



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
FACULDADE DE MATEMÁTICA

CAMILA RODRIGUES E RODRIGUES LEAL

**EQUAÇÃO DO CALOR: SOLUÇÕES ANALÍTICA E NUMÉRICA**

BELÉM  
2022

CAMILA RODRIGUES E RODRIGUES LEAL

## **EQUAÇÃO DO CALOR: SOLUÇÕES ANALÍTICA E NUMÉRICA**

Trabalho de conclusão de curso apresentado para obtenção do título de Licenciado em Matemática, pela Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo.

BELÉM  
2022

CAMILA RODRIGUES E RODRIGUES LEAL

**EQUAÇÃO DO CALOR: SOLUÇÕES ANALÍTICA E NUMÉRICA**

Trabalho de conclusão de curso apresentado para obtenção do título de Licenciado em Matemática, pela Universidade Federal do Pará.

Data de aprovação: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_\_

Conceito: \_\_\_\_\_

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo - Orientador  
Faculdade de Matemática, ICEN/UFPA

---

Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior - Membro Avaliador  
Faculdade de Matemática, ICEN/UFPA

---

Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro - Membro Avaliador  
Faculdade de Matemática, Campus Abaetetuba/UFPA

Dedico este trabalho ao meu filho Calebe Leal.

## AGRADECIMENTOS

AO MEU DEUS, pois tudo provém Dele.

À MINHA FAMÍLIA, pelas orações e por terem sonhado junto comigo desde o início dessa caminhada acadêmica. Agradeço a meus queridos tios, primos, avós e a todos que fazem parte dessa grande e amada família. Especialmente à minha mãe e irmãs, que cuidaram do meu filho para que eu pudesse seguir estudando. AO MEU esposo, obrigada por tudo, não há como descrever todo seu cuidado e participação para que eu pudesse concluir esse trabalho!

AOS MEUS AMIGOS, Denise, Gabriel, Jéssica, Noeme, Mara Denise e Renan, por todas as alegrias proporcionadas.

AO MEU AMIGO RENAN MELO, meu muito obrigada por todo o apoio prestado desde o primeiro dia de aula até hoje! E por toda a contribuição. Os amigos são nossa riqueza!

À UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ (UFPA), pelas oportunidades que oferece a todos.

À FACULDADE DE MATEMÁTICA (FACMAT), por todos os seus profissionais.

À CAPES, pelo programa residência pedagógica.

À PROFESSORA IRENE CASTRO, por todos os seus incentivos no período de minha gravidez.

AO PROFESSOR ANDERSON CAMPELO, que jamais terei palavras para expressar o quanto sua paciência para comigo significou na minha vida, e por toda a contribuição e orientação neste trabalho, se um dia eu conseguir, quero seguir o exemplo de profissionalismo e humildade que representas.

## Resumo

Este trabalho contém uma introdução às equações diferenciais, onde o principal objetivo é apresentar soluções para a equação do calor. Fez-se um estudo detalhado do método de separação de variáveis aplicado ao problema da equação do calor; em termos usuais, esse método consiste em separar pelo sinal de igualdade os termos envolvendo as derivadas parciais, de modo que a EDP presente na condução de calor é solucionada. Para que haja uma boa compreensão, discorreremos sobre alguns conceitos e definições para desenvolver o método de solução de diferenças finitas, utilizando-se de simulações numéricas computacional com enfoque na equação parabólica do calor.

**Palavras-chave:** Equação do calor, separação de variáveis, método de diferenças finitas.

## **Abstract**

This work contains an introduction to differential equations, where the main objective is to present solutions for the heat equation. A detailed study was made of the method of separation of variables applied to the problem of the heat equation; in usual terms, this method consists of separating the terms involving the partial derivatives by the equal sign, so that the EDP present in the heat conduction is solved. To have a good understanding, we discuss some concepts and definitions to develop the finite difference solution method, using computer numerical simulations with a focus on the parabolic equation of heat.

**Keywords:** Heat equation, separation of variables, finite difference method.

# Lista de Figuras

1	Barra . . . . .	8
2	Resultado da simulação numérica $v_j^n$ em comparação com a solução exata $u(x_j, t_n)$ do problema (2.9)–(2.11) dada por $u(x, t) = 2 \operatorname{sen}(3\pi x) e^{-(3\pi)^2 t}$ . Para esta simulação tomamos $\alpha \leq 0,5$ , portanto satisfazendo a condição de estabilidade. . . . .	25

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Equações Diferenciais Parciais</b>	<b>3</b>
1.1 Nota Histórica . . . . .	3
1.2 Definição de Equação . . . . .	4
1.2.1 Equações Lineares e Não Lineares . . . . .	5
1.2.2 Classificações Importantes . . . . .	6
<b>2 Equação do Calor</b>	<b>7</b>
2.1 Preliminares . . . . .	7
2.2 Dedução da Equação do Calor . . . . .	8
2.3 Solução via Método de Separação de Variáveis . . . . .	11
2.4 Princípio da Superposição . . . . .	14
<b>3 Método de Diferenças Finitas para Equação do Calor</b>	<b>17</b>
3.1 Aproximações das derivadas . . . . .	18
3.2 Esquema Explícito . . . . .	19
3.3 Consistência, Estabilidade e Convergência . . . . .	20
3.3.1 Consistência . . . . .	20
3.3.2 Estabilidade . . . . .	22
3.3.3 Convergência . . . . .	23
3.4 Simulações Numéricas . . . . .	24

# Introdução

As Equações Diferenciais Parciais (EDPs) são essenciais para a resolução de uma série de problemas, sendo comumente utilizadas para descrever fenômenos tais como a Equação da Onda, Equação do Calor (o qual este trabalho destaca) entre outros, desde que impostas às condições de contorno relativas a cada um dos casos em particular. Para que haja eficiência nos estudos das EDPs, é necessário ter um amplo conhecimento de propriedades das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), pois na maioria das vezes, faz-se a tentativa de transformar a Equação Diferencial Ordinária (EDO) em uma ou mais EDPs, simplificando os cálculos para chegar-se à solução do problema.

É interessante mencionar que há equações diferenciais que regem fenômenos físicos como citado anteriormente, mas, cujas soluções analíticas envolvem casos de contorno bastante complicados, nestes casos, é comum recorrer às soluções aproximadas obtidas por meio da aplicação de métodos numéricos cujo objetivo é encontrar uma solução numérica bastante próxima da solução exata do problema, visando sempre diminuir o erro, ou seja, a diferença entre as duas soluções, de tal forma que o método possa ser considerado válido.

Dizemos que uma equação é diferencial parcial, quando envolve uma função de  $n$  variáveis com  $n \geq 2$ , e suas respectivas derivadas parciais de ordem até  $m$ , com  $m \geq 1$ , e podem ser interpretados como um modelo matemático para problemas reais em muitas aplicações da físicas já citado acima e até mesmo em biologia. Há vários métodos para a resolução de uma equação diferencial, neste trabalho apresentaremos a separação de variáveis, diferenças finitas e a técnica de solução numérica, objetivando levar um conhecimento básico ao leitor sobre os mesmos.

O objetivo dessa produção é um estudo detalhado da Equação do Calor, que é formulado por uma equação diferencial parabólica. Para isso, dividimos em 4 capítulos.

O Capítulo 1 apresenta uma nota histórica e algumas definições de EDPs, conceituando ordem, tipos e condições de fronteiras, como preliminares para os próximos capítulos.

No Capítulo 2 é realizado a formulação matemática da Equação do Calor, bem como alguns resultados baseados nos livros de P. Boulous, D.G. Figueiredo e David Black. Neste capítulo temos como objetivo apenas mostrar como se forma a principal equação desse

trabalho. Além disso, utilizamos o método de separação de variáveis e o princípio da superposição, com o intuito de encontrar a solução exata da equação do calor..

No Capítulo 3 utilizamos o Método de Diferenças Finitas, em particular usamos um esquema explícito para encontrar uma solução numérica da equação de estudo nessa produção. Neste capítulo, ainda definimos e analisamos a Consistência, Estabilidade e a Convergência do esquema numérico trabalhado. Para as nossas simulações, utilizamos o *software* MATLAB, que é uma interface gráfica padronizada que permite a solução de problemas razoavelmente complexos sem a necessidade de um grande conhecimento sobre programação.

# Capítulo 1

## Equações Diferenciais Parciais

### 1.1 Nota Histórica

As Equações Diferenciais iniciaram com o estudo de cálculo por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhen Leibniz (1646 - 1716) durante o século XVII, Newton fez descobertas sobre o cálculo e as leis da mecânica por volta de 1665, elas circulavam privadamente entre seus amigos, todavia, Newton era muito sensível a críticas e só começou a publicar seus resultados a partir de 1687.

Apesar de Newton ter atuado bem pouco na área de Equações Diferenciais, o seu desenvolvimento do cálculo e a elucidação dos princípios básicos da mecânica forneceram a base para a aplicação das equações diferenciais no século XVII [BOYCE, 2010].

Ele desenvolveu métodos em casos onde  $f(x, y)$  é um polinômio em  $x$  e  $y$  usando séries infinitas, além de classificar também as equações diferenciais. Entretanto, não foi só Newton que fez história nessa época, Leibniz desenvolveu o método de separação de variável e o método de resolução de equações lineares de primeira ordem, além de notações matemáticas de derivadas e integrais.

Esses progressos na ciência estimularam físicos e matemáticos da época a pesquisar e desenvolver modelos que representassem outros ramos da física e da mecânica contínua, visto que o século XVIII é marcado por intensas teorias acerca das equações diferenciais, resultando nas equações diferenciais parciais, e com ela um grau de dificuldade elevado nas suas resoluções [SIMÕES, 2014].

Euler foi o matemático mais prolífico de todos os tempos, suas obras somam mais de 70 volumes, seus interesses incluíam todas as áreas da matemática e muitos campos de aplicações, embora tenha ficado cego durante os últimos 17 anos de sua vida, seu trabalho continuou no mesmo ritmo até o último dia de vida [BOYCE, 2010].

Mais tarde, Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813) mostrou que a solução de uma equação diferencial linear homogênea de ordem  $n$  é uma combinação linear de  $n$  soluções independentes. [SIMÕES, 2014] Nesse período D'Alembert (1717-1783) também lançou um artigo sobre a equação da onda, também conhecida como equação das cordas vibrantes, mas o assunto não foi publicado até o final do século XVIII, assim como as definições mais gerais de funções surgiram bem mais tarde, com a formalização de conceito durante o século XIX.

Em 1807 Joseph Fourier (1768-1830) estudando a propagação de calor em sólidos, sob certas condições iniciais desenvolveu suas séries e explicitou seus coeficientes, surgindo a equação do calor. Outro matemático também defendeu a causa de Fourier, Gustave Lejeune Dirichlet deu continuidade ao trabalho contribuindo para uma fundamentação bem mais consistente da matemática na época.

Outra característica importante nas equações diferenciais no século XX, foi a criação de métodos geométricos ou topológicos especialmente para equação não lineares, que tinha o objetivo de compreender pelo menos qualitativamente o comportamento de soluções de um ponto de vista geométrico, assim como analítico, apropriando-se de aproximações numéricas [BOYCE, 2010].

## 1.2 Definição de Equação

Este capítulo apresenta alguns conceitos básicos e importantes das equações diferenciais, na intenção de familiarizar os conteúdos que serão abordados nos capítulos posteriores, portanto, temos de maneira intuitiva “equações”, que nos remete a incógnita, e “diferenciais” à ideia de derivadas.

**Definição 1.1.** *Uma equação que contém derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável independente, ela é chamada de **Equação Diferencial Ordinária (EDO)**. [ZILL, 2001]*

**Exemplo 1.1.**

$$\frac{dy}{dt} - 5y = 1 \quad (1.1)$$

**Definição 1.2.** *Qualquer equação diferencial que contenha derivadas parciais, com a ordem da equação sendo igual à ordem do mais alto coeficiente diferencial parcial que nela ocorre é chamada de **Equação Diferencial Parcial (EDP)**. Onde a variável dependente deve ser uma função de pelo menos duas variáveis independentes [STEPHENSON, 1975].*

**Exemplo 1.2.**

$$3y^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2u, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.3)$$

Acima temos equações de primeira e segunda ordem, respectivamente, em que  $x$  e  $y$  são as variáveis independentes e  $u \equiv u(x, y)$  a variável dependente.

É importante ressaltar que a equação (1.3), geralmente, ocorre na descrição matemática dos fenômenos da natureza, perceba que muitos processos físicos são descritos por funções de duas ou mais variáveis independentes, por exemplo, diversas variáveis no espaço  $x, y$ , e  $z$ , e uma variável no tempo  $t$ .

Conseqüentemente, qualquer relação entre uma tal função  $[u(x, y, z, t)]$  e suas derivadas em relação a qualquer uma das variáveis independentes levará a uma equação diferencial parcial [STEPHENSON, 1975].

Na física, a equação do calor é um modelo matemático para a condução de calor em sólidos, contudo, abordaremos no próximo capítulo.

### 1.2.1 Equações Lineares e Não Lineares

Uma equação é linear se as incógnitas e suas derivadas aparecem em uma soma em que cada parcela é um produto de alguma derivada das incógnitas com uma função que não depende das incógnitas, ou seja, a EDO  $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ , é dita **linear** se  $F$  é uma função linear das variáveis  $y, y', \dots, y^{(n)}$ , da mesma forma aplica-se às EDPs.

Assim, a EDO linear geral de ordem  $n$  é:

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = g(t),$$

as equações diferenciais que não podem ser expressas dessa forma, não são lineares.

**Definição 1.3.** *Uma equação linear chama-se homogênea se cada termo contém ou a variável dependente ou uma de suas derivadas, a exemplo temos a Equação Bidimensional de Laplace,*

$$\nabla^2 u = 0,$$

*que é homogênea, enquanto que, a Equação Bidimensional de Poisson,*

$$\nabla^2 u = f(x, y),$$

*onde  $f(x, y)$  é qualquer função dada (não-nula), é dita não homogênea [STEPHENSON, 1975].*

**Solução:** De modo geral podemos dizer que uma combinação linear de duas ou mais soluções, é também uma solução para uma EDO linear homogênea, de forma semelhante dizemos que no caso de uma Equação Diferencial Parcial (EDP), se  $u_1, u_2, \dots, u_n$  são  $n$

soluções diferentes de uma EDP homogênea em algum dado, então,

$$u = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n, \quad (1.4)$$

é também uma solução no mesmo domínio onde  $c_1, c_2, \dots, c_n$  são constantes arbitrárias, e chamamos esse resultado de **Princípio da Superposição**.

**Condições de fronteira:** Quando um fenômeno físico é descrito matematicamente, é necessário enunciar condições suficientes para se obter um resultado satisfatório, assim, a solução deve ser única e estável.

Há três tipos de condições de fronteiras que surgem frequentemente na representação de fenômenos físicos.

- I) Condições de Dirichlet, onde  $u$  é especificado em cada ponto da fronteira de uma região.
- II) Condições de Neumann, onde são prescritos os valores das derivadas normais  $\frac{du}{dn}$  da função na fronteira.
- III) Condição de Cauchy, aqui, se uma das variáveis independentes é  $t$ , e os valores de  $u$  e de  $\frac{\partial u}{\partial t}$  na fronteira  $t = 0$  são ambos dados, então as condições de fronteiras são do tipo Cauchy em relação a variável  $t$ .

## 1.2.2 Classificações Importantes

Uma equação linear homogênea de segunda ordem geral pode ser escrita como:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2h\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2f\frac{\partial u}{\partial x} + 2g\frac{\partial u}{\partial y} + eu = 0, \quad (1.5)$$

onde  $a, h, b, f, g$  e  $e$ , podem ser constantes ou funções de  $x$  e  $y$ .

De acordo com [STEPHENSON, 1975] a equação (1.5) é do tipo:

$$\begin{aligned} &\text{Elítico se, } ab - h^2 > 0, \\ &\text{Parabólico se, } ab - h^2 = 0, \\ &\text{Hiperbólico se, } ab - h^2 < 0, \end{aligned}$$

para fins informativo podemos dizer que a equação da onda é uma equação do tipo hiperbólico, a equação de Laplace em duas variáveis é do tipo elítico e a equação do calor é do tipo parabólico e quando uma equação possui três ou mais variáveis independentes a classificação é feita de forma semelhante.

# Capítulo 2

## Equação do Calor

### 2.1 Preliminares

A partir de agora concentraremos na equação diferencial que rege a transferência de calor numa superfície, é importante ressaltar que o objetivo desse capítulo é unicamente mostrar a formulação matemática da equação do calor. De modo que precisaremos de alguns resultados prévios para um melhor entendimento nesse processo, para isso vamos apresentar alguns conceitos, como segue:

**Notação de Leibniz:** Uma notação tradicionalmente usada para designar uma primitiva de uma função  $f$  em um intervalo  $I$  é devida a Leibniz,

$$\int f(x)dx.$$

Uma primitiva de  $f$  também é chamado de antiderivada de  $f$ , ou integral de  $f$ . Portanto, por definição de primitiva temos para todo  $x$  de  $I$ :

$$\frac{d}{dx} \left( \int f(x)dx \right) = f(x).$$

**Primeiro teorema fundamental do cálculo:** Seja  $f$  uma função contínua no intervalo  $I$ . Escolhendo  $c$  em  $I$ , seja  $A$  a função de domínio  $I$  dada por

$$A(x) = \int_c^x f.$$

Então, para todo  $x$  de  $I$ , tem-se

$$\frac{dA}{dx}(x) = f(x)$$

um enunciado mais condensado seria  $f$  contínua no intervalo  $I$ , e  $c$  um ponto de  $I$ , então,

$$\frac{d}{dx} \left( \int_c^x f \right) = f(x).$$

**Soma de Riemann:** Seja  $f$  uma função definida em  $[a, b]$  e  $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ , uma partição de  $[a, b]$  para cada índice  $i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$  seja  $c_i$  um número em  $[x_{i-1}, x_i]$  escolhido arbitrariamente, assim temos:

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = f(c_1) \Delta x_1 + f(c_2) \Delta x_2 + \dots + f(c_n) \Delta x_n.$$

A equação acima denomina-se soma de Riemann de  $f$ , relativa à partição  $p$  e aos números  $c_i$ .

**Definição 2.1.** Dado um corpo de massa  $m$  e calor específico  $c$ . O calor  $Q$  necessário para a variação da temperatura  $\Delta T$  é representado por:

$$Q = mC\Delta T, \quad (2.1)$$

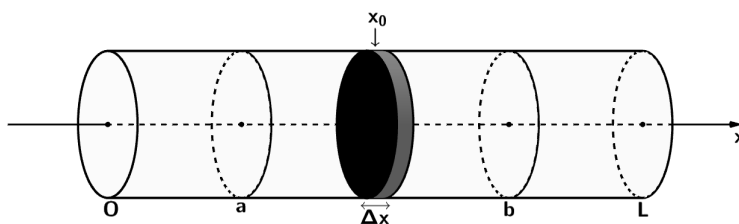
onde  $\Delta T = T_f - T$  é a diferença entre a temperatura final e inicial, respectivamente.

## 2.2 Dedução da Equação do Calor

A dedução da equação do calor feita aqui, está baseada nos escritos de D. Bleeker e [FIGUEIREDO, 2014], então, suponha uma barra de comprimento  $L$ , e que o fluxo de calor ocorra somente na direção longitudinal, e as superfícies da barra estejam isoladas termicamente.

Definimos essa barra de forma homogênea, comprimento  $L$ , calor específico  $c$  e densidade  $D$ , com a área da secção transversal  $A$  muito pequena em relação ao seu comprimento, de maneira que a temperatura é constante em  $A$ , e será representada por  $u(x, t)$ , então a função  $u(x, t)$  é a temperatura na barra na secção transversal  $x$  no instante  $t$ .

Figura 1: Barra .



Fonte:

Agora vamos supor uma placa de comprimento  $\Delta x$ , fixada em algum  $x = x_0$ , é importante mencionar aqui a lei do resfriamento de Fourier, onde “dados duas placas  $P_1$  e  $P_2$  de áreas iguais a  $A$ , e temperaturas constantes  $T_1$  e  $T_2$ , respectivamente, com as placas paralelas uma a outra, haverá passagem de calor da placa mais quente para a mais fria” [FIGUEIREDO, 2014].

Assim, pela equação (2.1) a energia necessária para aquecer uma placa até uma determinada temperatura é:

$$Q = mC\Delta T,$$

queremos aquecer a placa de comprimento  $\Delta x$ , de 0 até  $u(x_0, t)$ , então temos que

$$\Delta T = u(x_0, t) - 0 = u(x_0, t),$$

como  $m = DA\Delta x$ , logo:

$$Q = C(DA\Delta x)u(x_0, t). \quad (2.2)$$

Tomando um intervalo qualquer  $[a, b]$  tal que  $0 < a < b < L$ , com  $\Delta x$  tendendo a zero e somando a energia de todas as placas entre  $a$  e  $b$  tem-se:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [CDA\Delta x(u(x_1, t) + u(x_2, t) + \cdots + u(x_n, t))] = CDA \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \sum_{i=1}^n u(x_i, t)\Delta x \right]. \quad (2.3)$$

Temos então uma soma de Riemann, como  $\Delta x$  tende a zero, logo:

$$CDA \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \sum_{i=1}^n u(x_i, t)\Delta x \right] = CDA \cdot \int_a^b u(x, t)dx = E(t), \quad (2.4)$$

onde  $E(t)$  representa a energia térmica no instante  $t$ . Em [FIGUEIREDO, 2014] temos que a taxa de energia térmica que passa por uma secção transversal é dada por  $-KAu_x(x, t)$ .

Perceba que inicialmente foi assumido que a barra é termicamente isolada nas laterais, logo, a única forma que o calor pode propagar no intervalo  $[a, b]$  é através das secções transversais  $x = a$  e  $x = b$ , portanto, a taxa com que o calor propagará nesse intervalo será a taxa de energia que entra em  $x = a$  menos a taxa de energia que sai em  $x = b$ , logo,

$$\begin{aligned} E'(t) &= [-KAu_x(a, t) - (-KAu_x(b, t))] \\ &= KA u_x(b, t) - KA u_x(a, t) \\ &= [KA u_x(x, t)]_a^b, \end{aligned}$$

e pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\begin{aligned} E'(t) &= [kAu_x(x, t)]_a^b = \int_a^b \frac{d}{dx} [kAu_x(x, t)] dx \\ &= \int_a^b kAu_{xx}(x, t) dx. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Podemos também calcular  $E'(t)$  em 2.4 então:

$$E'(t) = \frac{d}{dt} \left[ \int_a^b CDAu(x, t) dx \right],$$

como a função é contínua em  $[a, b]$ , pela regra de Leibniz temos que:

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{d}{dt} \left[ \int_a^b CDAu(x, t) dx \right] \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} [CDAu(x, t)] dx \\ &= \int_a^b CDAu_t(x, t) dx. \end{aligned} \tag{2.6}$$

De (2.5) e (2.6) segue:

$$\int_a^b CDAu_t(x, t) dx = \int_a^b kAu_{xx}(x, t) dx,$$

agora divide-se ambos os lados por  $CDA$ ;

$$\int_a^b u_t(x, t) dx = \int_a^b \frac{k}{CD} u_{xx}(x, t) dx = \int_a^b ku_{xx}(x, t) dx,$$

onde  $k = \frac{k}{CD}$ , daí temos:

$$\int_a^b (u_t(x, t) - ku_{xx}(x, t)) dx = 0, \forall [a, b] \subset [0, L] \text{ e } \forall t > 0. \tag{2.7}$$

Perceba que  $k$  é uma constante, e supondo  $u$  uma função, tal que a integrando em 2.7 obtemos:

$$u_t(x, t) - ku_{xx}(x, t) = 0, \forall x \in [0, L] \text{ e } \forall t > 0,$$

ou seja,

$$u_t = ku_{xx}. \tag{2.8}$$

A equação acima é denominada equação do calor, e é a lei que rege a variação de temperatura  $u(x, t)$  numa barra uniforme com a superfície lateral isolada termicamente [FIGUEIREDO, 2014].

## 2.3 Solução via Método de Separação de Variáveis

Nosso problema consiste na condução de calor em uma barra de comprimento  $L$ , onde a superfície lateral dessa barra está isolada termicamente e o fluxo de calor só é possível na direção longitudinal de modo que o problema é de uma só dimensão. É importante lembrar que as grandezas físicas são constantes em cada secção transversal, portanto, é possível que haja variação de calor de uma secção para a outra.

Queremos, então, determinar a temperatura  $u(x, t)$  do ponto  $x$  da barra, no instante  $t$ , de modo a satisfazer o seguinte problema de valor inicial e de contorno:

$$u_t = ku_{xx}, \quad x \in (0, L), \quad t > 0, \quad (2.9)$$

sujeito as condições iniciais e de contorno:

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, L], \quad (2.10)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad t > 0. \quad (2.11)$$

Para este propósito, usaremos o método de separação de variáveis, o qual consiste em separar pelo sinal de igualdade os termos envolvendo as derivadas parciais. No que se segue conduziremos o trabalho de acordo com a obra de FIGUEIREDO [2014].

Assim, para encontrar a solução, separamos  $u(x, t)$  de (2.9) em duas funções, uma de  $x$  e outra de  $t$  da seguinte maneira:

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

logo,

$$X(x)T'(t) - kX''(x)T(t) = 0. \quad (2.12)$$

Agora separamos as variáveis e deixamos em lados opostos os termos que dependem de  $x$  e  $y$ , porém, isso só é possível se ambos os lados forem constantes, assim, igualamos os termos a uma constante que indicaremos por  $\lambda$ .

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)k} = \lambda.$$

Por simplicidade tomemos na equação anterior  $k = 1$  e obtemos as seguintes EDOs:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad \text{para } 0 < x < L \quad (2.13)$$

$$T'(t) - \lambda T(t) = 0. \quad (2.14)$$

A partir desse momento temos por objetivo solucionar o problema que vem sendo proposto, supondo que a solução é da forma  $u(x, t) = X(x)T(t)$  e aplicando as condições de contorno (2.10) e (2.11) temos:

$$u(0, t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0, \quad (2.15)$$

$$u(L, t) = 0 \Rightarrow X(L)T(t) = 0 \Rightarrow X(L) = 0, \quad (2.16)$$

perceba que se  $T(t) = 0$ , a solução seria trivial, ou seja,  $u(x, t) = 0$  para todo  $x$  e todo  $t$ , o que não nos interessa.

Considerando a EDO dada em (2.13), procederemos no sentido de ver quais os valores de  $\lambda$  que conduzem a soluções de  $X(x)$  não identicamente nulas. Para isso, há três possibilidades para  $\lambda$  conforme segue:  $\lambda > 0$ ,  $\lambda = 0$  e  $\lambda < 0$ .

**Caso  $\lambda = 0$ :** Neste caso, a solução é da forma:

$$X''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = C_1x + C_2, \quad (2.17)$$

e das condições (2.15) e (2.16), vem que

$$X(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$X(L) = 0 \Rightarrow C_1L + C_2 = 0,$$

o que acarreta em  $C_1 = C_2 = 0$ , logo temos  $X(x) \equiv 0$ .

**Caso  $\lambda > 0$ :** A solução da EDO (2.13) é da forma,

$$X(x) = C_1e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2e^{-\sqrt{\lambda}x}. \quad (2.18)$$

Então, para satisfazer as condições (2.15) e (2.16), devemos ter:

$$X(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0,$$

$$X(L) = 0 \Rightarrow C_1e^{\sqrt{\lambda}L} + C_2e^{-\sqrt{\lambda}L} = 0$$

Da primeira equação do sistema temos que  $C_1 = -C_2$ , substituindo esse resultado na

segunda equação, obtemos

$$C_2 \left( e^{-\sqrt{\lambda}L} - e^{\sqrt{\lambda}L} \right) = 0$$

donde obtemos  $C_2 = 0$  pois  $\left( e^{-\sqrt{\lambda}L} - e^{\sqrt{\lambda}L} \right) \neq 0$ . Assim também temos  $C_1 = 0$ , o que implica em  $X(x) \equiv 0$ , o que não interessa.

**Caso  $\lambda < 0$ :** Para  $\lambda < 0$ , faremos a solução da mesma forma como no caso anterior, tomando  $\lambda = -\mu^2$ , assim, a equação (2.13) pode ser reescrita como

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0,$$

portanto a solução geral é da forma

$$X(x) = C_1 e^{i\mu x} + C_2 e^{-i\mu x},$$

ou ainda, usando-se a fórmula de Euler dada por  $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \operatorname{sen} \theta$ , obtemos

$$X(x) = (C_1 + C_2) \cos(\mu x) + (C_1 - C_2) i \operatorname{sen}(\mu x)$$

Assim, concluímos que

$$X(x) = A \cos(\mu x) + B \operatorname{sen}(\mu x). \quad (2.19)$$

Agora utilizamos novamente as condições de contorno para determinar os valores das constantes:

$$X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A \cos(0) + B \operatorname{sen}(0) = 0,$$

o que implica  $A = 0$ . Por outro lado, para  $X(L) = 0$ , temos

$$\begin{aligned} X(L) = 0 &\Rightarrow A \cos(\mu L) + B \operatorname{sen}(\mu L) = 0 \\ &\Rightarrow 0 + B \operatorname{sen}(\mu L) = 0 \\ &\Rightarrow B \operatorname{sen}(\mu L) = 0, \end{aligned}$$

assim, temos que  $B = 0$  ou  $\operatorname{sen}(\mu L) = 0$ . Se  $B$  é nulo, então teremos  $X(x) \equiv 0$ , o que não queremos. Então devemos ter

$$\operatorname{sen}(\mu L) = 0,$$

o que implica que  $(\mu L)$  deve ser um número inteiro múltiplo de  $\pi$ , então os valores de

$-\lambda = \mu^2$ , são dados por

$$\mu^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.20)$$

Substituindo os valores de  $\mu$  e  $A = 0$  em (2.19) resulta:

$$X(x) = B \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (2.21)$$

Agora vamos usar o valor encontrado de  $\lambda$  para solucionar a EDO (2.14). Assim, temos

$$T'(t) = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T(t),$$

cuja solução geral é

$$T(t) = C e^{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \quad (2.22)$$

Portanto, substituindo (2.21) e (2.22) em  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , vem que

$$u_n(x, t) = \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.23)$$

a qual satisfaz a Equação (2.9) e as condições de fronteira (2.11).

## 2.4 Princípio da Superposição

Se  $y_1$  e  $y_2$  são duas soluções de uma equação, então a combinação linear  $c_1 y_1 + c_2 y_2$ , também é solução para quaisquer valores de  $c_1$  e  $c_2$ .

Como a equação (2.9) e as condições de contorno são homogêneas, vamos ter que somas de funções que satisfazem as condições de contorno, também satisfarão essas mesmas condições de contorno, ou seja:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \quad (2.24)$$

também serão soluções da equação do calor e das condições de contorno apresentadas em (2.9).

Perceba que a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$  mencionada no início do capítulo, onde a temperatura da barra no ponto 0 é dada por  $f(x)$ , ainda não foi utilizada entre as soluções, assim, usaremos agora, onde temos:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x). \quad (2.25)$$

Agora, multiplicando-se a expressão acima por  $\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$  e, integrando-se em  $[0, L]$ , vem que

$$\begin{aligned} \int_0^L f(x) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx, \end{aligned}$$

segue então, da ortogonalidade da função seno (ver [FIGUEIREDO, 2014], p. 17), que as integrais dadas na equação anterior serão iguais a zero para  $m \neq n$ , restando somente o caso em que  $m = n$ , para o qual se tem a integral igual a  $L/2$ , assim, obtemos

$$\int_0^L f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = c_n \frac{L}{2}, \quad (2.26)$$

isto é,

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (2.27)$$

**Exemplo 2.1.** *Vejam os um exemplo simples, considere a equação do calor dada por*

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, & t > 0, & x \in (0, 1), \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x) & x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

em que  $f(x) = 2 \text{sen}(3\pi x)$ .

Pelo método de separação de variáveis a solução procurada pode ser obtida através da expressão (2.28). Em que o coeficiente  $c_n$  pode ser calculado segundo (2.27), assim, obtemos

$$c_n = 4 \int_0^1 \text{sen}(3\pi x) \text{sen}(n\pi x) dx,$$

e da ortogonalidade da função seno, temos que a solução  $u(x, t)$  é dada por

$$u(x, t) = 2 \text{sen}(3\pi x) e^{-(3\pi)^2 t}. \quad (2.28)$$

**Exemplo 2.2.** *Considere uma barra isolada termicamente nas extremidades. Determine a função  $u(x, t)$  em  $(0, 1)$  tal que*

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, & t > 0, & x \in (0, 1), \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) &= 1 & x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Temos que o coeficiente de Fourier é dado por

$$c_n = 2 \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x) dx = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)).$$

Agora, temos que se  $n$  é par, então  $\cos(n\pi) = 1$  e, se  $n$  é ímpar,  $\cos(n\pi) = -1$ , isto é,

$$c_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & \text{se } n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & \text{se } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Portanto, conforme (2.28) a solução do problema é dada por

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \operatorname{sen}((2n-1)\pi x) e^{-((2n-1)\pi)^2 t}.$$

## Capítulo 3

# Método de Diferenças Finitas para Equação do Calor

Os métodos numéricos são técnicas pelas quais problemas matemáticos são formulados de modo que possam ser resolvidos como operações aritméticas [CHAPRA, 2011].

Nesse caso, vamos utilizar o método das diferenças finitas que consiste em discretizar uma equação diferencial e substituir as derivadas presentes nesta equação por aproximações, para que ela se torne uma equação algébrica.

Quando falamos em discretização é necessário lembrar de derivação numérica, uma vez que a derivação numérica é uma forma de encontrar aproximações a partir de um conjunto de pontos discretos, então tomamos um ponto conhecido  $x_0$  e calculamos a sua diferença em relação a um próximo,  $x_0 - \Delta x$  por exemplo:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad (3.1)$$

quanto menor o valor de  $\Delta x$  com  $\Delta x \neq 0$ , melhor será a aproximação feita pelo método, porém, sempre haverá um erro a ser considerado.

Os erros numéricos são causados pelo uso de aproximações para representar operações e quantidades matemáticas exatas, e a relação entre o resultado exato ou verdadeiro pode ser formulada como (ver CHAPRA [2011]):

$$\text{valor verdadeiro} = \text{aproximação} + \text{erro}.$$

Assim, usaremos a Série de Taylor com a ideia de construí-la termo a termo, por exemplo:

$$f(x_{j+1}) \cong (f(x_j)), \quad (3.2)$$

essa relação é chamada de aproximação de ordem zero, a qual indica que o valor de  $f$  no

novo ponto é o mesmo que seu valor no ponto antigo [CUMINATO, 2013].

### 3.1 Aproximações das derivadas

Seja  $J \in \mathbb{N}$ , suponhamos uma reta de comprimento  $L$ , e dividiremos o domínio num número de intervalos de comprimentos  $\Delta x = L/(J+1)$ . As extremidades dos intervalos são os nós que são numerados de  $x_0 = 0$  a  $x_{J+1} = L$ . Sendo assim, definimos a malha

$$x_0 = 0 < x_1 = \Delta x < \dots < x_J = J\Delta x < x_{J+1} = (J+1)\Delta x = L, \quad (3.3)$$

com  $x_j = j\Delta x$  para  $j = 0, 1, 2, \dots, J+1$ .

Aqui adotaremos a série de Taylor como mencionado anteriormente na equação (3.2), na intenção de conseguir as aproximações das derivadas; começaremos com as vizinhanças do ponto  $x_j$ , que são  $x_{j+1}$  e  $x_{j-1}$ .

Dessa forma, temos:

$$f(x_{j+1}) = f(x_j + \Delta x) = f(x_j) + \Delta x f'(x_j) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_j) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x_j) + \frac{\Delta x^4}{4!} f^{(4)}(\xi_1), \quad (3.4)$$

com  $x_j \leq \xi_1 \leq x_{j+1}$ . E também

$$f(x_{j-1}) = f(x_j - \Delta x) = f(x_j) - \Delta x f'(x_j) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_j) - \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x_j) + \frac{\Delta x^4}{4!} f^{(4)}(\xi_2), \quad (3.5)$$

com  $x_{j-1} \leq \xi_2 \leq x_j$ .

Da equação (3.4), podemos obter um estimador da primeira derivada chamada de **diferença progressiva**, dada por:

$$f'(x_j) = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (3.6)$$

Por outro lado, da equação (3.5), obtemos outro estimador da primeira derivada, o qual denominamos por **diferença regressiva**,

$$f'(x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (3.7)$$

Agora, subtraindo-se a equação (3.5) de (3.4), resulta em outra diferença que aproxima a primeira derivada, dada por

$$f'(x_j) = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1})}{2\Delta x} + O(\Delta x^2), \quad (3.8)$$

a qual chamamos de **diferença central**.

E finalmente, agora estamos interessados em encontrar um estimador por diferenças centrais da segunda derivada, totalmente necessário, pois o problema proposto nesse trabalho é de segunda derivada. Então, desta vez efetuaremos a soma dos termos das equações (3.4) e (3.5), para obter:

$$f''(x_j) = \frac{f(x_{j+1}) - 2f(x_j) + f(x_{j-1}))}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \quad (3.9)$$

Assim sendo, a equação (3.9) é a diferença central da segunda derivada que queríamos. Vale observar que a notação  $O(\Delta x^n)$  indica o erro de truncamento relativo a cada um dos operadores de diferenças, em que  $n$  designa a ordem. Neste sentido, com maior a ordem, maior será a precisão da aproximação.

## 3.2 Esquema Explícito

Nesta seção, expressamos uma solução numérica, por diferenças finitas, para a equação do calor (2.1). Neste ponto, substituímos as derivadas envolvidas na equação do calor pelos estimadores de diferenças no espaço e no tempo como visto na seção anterior. Então, apresentamos um esquema explícito e, além disso, estudamos algumas propriedades do esquema tais como consistência, estabilidade e convergência.

Anteriormente foi feita a divisão do intervalo  $[0, L]$  em  $J$  partes iguais de comprimento  $\Delta x$ , com  $J + 1$  pontos sobre o domínio da posição  $x$ , de modo que  $x_j = j\Delta x$ ,  $0 \leq j \leq J$ .

Da mesma forma, procederemos no tempo, definimos  $t_m = m\Delta t$ , para a divisão do intervalo  $[0, T]$  em  $N$  partes de comprimento  $\Delta t$ , onde  $\Delta t$  denota o passo da malha temporal.

Nosso objetivo, então, é encontrar uma solução aproximada  $v_j^m$  da solução exata  $u(x_j, t_m)$ . Esta seção está baseada em particular nas obras de SMITH [1985], TVEITO [1998].

Sendo assim, considere as seguintes aproximações:

$$u_t(x_j, t_m) = \frac{u(x_j, t_m + \Delta t) - u(x_j, t_m)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$u_{xx}(x_j, t_m) = k \frac{u(x_j - \Delta x, t_m) - 2u(x_j, t_m) + u(x_j + \Delta x, t_m)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2).$$

Essas aproximações motivam o seguinte esquema:

$$\frac{v_j^{m+1} - v_j^m}{\Delta t} = k \frac{v_{j-1}^m - 2v_j^m + v_{j+1}^m}{\Delta x^2},$$

e, então, explicitando  $v_j^{m+1}$ , obtemos

$$v_j^{m+1} = k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (v_{j-1}^m - 2v_j^m + v_{j+1}^m) + v_j^m.$$

Definindo  $\alpha = k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ , e aplicando a propriedade distributiva, segue que:

$$v_j^{m+1} = \alpha v_{j-1}^m + (1 - 2\alpha)v_j^m + \lambda v_{j+1}^m, \quad (3.10)$$

com  $j = 1, 2, \dots, J$  e  $m \geq 0$ .

E, ao se observar as condições de contorno (2.10), definimos

$$v_0^m = 0 \quad \text{e} \quad v_{J+1}^m = 0, \quad \text{para todo } m,$$

também definimos as condições iniciais numericamente por

$$v_j^0 = f(x_j), \quad \text{para todo } j = 1, 2, \dots, J.$$

Observe que na equação (3.10) os valores nos níveis de tempo de  $t_{m+1}$  são calculados usando apenas os valores de tempo anterior. Por esse motivo, chamamos esse método de resolução por esquemas explícitos. [TVEITO, 1998]

### 3.3 Consistência, Estabilidade e Convergência

Para que a solução numérica apresente uma aproximação razoável da solução exata do problema matemático, é necessário que o método represente propriedades de consistência, convergência e estabilidade. Essas propriedades, de certa forma, tem relação nas soluções numéricas e são funções dos erros envolvidos.

#### 3.3.1 Consistência

**Definição 3.1.** *Dada uma equação diferencial  $\mathcal{L}u = 0$  e um esquema de diferenças finitas  $\mathcal{L}_{\Delta x, \Delta t}v = 0$ , dizemos que o esquema de diferenças finitas é consistente com a equação diferencial se para qualquer  $\phi(x, t)$  suficientemente regular tem-se:*

$$\mathcal{L}_{\Delta x, \Delta t}\phi - \mathcal{L}\phi \rightarrow 0, \quad (3.11)$$

quando  $(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0$ . Considerando-se convergência pontual em cada  $(x, t)$ .

Vejamos o caso do nosso objeto de estudo, a equação do calor dada em (2.9). Considere

$\mathcal{L}$  o operador dado por  $\frac{\partial}{\partial t} - k \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ . Sendo assim,

$$\mathcal{L}u = u_t - ku_{xx},$$

e o operador de diferenças finitas

$$\mathcal{L}_{\Delta x, \Delta t} v = \frac{v_j^{m+1} - v_j^m}{\Delta t} - k \frac{v_{j-1}^m - 2v_j^m + v_{j+1}^m}{\Delta x^2}.$$

Assim, desde que  $\mathcal{L}u = 0$ , da Equação (3.11), segue que

$$\mathcal{L}_{\Delta x, \Delta t} u - \mathcal{L}u = \mathcal{L}_{\Delta x, \Delta t} u = \frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} - k \frac{u_{j-1}^m - 2u_j^m + u_{j+1}^m}{\Delta x^2}. \quad (3.12)$$

Por outro lado, da expansão em série de Taylor, temos que

$$\begin{aligned} u_j^{m+1} &= u(x_j, t_m + \Delta t) = u_j^m + \Delta t \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_j + \frac{\Delta t^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_j + O(\Delta t^3), \\ u_{j+1}^m &= u(x_j + \Delta x, t_m) = u_j^m + \Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j + \frac{\Delta x^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j + \frac{\Delta x^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_j + \\ &\quad + \frac{\Delta x^4}{4!} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_j + \frac{\Delta x^5}{5!} \left( \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right)_j + O(\Delta x^6), \\ u_{j-1}^m &= u(x_j - \Delta x, t_m) = u_j^m - \Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j + \frac{\Delta x^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j - \frac{\Delta x^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_j + \\ &\quad + \frac{\Delta x^4}{4!} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_j - \frac{\Delta x^5}{5!} \left( \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right)_j + O(\Delta x^6). \end{aligned}$$

Então, substituindo em (3.12), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(\Delta x, \Delta t)} u &= \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_j + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_j - k \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j + \frac{\Delta x^2}{12} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_j \right] + O(\Delta x^4, \Delta t^2) \\ &= \underbrace{\left( \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j}_{=0} + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_j - k \frac{\Delta x^2}{12} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_j + O(\Delta x^4, \Delta t^2) \\ &= \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_j - k \frac{\Delta x^2}{12} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_j + O(\Delta x^4, \Delta t^2). \end{aligned}$$

Segue, portanto, que  $\mathcal{L}_{(\Delta x, \Delta t)} u \rightarrow 0$  quando  $(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0$ . Logo o esquema numérico é consistente a equação diferencial dada.

### 3.3.2 Estabilidade

**Definição 3.2.** Dizemos que um esquema de diferenças finitas é estável se existe uma constante  $M > 0$  tal que o erro pontual em  $(x_j, t_m)$ , dado por  $e_j^m := u(x_j, t_m) - v_j^m$ , satisfaz

$$|e_j^m| < M, \text{ para todo } j, m.$$

Portanto, o conceito de estabilidade está relacionado ao crescimento, ou diminuição dos erros introduzidos nos cálculos. Sendo assim, diremos que um método é numericamente instável se os erros de arredondamento ou truncamento podem ser amplificados, fazendo com que o erro cresça exponencialmente.

Em relação à estabilidade dos esquemas numéricos, podemos classificá-los como:

- i) Condicionalmente estáveis: para fornecerem soluções numéricas estáveis, devem satisfazer uma condição de estabilidade.
- ii) Incondicionalmente estáveis: não necessitam satisfazer quaisquer critérios de estabilidade para produzirem soluções estáveis.
- iii) Incondicionalmente instáveis: não existem valores de  $\Delta t$  que permitam a eles fornecerem soluções estáveis.

Para a análise da estabilidade do nosso problema, usaremos o critério de Von Neumann. Geralmente a condição de estabilidade deduzida a partir desse critério é suficiente para casos onde a EDP e o MDF são lineares.

Então vamos admitir que haja uma solução da equação de diferenças (3.10) é da forma:

$$v_j^m = e^{\lambda m} e^{I\beta j} = (e^\lambda)^m e^{I\beta j} \quad (3.13)$$

Agora faremos algumas relações com o intuito de logo mais encontrar  $\lambda$  e  $\beta$  tais que (3.13) seja de fato uma solução de (3.10), então,

$$v_j^{m+1} = e^{\lambda(m+1)} e^{I\beta j} = (e^\lambda)^{m+1} (\cos \beta j + I \operatorname{sen} \beta j)$$

$$v_{j+1}^m = e^{\lambda m} e^{I\beta(j+1)} = (e^\lambda)^m (\cos \beta(j+1) + I \operatorname{sen} \beta(j+1))$$

$$v_{j-1}^m = e^{\lambda m} e^{I\beta(j-1)} = (e^\lambda)^m (\cos \beta(j-1) + I \operatorname{sen} \beta(j-1))$$

Substituiremos (3.13) em (3.10), logo:

$$\begin{aligned} e^{\lambda(m+1)}e^{I\beta j} &= (1 - 2\alpha)e^{\lambda m}e^{I\beta j} + \alpha(e^{\lambda m}e^{I\beta(j-1)} + e^{\lambda m}e^{I\beta(j+1)}) \\ e^{\lambda}e^m e^{I\beta j} &= (1 - 2\alpha)e^{\lambda m}e^{I\beta j} + \alpha(e^{\lambda m}e^{I\beta(j-1)} + e^{\lambda m}e^{I\beta(j+1)}) \\ e^{\lambda} &= 1 - 2\alpha + \alpha(e^{-I\beta} + e^{I\beta}), \end{aligned}$$

e como:

$$e^{-I\beta} + e^{I\beta} = \cos(-\beta) + I \operatorname{sen}(-\beta) + \cos \beta + I \operatorname{sen} \beta = 2 \cos \beta,$$

temos:

$$\begin{aligned} e^{\lambda} &= 1 - 2\alpha + 2\alpha \cos \beta \\ &= 1 - 2\alpha(1 - \cos \beta) \\ &= 1 - 2\alpha \left( 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \right) \\ &= 1 - 4\alpha \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2}, \end{aligned}$$

como  $\alpha \geq 0$ , então,

$$e^{\lambda} = 1 - 4\alpha \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \leq 1.$$

Para que haja estabilidade será necessário que  $|e^{\lambda}| \leq 1$ , com  $e^{\lambda} < 1$ , e ainda, precisamos impor  $-1 \leq e^{\lambda}$ , ou seja,

$$-1 \leq 1 - 4\alpha \frac{\operatorname{sen}^2 \beta}{2}.$$

Daí, segue que:

$$\alpha \leq \frac{1}{1 - \cos \beta},$$

ou seja,  $\alpha \leq \frac{1}{2}$ . Assim, conclui-se que o método é condicionalmente estável.

### 3.3.3 Convergência

**Definição 3.3.** Dizemos que esquema em diferenças finitas  $\mathcal{L}_{\Delta x, \Delta t} v = 0$  e que aproxima uma equação diferencial  $\mathcal{L}(u) = 0$  é um esquema convergente em cada ponto, se para qualquer  $x$  e  $t$ , quando  $(x_j, t_m)$  converge para  $(x, t)$ , tem-se que  $v_j^m$  converge para  $u(x_j, t_m)$  quando  $(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0$ .

Feito isso, é possível perceber que a convergência é a propriedade desejada para a maioria dos esquemas numéricos nas soluções de equações diferenciais, pois garante que uma solução aproximada do problema original será obtida.

**Observação 3.1.** A convergência é extremamente importante, no entanto, difícil de ser

demonstrada diretamente. Em geral, fazemos uso de um resultado devido a Lax [SMITH, 1985], o qual relaciona os conceitos de consistência, estabilidade e convergência.

**Teorema 3.1** (Teorema da Equivalência de Lax). *Um esquema de diferenças finitas é convergente se e somente se ele é consistente e estável.*

### 3.4 Simulações Numéricas

Nesta seção apresentaremos simulações numéricas do problema de condução de calor em uma barra de comprimento  $L$ , cuja temperatura  $u(x, t)$  é dada em (2.9)–(2.11). Para as simulações numéricas, utilizaremos o esquema explícito via método de diferenças finitas dado em (3.10), isto é,

$$v_j^{m+1} = \alpha v_{j-1}^m + (1 - 2\alpha)v_j^m + \alpha v_{j+1}^m,$$

em que  $\alpha = \Delta t / (\Delta x)^2$ .

Para os nossos propósitos, considere uma barra de comprimento  $L = 1$ ,  $k = 1$ . Para condição inicial tomemos  $f(x) = 2 \sin(3\pi x)$ , como no Exemplo 2.1. Na malha computacional assumimos  $\Delta x = 1,0 \cdot 10^{-1}$  e  $\Delta t = 1,25 \cdot 10^{-3}$ , de modo que  $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-1}$ , portanto menor que  $1/2$  satisfazendo a condição de estabilidade do esquema proposto. A Figura 2 mostra a comparação entre a solução exata obtida a partir do método de separação de variáveis e o resultado numérico obtido a partir do esquema explícito (3.10).

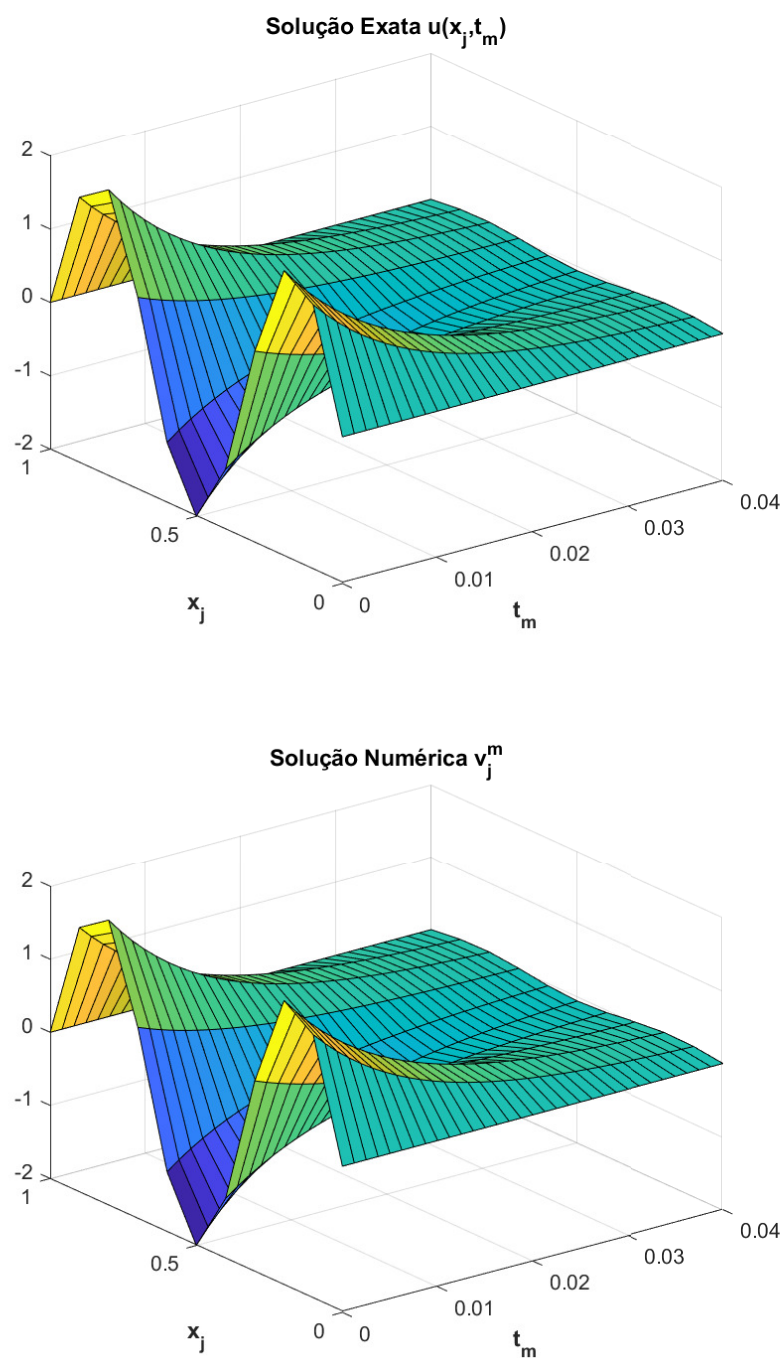


Figura 2: Resultado da simulação numérica  $v_j^m$  em comparação com a solução exata  $u(x_j, t_n)$  do problema (2.9)–(2.11) dada por  $u(x, t) = 2 \operatorname{sen}(3\pi x) e^{-(3\pi)^2 t}$ . Para esta simulação tomamos  $\alpha \leq 0,5$ , portanto satisfazendo a condição de estabilidade.

Note nos gráficos acima que não é possível observar uma diferença entre as soluções exata  $u(x_j, t_m)$  e numérica  $v_j^m$ . No entanto, ao tomarmos a diferença dos valores destas soluções no último passo de tempo, podemos perceber que existe um pequeno erro, neste caso da ordem de  $10^{-3}$ . Neste ponto, é importante ressaltar que a ordem desse erro está relacionado aos parâmetros da malha  $\Delta t$  e  $\Delta x$ , pois quanto menores forem os parâmetros, menor será o erro.

$x_j$	$u(x_j, t_{32})$	$v_j^{32}$	$ u(x_j, t_{32}) - v_j^{32} $
0.0	0	0	0
0.1	0,0518	0,0556	$3,7813 \times 10^{-3}$
0.2	0,0609	0,0653	$4,4452 \times 10^{-3}$
0.3	0,0198	0,0212	$1,4443 \times 10^{-3}$
0.4	-0,0376	-0,0404	$2,7473 \times 10^{-3}$
0.5	-0,0640	-0,0687	$4,6739 \times 10^{-3}$
0.6	-0,0376	-0,0404	$2,7473 \times 10^{-3}$
0.7	0,0198	0,0212	$1,4443 \times 10^{-3}$
0.8	0,0609	0,0653	$4,4452 \times 10^{-3}$
0.9	0,0518	0,0556	$3,7813 \times 10^{-3}$
1.0	0	0	0

# Referências Bibliográficas

- R. C. BOYCE, W. E.; DIPRIMA. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 2010.
- R. P. CHAPRA, S. C.; CANALE. *Métodos Numéricos para Engenharia*. Trad. Helena Castro. AHMG, Porto Alegre, 2011.
- M. CUMINATO, J. A.; MENEGUETTE JR. *Discretização de Equações Diferenciais Parciais - Técnicas de Diferenças Finitas*. Coleção Matemática Aplicada - SBM, Rio de Janeiro, 2013.
- D. G. FIGUEIREDO. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. IMPA (Projeto Euclides), Rio de Janeiro, 2014.
- C. A. E. SIMÕES. Equações diferenciais na física. Master's thesis, Universidade de Évora, Évora, Portugal, 2014.
- G. D. SMITH. *Numerical Solution of Partial Differential Equations - Finite Difference Methods*. Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, 1985.
- G. STEPHENSON. *Uma introdução às equações diferenciais parciais para estudantes de ciências - Trad. Peri Teixeira*. Edgard Blücher, São Paulo, 1975.
- R. TVEITO, A.; WINTHER. *Introduction to Partial Differential Equations: a computational approach*. Springer, New York, 1998.
- M. R. ZILL, D. G.; CULLEN. *Equações diferenciais: volume 1*. Pearson Makron Books, São Paulo, 2001.