = (a_{ij})_{n \times n}$ é chamada *matriz mudança (ou matriz transição) de base B para a base B'* .

Ao comparar a matriz M com a identidade (1.3), note que cada coluna, pela base ordenada, é formada pelos escalares dos vetores da base B em relação a base B' , isto é:

$$[u_1]_{B'} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}, \quad [u_2]_{B'} = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad [u_n]_{B'} = \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix}.$$

1.2 Espaço com produto interno

Na disciplina Geometria Analítica estudamos uma operação entre dois vetores no \mathbb{R}^2 ou no \mathbb{R}^3 , chamada *produto escalar*, a qual associa a todo par de vetores um número real, estabelecendo assim algumas propriedades geométricas tais como comprimento de um vetor,

distância entre vetores, ângulo entre vetores e ortogonalidade.

Os axiomas da definição de espaço vetorial não são suficientes para definir estas noções geométricas em um espaço vetorial real. É necessário a introdução do conceito de produto interno de modo a generalizar tais propriedades em um espaço vetorial real qualquer.

Seja V um espaço vetorial. Um *produto interno sobre V* é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que, a cada par de vetores $(u, v) \in V \times V$ associa um número real, simbolizado por $\langle u, v \rangle$, tal que satisfaz os seguintes axiomas para quaisquer $u, v, w \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

- a) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$;
- b) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$;
- c) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$;
- d) $\langle u, u \rangle \geq 0$ e $\langle u, u \rangle = 0$ se, e somente se $u = 0$.

Um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno é chamado *espaço vetorial euclidiano*.

Exemplo 1.15. O espaço euclidiano \mathbb{R}^n

O produto interno em \mathbb{R}^n é definido por:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

com $v_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $v_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Este produto é conhecido como *produto interno canônico ou produto escalar de \mathbb{R}^n* .

1.2.1 Norma ou módulo de um vetor

Sejam V um espaço vetorial euclidiano e $v \in V$. Chama-se *norma de v* o número real dado por:

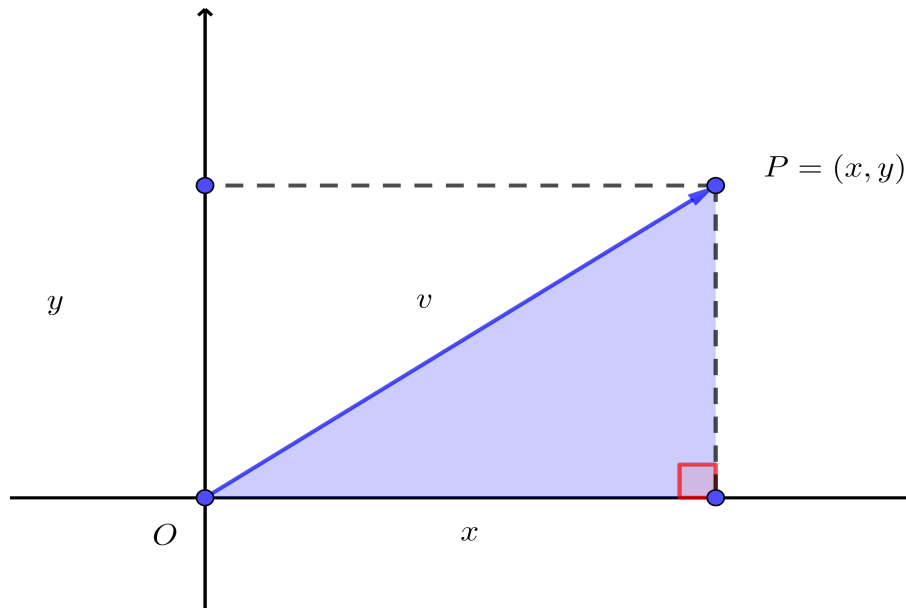
$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Exemplo 1.16. A norma do vetor $v = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ com relação ao produto interno definido no Exemplo 1.15 é dado por:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Considerando o plano \mathbb{R}^2 e um ponto P de coordenadas (x, y) , conforme mostra a (Figura 1.14), observamos que a norma do vetor $v = \overrightarrow{OP}$ coincide com a medida da hipotenusa do triângulo retângulo determinado por x e y . Em \mathbb{R}^3 , a norma de um vetor $v = (x_1, x_2, x_3)$ coincide com a medida da diagonal do paralelepípedo formado por x_1, x_2 e x_3 . Assim, a interpretação geométrica que podemos dar à norma de um vetor v no espaço euclidiano \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 é também conhecida como *módulo ou comprimento de v* .

Figura 1.14: Vetor no plano cartesiano.



Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Observação 1.4.

- 1) Se $\|v\| = 1$, isto é, $\langle v, v \rangle = 1$, o vetor é chamado *vetor unitário*. Neste caso, dizemos que v está *normalizado*.

2) Todo vetor não nulo $v \in V$ pode ser normalizado, basta fazer $u = \frac{v}{\|v\|}$. De fato,

$$\|u\| = \sqrt{\left\langle \frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle} = \sqrt{\frac{\langle v, v \rangle}{\|v\|^2}} = \sqrt{\frac{\|v\|^2}{\|v\|^2}} = 1.$$

Propriedades das normas

Seja V um espaço vetorial euclidiano. Para quaisquer $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que:

N_1) $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0$ se, e somente se, $v = 0$;

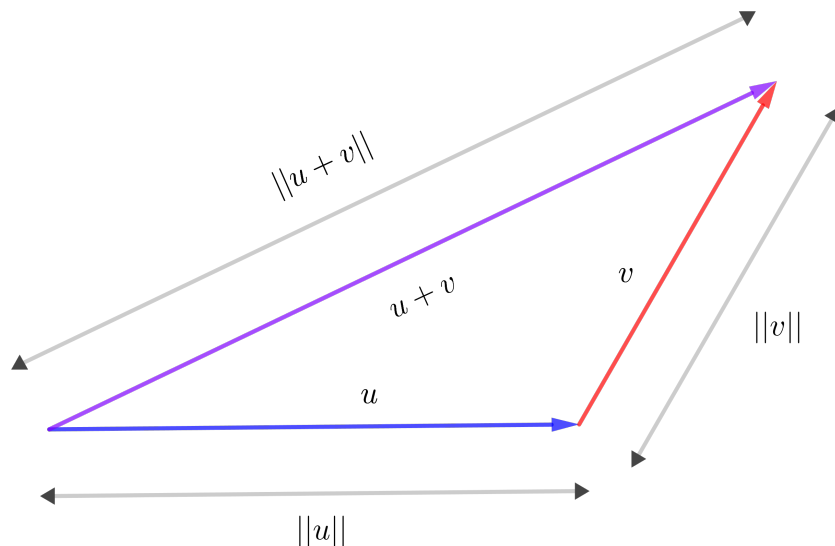
N_2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$;

N_3) $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$ (Desigualdade de Cauchy-Schwarz);

N_4) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Desigualdade Triangular).

A desigualdade triangular vista no \mathbb{R}^2 ou no \mathbb{R}^3 confirma a propriedade geométrica de que, em um triângulo qualquer, a soma dos comprimentos de dois lados é maior que o comprimento do terceiro lado, conforme mostra a figura abaixo. A igualdade ocorre apenas quando os dois vetores são colineares.

Figura 1.15: Desigualdade Triangular.



Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Chama-se *distância* entre dois vetores u e v o número real simbolizado por $d(u, v)$ e dado por:

$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

A Figura [1.16](#) ilustra geometricamente a distância entre dois vetores no plano.

1.2.2 Ângulo entre dois vetores

Sejam V um espaço vetorial euclidiano e $u, v \in V$ não nulos. A desigualdade de Cauchy-Schwarz nos dá a possibilidade de definir ângulo entre dois vetores não nulos da seguinte maneira:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\| \iff -\|u\| \|v\| \leq \langle u, v \rangle \leq \|u\| \|v\|$$

Como os vetores u e v são não nulos, suas normas são números reais positivos. Assim, podemos dividir cada termo da desigualdade acima por $\|u\| \|v\|$. Então,

$$-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \leq 1.$$

Do estudo das funções trigonométricas, o *ângulo* θ formado pelos vetores u e v é dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}, \quad \text{com } 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Note que esta fórmula coincide para o cálculo do ângulo de dois vetores no plano e no espaço. De fato, considere $u, v \in \mathbb{R}^2$ não nulos. Se o ângulo entre u e v é θ , conforme mostra a Figura [1.16](#), então a lei dos cossenos nos dá:

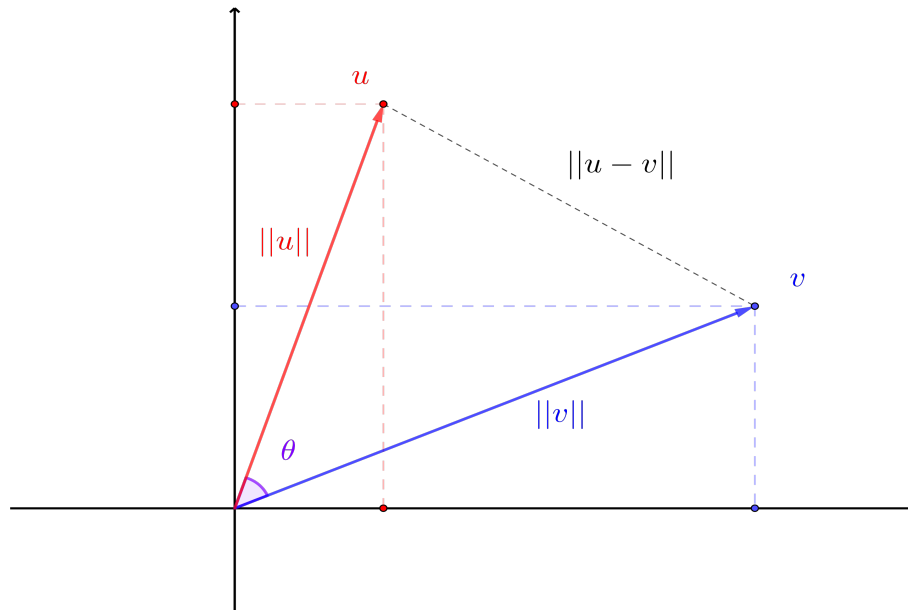
$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\| \|v\| \cos \theta.$$

Desde que $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$ segue que $\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos \theta$. Logo,

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|},$$

onde θ é encontrado em uma tabela de cossenos.

Figura 1.16: Distância e ângulo entre dois vetores.



Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Um caso particular é quando $\theta = 90^\circ$, ou seja, quando os vetores formam um ângulo reto. Como $\cos 90^\circ = 0 = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\|v\|}$, concluímos que:

Dois vetores u e v de um espaço vetorial euclidiano são *ortogonais*, simbolizado por $u \perp v$, se $\langle u, v \rangle = 0$.

Observação 1.5.

- 1) Se os vetores u e v são unitários, então $\cos \theta = \langle u, v \rangle$;
- 2) O vetor nulo de um espaço vetorial euclidiano V é ortogonal a qualquer $v \in V$, pois $\langle 0, v \rangle = \langle 0v, v \rangle = 0\langle v, v \rangle = 0$.

1.2.3 Bases ortogonais e ortonormais

Seja V um espaço vetorial euclidiano. Um subconjunto $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V é

- (i) *ortogonal*, se seus elementos são ortogonais dois a dois, isto é, $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, para todo $1 \leq i, j \leq n$ e $i \neq j$;

(ii) *ortonormal*, se B é ortogonal e todos os seus vetores são unitários, isto é,

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{para } i \neq j \\ 1, & \text{para } i = j. \end{cases}$$

Exemplo 1.17. A base canônica de \mathbb{R}^n com os produtos internos canônicos são conjuntos ortonormais.

A seguir, um resultado de grande importância envolvendo conjuntos ortogonais.

Teorema 1.4. *Seja $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ um conjunto ortogonal de vetores não nulos em um espaço vetorial euclidiano.*

(a) *Se $v \in [v_1, v_2, \dots, v_n]$, então $v = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i$;*

(b) *B é linearmente independente.*

Demonstração : (a) Seja $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, com $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $1 \leq i \leq n$. Então, como B é um conjunto ortogonal, temos, para $j = 1, 2, \dots, n$, que

$$\langle v, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle.$$

Portanto, $\alpha_j = \frac{\langle v, v_j \rangle}{\|v_j\|^2} v_j$, $\forall j = 1, 2, \dots, n$, obtendo assim o resultado desejado.

(b) Sejam $\alpha_i \in \mathbb{R}$, com $1 \leq i \leq n$, tais que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$. Fazendo o produto interno dos dois membros desta igualdade por v_i , temos

$$\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n, v_i \rangle = \langle 0, v_i \rangle.$$

Assim,

$$\alpha_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle + \dots + \alpha_n \langle v_n, v_i \rangle = 0.$$

Como, por hipótese, B é um conjunto ortogonal de vetores não nulos segue que $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, para $i \neq j$, e $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$, para $i = j$. Logo, $\alpha_i \langle v_i, v_i \rangle = 0$ e, assim, $\alpha_i = 0$. Como isto vale para todo $i = 1, \dots, n$, temos $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, o que implica em B é L.I.

Decorre do Teorema [1.4](#) que se B é um conjunto de n vetores dois a dois ortogonais em um espaço vetorial de dimensão n , então este conjunto será uma base ortogonal.

Outra consequência do Teorema [1.4](#) é que uma base ortonormal sempre pode ser obtida de uma base ortogonal normalizando cada vetor. Neste caso, se $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base ortogonal de V , então qualquer vetor $v \in V$ é dado por $v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle v_i$.

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

É um método que consiste na construção de uma base ortogonal a partir de uma base qualquer de um espaço vetorial, ou seja, transformar um conjunto $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de vetores que constituem uma base de um espaço vetorial V , não ortogonais, em um outro conjunto $B' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \subset V$ cujo produto interno de dois a dois vetores distintos seja igual a zero, produzindo assim uma base ortogonal e de modo que os subespaços gerados pelos dois conjuntos sejam os mesmos. Esta construção é feita de maneira indutiva como segue:

Seja V um espaço vetorial euclidiano. Supondo que v_1, v_2, \dots, v_n não são ortogonais, considere que:

- $w_1 = v_1$
- $w_2 = v_2 - \alpha_1 w_1$ é ortogonal a w_1 , onde $\alpha_1 = \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2}$. De fato,

$$\langle w_2, w_1 \rangle = \left\langle v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1, w_1 \right\rangle = \langle v_2, w_1 \rangle - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} \langle w_1, w_1 \rangle = 0.$$

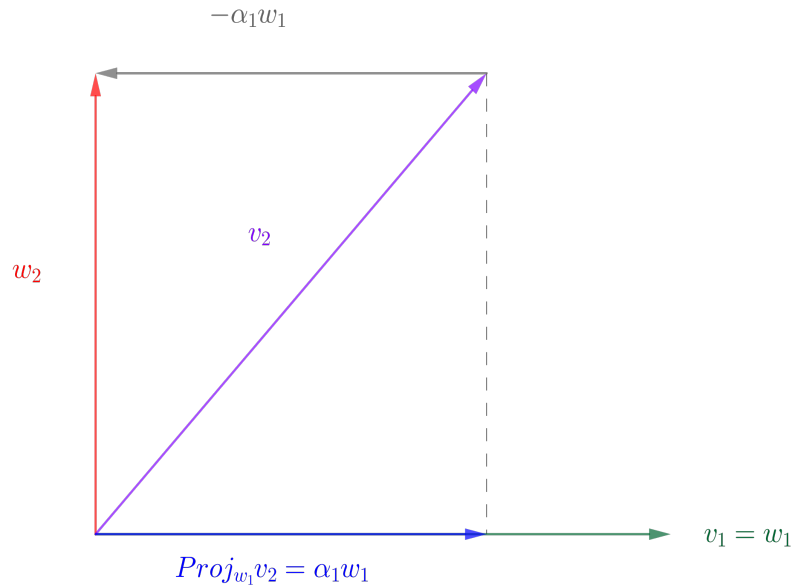
A Figura [1.17](#) nos mostra que o ângulo formado entre os vetores w_1 e w_2 é um ângulo reto.

- $w_3 = v_3 - \alpha_1 w_1 - \alpha_2 w_2$ é ortogonal aos vetores w_1 e w_2 , onde $\alpha_i = \frac{\langle v_3, w_i \rangle}{\|w_i\|^2}$ com $i = 1, 2$, veja a Figura [1.18](#). De fato, como já sabemos que w_1 e w_2 são ortogonais, então

$$\begin{aligned} \langle w_3, w_1 \rangle &= \left\langle v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2, w_1 \right\rangle \\ &= \langle v_3, w_1 \rangle - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} \langle w_1, w_1 \rangle - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} \langle w_2, w_1 \rangle = 0. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle w_3, w_2 \rangle &= \left\langle v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2, w_2 \right\rangle \\ &= \langle v_3, w_2 \rangle - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} \langle w_1, w_2 \rangle - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} \langle w_2, w_2 \rangle = 0.\end{aligned}$$

Figura 1.17: Vetor $v_2 - a_1 w_1$ 

Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Podemos concluir o método por indução, admitindo que, por esse processo, tenham sido obtidos $(n - 1)$ vetores $w_1, w_2, \dots, w_{(n-1)}$ ortogonais entre si. Definindo:

$$w_n = v_n - \alpha_{(n-1)} w_{(n-1)} - \dots - \alpha_2 w_2 - \alpha_1 w_1$$

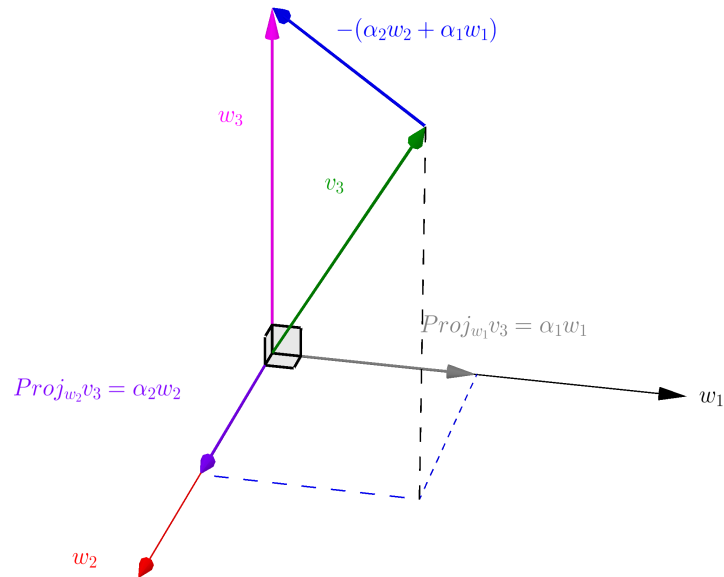
com $\alpha_i = \frac{\langle v_n, w_i \rangle}{\|w_i\|^2}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n - 1$, é possível mostrar que w_n é ortogonal aos vetores $w_1, w_2, \dots, w_{(n-1)}$. Assim, a partir de $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, obtemos um conjunto ortogonal $B' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ e, pelo Teorema [1.4](#), B' é linearmente independente.

Note que, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, os vetores $w_i \in [v_1, v_2, \dots, v_n] = V$. Como $\dim V = n$, segue que, $B' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ é uma base de V , o que mostra a igualdade

dos subespaços gerados por B e B' .

Por fim, caso se queira um base ortonormal, basta normalizar cada w_i . Fazendo $u_i = \frac{w_i}{\|w_i\|}$, obtemos a base $B' = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ que é uma base ortonormal obtida a partir da base $B' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$.

Figura 1.18: Vetor $v_3 - a_1w_1 - a_2w_2$.



Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

1.3 Transformações lineares

Nesta subseção, estudaremos funções (ou aplicações) entre espaços vetoriais que preservam as duas operações definidas nos espaços vetoriais. Veremos o conceito, as propriedades básicas e alguns exemplos de transformações lineares, bem como alguns resultados importantes para o entendimento deste trabalho.

Sejam U e V espaços vetoriais reais. Uma função $T : U \rightarrow V$ é uma *transformação linear* se

- (i) $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$, para todo $u_1, u_2 \in U$, e
- (ii) $T(\lambda u) = \lambda T(u)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e todo $u \in U$.

De modo equivalente, podemos dizer que a função $T : U \rightarrow V$ é uma *transformação linear* se:

$$T(\lambda u_1 + u_2) = \lambda T(u_1) + T(u_2), \text{ para todo } u_1, u_2 \in U \text{ e todo } \lambda \in \mathbb{R},$$

reunindo as condições (i) e (ii) em uma única condição.

Uma transformação linear $T : U \rightarrow U$, cujo domínio e contradomínio são os mesmos espaços vetoriais, é chamada *operador linear sobre U* .

Lema 1.1. *Sejam U e V espaços vetoriais e $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear. Então:*

- a) $T(0_U) = 0_V$, onde 0_U e 0_V denotam os vetores nulos de U e V , respectivamente.
- b) $T(-u) = -T(u)$, para todo $u \in U$.
- c) $T(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(u_i)$, onde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $u_i \in U$, com $i = 1, \dots, n$.

Exemplo 1.18. Sejam U e V dois espaços vetoriais. A função nula $T : U \rightarrow V$ dada por $T(u) = 0, \forall u \in U$, e a função identidade $Id : U \rightarrow U$ dada por $Id(u) = u, \forall u \in U$, são transformações lineares, conhecidas como Transformação nula e Operador idêntico, respectivamente.

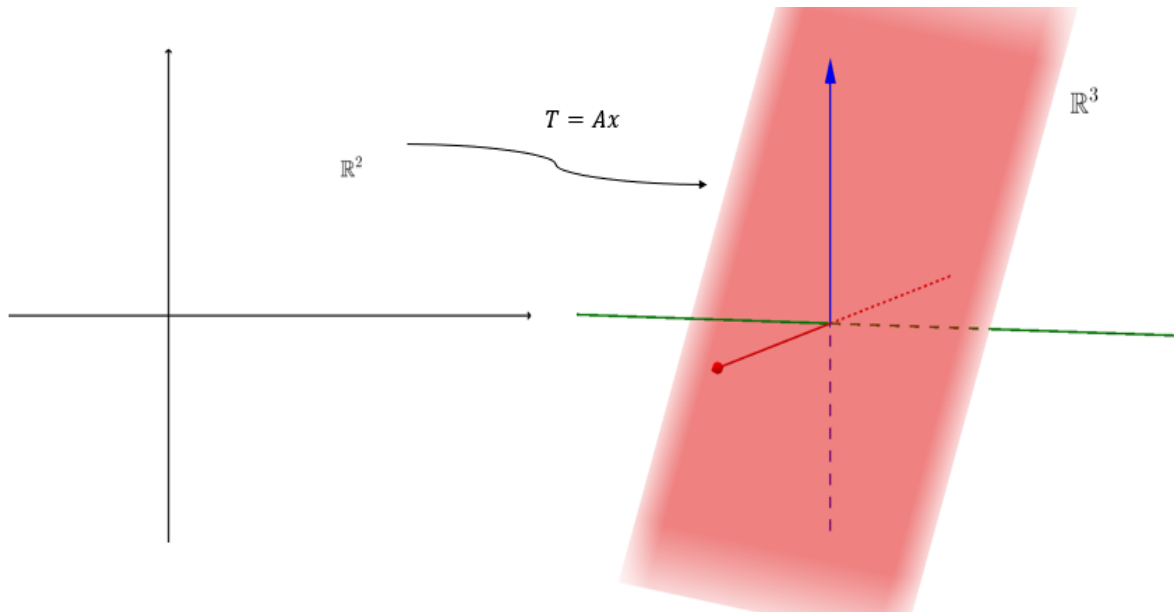
Exemplo 1.19. Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. A aplicação matricial $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $T(u) = Au, \forall u \in \mathbb{R}^n$, é uma transformação linear. Em particular, a Figura 1.19 mostra

que a aplicação T dada pela matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ leva \mathbb{R}^2 no plano $3x - 2y + z = 0$.

Exemplo 1.20. Sejam V um espaço vetorial e $a \in \mathbb{R}$. A função $T : U \rightarrow U$ dada por $T(u) = au, \forall u \in U$ é uma transformação linear.

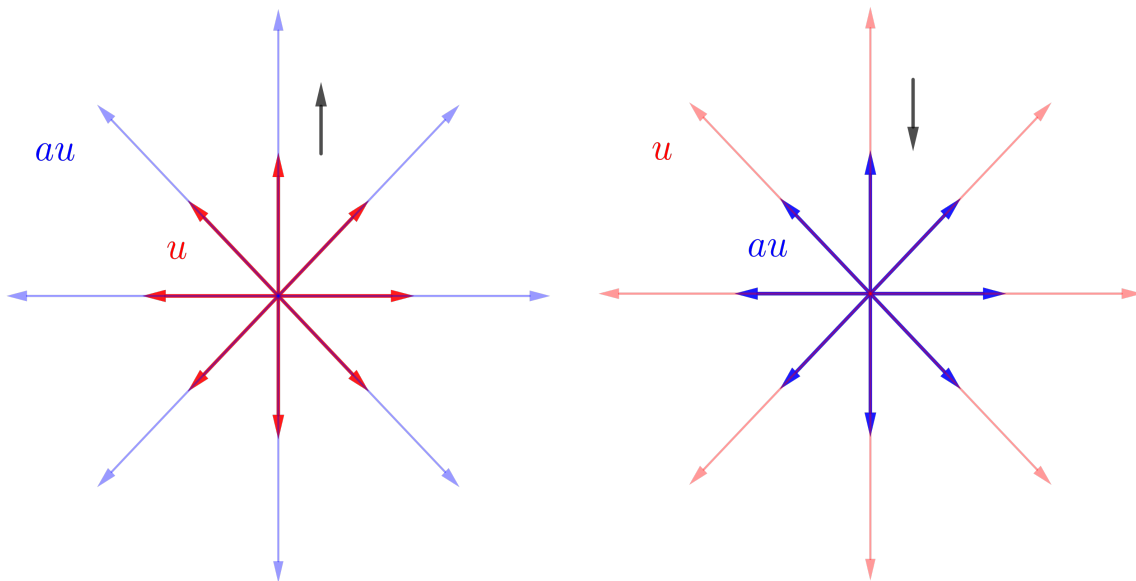
Se $a = 0$ temos a transformação nula. Se $a = 1$ temos a transformação identidade. Se $0 < a < 1$, dizemos que T é uma contração de V . Se $a > 1$, dizemos que T é uma dilatação de U . Geometricamente, uma contração “comprime” os vetores em U por um fator a e uma dilatação “estica” os vetores em U por um fator a , observe a Figura 1.20 dilatação e contração do vetor u .

Figura 1.19: Aplicação T leva \mathbb{R}^2 no plano $3x - 2y + z = 0$



Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Figura 1.20: Dilatação e contração do vetor u



Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

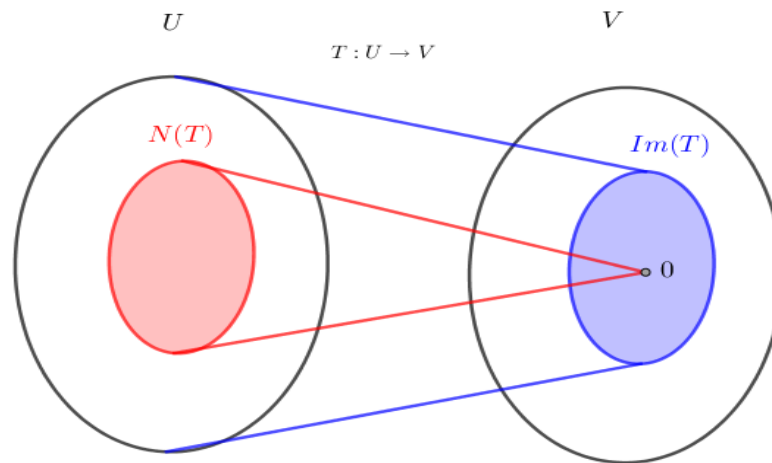
Exemplo 1.21. Sejam $T_1 : U \rightarrow V$ e $T_2 : V \rightarrow W$ transformações lineares. A composição $(T_1 \circ T_2) : U \rightarrow W$ dada por $(T_1 \circ T_2)(u) = T_1(T_2(u))$, $\forall u \in U$, é uma transformação linear.

1.3.1 Núcleo e imagem de uma transformação linear

Sejam U e V dois espaços vetoriais e $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear. Então,

- (i) O conjunto $\{T(u); u \in U\} \subset V$, chamado *imagem de T* e denotado por $Im(T)$, é um subespaço vetorial de V ;
- (ii) O conjunto $\{u \in U; T(u) = 0_V\} \subset U$, chamado *núcleo de T* e denotado por $N(T)$, é um subespaço de U .

Figura 1.21: Diagrama núcleo e imagem



Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Teorema 1.5. *Sejam U e V dois espaços vetoriais e $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear.*

Então:

- a) T é injetora se, e somente se, $N(T) = \{0_U\}$;
- b) T é sobrejetora quando $Im(T) = V$.

Um *isomorfismo* do espaço vetorial U no espaço vetorial V é uma transformação linear $T : U \rightarrow V$ que é bijetora. Se existir um isomorfismo dos espaços U e V , então dizemos que U e V são espaços vetoriais isomorfos e indicamos por $U \cong V$.

onde A é a matriz $m \times n$ formada pelos escalares a_{ij} .

A matriz $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ definida acima é chamada *matriz da transformação linear T com relação às bases B e B'* e é denotada por $[T]_{B'}^B$. No caso em que $U = V$ e $B = B'$, denotamos por $[T]_B$.

O próximo teorema mostra que a matriz da composta de duas transformações lineares é a multiplicação das duas matrizes das transformações lineares, nas bases correspondentes.

Teorema 1.6. *Considere U, V e W espaços vetoriais de dimensão finita. Se $T_1 : U \rightarrow V$ e $T_2 : V \rightarrow W$ são transformações lineares e se B, B' e B'' são bases de U, V e W , respectivamente, então:*

$$[T_1 \circ T_2]_{B''}^B = [T_2]_{B''}^{B'} [T_1]_{B'}^B.$$

A seguinte consequência do teorema acima nos dá uma condição para dizer se uma transformação linear é um isomorfismo a partir de sua matriz associada.

Corolário 1.1. *Sejam U e V dois espaços vetoriais de dimensão finita e considere B e B' bases de U e V , respectivamente. Uma transformação linear $T : U \rightarrow V$ é um isomorfismo se, e somente se, a matriz $[T]_{B'}^B$ for inversível. Além disso, neste caso, $([T]_{B'}^B)^{-1} = [T^{-1}]_B^{B'}$.*

Sejam $B = \{u_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $B' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ bases ordenadas de um espaço vetorial U . Note que a matriz associada ao operador idêntico $Id : U \rightarrow U$ com relação às bases B e B' coincide com a matriz de mudança de base de B para B' dada em (1.5), ou seja,

$$M = (a_{ij})_{n \times n} = [Id]_{B'}^B. \quad (1.11)$$

Desde que a inversa do operador linear Id é ele mesmo, segue do Corolário 1.1 que $([Id]_{B'}^B)^{-1} = [Id]_B^{B'}$, o que implica dizer que a matriz M é invertível e a sua inversa M^{-1} é a matriz mudança de base de B' para B .

1.3.3 Matrizes semelhantes

Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Se B e B' são bases de V e $[T]_B$ e $[T]_{B'}$ são as matrizes que representam o operador T nas bases B e B' , respectivamente, então, pela noção

de matriz de uma transformação linear podemos escrever

$$[T(v)]_B = [T]_B[v]_B \quad (1.12)$$

e

$$[T(v)]_{B'} = [T]_{B'}[v]_{B'}. \quad (1.13)$$

Por (1.11), a matriz $[Id]_{B'}^B$ é a matriz mudança de base de B para B' , logo,

$$[v]_{B'} = [Id]_{B'}^B[v]_B \quad \text{e} \quad [T(v)]_{B'} = [Id]_{B'}^B[T(v)]_B. \quad (1.14)$$

Substituindo (1.14) em (1.13), obtemos

$$[Id]_{B'}^B[T(v)]_B = [T]_{B'}[Id]_{B'}^B[v]_B.$$

Como $[Id]_{B'}^B$ é inversível então,

$$[T(v)]_B = ([Id]_{B'}^B)^{-1}[T]_{B'}[Id]_{B'}^B[v]_B. \quad (1.15)$$

Assim, comparando (1.15) com (1.12), temos que,

$$[T]_B = ([Id]_{B'}^B)^{-1}[T]_{B'}[Id]_{B'}^B.$$

Logo, as matrizes $[T]_B$ e $[T]_{B'}$ são *semelhantes*, pois existe uma matriz inversível $[Id]_{B'}^B = M$ tal que

$$[T]_B = M^{-1}[T]_{B'}M.$$

1.4 Autovetores e autovalores

Nesta seção, vamos abordar as classes de escalares e vetores conhecidas como *autovalores* e *autovetores*, respectivamente, que são especiais por suas características peculiares. A teoria de Autovalores e Autovetores surgiu no estudo do movimento rotacional

e, mais tarde, foi usada para classificar vários tipos de superfícies e para descrever soluções de certas equações diferenciais. No início do século XX, os estudos destas classes foram aplicadas às matrizes e transformações matriciais, impactando em aplicações em diversos ramos da ciência tais como computação gráfica, vibrações mecânicas, fluxo do calor, dinâmica populacional, mecânica quântica e até economia.

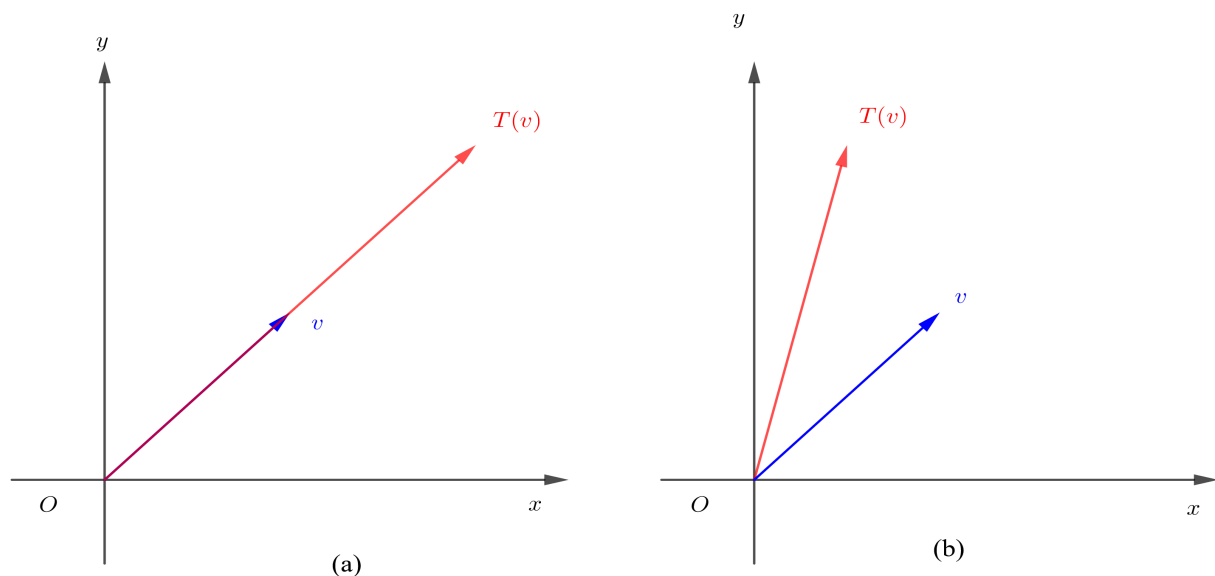
Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear sobre um espaço vetorial V . Um número $\lambda \in \mathbb{R}$ é um *autovalor de T* se existe um vetor não nulo $v \in V$ tal que

$$T(v) = \lambda v.$$

O vetor $v \neq 0$ é chamado *autovetor de T associado ao autovalor λ* .

De acordo com a definição acima, um vetor $v \neq 0$ é autovetor de T se o conjunto $Im(T)$ é formado por múltiplos escalares de v . No \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3 dizemos que v e $T(v)$ possuem a mesma direção. Assim, dependendo do valor de λ , o operador T dilata v , contrai v , inverte o sentido de v ou o anula no caso de $\lambda = 0$.

Figura 1.22: Autovetor no plano



Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Na Figura 1.22 (a), o vetor $v \in \mathbb{R}^2$ é um autovetor de um operador T que dilata v

porque $\lambda > 1$. A Figura [1.22](#) (b) mostra um vetor v que não é autovetor de um operador T .

Exemplo 1.22. Se $T : V \rightarrow V$ é um operador linear não injetor, então 0 é um autovalor de T já que $T(v) = 0 = 0v$, com $v \in N(T)$.

Exemplo 1.23. Seja o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (-y, x)$, que corresponde a uma rotação de 90° em torno da origem. Observe que nenhum vetor não nulo é levado por T em um múltiplo de si próprio. Logo, T não possui autovalores e nem autovetores.

Se λ é um autovalor de um operador linear $T : V \rightarrow V$, o conjunto S_λ de todos os vetores $v \in V$ associados ao autovalor λ , acrescido do vetor nulo, é um subespaço vetorial de V . Isto é, $S_\lambda = \{v \in V; T(v) = \lambda v\}$ é um subespaço de V , chamado *auto-espaço associado ao autovalor λ* .

1.4.1 Determinação dos autovalores e dos autovetores

Nosso objetivo aqui é apresentar um método para determinar os autovalores e os autovetores de um operador linear, caso existam.

Sejam V um espaço vetorial de dimensão n e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Se λ for um autovalor de T , então existe $v \neq 0$ tal que

$$T(v) = \lambda v \iff (T - \lambda Id)(v) = 0,$$

onde Id é o operador idêntico de V . Logo,

$$\lambda \text{ é autovalor de } T \iff Nuc(T - \lambda Id) \neq \{0\}.$$

Recorde que uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é inversível se, e somente se, $\det A \neq 0$. Então, considerando a matriz $[T - \lambda Id]_B$ do operador $T - \lambda Id : V \rightarrow V$ associada a uma base qualquer B de V , segue do Teorema [1.5](#) e do Corolário [1.1](#) que

$$Nuc(T - \lambda Id) \neq \{0\} \iff [T - \lambda Id]_B \text{ não é inversível} \iff \det([T - \lambda Id]_B) = 0.$$

Observe $[T - \lambda Id]_B$ é uma matriz onde, na diagonal principal, aparecem monômios em λ de grau um com coeficientes reais e elementos reais nas demais posições. Portanto, o determinante de $[T - \lambda Id]_B$ é um polinômio em λ de grau n , chamado *polinômio característico de T* e simbolizado por $P(\lambda)$. Desta forma, a equivalência acima é reescrita como

$$\lambda \text{ é autovalor de } T \iff \lambda \text{ é uma raiz de } P(\lambda).$$

Exemplo 1.24. Considere o operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y)$.

A matriz canônica do operador T é $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Logo, o polinômio característico de T é dado por $P(\lambda) = \det([T - \lambda Id]_B) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 6$. Calculando as raízes deste polinômio, encontramos que os autovalores de T são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 6$.

Usando a notação matricial $[T - \lambda Id(v)]_B = [T - \lambda Id]_B[v]_B$, para cada autovalor temos um sistema homogêneo de equações que permite determinar os autovetores associados. Com efeito, considerando o vetor $v = (x, y)$, o sistema a ser estudado é

$$\begin{bmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ 2 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda = -1$, obtemos os autovetores associados a λ ao resolver o sistema homogêneo $\begin{cases} 5x + 5y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$, cuja solução é $y = -x$. Assim, os vetores do tipo $v_1 = (x, -x) = x(1, -1)$, com $x \neq 0$, são os autovetores associados a $\lambda_1 = -1$. Repetindo o mesmo raciocínio para $\lambda_2 = 6$, os vetores do tipo $v_2 = \left(x, \frac{2}{5}x\right) = x\left(1, \frac{2}{5}\right) = x(5, 2)$, com $x \neq 0$, são os autovetores associados a $\lambda_2 = 6$.

Os autoespaços associados aos autovalores de T são $S_{-1} = [(1, -1)]$ e $S_6 = [(5, 2)]$. Observe que cada um destes autoespaços representam retas que passam pela origem, veja a Figura [1.23](#).

O resultado a seguir mostra que o polinômio característico $P(\lambda)$ não depende da base B escolhida, ou seja, é um invariante de T .

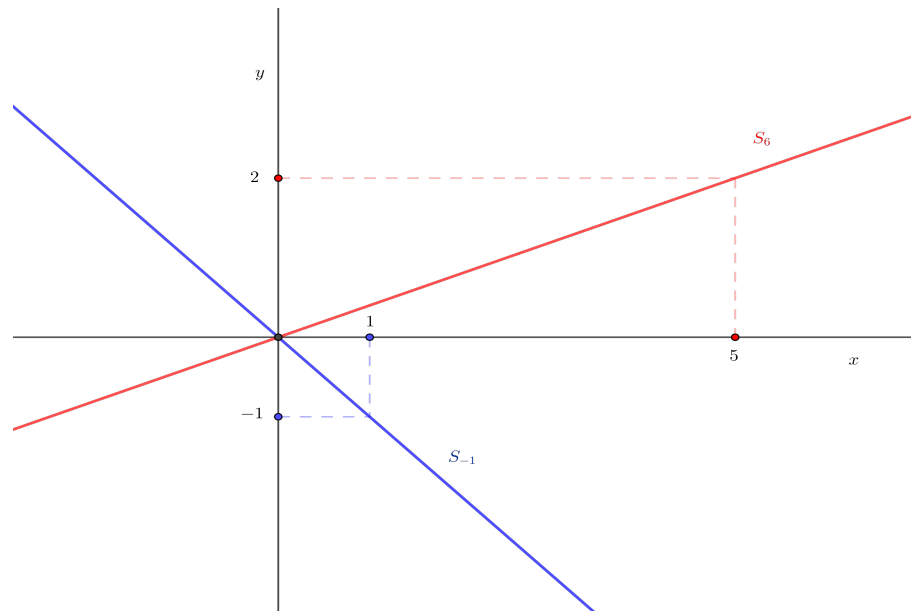
Corolário 1.2. *Matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio característico e, por isso, os mesmos autovalores.*

Demonstração : Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear e B e B' duas bases de V . Sabemos que a relação entre matrizes semelhantes é $[T]_B = M^{-1}[T]_{B'}M$, onde M é a matriz mudança de base de B para B' . Então:

$$\begin{aligned} \det([T - \lambda Id]_B) &= \det([T]_B - \lambda[Id]_B) \\ &= \det(M^{-1}[T]_{B'}M - \lambda M^{-1}[Id]_{B'}M) \\ &= \det(M^{-1}([T]_{B'} - \lambda[Id]_{B'})M) \\ &= \det(M^{-1}) \det([T]_{B'} - \lambda[Id]_{B'}) \det(M) \\ &= \det([T]_{B'} - \lambda[Id]_{B'}) = \det([T - \lambda Id]_{B'}). \end{aligned}$$

□

Figura 1.23: Autoespaço S_{-1} e S_6 .



Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

1.4.2 Diagonalização de operadores lineares

Dado um operador linear $T : V \rightarrow V$, o nosso propósito é procurar condições sobre T para que exista uma base B de V tal que a matriz $[T]_B$ seja diagonal.

Teorema 1.7. *Autovetores associados a autovalores distintos de um operador $T : V \rightarrow V$ são linearmente independentes.*

Demonstração : O teorema será demonstrado para o caso de dois autovalores distintos. A prova para o caso de n autovalores distintos é análoga.

Sejam v_1 e v_2 autovetores associados aos autovalores λ_1 e λ_2 , respectivamente, com λ_1 e λ_2 distintos. Vamos mostrar que v_1 e v_2 são L.I. De fato, considere

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0. \quad (1.16)$$

Pela linearidade de T e desde que $T(v_i) = \lambda_i v_i, \forall i = 1, 2$, temos

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 = 0. \quad (1.17)$$

Multiplicando [1.16](#) por λ_1 , obtemos

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_1 v_2 = 0. \quad (1.18)$$

Subtraindo [1.18](#) de [1.17](#), tem-se $\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 = 0$. Mas, como por hipótese $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $v_2 \neq 0$, segue que $\alpha_2 = 0$. Consequentemente, desde que $v_1 \neq 0$, concluímos que $\alpha_1 \neq 0$ e, portanto, o conjunto $\{v_1, v_2\}$ é L.I. \square

O próximo resultado afirma que se conseguirmos tantos autovalores distintos quanto for a dimensão de V , o conjunto formado pelos autovetores associados a estes autovalores é uma base de V .

Corolário 1.3. *Se V é um espaço vetorial de dimensão n e $T : V \rightarrow V$ é um operador linear que possui n autovalores distintos, então o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, formado pelos correspondentes autovetores, é uma base de V .*

Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear e suponha que exista uma base $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ formada de autovetores de T . Então, como

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n \\ T(v_2) &= \lambda_2 v_2 = 0v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + 0v_n \\ &\vdots \\ T(v_n) &= \lambda_n v_n = 0v_1 + 0v_2 + \dots + \lambda_n v_n, \end{aligned}$$

a matriz $[T]_B$ será uma matriz diagonal onde os elementos da diagonal principal são os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, isto é,

$$[T]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, se $B' = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é uma base de V tal que a matriz $[T]_{B'}$ tenha a forma diagonal, isto é, tal que

$$[T]_{B'} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_n \end{bmatrix},$$

com $\gamma_i \in \mathbb{R}$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Da definição de $[T]_{B'}$, temos que $T(u_i) = \gamma_i u_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$, ou seja, a imagem de qualquer vetor da base B' por T é um múltiplo deste vetor, o que equivale dizer que u_1, u_2, \dots, u_n são autovetores de T com autovalores $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, respectivamente.

Deste modo, o seguinte resultado está provado.

Teorema 1.8. *Se V é um espaço vetorial de dimensão finita. Um operador linear $T : V \rightarrow V$ admite uma base B em relação à qual sua matriz $[T]_B$ é diagonal se, e somente se, essa base B for formada por autovetores de T .*

Este teorema é a motivação da definição que segue:

Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Dizemos que T é *diagonalizável* se existir uma base de V cujos elementos são autovetores de T .

Exemplo 1.25. No Exemplo (1.24), encontramos que a matriz associada a T em relação à base canônica é $[T]_{can} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Queremos encontrar uma base B de autovetores, se possível, e ainda classificar o tipo da matriz $[T]_B$.

Desde que $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 6$, e portanto, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, podemos afirmar, pelo Corolário 1.3, a existência de uma base de autovetores. Com efeito, dois autovetores associados a λ_1 e λ_2 são $v_1 = (1, -1)$ e $v_2 = (5, 2)$, respectivamente, os quais formam uma base de \mathbb{R}^2 . Isto é, o espaço \mathbb{R}^2 admite uma base $B = \{v_1, v_2\}$ formada por autovetores de T .

Como $T(v_1) = -1v_1 = -1v_1 + 0v_2$ e $T(v_2) = 6v_2 = 0v_1 + 6v_2$ segue que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix},$$

que é uma matriz diagonal.

1.4.3 Operadores ortogonais e auto-adjuntos

Agora, apresentaremos um operador especial com o intuito de estabelecer relações com o produto interno, descobrindo assim especificidades de seus autovalores para então obter importantes resultados sobre diagonalização.

Sejam V um espaço vetorial com produto interno, B uma base ortonormal e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Um operador é *auto-adjunto* se $[T]_B$ é uma matriz simétrica. Lembrando que uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é dita simétrica se $A^T = A$.

Os operadores auto-adjuntos estão bem definidos, isto é, o fato de um operador ser auto-adjunto independe da base ortonormal tomada. Isto significa que, se $[T]_B$ for simétrica em uma determinada base ortonormal B , então $[T]_{B'}$ também será simétrica para qualquer outra base ortonormal B' .

O próximo teorema nos dá uma importante propriedade dos operadores auto-adjuntos necessária para o resultado posterior.

Teorema 1.9. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno . Se um operador linear $T : V \rightarrow V$ é auto-adjunto então $\langle T(v), u \rangle = \langle v, T(u) \rangle$, para todo $u, v \in V$.*

Teorema 1.10. *Sejam $T : V \rightarrow V$ um operador auto-adjunto, λ_1, λ_2 autovalores distintos de T e v_1, v_2 os autovetores associados a λ_1 e λ_2 , respectivamente. Então, v_1 é ortogonal a v_2 .*

Demonstração : Desde que λ_1 e λ_2 são autovalores de T , usamos o Teorema [1.9](#) para obter

$$\begin{aligned} \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, T(v_2) \rangle \\ &= \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle, \end{aligned}$$

o que implica em $(\lambda_1 - \lambda_2) \langle v_1, v_2 \rangle = 0$. Como os autovalores são distintos segue que $v_1 \perp v_2$.

□

A consequência imediata do teorema acima é que se um operador $T : V \rightarrow V$ for auto-adjunto, $\dim V = n$ e T admitir n autovalores distintos, portanto uma base de autovetores, então T é diagonalizável e os autovetores são automaticamente dois a dois ortogonais e, assim, T admite uma base ortonormal. De modo geral, temos o seguinte resultado

Teorema 1.11. *Seja T um operador linear sobre um espaço vetorial euclidiano. Se T é auto-adjunto então existe uma base ortonormal de autovetores de T .*

FORMAS BILINEARES

Neste capítulo, apresentaremos a fundamentação teórica de formas bilineares sobre espaços de dimensão finita. Enunciaremos o conceito e alguns resultados importantes, especialmente, a relação entre formas bilineares e matrizes, a qual será utilizada no reconhecimento das cônicas e quádricas.

Vale informar que, as principais referências para construção do presente capítulo foram [1], [2] e [12].

Funções bilineares são funções associadas a espaços vetoriais, nas quais um número real é associado a cada par de vetores de modo que em cada uma das variáveis, a função é uma transformação linear quando deixamos a outra fixa.

Sejam U e V espaços vetoriais reais. Uma função $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *forma bilinear* se:

(i) Para todo $v \in V$ fixado, f é uma forma linear em $u \in U$, isto é,

$$f(u_1 + u_2, v) = f(u_1, v) + f(u_2, v), \forall u_1, u_2 \in U$$

e

$$f(\alpha u, v) = \alpha f(u, v), \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

(ii) Para todo $u \in U$ fixado, f é uma forma linear em $v \in V$, isto é,

$$f(u, v_1 + v_2) = f(u, v_1) + f(u, v_2), \forall v_1, v_2 \in V$$

e

$$f(u, \alpha v) = \alpha f(u, v), \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2.1. A função $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + y_2x_2$ é uma forma bilinear.

Exemplo 2.2. Seja V um espaço vetorial. Qualquer produto interno sobre V é uma forma bilinear. A demonstração deste fato decorre diretamente da definição de produto interno.

Exemplo 2.3. Sejam U e V espaços vetoriais com produto interno e $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear. Uma função $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(u, v) = \langle T(u), v \rangle, \forall u \in U$ e $v \in V$, é uma forma bilinear. A demonstração deste fato decorre da linearidade de T e do Exemplo [2.2](#).

Exemplo 2.4. Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$. É possível associar a M uma forma bilinear $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} f((x_1, x_2), (y_1, y_2, y_3)) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ &= x_1y_1 - 2x_1y_2 - 4x_2y_2 + 3x_1y_3. \end{aligned}$$

Tomando $u = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, mostra-se que f é bilinear.

Denotaremos por $B(U, V)$, ou $B(V)$ quando $U = V$, o conjunto de todas as formas bilineares de $U \times V \rightarrow \mathbb{R}$. O conjunto $B(U, V)$ tem uma estrutura de espaço vetorial quando munido das operações usuais de soma de funções e multiplicação de uma função por escalar. De fato, sejam $f, g \in B(U, V)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que

$$(f + g)(u, v) = f(u, v) + g(u, v)$$

$$(\lambda f)(u, v) = \lambda f(u, v).$$

Note que $B(U, V)$ é fechado em relação à adição e à multiplicação por escalar, isto é, $f + g, \lambda f \in B(U, V)$. Para $f + g$, temos:

$$(i) \quad (f+g)(u_1+u_2, v) = f(u_1+u_2, v) + g(u_1+u_2, v) = f(u_1, v) + f(u_2, v) + g(u_1, v) + g(u_2, v) = \\ (f+g)(u_1, v) + (f+g)(u_2, v), \forall u_1, u_2 \in U, v \in V;$$

e

$$(f+g)(\alpha u, v) = f(\alpha u, v) + g(\alpha u, v) = \alpha f(u, v) + \alpha g(u, v) = \alpha (f(u, v) + g(u, v)) = \\ \alpha (f+g)(u, v), \forall u \in U, v \in V, \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$(ii) \quad (f+g)(u, v_1+v_2) = f(u, v_1+v_2) + g(u, v_1+v_2) = f(u, v_1) + f(u, v_2) + g(u, v_1) + g(u, v_2) = \\ (f+g)(u, v_1) + (f+g)(u, v_2), \forall u \in U, v_1, v_2 \in V;$$

e

$$(f+g)(u, \alpha v) = f(u, \alpha v) + g(u, \alpha v) = \alpha f(u, v) + \alpha g(u, v) = \alpha (f(u, v) + g(u, v)) = \\ \alpha (f+g)(u, v), \forall u \in U, v_1, v_2 \in V, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Para λf , temos:

$$(i) \quad (\lambda f)(u_1 + u_2, v) = \lambda f(u_1 + u_2, v) = \lambda (f(u_1, v) + f(u_2, v)) = \lambda f(u_1, v) + \lambda f(u_2, v) = \\ (\lambda f)(u_1, v) + (\lambda f)(u_2, v), \forall u_1, u_2 \in U, v \in V;$$

e

$$(\lambda f)(\alpha u, v) = \lambda f(\alpha u, v) = \lambda (\alpha f(u, v)) = (\lambda \alpha) f(u, v) = \alpha (\lambda f)(u, v), \forall u \in U, \\ v \in V, \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$(ii) \quad (\lambda f)(u, v_1 + v_2) = \lambda f(u, v_1 + v_2) = \lambda (f(u, v_1) + f(u, v_2)) = \lambda f(u, v_1) + \lambda f(u, v_2) = \\ (\lambda f)(u, v_1) + (\lambda f)(u, v_2), \forall u \in U, v_1, v_2 \in V;$$

e

$$(\lambda f)(u, \alpha v) = \lambda f(u, \alpha v) = \lambda (\alpha f(u, v)) = (\lambda \alpha) f(u, v) = \alpha (\lambda f)(u, v), \forall u \in U, \\ v \in V, \alpha \in \mathbb{R}.$$

2.1 Matriz de uma forma bilinear

De modo análogo ao que foi feito na subseção *Matriz de uma transformação linear* no Capítulo 1, neste tópico, mostraremos o sentido inverso do Exemplo [2.4](#) ou seja, dada uma forma bilinear é possível associá-la à uma matriz.

Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita e $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear. Dadas as bases ordenadas $B = \{u_1, \dots, u_m\}$ e $B' = \{v_1, \dots, v_n\}$ de U e V , respectivamente, e $f \in B(U, V)$, associamos a f uma matriz A da seguinte forma: Se

$$u = x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_mu_m \in U \text{ e } v = y_1v_1 + y_2v_2 + \dots + y_nv_n \in V,$$

com $x_i, y_j \in \mathbb{R}$ onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, então

$$f(u, v) = f\left(\sum_{i=1}^m x_i u_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j\right) = \sum_{i=1}^m x_i f\left(u_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j f(u_i v_j).$$

Se escrevermos $a_{ij} = f(u_i, v_j)$, obtemos

$$\begin{aligned} f(u, v) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j a_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, desde que $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ concluímos que

$$f(u, v) = [u]_B^T A [v]_{B'},$$

onde a matriz $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ é chamada *matriz da forma bilinear f em relação às bases ordenadas B e B'* e é denotada por $[f]_{B'}^B$. No caso em que $U = V$ e $B = B'$, denotamos por $[f]_B$.

Exemplo 2.5. Sejam $U = \mathbb{R}^2$ e $V = \mathbb{R}^3$ e as bases canônicas de U e V . Considere a forma bilinear $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 + 3x_1 y_3 - 4x_2 y_2.$$

Desde que $B = \{u_1 = (1, 0), u_2 = (0, 1)\}$ e $B' = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1)\}$

são as bases canônicas de U e V , respectivamente, temos:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= f(u_1, v_1) = f((1, 0), (1, 0, 0)) = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 0 - 4 \cdot 0 \cdot 0 = 1 \\
 a_{12} &= f(u_1, v_2) = f((1, 0), (0, 1, 0)) = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 0 - 4 \cdot 0 \cdot 1 = -2 \\
 a_{13} &= f(u_1, v_3) = f((1, 0), (0, 0, 1)) = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 1 - 4 \cdot 0 \cdot 0 = 3 \\
 a_{21} &= f(u_2, v_1) = f((0, 1), (1, 0, 0)) = 0 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 0 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \\
 a_{22} &= f(u_2, v_2) = f((0, 1), (0, 1, 0)) = 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 0 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 \\
 a_{23} &= f(u_2, v_3) = f((0, 1), (0, 0, 1)) = 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 0.
 \end{aligned}$$

Logo, a matriz de f em relação às bases B e B' é

$$[f]_{B'}^B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

A forma bilinear f pode ser escrita em forma matricial como

$$f(u, v) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.6. Dados $V = \mathbb{R}^2$ e $B = \{v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1)\}$ a base canônica de V , considere $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear dada por

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2.$$

Então,

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= f(v_1, v_1) = f((1, 0), (1, 0)) = 2 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 2 \\
 a_{12} &= f(v_1, v_2) = f((1, 0), (0, 1)) = 2 \cdot 1 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = -3 \\
 a_{21} &= f(v_2, v_1) = f((0, 1), (1, 0)) = 2 \cdot 0 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0 \\
 a_{22} &= f(v_2, v_2) = f((0, 1), (0, 1)) = 2 \cdot 0 \cdot 0 - 3 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1.
 \end{aligned}$$

Portanto, a matriz de f em relação à base B é

$$[f]_B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A forma matricial de f é

$$f(u, v) = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

O próximo teorema evidencia o que acontece com a matriz associada à uma forma bilinear sobre um espaço vetorial V quando aplicamos uma matriz de mudança de bases.

Teorema 2.1. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $f \in B(V)$. Se M é a matriz de mudança de bases de B' para B de V e $[f]_B$ é a representação matricial da forma bilinear f em relação à base original B , então $[f]_{B'} = M^T[f]_B M$ é a representação matricial de f em relação à nova base B' .*

Demonstração : Sejam B e B' bases de V e M a matriz mudança de bases de B' para B . Decorre de (1.5) que,

$$[v]_B = M[v]_{B'}, \text{ para cada } v \in V.$$

Assim, para $u, v \in V$, considerando a base B , temos que:

$$\begin{aligned} f(u, v) &= [u]_B^T [f]_B [v]_B \\ &= (M[u]_{B'})^T [f]_B (M[v]_{B'}) \\ &= [u]_{B'}^T M^T [f]_B M [v]_{B'} \end{aligned}$$

Como $f(u, v) = [u]_{B'}^T [f]_{B'} [v]_{B'}$ segue que:

$$[u]_{B'}^T [f]_{B'} [v]_{B'} = [u]_{B'}^T (M^T [f]_B M) [v]_{B'}, \text{ para todo } u, v \in V.$$

Portanto, $[f]_{B'} = M^T [f]_B M$. □

Exemplo 2.7. Seja $B' = \{u_1 = (1, -1), u_2 = (1, 1)\}$ uma outra base de \mathbb{R}^2 . A matriz M de

mudança da base canônica B para B' é dada por

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e, portanto } M^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, pelo Teorema (2.1) e Exemplo 2.6, obtemos

$$[f]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.2 Formas bilineares simétricas

A partir deste momento, estamos interessados apenas em formas bilineares sobre um espaço vetorial V , ou seja, formas bilineares do tipo $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$.

Se f é uma forma bilinear sobre um espaço vetorial V de dimensão finita, vimos que a cada base ordenada B de V associamos uma matriz quadrada $[f]_B$. Nesta seção, o nosso objetivo é estudar uma classe de formas bilineares tal que a matriz $[f]_B$ seja diagonal, chamadas *formas bilineares simétricas*.

Seja $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear sobre um espaço vetorial V . Dizemos que a f é *simétrica* se $f(u, v) = f(v, u)$ para todos os vetores $u, v \in V$.

O conjunto formado por todas as formas bilineares simétricas sobre um espaço vetorial V é simbolizado por $B_s(V)$. Usando o Teorema 1.1, mostra-se que $B_s(V)$ é um subespaço vetorial de $B(V)$.

Exemplo 2.8. Seja $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(u, v) = -x_1x_2 + 3y_1x_2 + 3x_1y_2 + 2y_1y_2,$$

onde $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Assim,

$$f(v, u) = -x_2x_1 + 3y_2x_1 + 3x_2y_1 + 2y_2y_1.$$

Como $f(u, v) = f(v, u)$ segue que f é simétrica.

Exemplo 2.9. Seja V um espaço euclidiano. A forma bilinear $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(u, v) = \langle u, v \rangle$, $\forall u, v \in V$ é uma forma bilinear simétrica pois $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.

O teorema a seguir nos dá a relação existente entre formas simétricas e matrizes simétricas.

Teorema 2.2. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e B uma base ordenada qualquer de V . Uma forma bilinear f é simétrica se, e somente se, sua matriz $[f]_B$ é simétrica, isto é, $[f]_B^T = [f]_B$.*

Demonstração : Desde que B é uma base de V segue que temos que $f(u, v) = [u]_B^T [f]_B [v]_B$, para todo $u, v \in V$. Como f é simétrica segue que

$$[u]_B^T [f]_B [v]_B = [v]_B^T [f]_B [u]_B, \forall u, v \in V.$$

Logo, desde que $[v]_B^T [f]_B [u]_B \in M_1(\mathbb{R})$, temos que

$$[u]_B^T [f]_B [v]_B = [v]_B^T [f]_B [u]_B = ([v]_B^T [f]_B [u]_B)^T = [u]_B^T [f]_B^T [v]_B,$$

para todo $u, v \in V$. Concluimos que $[f]_B = [f]_B^T$. Reciprocamente, seja B uma base de V tal que $[f]_B$ é simétrica. Por definição, para cada par $u, v \in V$, temos que $f(u, v) = [u]_B^T [f]_B [v]_B$. Como $[u]_B^T [f]_B [v]_B \in M_1(\mathbb{R})$ segue que

$$f(u, v) = ([u]_B^T [f]_B [v]_B)^T = [v]_B^T [f]_B^T [u]_B = f(v, u),$$

o que implica que f é uma forma simétrica. □

Exemplo 2.10. Considerando a forma simétrica do Exemplo (2.8), os elementos da matriz associada à f em relação a base canônica do \mathbb{R}^2 são:

$$\begin{aligned} a_{11} &= f(v_1, v_1) = f((1, 0), (1, 0)) = -1.1 + 3.0.1 + 3.1.0 + 2.0.0 = -1 \\ a_{12} &= f(v_1, v_2) = f((1, 0), (0, 1)) = -1.0 + 3.0.0 + 3.1.1 + 2.0.1 = 3 \\ a_{21} &= f(v_2, v_1) = f((0, 1), (1, 0)) = -0.1 + 3.1.1 + 3.0.0 + 2.1.0 = 3 \\ a_{22} &= f(v_2, v_2) = f((0, 1), (0, 1)) = -0.0 + 3.1.0 + 3.0.1 + 2.1.1 = 2 \end{aligned}$$

Assim, a matriz associada à forma bilinear simétrica f é dada por $[f]_B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ cuja transposta é ela mesma. Portanto, a matriz $[f]_B$ é simétrica.

Decorre do Teorema 2.2 que, se existe uma base B de um espaço vetorial V de dimensão finita tal que $[f]_B$ é uma matriz diagonal, então f é simétrica já que toda matriz diagonal é simétrica. A pergunta natural é: vale a recíproca? O próximo teorema nos provará que sim!

Teorema 2.3. *Seja V um espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$. Se $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear simétrica sobre V , então existe uma base B de V de modo que $[f]_B$ é uma matriz diagonal, isto é, $a_{ij} = f(v_i, v_j) = 0$, para $i \neq j$, com $1 \leq i, j \leq n$.*

Demonstração : Primeiramente, note que se f é identicamente nula então $[f]_B$ é a matriz nula. Por outro lado, se $\dim V = 1$ temos que $[f]_B$ é de ordem 1×1 , logo, $[f]_B$ é diagonal. Agora, suponha que f é não nula e que $\dim V = n > 1$. Por indução sobre a dimensão de V , vamos mostrar que existe uma base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V tal que $f(v_i, v_j) = 0$, se $i \neq j$. De fato, como f é simétrica, existe $v_1 \in V$ tal que $f(v_1, v_1) \neq 0$. Considere os subespaços vetoriais $U = \langle v_1 \rangle$ e $U' = \{v \in V; f(v_1, v) = 0\}$ de V .

Afirmção: $V = U \oplus U'$.

Inicialmente, note que $U \cap U' = \{0\}$. De fato, se $v \in U \cap U'$, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $v = \alpha v_1$ e $f(v_1, \alpha v_1) = 0$. Porém, $f(v_1, v_1) \neq 0$ implica que $\alpha = 0$, logo, $v = 0$ e $U \cap U' = \{0\}$. Resta mostrar que $V = U + U'$. Para isto, considere os vetores $v \in V$ e

$$u = v - \frac{f(v_1, v)}{f(v_1, v_1)} v_1.$$

Então,

$$\begin{aligned} f(v_1, u) &= f\left(v_1, v - \frac{f(v_1, v)}{f(v_1, v_1)} v_1\right) \\ &= f(v_1, v) - \frac{f(v_1, v)}{f(v_1, v_1)} f(v_1, v_1) = 0 \end{aligned}$$

Assim, $u \in U'$ e $v = \frac{f(v_1, v)}{f(v_1, v_1)} v_1 + u \in U + U'$.

Observe que a restrição $\bar{f} : U' \times U' \rightarrow \mathbb{R}$ de f é uma forma bilinear simétrica sobre U' . Como o subespaço U é gerador por v_1 segue que $\dim U = 1$ e, assim, $\dim U' = n - 1$, logo, pela hipótese de indução, existe uma base $\{v_2, v_3, \dots, v_n\}$ de U' tal que $f(v_i, v_j) = 0$, para $i \neq j$ e $2 \leq i, j \leq n$. Desde que $V = U \oplus U'$, temos que $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de V tal que $f(v_i, v_j) = 0$ se $i \neq j$ e $1 \leq i, j \leq n$. \square

2.3 Formas quadráticas

Nesta seção, estudaremos um tipo especial de funções que provém de formas bilineares simétricas, chamadas *funções quadráticas*.

Sejam V um espaço vetorial e $f \in B(V)$. Uma função $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(v) = f(v, v)$ é chamada *forma quadrática associada a f* .

Note que, dada uma base B de V , a função quadrática g pode ser expressa como

$$g(v) = [v]_B^T [f]_B [v]_B,$$

onde $[f]_B$ é uma matriz simétrica.

Exemplo 2.11. Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(v) = x^2 - 10xy + y^2$, onde $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Sabemos que

$$g(v) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Logo, $ax^2 + 2bxy + cy^2 = x^2 - 10xy + y^2$, o que implica em $a = 1$, $b = -5$ e $c = 1$. Substituindo, obtemos

$$g(v) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Observe que g é a forma quadrática associada à forma bilinear

$$f(v, w) = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1x_2 - 5x_2y_1 - 5x_1y_2 + y_1y_2,$$

onde $[v]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, $[w]_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ e $[f]_B = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$, sendo B a base canônica do \mathbb{R}^2 .

O procedimento adotado no exemplo acima pode ser aplicado a uma forma quadrática genérica $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2,$$

cuja forma matricial é

$$g(v) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.12. Seja $[f]_B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ e $f \in B(\mathbb{R}^2)$ dada por

$$f((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = -x_1x_2 + 2x_1y_2 - y_1y_2.$$

A forma quadrática g associada a f é

$$g(x, y) = f((x, y), (x, y)) = -x^2 + 2xy - y^2.$$

Exemplo 2.13. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ com produto interno canônico e $f \in B(V)$ dada por $f(u, v) = \langle u, v \rangle$, para todo u e $v \in V$. A forma quadrática associada a f é dada por

$$g(u) = f(u, u) = \langle u, u \rangle = x^2 + y^2 + z^2,$$

para todo $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. É fácil observar que g corresponde ao quadrado da norma, ou

seja, $g(u) = \|u\|^2$.

Exemplo 2.14. Considere $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(v) = 3x^2 + 2xy + 4y^2 + 5yz$, onde $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Em relação a base canônica de \mathbb{R}^3 , a forma quadrática g é dada da seguinte forma

$$g(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

A expressão para as formas quadráticas genéricas $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é

$$g(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fxz.$$

O teorema a seguir garante que para qualquer que seja forma quadrática $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ associada a uma forma bilinear simétrica f , sendo V um espaço euclidiano, sempre existirá uma base ortonormal de V tal que $[f]_B$ é diagonal.

Teorema 2.4. *Sejam V um espaço euclidiano, $f \in B_s(V)$ e $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma quadrática associada a f . Então, existem $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ e uma base ortonormal $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V tais que $g(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$, para cada $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i \in V$.*

Demonstração : Seja B' uma base ortonormal qualquer de V . Desde que $f \in B_s(V)$, então, para todo $v \in V$, temos que $g(v) = f(v, v) = [v]_{B'}^T [f]_{B'} [v]_{B'}$, com $[f]_{B'}$ simétrica. Assim, tomemos um operador auto-adjunto $T : V \rightarrow V$ tal que $[T]_{B'} = [f]_{B'}$. Pelo Teorema [1.11](#), um operador auto-adjunto pode ser diagonalizado por uma base B de autovetores ortonormais, então

$$[f]_{B'} = [T]_{B'} = M^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} M,$$

onde M é a matriz mudança de base B para B' . Como B e B' são bases ortonormais segue

que M é uma matriz ortogonal, assim, $M^{-1} = M^T$. Portanto,

$$g(v) = [v]_{B'}^T M^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} M [v]_{B'}.$$

Então, concluímos que

$$g(v) = [v]_B^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} [v]_B = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$

□

RECONHECIMENTO DE CÔNICAS EM \mathbb{R}^2 E QUÁDRICAS EM \mathbb{R}^3

Neste capítulo, apresentaremos as cônicas no \mathbb{R}^2 , figuras geométricas planas definidas a partir da intersecção de um cone duplo de revolução com um plano. E ainda, estudaremos as superfícies quádricas no \mathbb{R}^3 , que são regiões formadas pelo movimento das cônicas no espaço.

3.1 Cônicas em \mathbb{R}^2

Uma *cônica em \mathbb{R}^2* é um conjunto de pontos no plano cujas coordenadas em relação à base canônica, satisfazem à equação quadrática

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

onde a , b e c não são todos nulos.

Observe que a equação da cônica envolve uma forma quádrica no plano $g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, uma forma linear, $f(x, y) = dx + ey$, e um termo constante f . Isto é, a equação que define a cônica é dada por:

$$g(x, y) + f(x, y) + f = 0$$

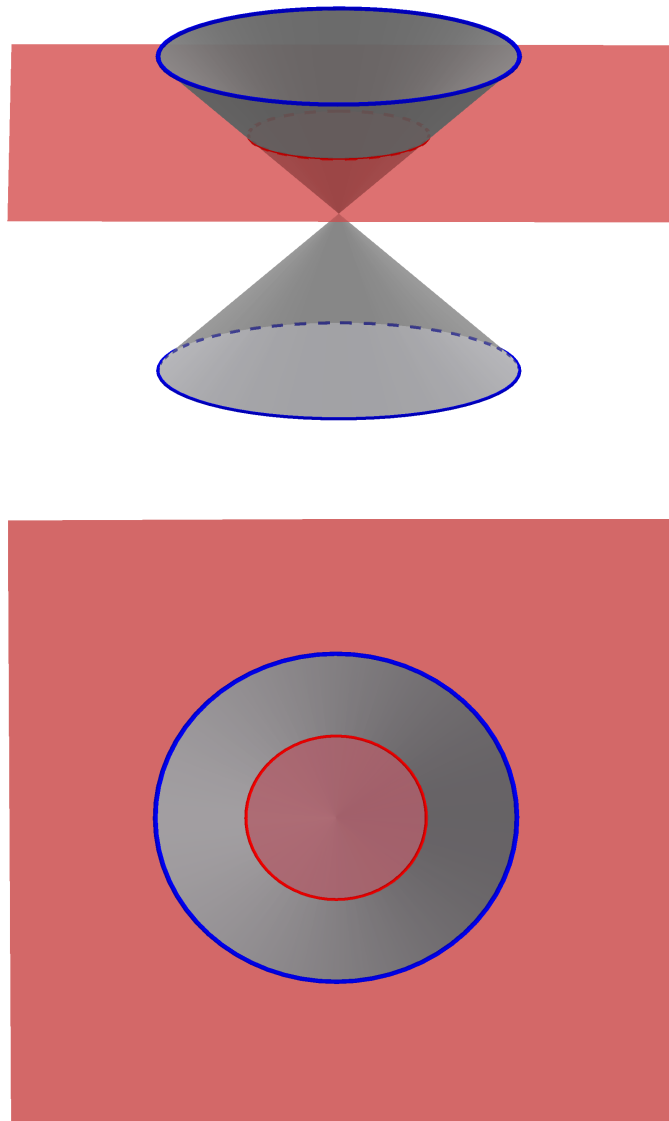
Abaixo, apresentamos os exemplos típicos de cônicas em \mathbb{R}^2 .

Exemplo 3.1. A equação de uma **circunferência** é dada por

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

com $a = c = 1$, $b = d = e = 0$ e $f = -r^2$, onde r é o raio da circunferência.

Figura 3.1: Plano paralelo intercepta cone duplo de revolução.



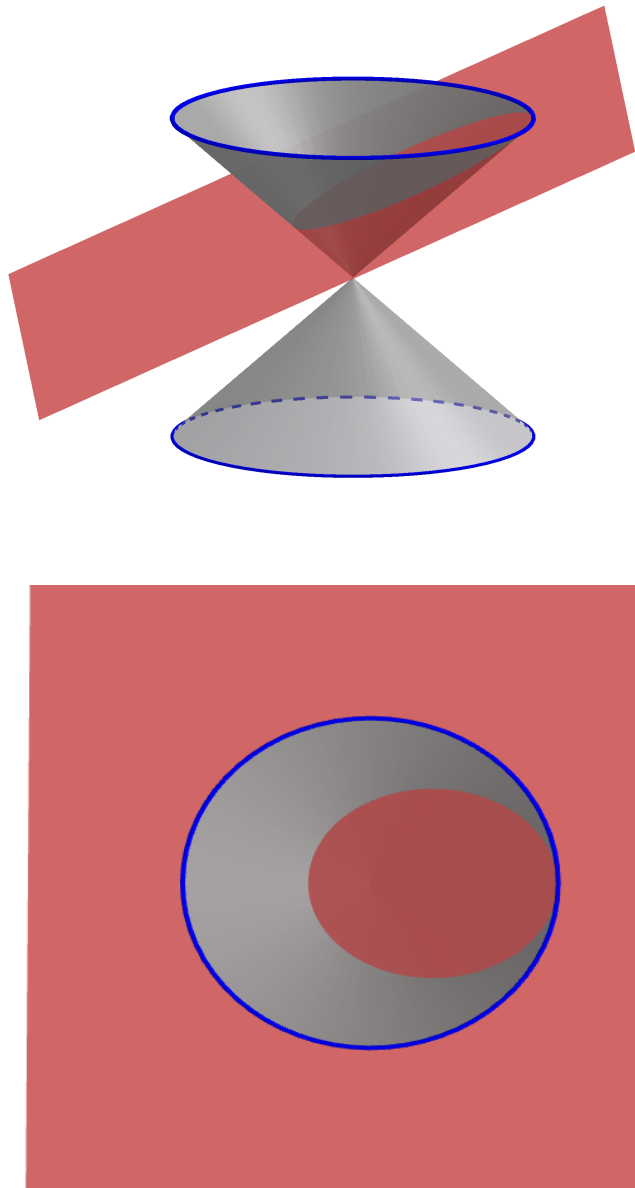
Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Exemplo 3.2. A equação de uma **elipse** é dada por

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

com $a = \frac{1}{A^2}$, $c = \frac{1}{B^2}$, sendo $A > 0$ e $B > 0$, $b = d = e = 0$ e $f = -1$.

Figura 3.2: Plano inclinado intercepta cone duplo de revolução.



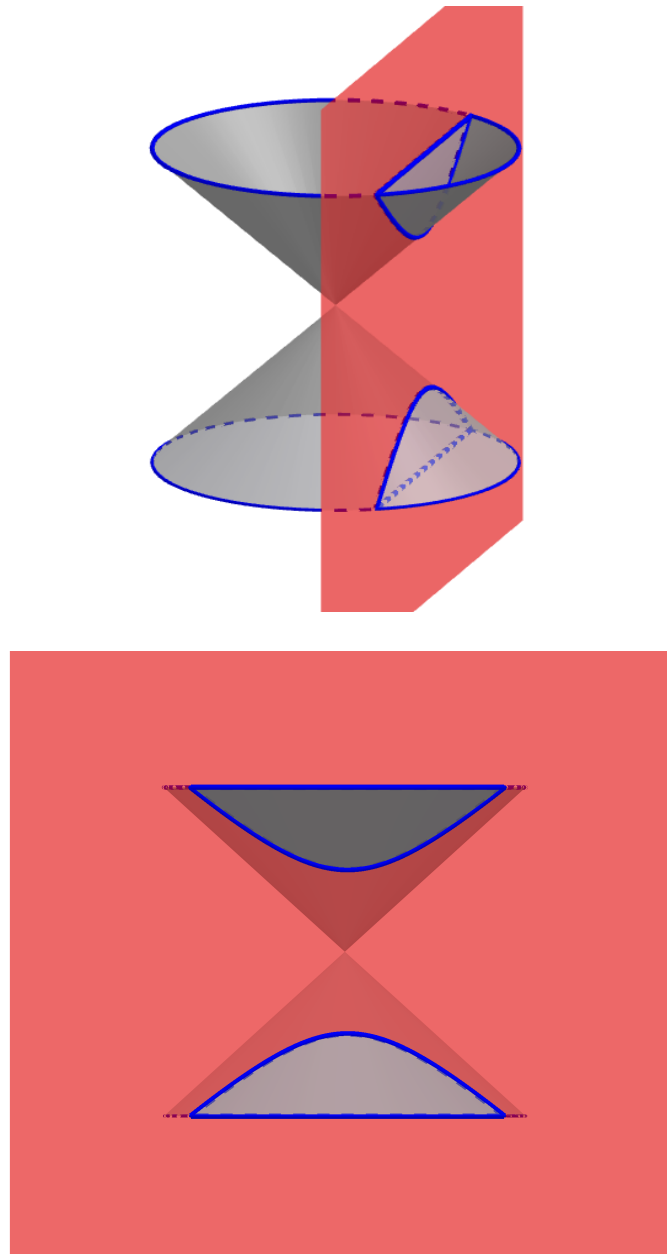
Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Exemplo 3.3. A equação de uma **hipérbole** é dada por

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

com $a = \frac{1}{A^2}$, $c = -\frac{1}{B^2}$, sendo $A > 0$ e $B > 0$, $b = d = e = 0$ e $f = -1$.

Figura 3.3: Plano intercepta cone duplo de revolução em suas duas metades.



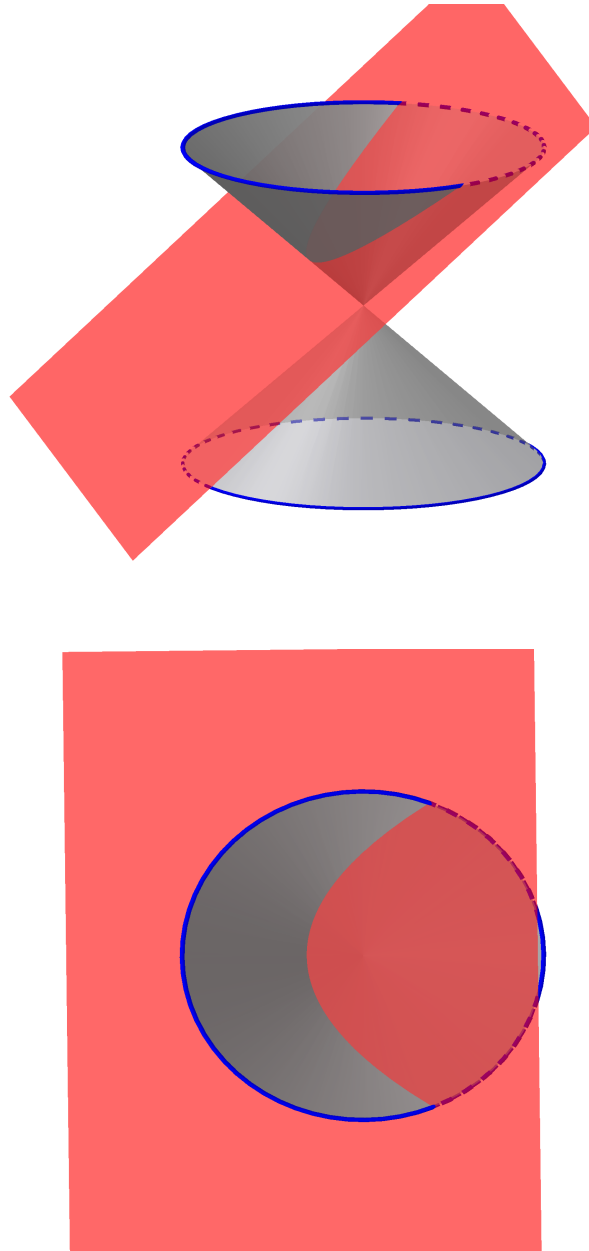
Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Exemplo 3.4. A equação de uma **parábola** é dada por

$$y^2 - dx = 0,$$

com $c = 1$, $a = b = e = f = 0$ e $d \neq 0$.

Figura 3.4: Plano paralelo a geratriz do cone duplo de revolução.



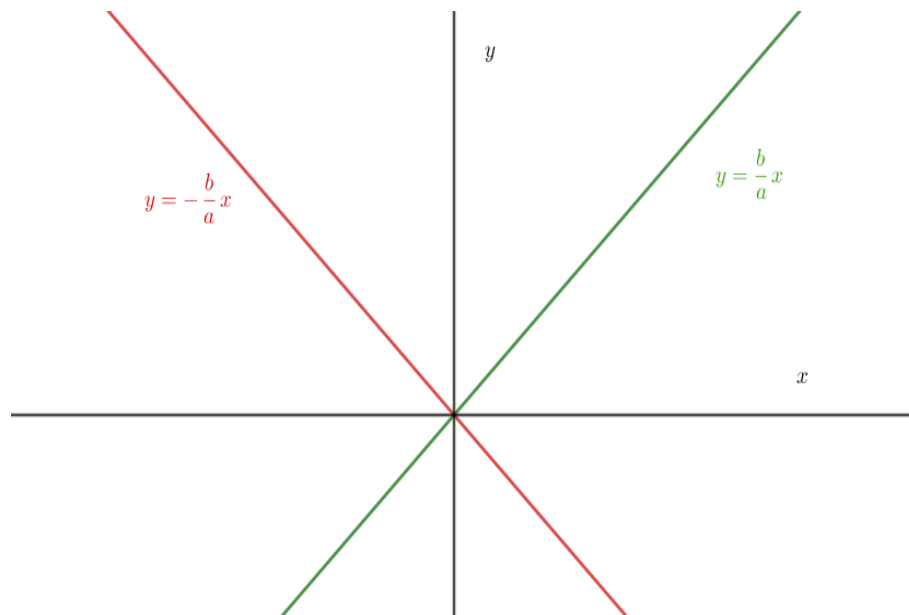
Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Exemplo 3.5. A equação de um **par de retas concorrentes (hipérbole degenerada)** é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

com $a, b > 0$, cuja solução é $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Figura 3.5: Hipérbole degenerada.



Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Exemplo 3.6. A equação de um **par de retas paralelas (parábola degenerada)** é dada por

$$ax^2 - b = 0,$$

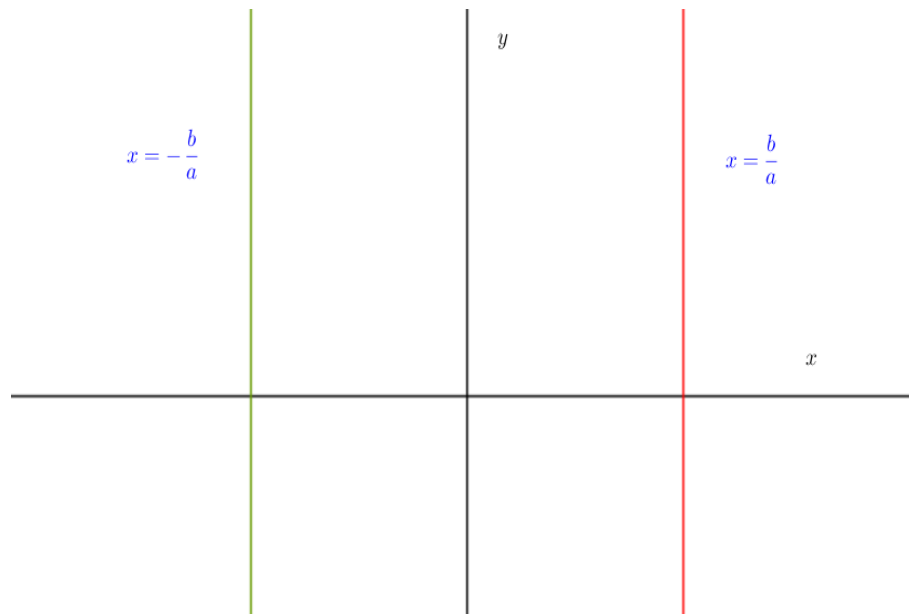
com $a, b > 0$, cuja solução é $x = \pm \frac{b}{a}$, veja a Figura 3.6.

Exemplo 3.7. A equação de uma **reta (parábola degenerada)** é dada por

$$ax^2 = 0,$$

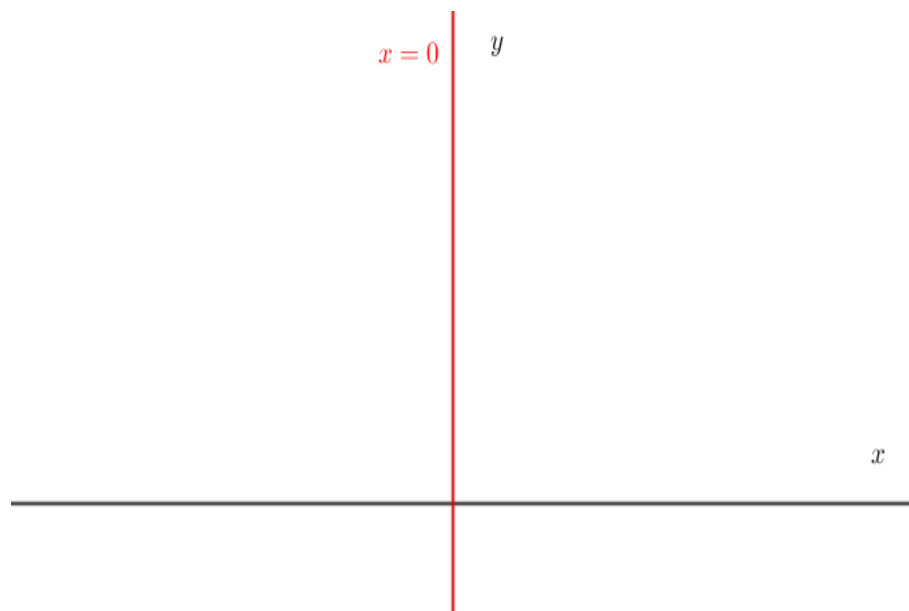
com $a > 0$, cuja solução é $x = 0$, veja a Figura 3.7.

Figura 3.6: Parábola degenerada.



Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Figura 3.7: Parábola degenerada (2).



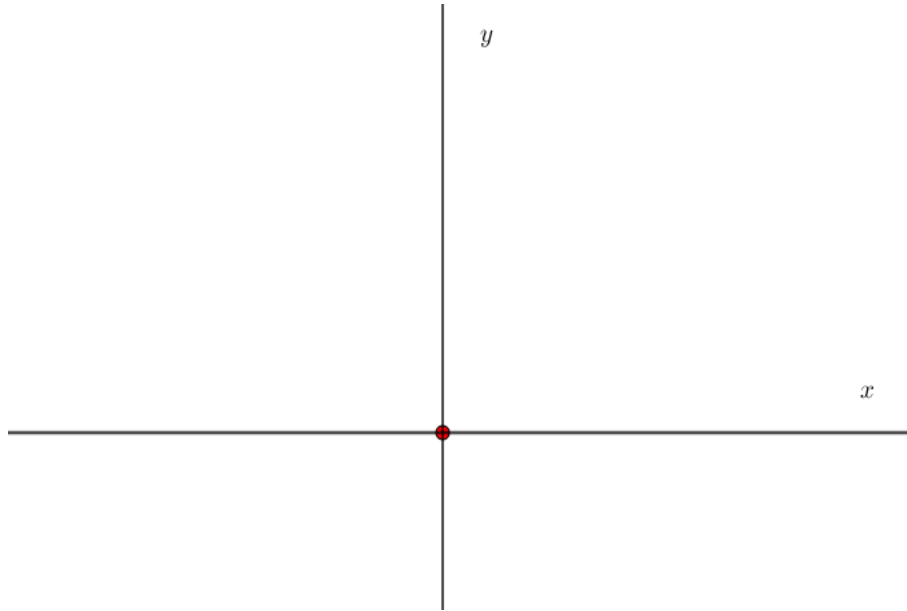
Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Exemplo 3.8. A equação de um **ponto (elipse degenerada)** é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

com $a, b > 0$, cuja solução é $x = y = 0$.

Figura 3.8: Elipse degenerada.



Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Exemplo 3.9. A equação do **vazio (elipse ou parábola degenerada)** é dada por

$$ax^2 + by^2 + F^2 = 0,$$

As equações das cônicas apresentadas acima estão na “forma reduzida”. A seguir, expressaremos o passo a passo para classificar cada cônica a partir da determinação de sua equação reduzida. Veremos que através de uma mudança de referencial conveniente, toda cônica assume uma das formas dos exemplos acima.

3.1.1 Equação reduzida de uma cônica

Nossa finalidade é o reconhecimento e análise da equação de uma cônica. Para isso, é necessário eliminar os termos mistos, do tipo xy , através da diagonalização da forma quadrática.

Considere a seguinte equação cônica em coordenadas canônicas de \mathbb{R}^2

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0. \quad (3.1)$$

Passo 1: Escrevemos a equação na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0. \quad (3.2)$$

Passo 2: Diagonalizamos a forma quadrática para eliminar os termos mistos. Para isto, calculamos os autovalores λ_1 e λ_2 , e os autovetores ortonormais u_1 e u_2 da matriz simétrica

$$\begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}.$$

Passo 3: Obtemos as novas coordenadas. Para isto, precisamos fazer a seguinte substituição na equação (3.2):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

onde M é a matriz mudança de base formada pelos autovetores para a base canônica.

Passo 4: Substituímos as novas coordenadas na equação (3.2), obtendo a nova equação na base $\{u_1, u_2\}$.

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + f = 0,$$

a qual é da seguinte forma

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + px_1 + qy_1 + f = 0, \quad (3.3)$$

com p e q dependentes das coordenadas dos autovetores u_1 e u_2 . Esta equação corresponde à equação cônica dada em (3.1), porém, nos eixos x_1 e y_1 determinados pela base $\{u_1, u_2\}$.

Note que enquanto a equação (3.1) apresenta o termo misto em xy , a equação (3.3) não possui. Assim, na transformação da equação (3.1) para a (3.3) ocorreu uma simplificação.

Passo 5: Eliminamos os termos lineares das coordenadas cujos autovalores são não nulos.

Temos então dois casos:

Caso 1: λ_1 e λ_2 diferentes de zero.

$$\lambda_1 \left(x_1^2 + \frac{p}{\lambda_1} x_1 \right) + \lambda_2 \left(y_1^2 + \frac{q}{\lambda_2} y_1 \right) + f = 0.$$

Completando os quadrados, temos

$$\lambda_1 \left(x_1^2 + \frac{p}{\lambda_1} x_1 + \frac{p^2}{4\lambda_1^2} \right) + \lambda_2 \left(y_1^2 + \frac{q}{\lambda_2} y_1 + \frac{q^2}{4\lambda_2^2} \right) + f - \frac{p^2}{4\lambda_1} - \frac{q^2}{4\lambda_2} = 0$$

$$\lambda_1 \left(x_1 + \frac{p}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y_1 + \frac{q}{2\lambda_2} \right)^2 + f - \frac{p^2}{4\lambda_1} - \frac{q^2}{4\lambda_2} = 0.$$

Tomando $X = x_1 + \frac{p}{2\lambda_1}$, $Y = y_1 + \frac{q}{2\lambda_2}$ e $-F = f - \frac{p^2}{4\lambda_1} - \frac{q^2}{4\lambda_2}$, obtemos

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = F. \quad (3.4)$$

A equação (3.4) é chamada *equação reduzida de uma cônica de centro* e, o primeiro membro é exatamente a forma quadrática no plano.

Caso 2: Se um dos autovalores for igual a zero, por exemplo, $\lambda_2 = 0$, a equação (3.3) fica:

$$\lambda_1 \left(x_1^2 + \frac{p}{\lambda_1} x_1 \right) + qy_1 + f = 0.$$

Completando os quadrados, temos

$$\lambda_1 \left(x_1^2 + \frac{p}{\lambda_1} x_1 + \frac{p^2}{4\lambda_1^2} \right) + qy_1 + f - \frac{p^2}{4\lambda_1} = 0$$

$$\lambda_1 \left(x_1 + \frac{p}{2\lambda_1} \right)^2 + qy_1 + f - \frac{p^2}{4\lambda_1} = 0.$$

Colocando q em evidência:

$$\lambda_1 \left(x_1 + \frac{p}{2\lambda_1} \right)^2 + q \left(y_1 + \frac{f}{q} - \frac{p^2}{4q\lambda_1} \right) = 0.$$

Tomando $X = x_1 + \frac{p}{2\lambda_1}$ e $Y = y_1 + \frac{f}{q} - \frac{p^2}{4q\lambda_1}$, concluímos

$$\lambda_1 X^2 + qY = 0. \tag{3.5}$$

A equação reduzida (3.5) é chamada *cônica sem centro*. Se em lugar de λ_2 tivéssemos feito $\lambda_1 = 0$, a equação reduzida da cônica sem centro seria:

$$\lambda_2 Y^2 + pX = 0.$$

Observe que, em ambos os casos, para obter a equação reduzida de (3.3) efetuou-se uma nova mudança de coordenadas, que consiste na translação do referencial x_1Oy_1 para o referencial $XO'Y$.

3.1.2 Classificação das cônicas

O procedimento estudado acima permite, através de uma mudança de referencial, colocar qualquer equação de uma cônica na forma de uma das equações reduzidas típicas, possibilitando a classificação da cônica, suas dimensões e posições no plano. Entretanto, neste trabalho, estamos interessados somente em classificar a cônica dada pela equação geral. Para isto, vamos discutir as possibilidades a partir da análise dos sinais dos autovalores λ_1 e λ_2 .

Como já foi provado, uma equação geral de uma cônica, depois da eliminação do termo misto, é reduzida às seguintes equações:

(I) Equação de uma cônica de centro

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = F.$$

Neste caso, temos três possibilidades para os autovalores:

- i)* Se λ_1 e λ_2 forem ambos positivos. Para $F > 0$, a cônica será classificada como uma elipse. Para $F = 0$, temos um ponto $X = Y = 0$. E, para $F < 0$, temos o conjunto vazio.
- ii)* Se λ_1 e λ_2 forem ambos negativos, teremos uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio, conforme F seja negativo, nulo ou positivo.
- iii)* Se λ_1 e λ_2 forem de sinais diferentes, a cônica será classificada como uma hipérbole quando $F \neq 0$, ou um par de retas concorrentes se $F = 0$.

(II) Equação de uma cônica sem centro

$$\lambda_1 X^2 + qY = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_2 Y^2 + pX = 0.$$

Em ambas equações, independente dos sinais dos autovalores, a cônica será classificada como uma parábola se $p = 0$ (ou $q = 0$). Agora, se $p \neq 0$ (ou $q \neq 0$), podemos ter um par de retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio.

Exemplo 3.10. Determine a equação reduzida e a classificação da cônica representada pela equação

$$7x^2 - 8xy + y^2 - 17\sqrt{5}x + 11\sqrt{5}y + 41 = 0.$$

Passo 1: Escrevemos a equação dada na forma matricial canônica:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 17\sqrt{5} & 11\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 41 = 0.$$

Passo 2: Calculemos os autovalores e autovetores ortonormais da matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

O polinômio característico de A é dado por

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & -4 \\ -4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda - 9.$$

Então, os autovalores são $\lambda_1 = 9$ e $\lambda_2 = -1$.

Para $\lambda_1 = 9$, temos $\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, logo, os autovetores associados a λ_1 são da forma $v_1 = x(2, -1)$.

Para $\lambda_2 = -1$, temos $\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, logo, os autovetores associados a λ_2 são da forma $v_2 = x(1, 2)$.

Portanto, os correspondentes autovetores ortonormais são $u_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ e $u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Passo 3: Sabemos que nesta nova base de autovetores $B = \{u_1, u_2\}$, a forma quadrática se dá como

$$g(x_1, y_1) = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Passo 4: A equação da cônica geral se reduz a

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 17\sqrt{5} & 11\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 41 = 0,$$

ou seja,

$$9x_1^2 - y_1^2 + 45x_1 + 5y_1 + 41 = 0.$$

Esta última equação representa a cônica em relação ao novo referencial x_1Oy_1 . Agora,

vamos introduzir uma nova mudança de coordenadas para classificação da cônica, será efetuada uma translação do referencial x_1Ox_2 para o referencial $XO'Y$.

Passo 5: Translação de eixos.

$$9\left(x_1 + \frac{45}{18}\right)^2 - \left(y_1 - \frac{5}{2}\right)^2 + 41 - \frac{(45)^2}{36} + \frac{9(5)^2}{36} = 0$$

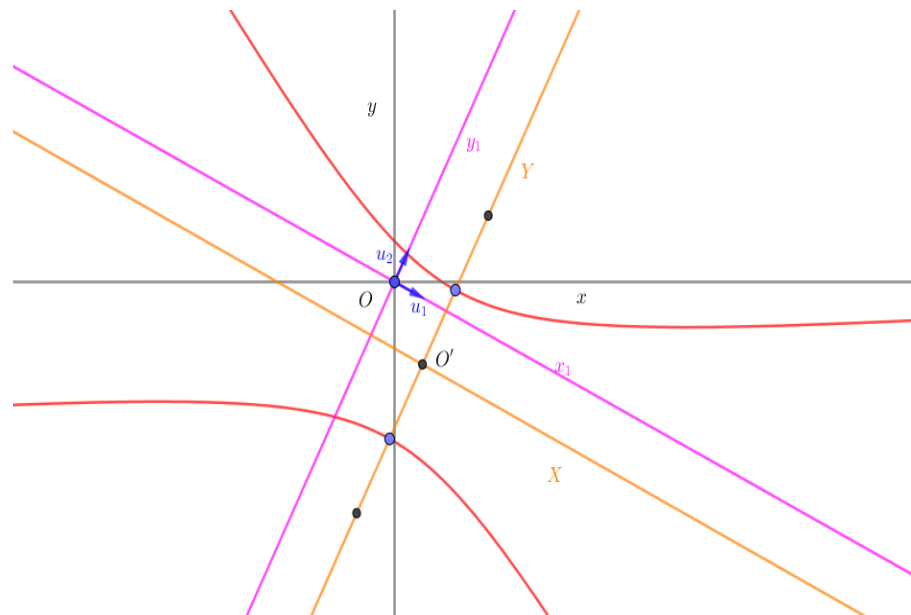
$$9\left(x_1 + \frac{45}{18}\right)^2 - \left(y_1 - \frac{5}{2}\right)^2 - 9 = 0$$

Tomando $X = x_1 + \frac{5}{2}$ e $Y = y_1 - \frac{5}{2}$, obtemos

$$\frac{X^2}{1^2} - \frac{Y^2}{3^2} = 1$$

A equação acima representa a cônica em relação a um novo referencial \mathbb{R}^3 , obtido por translação, finalmente identificando-a como sendo uma **Hipérbóle**.

Figura 3.9: Hipérbole.



Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Exemplo 3.11. Determine a equação reduzida e a classificação da equação cônica expressa

por

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 - 10x + 20y + 5 = 0.$$

Fazendo o mesmo procedimento do exemplo anterior, encontramos

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 41 = 0,$$

ou seja,

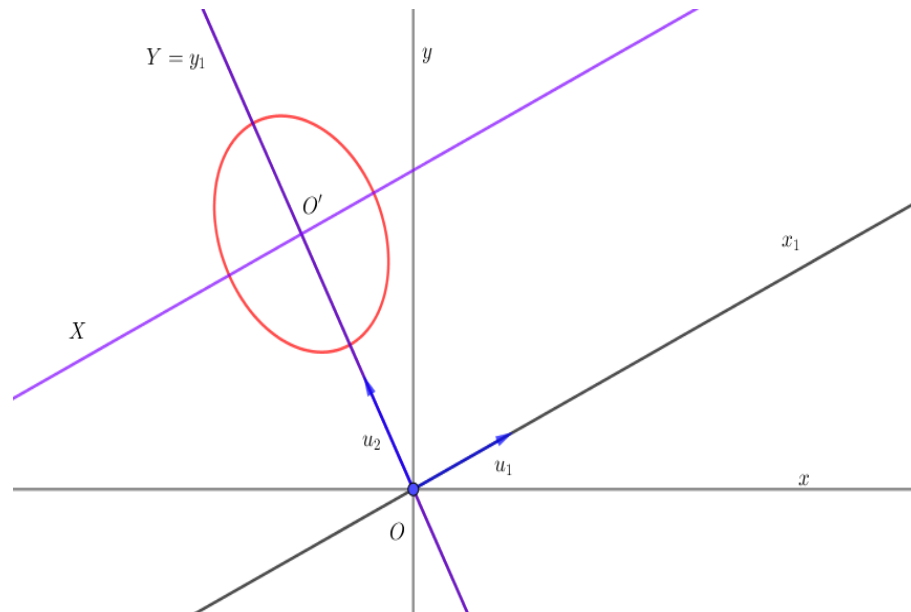
$$20x_1^2 + 5y_1^2 + 10\sqrt{5}y_1 + 5 = 0$$

Efetuando a translação de eixos, obtemos

$$\frac{X^2}{1^2} + \frac{Y^2}{2^2} = 1,$$

implicando em uma **Elipse**.

Figura 3.10: Elipse.



Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Exemplo 3.12. Determine a equação reduzida e classifique a cônica dada por

$$4x^2 + 4xy + y^2 + 5\sqrt{5}x + 10\sqrt{5}y + 5 = 0.$$

Novamente, utilizando o passo a passo para determinar a equação reduzida, obtemos

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5\sqrt{5} & 10\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 5 = 0,$$

ou seja,

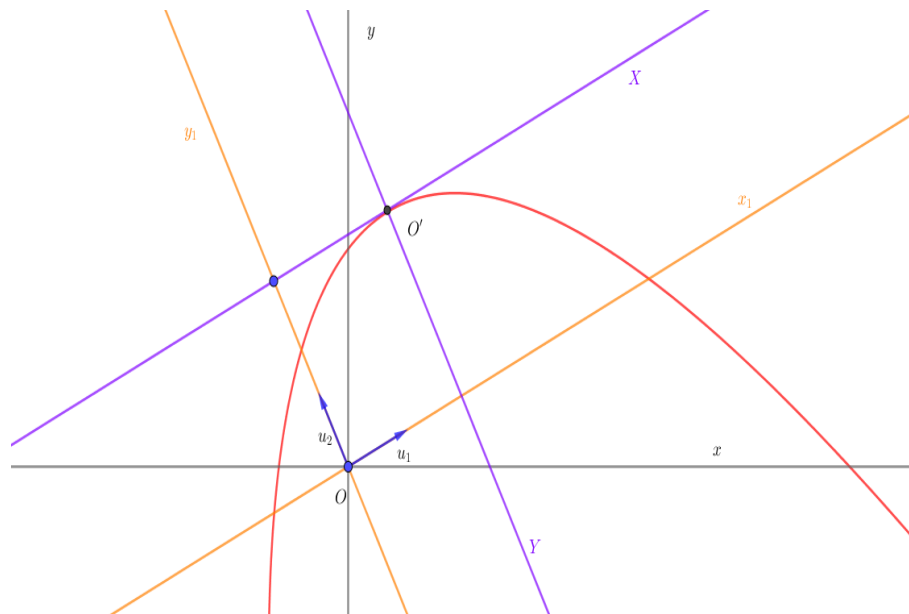
$$5x_1^2 + 4x_1 + 3y_1 + 5 = 0$$

Finalmente, efetuando a translação do sistema x_1Oy_1 para $XO'Y$, a equação geral se reduz a

$$Y = -\frac{5}{3}X^2,$$

a qual corresponde a uma **Parábola**.

Figura 3.11: Parábola.



Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

3.2 Quádricas em \mathbb{R}^3

Uma *quádrica em \mathbb{R}^3 ou superfície quádrlica* é um conjunto de pontos no espaço tridimensional cujas as coordenadas em relação a base canônica, satisfazem à equação quadrática:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + mx + ny + pz + q = 0$$

onde a, b, c, d, e e f não são todos nulos.

Observe que a equação da quádrlica envolve uma forma quádrlica no espaço $g(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$, e uma forma linear, $L(x, y, z) = mx + ny + pz$, e um termo constante q . Isto é, a equação que define a quádrlica é dada por:

$$g(x, y, z) + L(x, y, z) + q = 0.$$

A seguir, apresentaremos alguns exemplos de quádrlicas em \mathbb{R}^3 .

Exemplo 3.13. A equação de uma **esfera** é dada por

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

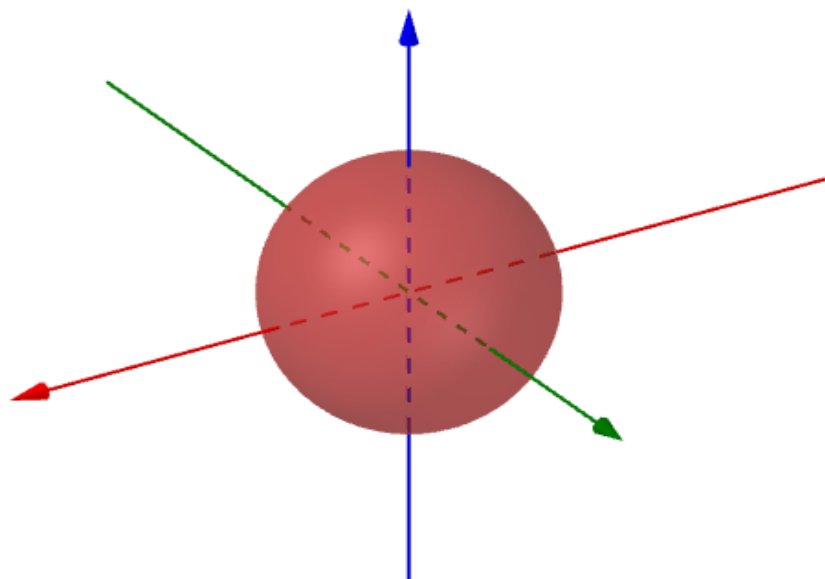
com $a = b = c = 1$, $d = e = f = m = n = p = 0$, e $q = -r^2$, veja Figura [3.12](#).

Exemplo 3.14. A equação de um **elipsoide** é dada por

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = r^2$$

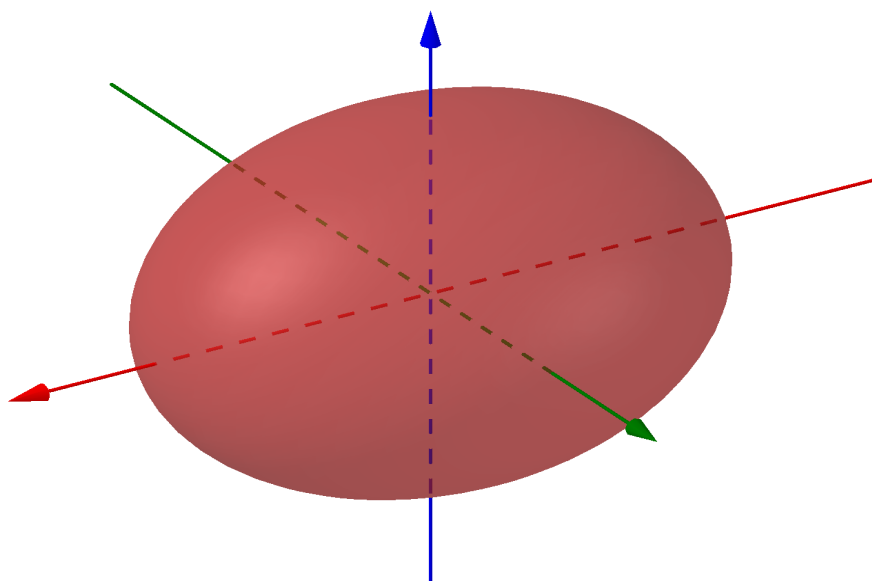
com $a = \frac{1}{A^2}$, $b = \frac{1}{B^2}$, $c = \frac{1}{C^2}$, $d = e = f = m = n = p = 0$, e $q = -r^2$, veja Figura [3.13](#).

Figura 3.12: Esfera.



Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Figura 3.13: Elipsoide.



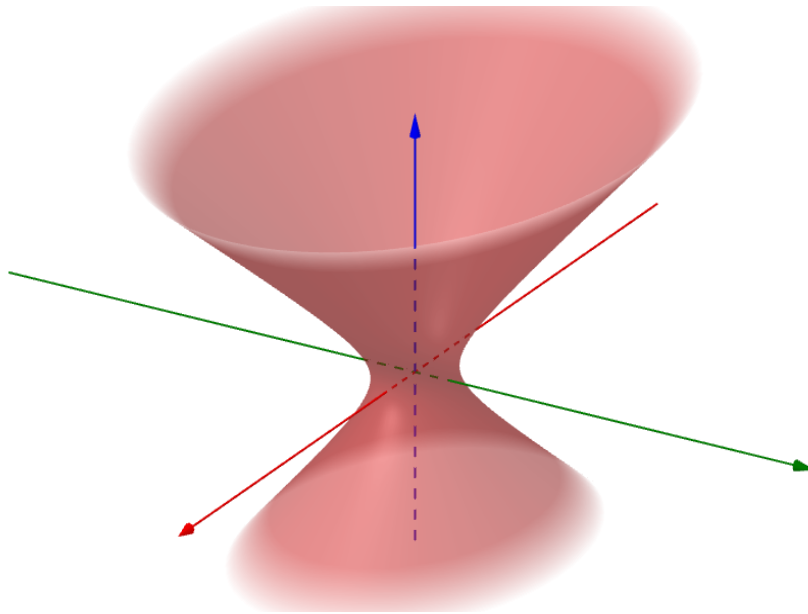
Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Exemplo 3.15. A equação de um **hiperboloide de uma folha** é dada por

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 1$$

com $a = \frac{1}{A^2}$, $b = \frac{1}{B^2} > 0$, $c = \frac{1}{C^2} < 0$, $d = e = f = m = n = p = 0$, e $q = -1$, veja a Figura [3.14](#).

Figura 3.14: Hiperboloide de uma folha.



Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Exemplo 3.16. A equação de um **hiperboloide de duas folhas** é dada por

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 1$$

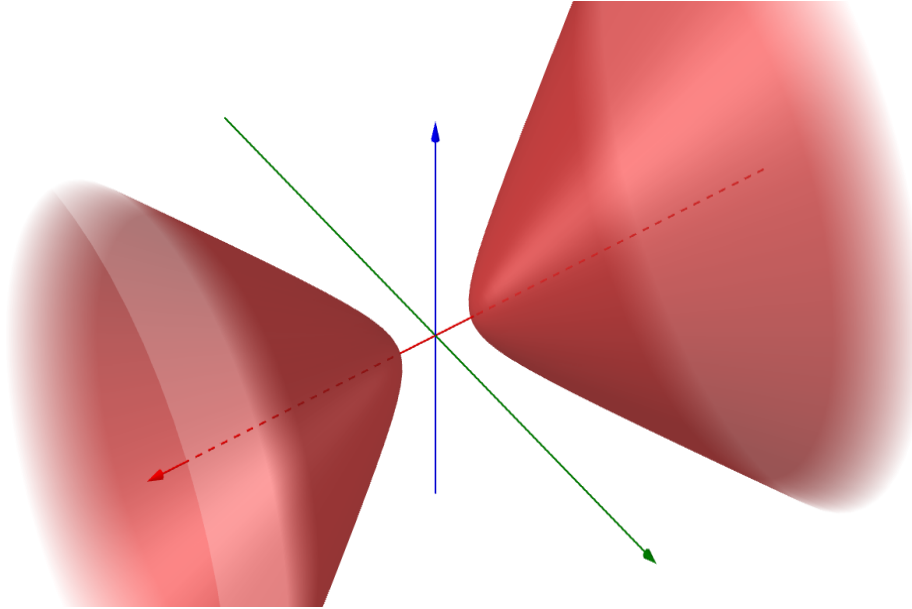
com $a = \frac{1}{A^2} > 0$, $b = \frac{1}{B^2}$, $c = \frac{1}{C^2} < 0$, $d = e = f = m = n = p = 0$, e $q = -1$, veja a Figura [3.15](#).

Exemplo 3.17. A equação de um **paraboloide elíptico** é dada por

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = cz$$

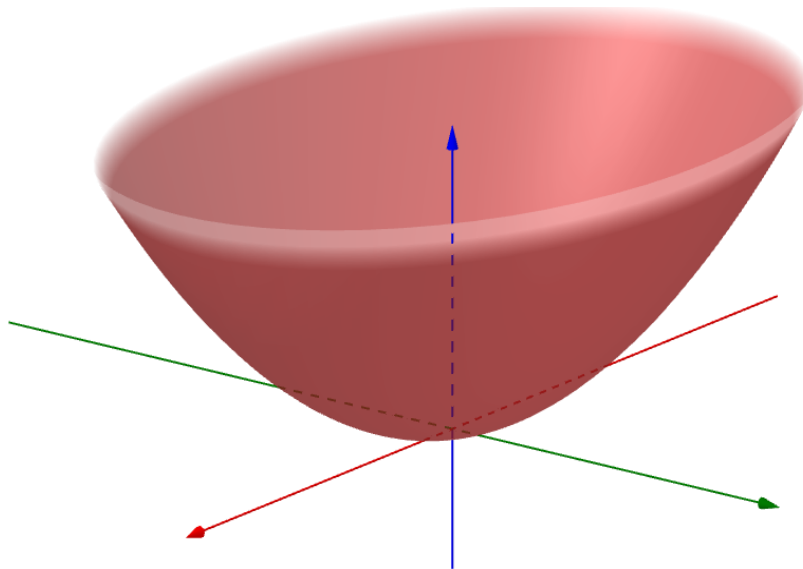
com $a = \frac{1}{A^2}$, $b = \frac{1}{B^2}$, $c > 0$, $d = e = f = m = n = p = q = 0$, veja a Figura 3.16.

Figura 3.15: Hiperbolóide de duas folhas.



Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Figura 3.16: Parabolóide elíptico.



Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

3.2.1 Equação reduzida de uma quádrlica

Da mesma maneira que foi feito para cônica, o nosso objetivo aqui também é o reconhecimento e análise da equação quádrlica. Para isso, iremos eliminar os termos mistos, xy , xz e yz através da diagonalização da forma quádrlica. Considere a equação quádrlica em coordenadas canônicas de \mathbb{R}^3

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + mx + ny + pz + q = 0. \quad (3.6)$$

Passo 1: Escrevemos a equação quádrlica na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & n & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + q = 0. \quad (3.7)$$

Passo 2: Diagonalizamos a forma quádrlica para eliminar os termos mistos. Para isso calculamos os autovalores λ_1 , λ_2 e λ_3 , e os autovetores ortonormais u_1 , u_2 e u_3 da matriz simétrica

$$\begin{bmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c \end{bmatrix}.$$

Passo 3: Obtemos as novas coordenadas. Para isto, precisamos fazer a seguinte substituição na equação (3.7):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix},$$

onde M é a matriz mudança de base formada pelos autovetores para a base canônica.

Passo 4: Substituímos as novas coordenadas na equação (3.7), obtendo a nova equação na

base $\{u_1, u_2\}$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & n & p \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + q = 0$$

a qual é da seguinte forma

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + r x_1 + s y_1 + t z_1 + q = 0, \quad (3.8)$$

com r , s e t dependentes das coordenadas dos autovetores u_1 , u_2 e u_3 . Esta equação é equivalente à equação dada em (3.6), porém, nos eixos x_1 , y_1 e z_1 , determinados pela base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$.

Note que enquanto a equação (3.6) apresenta os termos mistos xy , xz e yz , a equação (3.8) não possui. Assim, na transformação da equação (3.6) para (3.8) houve uma simplificação.

Passo 4: Eliminamos os termos lineares das coordenadas cujos os autovalores são não nulos.

Temos dois casos:

Caso 1: λ_1 , λ_2 e λ_3 diferentes de zero.

$$\lambda_1 \left(x_1^2 + \frac{r}{\lambda_1} x_1 \right) + \lambda_2 \left(y_1^2 + \frac{s}{\lambda_2} y_1 \right) + \lambda_3 \left(z_1^2 + \frac{t}{\lambda_3} z_1 \right) + q = 0.$$

Completando os quadrados, temos

$$\lambda_1 \left(x_1^2 + \frac{r}{\lambda_1} x_1 + \frac{r^2}{4\lambda_1^2} \right) + \lambda_2 \left(y_1^2 + \frac{s}{\lambda_2} y_1 + \frac{s^2}{4\lambda_2^2} \right) + \lambda_3 \left(z_1^2 + \frac{t}{\lambda_3} z_1 + \frac{t^2}{4\lambda_3^2} \right) + q - \frac{r^2}{4\lambda_1} - \frac{s^2}{4\lambda_2} - \frac{t^2}{4\lambda_3} = 0.$$

Isto implica em

$$\lambda_1 \left(x_1 + \frac{r}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y_1 + \frac{s}{2\lambda_2} \right)^2 + \lambda_3 \left(z_1 + \frac{t}{2\lambda_3} \right)^2 + q - \frac{r^2}{4\lambda_1} - \frac{s^2}{4\lambda_2} - \frac{t^2}{4\lambda_3} = 0.$$

Tomando $X = x_1 + \frac{r}{2\lambda_1}$, $Y = y_1 + \frac{s}{2\lambda_2}$, $Z = z_1 + \frac{t}{2\lambda_3}$ e $q - \frac{r^2}{4\lambda_1} - \frac{s^2}{4\lambda_2} - \frac{t^2}{4\lambda_3} = -F$, obtemos

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 = F. \quad (3.9)$$

A equação (3.9) é chamada *equação reduzida de uma quádrlica de centro* e, o primeiro membro é exatamente a forma quadrática no no espaço.

Caso 2: Se um dos autovalores for igual a zero, por exemplo, $\lambda_2 = 0$, a equação (3.8) fica:

$$\lambda_1 \left(x_1^2 + \frac{r}{\lambda_1} x_1 \right) + \lambda_3 \left(z_1^2 + \frac{t}{\lambda_3} z_1 \right) + s y_1 + q = 0.$$

Completando os quadrados, temos

$$\lambda_1 \left(x_1^2 + \frac{r}{\lambda_1} x_1 + \frac{r^2}{4\lambda_1^2} \right) + \lambda_3 \left(z_1^2 + \frac{t}{\lambda_3} z_1 + \frac{t^2}{4\lambda_3^2} \right) + s y_1 + q - \frac{r^2}{4\lambda_1} - \frac{t^2}{4\lambda_3} = 0$$

$$\lambda_1 \left(x_1 + \frac{r}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_3 \left(z_1 + \frac{t}{2\lambda_3} \right)^2 + s y_1 + q - \frac{r^2}{4\lambda_1} - \frac{t^2}{4\lambda_3} = 0.$$

Colocando s em evidência:

$$\lambda_1 \left(x_1 + \frac{r}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_3 \left(z_1 + \frac{t}{2\lambda_3} \right)^2 + s \left(y_1 + \frac{q}{s} - \frac{r^2}{4s\lambda_1} - \frac{t^2}{4s\lambda_3} \right) = 0.$$

Tomando $X = x_1 + \frac{r}{2\lambda_1}$, $Y = y_1 + \frac{q}{s} - \frac{r^2}{4s\lambda_1} - \frac{t^2}{4s\lambda_3}$, $Z = z_1 + \frac{t}{2\lambda_3}$, concluimos

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_3 Z^2 + sY = 0. \quad (3.10)$$

A equação reduzida (3.10) é denominada de *quádrlica sem centro*. Se em lugar de $\lambda_2 = 0$, tivéssemos feito $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_3 = 0$, a equação reduzida da quádrlica sem centro seria:

$$\lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + rX = 0$$

ou

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + tZ = 0.$$

Observe que, nos dois casos, para obter a equação reduzida de (3.9), ocorreu uma nova mudança de coordenada, que consiste na translação do referencial $Ox_1y_1z_1$ para o $O'XYZ$.

3.2.2 Classificação das quádricas

O procedimento estudado acima permite, através de uma mudança de referencial, colocar qualquer equação de uma quádrica na forma de uma das equações reduzidas típicas, possibilitando a classificação da quádricas, suas dimensões e posições no espaço tridimensional. Entretanto, neste trabalho, estamos interessados somente em classificar a quádricas dada pela equação geral. Para isto, vamos discutir as possibilidades a partir da análise dos sinais dos autovalores λ_1 , λ_2 e λ_3 .

Como já foi provado, uma equação geral de uma quádrica, depois da eliminação do termo misto, é reduzida às seguintes equações:

(I) A equação da quádrica de centro:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 = F$$

- i)* Para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e $F > 0$ a quádrica será classificada como elipsoide. Para $F = 0$, teremos um ponto. E, para $F < 0$, teremos o conjunto vazio.
- ii)* Para $\lambda_1, \lambda_2 < 0, \lambda_3, F > 0$ a quádrica será classificada como um hiperbolóide de duas folhas. Ou outra combinação com essa configuração.
- iii)* Para $\lambda_1 < 0, \lambda_2, \lambda_3$ e $F > 0$ a quádrica será classificada como ou hiperbolóide de uma folha. Ou outra combinação com essa configuração. Para (*ii*) e (*iii*) se $F = 0$ ou $F < 0$, teremos um cone duplo de revolução ou conjunto vazio.

(II) A equação da quádrica sem centro:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_3 Z^2 + sY = 0, \text{ ou } \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + rX = 0, \text{ ou } \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + tZ = 0$$

É classificada como um parabolóide.

Exemplo 3.18. Determinar a equação reduzida e a classificação quádrica representada pela equação

$$3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - 4x + 6y - 2z + 2 = 0.$$

Passo 1: Escrever na forma matricial canônica:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + 2 = 0.$$

Passo 2: Calculemos os autovalores e autovetores ortonormais da matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 3 - \lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

O polinômio característico de A é dado por

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 36\lambda + 36.$$

Então, os autovalores $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$, com os autovetores associados são, $v_1 = x(1, 0, -1)$, $v_2 = x(1, 1, 1)$, $v_3 = x(1, -2, 1)$ respectivamente.

Portanto, os correspondentes autovetores ortonormais são:

$$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \text{ e } u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right).$$

Passo 3: Sabendo que nesta nova base de autovetores $B = \{u_1, u_2, u_3\}$, a forma quadrática se dá como:

$$g(x_1, y_1, z_1) = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}.$$

e

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}.$$

Passo 4: A equação da cônica geral se reduz a

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + 2 = 0$$

ou seja,

$$2x_1^2 + 3y_1^2 + 6z_1^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{18}{\sqrt{6}}z_1 + 2 = 0.$$

Passo 5: Translação de eixos.

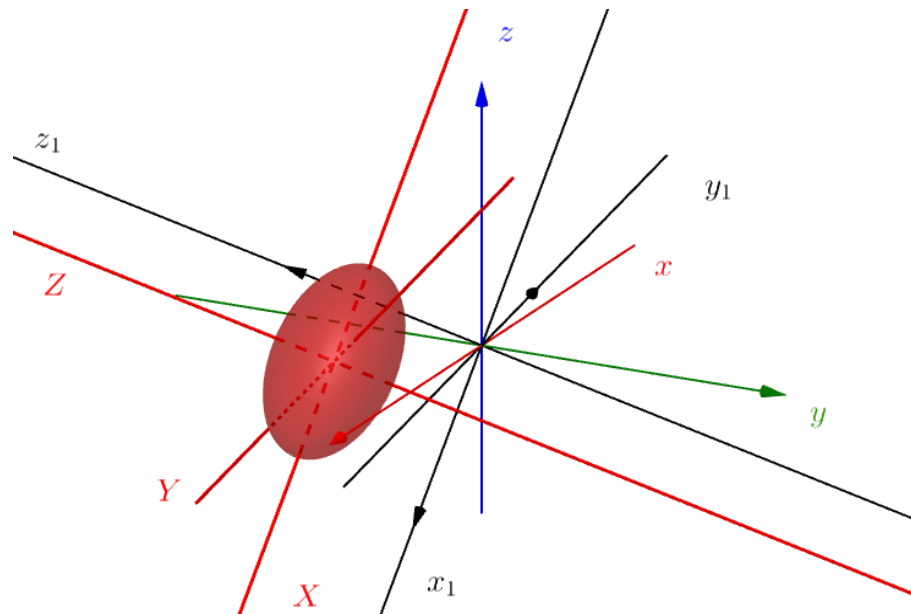
$$2 \left(x_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2 + 3y_1^2 + 6 \left(z_1 - \frac{3}{2\sqrt{6}} \right)^2 + 2 - \frac{1}{4} - \frac{9}{4}.$$

Tomando $X = x_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $Y = y_1$ e $Z = z_1 - \frac{3}{2\sqrt{6}}$ obtemos

$$4X^2 + 6Y^2 + 12Z^2 = 1.$$

A equação acima representada a quádrlica em relação a um novo referencial \mathbb{R}^3 , obtido por translação, indentificando-a como um **elipsoide**.

Figura 3.17: Elipsoide (2).



Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Exemplo 3.19. Determine a equação reduzida e a classificação da quádrlica representada pela equação

$$y^2 - 4xz - 4x + 2y - 3 = 0.$$

Fazendo os mesmos procedimentos do exemplo anterior, encontramos

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} - 3 = 0$$

ou seja,

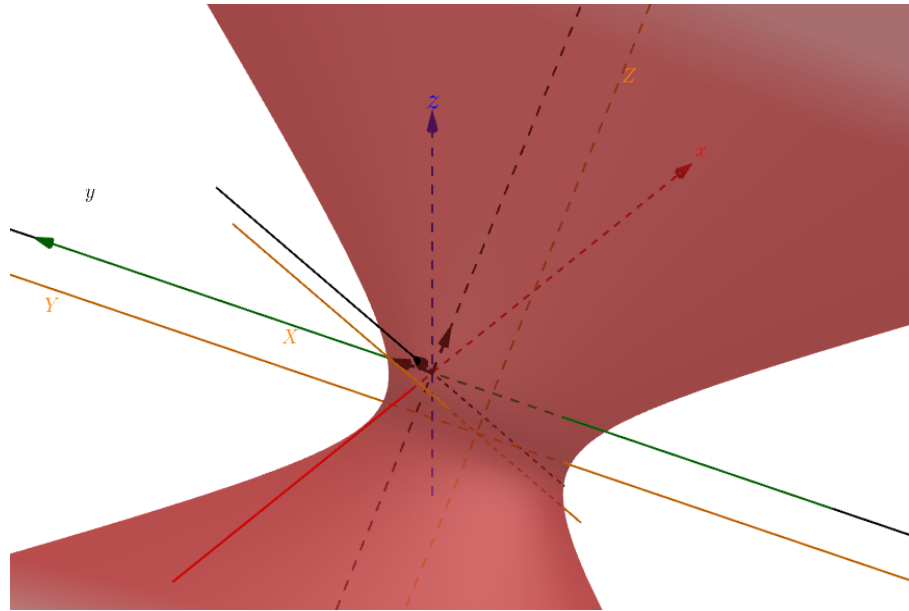
$$-2x_1^2 + y_1^2 + 2z_1^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}x_1 + 2y_1 + \frac{4}{\sqrt{2}}z_1 - 3 = 0.$$

Efetuada a translação de eixos, obtemos

$$-2X^2 + Y^2 + 2Z^2 = 4.$$

que implica em um **hiperboloide de uma folha**.

Figura 3.18: Hiperboloide de uma folha (2).



Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

Exemplo 3.20. Determine a equação reduzida e classifique a quádrlica dada por

$$2x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz + 2yz - 10x - 6y - 2z - 7 = 0.$$

Utilizando os mesmos procedimentos para determinar a equação reduzida, obtemos

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & -6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} - 7 = 0$$

ou seja,

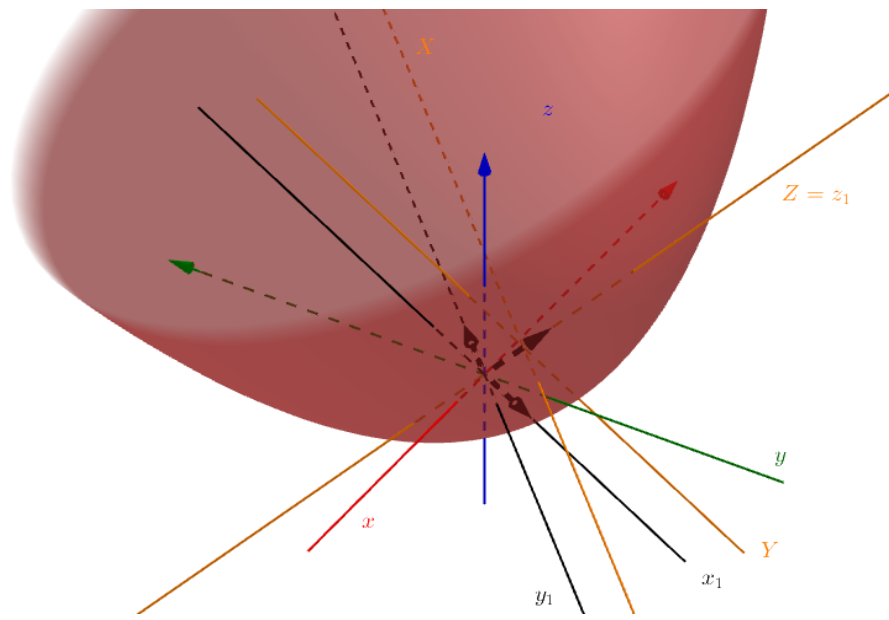
$$3y_1^2 + 6z_1^2 - \frac{16}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{6}{\sqrt{3}}y_1 - 7 = 0.$$

Por fim, pela translação de eixos, obtemos

$$3Y^2 + 6Z^2 = 8\sqrt{2}X$$

na qual ela representa um **parabolóide elíptico**.

Figura 3.19: Parabolóide elíptico (2).



Fonte: Autoria própria (Geogebra 5.0).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O procedimento de classificação ou reconhecimento de cônicas e quádricas é realizada de forma semelhante, com uma pequena distinção, na qual a forma quadrática no plano é uma função $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e a do espaço uma função $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, sendo que as duas possuem o mesmo algoritmo de resolução para a redução de uma equação cônica ou de uma equação quádrica. Ou seja, dada uma equação cônica ou quádrica, através de suas diagonalizações e obtendo bases ortonormais de autovetores, é possível simplificar seus termos mistos restantes e, assim possibilitando o seu reconhecimento de maneira mais simples.

O procedimento de reconhecimento de cônicas e quádricas exibidos nesse trabalho, tratou especificamente às equações cônicas e quádricas com termos mistos, pois equações sem esses termos nos diz que não há necessidade de diagonalização. Além disso, é bom informar que não é possível determinar equações reduzidas do tipo esférica e circunferência já que para tal procedimento precisaríamos encontrar autovalores iguais, neste caso, impossibilitando a criação de uma base ortonormal, por ser necessário autovalores distintos.

É importante ressaltar que, este trabalho precisou de fundamentos teóricos essenciais para o seu desenvolvimento, o que necessitou de um estudo mais aprofundado além dos assuntos abordados em uma disciplina introdutória de Álgebra Linear. Esperamos imensamente que as aplicações mostradas nesse trabalho contribuam calorosamente nos estudos dos alunos, que por ventura, tenham interesse em aprender sobre aplicações da Álgebra Linear e Geometria Analítica.

Referências Bibliográficas

- [1] BOLDRINI, José Luiz; COSTA, Sueli I. Rodrigues; FIGUEREDO, Vera Lúcia, WETZLER, Henry G. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Haper & Row Brasil, 1980. 441 p.
- [2] COELHO, Flávio Ulhoa. **Um curso de álgebra linear**. 2. ed. revista e ampliada. São Paulo: Editora Universidade de São Paulo, 2005. (Acadêmica, 34).
- [3] HOFFMAN, Kenneth; KUNZE, Ray; tradução: Alberto P. Bergamasco. **Álgebra linear**. São Paulo. Ed. Universidade de São Paulo. 1970. 356 p.
- [4] HOWARD, Anton; RORRES, Cris; tradução: Claus Ivo Doering. **Álgebra linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2011. 784 p.
- [5] KOLMAN, Bernard; HILL, David Ross; Tradução: Alessandra Bosquilha. **Introdução à álgebra linear: com aplicações**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. 684 p.
- [6] LIMA, Elon Lages. **Álgebra linear**. 1.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. 357 p.
- [7] LIPSCHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc Lars; tradução: Dr. Claus Ivo Doering. **Álgebra linear**. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2011. 429 p. (coleção Schaum).
- [8] LISBOA, Rose Suellen (org.). **Guia de elaboração de trabalhos acadêmicos**. 2. ed. Belém: Universidade Federal do Pará, Biblioteca, 2021. 101 p.
- [9] MALAJOVICH, Gregorio. **Álgebra linear com aplicações**. Rio de Janeiro. Livro eletrônico e preliminar. 2010. 189 p.
- [10] MOL, Rogério S. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG. 2013. 138 p.

- [11] PELLEGRINI, Jerônimo C. **Álgebra linear**. Livro eletrônico versão 130. 2015. 562 p.
- [12] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra linear**. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, Ltda. 1987. 583 p.