SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ALMIRO ALEXANDRE MELO SOUZA

# FATORES LIMITANTES DO ENSINO-APRENDIZAGEM MATEMÁTICA EM UMA ESCOLA DE EDUCAÇÃO BÁSICA: um relato de experiência docente

CASTANHAL-PA
2019

ALMIRO ALEXANDRE MELO SOUZA

# FATORES LIMITANTES DO ENSINO-APRENDIZAGEM MATEMÁTICA EM UMA ESCOLA DE EDUCAÇÃO BÁSICA: um relato de experiência docente

Trabalho apresentado como parte dos requisitos obrigatórios para conclusão do curso de Licenciatura em Matemática, da Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará, sob orientação da Profa. MSc. Maria Eliana Soares

CASTANHAL-PA
2019

ALMIRO ALEXANDRE MELO SOUZA

# FATORES LIMITANTES DO ENSINO-APRENDIZAGEM MATEMÁTICA EM UMA ESCOLA DE EDUCAÇÃO BÁSICA: um relato de experiência docente

Trabalho apresentado como parte dos requisitos obrigatórios para conclusão do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Pará.

Aprovado em: ____________________

**Banca Examinadora**

__________________________________________
Orientadora: MSc. Maria Eliana Soares
SEDUC/UFPA - Membro externo

_________________________________________
Profa. Dra. Gerlândia de Castro Silva Thijm
UFPA - CUNCAST

_________________________________
Profº. Dr. Renato Germano
UFPA - CUNCAST

## AGRADECIMENTOS

Quero agradecer a Professora Eliana pela paciência, compreensão e entusiasmo que a mesma deu para essa pesquisa.

Aos meus familiares, principalmente meus pais Hugo Alexandre Teixeira de Souza e Almira Maria da Costa Melo que me apoiaram desde o início do curso e incentivaram a continuar mesmo estando nos momentos mais difíceis.

Aos Professores, alunos e equipe de gestão da Escola Municipal de Ensino Fundamental Ezequiel Lisboa que participaram deste trabalho, em especial aos alunos que tanto ajudaram na pesquisa e a Professora Jessica.

E homenagear duas pessoas que deixaram um imenso vazio na família Melo neste referido ano de 2019, meu tio padrinho João Evangelista Muniz de Oliveira e ao meu querido amiguinho Hiago Melo Soares.

E por último agradecer uma pessoa especial que me acolheu no município de Maracanã e sempre ajudou no que fosse preciso, Ellen Patrícia Modesto de Araújo.

A consciência é o impulsionador da ação do homem em direção à sua sobrevivência e transcendência, ao seu saber fazendo e fazer sabendo.

Ubiratan D’Ambrósio (1996)

## RESUMO

O ensino da Matemática não compreende tarefa fácil, professores de todos os níveis de ensino apresentam um quadro bastante similar no sentido do desafio no envolvimento do aluno no processo de aprendizagem, para além da memorização de fórmulas. Assim, motivado pela indagação: Que fatores podem ser limitantes do ensino da Matemática no que tange a trigonometria numa abordagem prática? Este estudo objetivou expor resultados de uma experiência docente em relação ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática, no que tange a prática da trigonometria. Para tanto, visou desenvolver atividades pedagógicas para minimizar as limitações; e, vincular a matemática teórica à prática do cotidiano. Foi selecionada a turma de 9º ano, e nesta foram aplicadas observações participantes durante dois meses. Foram analisados os simulados dos alunos durante o período da pesquisa, de modo a considerar suas maiores dificuldades em Matemática. Paralelo a investigação foi consultada um acervo bibliográfico sobre ensino e aprendizagem matemática. Os resultados foram compilados, chegando-se a conclusão que as aulas práticas juntamente com as aulas teóricas acabam ocasionando um bom desenvolvimento no desempenho da competência, habilidades dos estudantes auxiliando em resultados positivos na aprendizagem. Confirmou-se com este estudo, que há a necessidade de que as práticas sejam repensadas no sentido de superação dos desafios, sejam eles de ordem externa ou interna da escola.



**Palavras chaves**: Ensino-aprendizagem matemática. Trigonometria. Docência.

## ABSTRACT

The teaching of mathematics is not an easy task, teachers at all levels of education present a very similar picture in terms of the challenge of involving the student in the learning process, in addition to memorizing formulas. Thus, motivated by the question: What factors can be limiting the teaching of Mathematics with regard to trigonometry in a practical approach? This study aimed to expose results of a teaching experience in relation to the teaching and learning process of Mathematics, with regard to the practice of trigonometry. To this end, it aimed to develop educational activities to minimize limitations; and, link theoretical mathematics to everyday practice. The 9th grade class was selected, and participant observations were applied for two months. Students' simulations were analyzed during the research period, in order to consider their greatest difficulties in mathematics. In parallel to the investigation, a bibliographic collection on mathematical teaching and learning was consulted. The results were compiled, reaching the conclusion that the practical classes together with the theoretical classes end up causing a good development in the performance of the competence, the students' abilities helping in positive learning results. It was confirmed with this study, that there is a need for practices to be rethought in order to overcome challenges, whether they are external or internal to the school.



**Key words:** Mathematical teaching-learning. Trigonometry. Teaching.

**SUMÁRIO**

## INTRODUÇÃO

A Matemática ainda é vista por muitos como uma disciplina complicada, difícil e incompreensível, fato que nos incube a responsabilidade de aperfeiçoar nossa reflexão sobre o ensino desta disciplina, de questionar e expandir nossa independência mental na possibilidade de indagações, e de meditação abstrata, para a formação de possibilidades e argumentos que serão evidenciados neste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC).

Essas habilidades são requisitos do campo contemporâneo e demanda do homem saberes para que o transforme em um sujeito crítico e competente para tomar medidas decisivas, a considerar que a repercussão da tecnologia na vida de qualquer homem exige habilidades que vão mais adiante de utilizar as máquinas.

Dessa forma, os assuntos de Matemática que são mencionados na Educação Básica necessitam ser tratados para que sejam enfatizadas as aplicações e suas contextualizações, essencialmente nos costumes sociáveis (dia a dia), possibilitando, logo, a evolução das habilidades acima mencionadas.

O interesse em realizar o estudo nesta temática é pela possibilidade de aprender sobre a prática da docência na Matemática e começou através de uma professora do Ensino Médio que retratava a Matemática de uma maneira diferente do habitual que seria a aula teórica, mas que ela envolvia jogos e objetos manipuláveis para que os alunos despertassem a curiosidade em aprender, mas tendo em vista os conteúdos ao quais ela abordava em sala. Com isso, na época enquanto aluno de Ensino Médio tinha curiosidades em aprender cada vez mais sobre o Universo da Matemática e onde ela poderia ser aplicada os conteúdos abordados em sala no nosso cotidiano.

A Matemática no Ensino Fundamental Maior sem fazer referência a conteúdo específico, era retratada comumente como sendo todos os assuntos de álgebra, sem se preocupar se os alunos estavam aprendendo de fato as teorias e em muitas ocasiões os estudantes decoravam como manusear os cálculos para aplicar as tarefas em salas, e também em provas avaliativas. Com isso, no Ensino Fundamental em qual estava inserido, não tinha uma perspectiva no que seria a Matemática, ainda, mas que a mesma um dia poderia ser aplicada em todas as ocasiões em que as pessoas vivenciam.

Na graduação de Licenciatura Plena em Matemática enquanto estava na época de estágio na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Paulo Cesar Coutinho Rodrigues, dava para perceber na sala do 2° ano do Ensino Médio em que as aulas enquanto o professor ministrava o conteúdo de Trigonometria em especifico Relações Métricas que os alunos estavam apresentando dificuldades. Daí foi feito um diálogo com um aluno, sobre o que estaria lhe ocasionando não está conseguindo aprender o conteúdo? A resposta do aluno se retratou em dizer que era um conteúdo novo, que ele ainda não tinha visto. Com isso surgiu dois questionamentos: Será que o aluno no Ensino Fundamental estudou o referido conteúdo? Ou, o estudante não lembrava que já tinha estudado? A mesma dificuldade que os alunos da Escola Paulo Cesar Coutinho Rodrigues apresentava no Ensino Médio, os estudantes do Cursinho Popular Alternativa Vestibulares também expressavam.

Desse modo, como estudante de Licenciatura em Matemática, observando as dificuldades que também enquanto estudante nos anos anteriores de Ensino Fundamental e Médio apresentava problemas em assimilar o conteúdo Trigonometria, nos surgiu a oportunidade de apresentar algo diferente para os estudantes através deste trabalho, de modo a criar meios manipuláveis para adequar a aprendizagem matemática relacionando ao dia a dia.

Partindo desse contexto, indagamos: **Que fatores podem ser limitantes do ensino da Matemática no que tange a trigonometria numa abordagem prática?** Assim, por já estar envolvido com a docência, ousamos realizar a experiência em nossa própria realidade profissional. Nessa perspectiva, esta produção apresenta enquanto objetivo geral **expor resultados de uma experiência docente em relação ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática, no que tange a prática da trigonometria.** Para tanto, buscamos desenvolver atividades pedagógicas para minimizar as limitações; e, vincular a matemática teórica à prática do cotidiano**.**

Como subsídio teórico nos fundamentamos em David Ausubel, com a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS), para tanto nos apoiamos em Moreira (1999), que discute sobre essa teoria; em documentos orientativos/normativos da escolarização como a Base Nacional Curricular Comum (BNCC); e literaturas como D'Ambrósio (1996); Lopes e Borba (1994); Lopes (1998); Fossa (1995); Filho (2007); Nacarato, Mengali e Passos (2009); e Couceiro (2015), que orientam sobre condições e práticas de ensino de Matemática.

O tema trata de uma problemática comum nas escolas públicas, realidade vivenciada nas atividades de estágios e de projetos de ensino realizados durante as disciplinas do curso, cuja realidade pode ser percebida na maioria dos estudantes os quais revelam ter dificuldades em relação aos conceitos e fórmulas matemáticas, o que erroneamente lhes faz pensar que a memorização é a solução. A temática trata do registro de uma experiência docente na qual foi percebido um baixo rendimento dos estudantes do Ensino Fundamental do 9°, turma B, da Escola Ezequiel Lisboa a considerar o conteúdo Trigonometria, em específico no Triangulo Retângulo.

Para dar formato a esta produção organizamos cinco capítulos. No primeiro é apresentado os referenciais teóricos que dão suporte de embasamento para a pesquisa, em especifico David Ausubel retratando a aprendizagem significativa e outros autores como, por exemplo, D'Ambrósio que sustenta a ideia de práticas pedagógicas. O segundo capítulo é constituído da metodologia, para a caracterização da pesquisa, estrutura e organização. O terceiro capítulo é voltada a execução da aula teórica, com os assuntos estabelecidos na metodologia, com a realização de algumas atividades envolvendo cálculos algébricos.

O quarto capítulo é destinado a aplicação da aula teórica no cotidiano dos estudantes. Com o intuito de melhorar o desempenho dos alunos no quesito de contextualização de questões para ser aplicado em provas posteriormente e na memorização dos conceitos/teorias para ter um melhor desempenho na hora de solucionar os problemas propostos. O quinto capítulo se trata sobre as observações e os desafios que o docente enfrenta em ter uma aula fora do comum, uma aula fora do ambiente de sala, ou seja, os desafios que o docente encontra em aulas fora do ambiente escolar, analisando o desempenho e comportamento dos estudantes, também tendo o cuidado de preparar uma aula apropriada com os matérias manipuláveis.

# 1. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

## 1.1 CONTRIBUIÇÕES DE DAVID AUSUBEL

O trabalho é formado pelo perfil do processo elaborado por Ausubel, ao idealizar a aquisição de conhecimento, com base em Moreira (1999). Desta maneira o autor, diz que a aprendizagem tem que ser mais além do que uma suave aplicação de orientações, ela deve envolver uma relação recíproca entre a informação anterior do indivíduo com a nova, a partir do conceito subsunçor que já existe na estrutura cognitiva do indivíduo, de modo que,

> A aprendizagem significativa ocorre quando anova informação ancora-se em *conceitos ou proposições relevantes*, preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz. Ausubel vê o armazenamento de informações no cérebro humano como sendo organizado, formando uma hierarquia conceitual, na qual elementos mais específicos de conhecimento são ligados (e assimilados) a conceitos mais gerais, mais inclusivos. *Estrutura cognitiva* significa, portanto, uma estrutura hierárquica de conceitos que são representações de experiências sensoriais do indivíduo (MOREIRA, 1999, p. 153).

A compreensão de si pessoalmente é uma condição fundamental na execução do processo apresentado. O elaborador da definição de aprendizagem significativa, a qualquer parte do período analisa a inevitabilidade com que o estudante tem em se dispor quanto elemento participativo na ação e nunca a um elemento neutro ou passivo em seu procedimento de conhecimento.

Por conseguinte, pode-se compreender de que todo sujeito, no interior de sua própria compreensão que detém de várias informações acerca de tantas concepções sociais, econômicas, culturais, dentre outras. É compreensível, o simples acontecimento de nascer e viver é o bastante para acrescentar noções na consciência de um sujeito, a qual pode ser desenvolvida. Nas crianças, esse fato se denomina de constituição de conceitos, e é exercida pela vivência particular do ser humano.

Entretanto, a aprendizagem significativa acontece no caso quando o aluno é preparado para adquirir novidades como informações e compreender, de tal maneira a fazer uma relação de um conhecimento primeiramente que foi exposto e o novo que se foi mostrado para abranger seu conhecimento.

No processo apresentado por Moreira (1999), o estudo em que o sujeito já detém primeiramente uma noção de conhecimento é denominado como conceito de subsunçor, quer dizer, concepções e argumentos regulares no sujeito. Este equilíbrio assegura ao aluno a oportunidade de aprender novas ideologias, acrescentando em seus conhecimentos antecipados para novidades como informações.

No momento em que o sujeito passa o período pré-escolar, o mesmo não tem mais a composição de teorias, mas a compreensão das teorias, visto que, agora se encontra conhecimentos necessários que concede aos indivíduos aprender novos fundamentos e reconhecer em suas ideias.

Assim com o propósito de conseguir a melhor produtividade provável neste método a obra recomenda o emprego de uma construção prévia que são meios de apresentação ao que se procura ministrar, relacionando o discernimento que já se tem, com o que ainda ira ser exposto, formando um campo determinado e significativo. O tipo de estudo como aprendizagem significativa supõe que as novas ferramentas, assim sejam, importante e significante ao educando e uma organização intelectiva prévia, com a mesma característica em que a intenção de sua parte para fazer a prática do método.

Sobre esse organização intelectiva Moreira (1999) apresenta três tipos de aprendizagem significativa: *aprendizagem representacional*, que consiste no conhecimento representados por símbolos, que podem coisas, situações e ideias, sendo comum a todos os indivíduos, principalmente na fase inicial do desenvolvimento; *aprendizagem de conceitos,* se equiparam a representacional, porém, é uma aprendizagem que ocorre de forma genérica ou categóricas, representam certas regularidades; *aprendizagem proposicional*, diferente da aprendizagem de conceitos, ocorre a partir da compreensão do significado das ideias e proposições e não do sentido dessas proposições (MOREIRA, 1999).

Por conseguinte, a todo o momento o conhecimento é manifestado pelas condições e representações, de modo que, a absorção de conhecimento, fica evidente e o esperado é um método de racionalização mais aprofundado. O estudante associa o conhecimento anterior ao recente e se preparado de modo certo, faz outro subsunçor.

No entanto, conforme essa assimilação obliteradora que é componente do método da aprendizagem significativa, segundo Ausubel que recomenda procedimentos para limitar o desaparecimento de estabelecidos conceitos, em que bastante foram compreendidas as subsunções.

Logo, a declaração é de que os princípios mais comuns e até mesmo de uma determinada disciplina sejam prontamente expostas, assim meditando e apenas em seguida para aprofundar o seu conhecimento. É aquilo que se denomina em diferenciação progressiva. Implica na ideia de que indica a conveniência de conduzir ao aluno, os objetos com orientações que o promovam a analisar, investigar valores e procurar mudanças ou semelhantes.

Então, todo sujeito forma uma concepção de conhecimento. As concepções são elaboradas e adquiridas. Enquanto criança, a pessoa estabelece relações em que os conhecimentos são adquiridos através da vivencia. Em seguida, pode aprender conceitos mais teóricos, sem o dever de realizar experimentos.

Desse modo, os conceitos possuem uma ênfase de sentido próprio e uma expressão de sentido figurado. A definição desses dois conceitos para o teórico Ausubel vem a ser o sentido fenomenológico, enquanto pode-se leva as opiniões sobre as expressões particulares do indivíduo que o constituiu. O trabalho caracteriza a relevância do docente em fazer processos metodológicos que consistam em uma administração para melhorar a forma de organização ensino, ajudando o estudante a investigar seu conhecimento e identificar a maneira que melhor se pode proporcionar a assimilação.

Uma vez que haja organização sequencial, encontra-se o fato de tirar proveito de determinada disciplina, em particular diversas definições baseiam-se em outras e dentre algumas mais amplas, são capazes de ajudar na compreensão de diversos. Nessa perspectiva, é expressa a ideia de um mapa mental em que mostra os conceitos, indo do mais extenso, relacionando com menos extensos, até conseguir atingir os que são, mas específicos.

Não obstante ao desenvolver um mapa mental mostrando os conceitos e expondo certo tipo de ordem incluído em um conteúdo a ser explicado, deve ter uma certa preocupação a fim de que não se possua uma grande quantidade de informações confusas e incoerentes para o estudante, em que terá que gravar as informações, sem absorver e entender.

O docente deve tomar cuidado em montar as ideias de modo em que seguida a sua aula, o mapa mental não se venha a ser um instrumento de decoração, mas um objeto para o conhecimento. Contudo, embora todo o processo de Ausubel, ele mostra uma apreensão com o modo de aprendizagem. Nesse seguimento, retrata a Psicologia Educacional, expondo a relevância da produção em adquirir o conhecimento. Isto é, o estudante deve ser dinâmico, ativo e pensar para conseguir o conhecimento.

Desta maneira, a essência do estudo de Moreira (1999) sobre a teoria ausubeliana é o aspecto do conhecimento da aprendizagem, de modo que, conservação das informações é primordial para o êxito da execução do processo, contanto que seja exercida de modo natural, depois de entender a informação e agregar então o novo conhecimento juntamente ao que já estava.

## 1.2 OUTRAS CONTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

Ao nos reportarmos sobre a aprendizagem matemática nos ancoramos em D’Ambrósio (1991/1996/2000) para o qual a aprendizagem está condicionada a elementos da Educação Matemática, ou seja, de um processo que retrata uma situação mais intensa de ensino, aquele que vai além de cálculos e fórmulas, e de difícil compreensão de desenvolvimento do sujeito, diversificando o ensino matemático da realidade. Educação é todo plano adotado pela sociedade afim de que o individuo na qual faz parte, para que o mesmo venha progredir todas as suas habilidades, além do mais, incentivar a relação entre as pessoas, na procura por valores que propõem o bem popular.

> Ao conceituar educação como uma estratégia da sociedade para facilitar que cada indivíduo atinja o seu potencial e para estimular cada indivíduo a colaborar com outros em ações comuns na busca do bem comum, estou reconhecendo que a missão de educadores é levar essa estratégia ao máximo. Como educadores de um certa disciplina, usamos essa disciplina como um instrumento para comprimir essa missão (D’AMBRÓSIO, 2000, p.77)

De acordo com D’Ambrósio (1991) tem alguma coisa que não está certo no ensino da Matemática. Os assuntos que buscamos transmitir por meio do sistema escolar estão atrasados, irrelevantes e desnecessários. Seguindo a mesma ideia de D'Ambrósio, Nacarato (2009) também indica o acontecimento de vários docentes permanecerem com suas abordagens de aulas a anos sendo da mesma maneira, dando relevância aos cálculos.

Tanto D'Ambrósio quanto Nacarato evidenciam a inevitabilidade de deixar o tradicionalismo, quer dizer, a Matemática que gera medo e aflição nos alunos. Enfatizando, a iminência de novos procedimentos pedagógicos que venham colaborar para a compreensão da prática docente em sala, como o mesmo transmiti o ensino, e como entende a aprendizagem dos estudantes em Matemática, de modo a romper barreiras na busca pela qualidade do ensino, desmistificando o que já está posto sobre sujeitos do processo educativo:

> ● professor – que ensina, avalia, pergunta, cobra, enfim, detém o saber, o poder e o controle sobre o que ensina e deve ser ensinado; do
> ● aluno – que aprende, busca o saber que não possui, responde, reproduz o que o professor ensina, somente é avaliado (não participa do processo de avaliação), enfim, é um ser passivo que só recebe o saber. A responsabilidade pela aprendizagem recai toda sobre o aluno (MACARINI, 2010, p. 12).

Assim, na perspectiva de um ensino inovador no qual tanto professor quanto alunos aprendam mutuamente em suas relações, para isso, Couceiro (2015) sugere a concepção pedagógica empírico-ativista, pela qual

> O professor organiza e coordena as situações de aprendizagem, adaptando suas ações às características individuais dos alunos. O aluno é o centro da atividade escolar e o professor é um facilitador na busca de um conhecimento que deve partir do aluno. Valoriza-se o trabalho em grupo e experiências (COUCEIRO, 2015, p. 22).

Por isso, Lopes e Borba (1994), já alertam que deve-se investir menos em escolarização e ensino, e mais na educação. Tendo em vista que os alunos têm mais oportunidades de construir o próprio conhecimento, e os mesmos começaram a refletir e questionar.

# 2 METODOLOGIA

## 2.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

Esta pesquisa de campo é de natureza básica exploratória, que tem como "preocupação central identificar os fatores que determinam ou que contribuem para a ocorrência dos fenômenos" (GIL, 2008, p. 28). Trata-se de um estudo de abordagem qualitativa, que Creswell (2010), estabelece o tratamento de qualitativa como "um meio para explorar e para entender o significado que os indivíduos ou os grupos atribuem a um problema social ou humano".

Os essenciais processos qualitativos, de acordo com o autor referem-se a uma apresentação premeditada de recolhimentos de informações abertas, verificação de escrita ou de símbolos e análise individual de resultados obtidos, ou seja, no processo de ensino e aprendizagem considera-se tanto o domínio dos conteúdos e conceitos quanto o interesse e o envolvimento com as atividades.

Foi partindo do fenômeno da complexidade das dificuldades de aprendizagem matemática em trigonometria que nos empenhamos na realização deste estudo, considerando que os resultados serão subsídios para novos estudos nesta área.

## 2.2 LÓCUS DA PESQUISA

A escola lócus deste estudo foi fundada em 02 de Julho de 1902 com a denominação de Grupo Escolar de Maracanã, a mesma se encontra na Avenida Bertoldo Costa, nº 53, Bairro Centro, Maracanã-Pará, Zona do Salgado, Nordeste Paraense. Na data de 6 de Junho de 1997, segundo a resolução nº 325 a escola passou a ser denominada de Ezequiel Lisboa em homenagem ao professor e diretor que fazia parte da gestão da escola quando era Grupo Escolar de Maracanã.

A investigação foi feita com os professores de Matemática da Escola Municipal de Ensino Fundamental Ezequiel Lisboa do 6º ao 9º do ano de 2019.

A escola foi adotada pelo autor, pois o mesmo trabalha na referida escola, trata-se de um colégio de grande porte, atualmente, no ano de 2019 contava com 542 estudantes, e que opera com 9 salas de Ensino Fundamental nos turnos matutino e vespertino, período da noite com o EJA de 3ª a 4ª etapa.

## 2.3 PARTICIPANTES DA PESQUISA

Com base no contexto supracitado foi realizada uma investigação, com os três professores da referida escola, a qual foi escolhida por ser tratar da instituição a qual já atuamos como docente. A turma do 9°B foi a escolhida para se trabalhar a pesquisa, pois o conteúdo a ser abordado se aplica ao cronograma do referido ano letivo em que eles estão, conforme as normas da BNCC e do currículo do município de Maracanã.

A investigação foi realizada a partir de questionamentos e as perguntas foram direcionadas a partir do que os professores conceituam sobre o rendimento dos estudantes; bem como suas dificuldades no processo de ensino e aprendizagem da trigonometria, que a ausência do conhecimento essencial, no caso, as noções básicas dos anos anteriores; ausência de importância em relação ao conteúdo pelos alunos; e, ausência de equipamentos educacionais; além da carência de formação continuada de professores.

Baseando-se na investigação, foram apresentados os prováveis motivos da ausência de interesse dos estudantes, o que se registrou a partir da percepção da coordenação pedagógica. Em meio à ausência de estímulo da família, e ainda problemas culturais de zona litorânea, como alguns casos de ribeirinhos, que pela distância e condições econômicas as vezes se alimentam mal e necessitam se acordar muito cedo, o que lhes causa cansaço e desânimo para estudar, e tantas outras situações que não são da competência do docente.

Desse modo, por ser a Matemática “uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados” (BRASIL, 2018, p. 221), esta passa a ser a disciplina que gera menos interesse para os alunos, e consequentemente aquela que eles têm menos afinidade, por isso, é de grande valia o uso “heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática” (BRASIL, 2018, p. 263).

Com estes fatos apareceu a idealização de apresentar algo diferente do cotidiano dos alunos para tornar a aula mais agradável e simpática, saindo um pouco da rotina dos jogos e problemas matemáticos, atividades para a socialização, e outras iniciativas já feitas para tornar à aula mais atrativa e que não surtiram efeitos.

Para esses resultados, foi necessário mostrar para os estudantes que a aula prática está de modo direto conectado a aula teórica, sendo assim, uma verdade para adquirir seus conhecimentos com mais interesse, para tanto, foi necessário se ministrar a aula em classe, para apresentar os conceitos e teorias básicas a partir de uma aula expositiva, para depois criar experiências que tornasse a aula mais proveitosa.

Contundo isso não é uma questão de muita facilidade, pois atrair os discentes para a aula prática implica na escola ou o professor ter material para dá suporte a esta ocasião, ter um espaço adequado para levar os alunos, disponibilizar de tempo, e até a compreensão dos demais segmentos da escola.  Se a aula prática não for bem elaborada, pode acontecer que não sejam apresentados os efeitos satisfatórios esperados.

Feita a investigação na referida escola e conforme o trabalho do autor foi escolhido à turma do 9º B que continha 34 estudantes sendo a maior dos 9º, por ser a turma com maior diversidade de classe econômica e cultural, onde a maior parte dos alunos pertence a zona urbana da cidade e os demais as zonas ribeirinhas ao redor do município, assim, devido a necessidade de locomoção diária os mesmos apresentavam dificuldades em concentrar-se nas aulas, em realizar as atividades, em assistir todas as aulas, bem como memorizar fórmulas e, principalmente, em desenvolver os cálculos algébricos.

## 2.4 INSTRUMENTOS DA PESQUISA

As entrevistas com os professores aconteceu por meio de diálogos informais e individuais, para se obter a opinião que cada professor tem a cerca dos rendimentos dos estudantes em Matemática e também os mesmos professores já acompanharam a turma do 9ºB em anos anteriores como meio de conhecer melhor a turma.

A aplicação da atividade sucedeu com as aulas teóricas abordando os conceitos, teorias, observando as duvidas e questionamento dos alunos em relação ao conteúdo, depois da aula teórica será a aula prática, tendo como a observação das reações dos estudantes em relação se os mesmo conseguem absorver o conteúdo aplicado ao seu cotidiano. Sendo assim, analisando as ideias formadas em sala de aula com as teorias e aplicando as em ocasiões do seu cotidiano.

Nesta pesquisa, foi realizada uma ordem dos assuntos em geral que são abordados no 9º e em seguida uma ordem dos conteúdos específicos do estudo que será realizado pelo autor que são de Trigonometria no triângulo retângulo do 9º ano do Ensino Fundamental e será mostrado em um capitulo especifico de aula teórica. No capítulo que sucede as aulas teóricas serão abordadas algumas atividades práticas do cotidiano que será realizada pelos alunos juntamente com o professor.

## 2.5 ORDEM DOS CONTEÚDOS

A instituição tem um plano pedagógico. Porém, não se encontra orientações ou análises efetuadas na respectiva escola, expondo o planejamento a ser utilizado em cada ano. Individualmente os professores organizam a sua proposta de plano para cada classe ou se reúnem os professores que irão compartilhar a mesma disciplina e anos iguais para formarem o planejamento bimestral, semestral e anual do referido conteúdo.

Desta maneira preliminar de descrição, é capaz de indagar: De que modo pode-se realizar a escolha dos tópicos a serem executados no decorrer do ano? A ausência de uma orientação faz com que o educador procure a maior parte dos conteúdos em livros didáticos fornecidos pela própria escola ou até mesmo via internet.

As classes são sempre diversificadas, o que expressa que são formadas por estudantes provenientes de diversas realidades, isto é, em uma mesma sala encontram-se alunos, das quais famílias estão na classe média e, sendo assim, dispõem de uma boa estrutura em casa, por exemplo: livros, assinatura de aulas online, desktops, entre vários acervos. De outra forma, na própria sala de aula, existem discentes, das quais as famílias têm um modelo de vida diferente da qual foi apresentada, mas simples se confrontado com a anterior. Estes estudantes em todo momento estudaram no colégio público e não dispõem de semelhante condição familiar e material.

Como para preparar um planejamento de curso em uma estabelecida classe, a atividade utilizada a todo o momento foi uma investigação dos problemas da turma por meio de uma análise e baseando na pesquisa para escolher os conteúdos anuais.

No referido ano de 2019, nosso método para iniciar com o 9º ano, foi conseguir a relação de assuntos de matemática para a turma.

### 2.5.1 O conteúdo programático da disciplina

Ano/Nível: 9° do Ensino Fundamental

Assuntos

Operações com números Reais – Potenciação, Radiciação

Unidades de Medidas

Equação do 2° grau

Sistema de equações do 2° grau

Noções de funções

Geometria Plana

Trigonometria

Geometria Espacial

Estatística

Probabilidade

Admitindo como fundamentação os conteúdos que normalmente são abordados no 9° ano do Ensino Fundamental, uma pesquisa que elaboramos com a turma e os livros de texto de Matemática do 9° ano foram Vontade de saber matemática de Joamir Souza, Patrícia Moreno Patrão e Matemática Bianchini, produzimos a seguinte listagem de conteúdos de trigonometria:

-O Triângulo

-Classificação dos Triângulos

-Condição de Existência dos Triângulos

-Teorema de Tales nos Triângulos

-Semelhança de Triângulos

-Teorema de Pitágoras

-Relações Métricas no Triângulo Retângulo

-Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

### 2.5.2 Tópicos como instrumentos de ensino e pesquisa

Dos assuntos de trigonometria em referência da listagem a cima, determinados assuntos foram verificados por haverem uma afinidade com nosso objetivo. Ressaltando, que a maior parte das ações desenvolvidas no decorrer da mediação pedagógica foi realizada na seleção do estudo.

Nesse caso, as aulas de trigonometria esta contendo os seguintes estudos abordados:

- História de alguns teoremas
- Conceitos de triângulos
- Condição de existência
- Semelhança de triângulos
- Teorema de Tales
- Congruência de triângulos
- Relações métricas
- Teorema de Pitágoras
- Relações seno, cosseno e tangente
- Ângulos notáveis: Seno, cosseno e tangente de 30°, 45° e 60°

## 2.6 A EXECUÇÃO DA IDEIA

A efetivação do trabalho começa com a recapitulação do conteúdo já abordado com o professor em sala, como meio de relembrar ou até mesmo de explicar de uma forma diferente o mesmo conteúdo já demonstrado, e com a implantação de novos conteúdos como a história de alguns teoremas para formalizar o contexto para o estudante. Sendo assim, de forma contínua, com o objetivo de que o mesmo pudesse solucionar as atividades propostas pelo professor como exercícios em classe para a memorização dos conteúdos e também problemas relacionados a práticas do seu dia-a-dia, ou seja, os subsunçores preexistentes (MOREIRA, 1999)

O que se esperou dos educandos em relação a esta pesquisa é que os mesmos melhorassem os resultados dos estudos no final das avalições sobre Trigonometria em relação ao triangulo retângulo, mas também no seu cotidiano para despertar o sentido de investigar o universo da Matemática no ambiente em que vive.

## 2.7 EXPECTATIVAS DOCENTES

A fim de comparar as necessidades sentidas por educadores e estudantes no desenvolvimento de ensinamento de trigonometria por trabalhos, tornou-se importante, a princípio, separá-las perante classes:

a) Problemas associadas ao espaço físico e de objetos que demonstram relação – segundo a mesma denominação diz – ao âmbito físico em que está estabelecida a sala de aula e quaisquer as situações de elementos importantes ou não à ação da exposição de aula.
b) Problemas associadas ao sistema organizador da escola que se relatam ao período educativo e às paradas não programadas que surgem no decorrer do ano letivo;
c) Problemas derivados dos processos da educação habitual que se referem em relação ao conhecimento dominante na comunidade e inclusive até mesmo no ambiente pedagógico mediante o produzir de sala de aula. Bem como veremos em seguida, a educação direta tem enfrentado às realizações de alterações e, em consequência, vem prestando assistência de orientação para as questões nas reuniões de professores e responsáveis dos alunos;
d) Problemas derivados dos processos do trabalho educador o que se mencionam às situações de serviço, da mesma maneira também da sua profissão. Selecionamos, como importantes dificuldades desse momento, as enormes jornadas de serviço do docente e a ausência de estímulo para seu desenvolvimento constante;
e) Problemas resultantes das capacidades e habilidades dos estudantes. E conveniente recordar que esse tópico forma o propósito fundamental da

educação em seja qual for área. Nessa classe de obstáculos, associamos os casos educacionais e quaisquer a prática e princípios que não chegaram bem adquiridos nas séries antecedentes da vida colegial dos alunos que se transformam em dificuldade no momento em que eles precisam desenvolver certo dever ou obter uma definição nova.

## 3 ENSINO DA MATEMÁTICA NA ESCOLA EZEQUIEL LISBOA: abordagem teórica

As aulas de matemática na escola Ezequiel Lisboa são ministradas através de teorias com o auxílio dos livros e depois comumente é repassado exercícios para a fixação do conteúdo, onde alguns alunos aprendem a reproduzir as formulas em exercício e outros que tentam ainda assimilar o conteúdo exposto.

A partir dessas observações foi organizado um planejamento onde as aulas deveriam ser recapituladas e também baseadas nos assuntos já ministrados pelo professor, mas com a implantação de contextos sobre história e especificando cada conteúdo abordado, a considerar o que propõe a BNCC (BRASIL, 2018) sobre as Competências Específicas de Matemática para o Ensino Fundamental:

> 1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
> 2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
> 3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
> 4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes. 5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
> 6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
> 7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.

> 8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles (BRASIL, 2018, p. 267).

Dessa forma, a aula teórica foi baseada nos livros didáticos utilizados na própria escola como os de Matemática do 9° ano foi Vontade de saber matemática de Joamir Souza, Patrícia Moreno Patrão e Matemática Bianchini, e também de pesquisas realizadas em sites como meio de acrescentar no conteúdo exposto para os alunos. Tendo em vista isso, apresentamos a sequência das aulas teóricas.

## 3.1 CONTEÚDO ABORDADO

**Triângulos - Definição**

Denominamos triângulo (ou trilátero) a toda figura do plano euclidiano formada por três segmentos AB, BC e CA, tais que os pontos A, B, C não estão numa mesma linha reta.

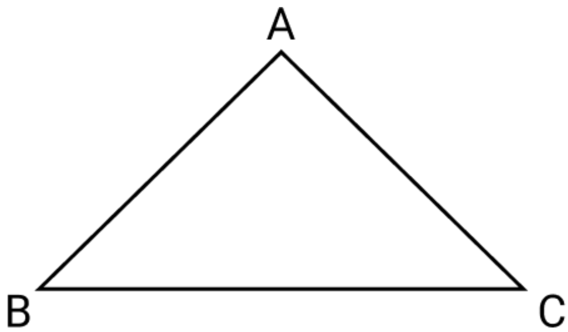


Figura 1 - Representação de um triângulo ABC

Na notação acima, a cada triângulo estão associados nove elementos principais:

- seus três lados: AB, BC e CA;
- seus três vértices, os pontos A, B e C;
- seus três ângulos (internos), ∢A, ∢B, ∢C, os quais são assim definidos: ∢A é o ângulo de vértice A e que contém todos os pontos do lado BC (também

costuma ser designado por ∢BAC ); análoga definição para os outros dois lados, como mostra figura: ∢B=∢ABC,∢C =∢ACB.

No triangulo, o lado $\overline{AB}$ é oposto ao ângulo $\hat{c}$, $\overline{BC}$ é oposto ao â, e $\overline{AC}$ é oposto $\hat{b}$.

O lado BC é dito lado oposto ao vértice A e por isso sua medida é denotada por $a$. Analogamente o lado AC é o lado oposto ao vértice B, e sua medida é denotada por $b$, e o lado AB é o lado oposto ao vértice C, e sua medida é $c$.

**Classificação quanto às medidas dos lados.**

-Triangulo equilátero – possuem os três lados (e consequentemente os três ângulos) iguais (congruentes);

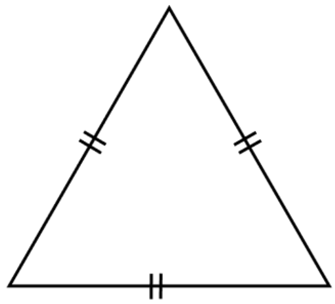

Figura 2 - Representação de um triângulo equilátero

- Triangulo isósceles – possui dois lados iguais. O terceiro lado é chamado base. Os ângulos formados pela base com os lados são iguais.

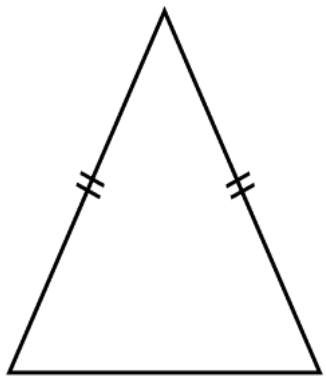

Figura 3 - Representação de um triângulo isóscele

-Triangulo escaleno – não possui nenhum lado (consequentemente nenhum ângulo) igual.

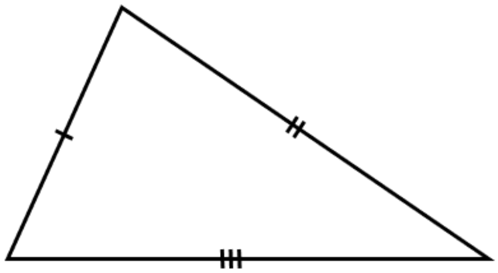

Figura 4 - Representação de um triângulo escaleno

**Classificação quanto as medidas dos ângulos internos**

*Triangulo agudo – Possui todos os ângulos internos agudos, ou seja, menores que $90^0$.

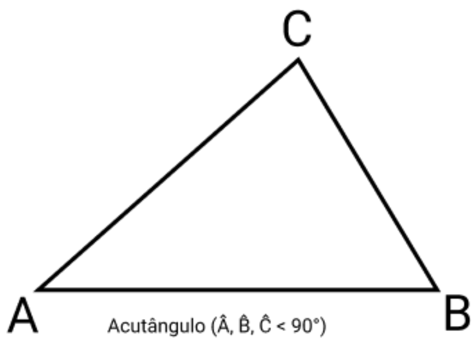


Figura 5 - Representação de um triângulo agudo ou acutângulo

*Triangulo retângulo - Formado por um ângulo interno reto. O lado oposto ao ângulo reto é chamado hipotenusa e os outros dois lados são chamados catetos.

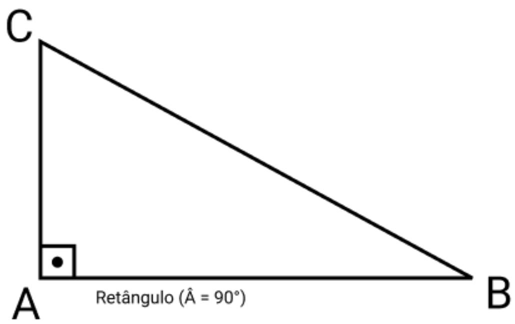


Figura 6 - Representação de um triângulo retângulo

-Triangulo obtusângulo - Possui um ângulo interno obtuso, no qual ângulo interno é maior que $90^0$.

$$90^0 < \text{med } C < 180^0$$

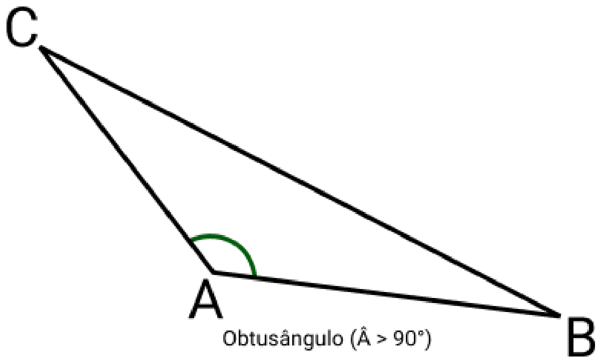


Figura 7 - Representação de um triângulo obtusângulo

**Condição de existência de um triângulo**

Para construir um triângulo não podemos utilizar qualquer medida, tem que seguir a condição de existência: Em um triangulo a medida de um lado qualquer é menor que a soma das medidas dos outros dois lados.

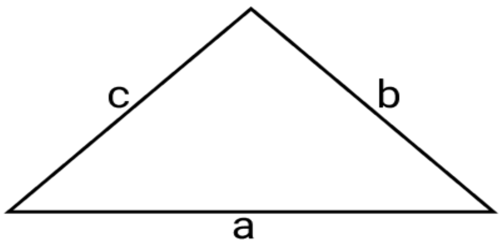


Figura 8 - Representação de um triângulo ABC

$$|b - c| < a < b + c$$

$$|a - c| < b < a + c$$

$$|a - b| < c < a + b$$

De maneira prática, três medidas podem corresponder aos lados de um triângulo qualquer se a maior delas for menor que a soma das outras duas.

**Ângulos em um triângulo**

* A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é $180^0$

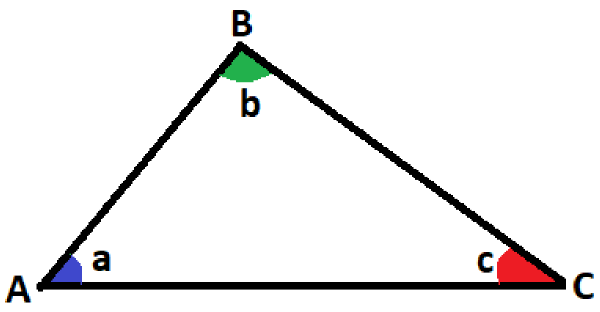


Figura 9 - Representação da soma dos ângulos internos de um triângulo

$$med(\hat{a}) + med(\hat{b}) + med(\hat{c}) = 360^{\circ}$$

* A soma dos ângulos externos de um triangula é $360^0$

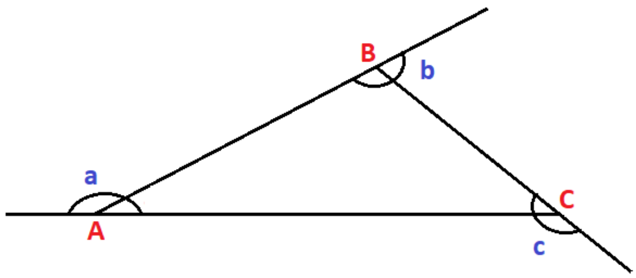


Figura 10 - Representação da soma dos ângulos externos de um triângulo

$$med(\hat{a}) + med(\hat{b}) + med(\hat{c}) = 360^{\circ}$$

*O maior lado do triângulo se opõe (“vê”, “está de frente”) ao maior ângulo e o menor lado se opõe ao menor ângulo; □

* Desigualdade triangular: a, b, c formam um triângulo se, e somente se, $|a – b| < c < a + b$.

**Semelhança de triângulos**

Para tratar-se de semelhança de triângulos, é imprescindível retornar os estudos do filosofo e matemático grego Tales de Mileto (cerca de 624-547 a.C.) cujo nome está associado ao teorema:

Segundo o teorema diz que se um feixe de retas paralelas é interceptado por duas retas transversais, então os segmentos determinados pelas paralelas sobre as transversais são proporcionais.

Esse teorema, que provém diretamente da ideia de semelhança de triângulos, é conhecido como teorema de Tales.

Sabe-se pouco a respeito da vida e da obra de Tales. Acredita-se que ele tenha sido o primeiro filosofo e geômetra da Grécia conhecido e o primeiro de seus sábios. Acredita-se também que tenha sido o criador da Geometria demonstrativa.

Nenhum escrito de Tales chegou até nós, o que dificulta determinar precisamente suas ideias e suas descobertas matemáticas. Muito do que sabemos a respeito dele vem do chamado Sumário eudemiano, escrito pelo matemático, filosofo e comentarista grego Proclus (411-485 d.C.).

Essa obra é um breve resumo do desenvolvimento da Geometria grega desde os primeiros tempos até a época de Euclides e é, ainda hoje, o principal registro histórico do início dessa ciência na Grécia.

Muitos dos conhecimentos de Tales resultaram de viagens que ele empreendeu, especialmente ao Egito. Tales morou por um tempo no Egito, onde teria aprendido Geometria com os sacerdotes egípcios e, também, aplicada a semelhança de triângulos.

Segundo o Sumário eudemiano, Tales introduziu a Geometria na Grécia após essas viagens. Utilizando metodologias gerais e empíricas, o filosofo grego descobriu muitas proposições, algumas delas envolvendo semelhança.

Além de Proclus, outras fontes fazem menção a Tales. O grego Eudemo de Rodes (350-290 a.C.), primeiro grande historiador da Matemática, por exemplo afirma que Tales mediu a distância de uma torre a um navio.

Hierônimo, um discípulo de Aristóteles (384-322 a.C.), afirmou que Tales teria medido a altura da grande pirâmide de Quéopes, no Egito, por meio da observação e da comparação da própria sombra com a sombra da pirâmide. Tales teria chegado a conclusão de que, quando sua sombra tivesse o mesmo comprimento de sua altura, a sombra da pirâmide teria o mesmo comprimento da altura dela.

O matemático e filosofo grego Plutarco (cerca de 46-119 d.C.) também o menciona em sua obra, ao dizer que Tales mediu a altura da pirâmide fincando verticalmente uma vara no chão e comparando as razões entre os dois triângulos formados.

Com base nesses relatos, percebemos que as ideias de proporcionalidade e de semelhança, em particular entre triângulos, estão estreitamente associadas ao nome de Tales. Adicionando a isso a grande importância que a Arquitetura e a Agrimensura tiveram no Egito antigo, bem como o fato de ter sido o fundador da Geometria demonstrativa na Grécia e quem primeiro organizou a Matemática em dedutiva, é razoável a hipótese de que a primeira sistematização da Geometria tenha ocorrido na época de Tales.

A imagem a suceder demonstra essa conclusão no processo de um feixe em relação a três paralelas, as quais definem os segmentos A, B e C na primeira reta em relação ao feixe a, e segmentos A', B' e C' na segunda reta, de maneira que dispomos da relação.

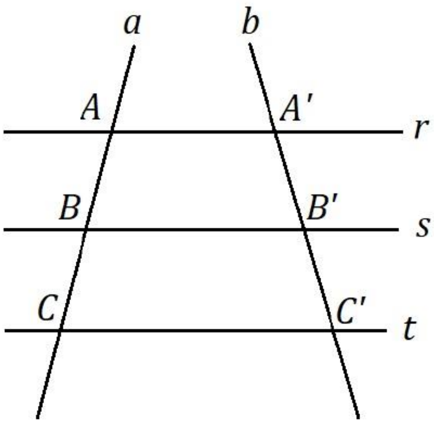


Figura 11 - Representação de segmentos de retas paralelas cortadas por uma transversal

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

**Condições que garantem a semelhança de triângulos**

1º caso – Ângulo e Ângulo (AA)

Dois triângulos são semelhantes quando possuem dois ângulos correspondentes congruentes.

2º caso – Lado, Ângulo e Lado (LAL)

Dois triângulos são semelhantes quando possuem dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos formados por eles congruentes.

3º Caso – Ângulo, Lado e Ângulo (LAL)

Dois triângulos são semelhantes quando possuem os três lados correspondentes proporcionais.

Exemplo de semelhança de triângulos:

Um prédio projeta no solo uma sombra de 30 metros de extensão no mesmo instante em que uma pessoa de 1,80 metros projeta uma sombra de 2,0 metros. Pode-se afirmar que a altura do prédio vale:

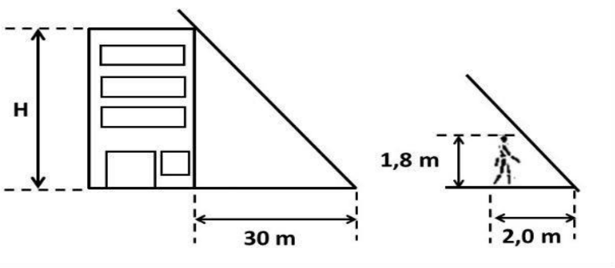


Figura 12 - Representação de semelhança de triângulos

a) 27 m b) 30 m c) 33 m d) 36 m e) 40 m

Resolução do problema:

Fazendo a comparação da altura do prédio com a altura da pessoa e da sombra do prédio com a sombra da pessoa. Pode-se aplicar semelhança de triângulos. Tomando cuidado com as unidades métricas para estarem na mesma sentença, caso não esteja, transforma na mesma unidade métrica.

$$\frac{altura\ do\ prédio}{altura\ da\ pessoa} = \frac{sombra\ do\ prédio}{sombra\ da\ pesso}$$

$$\frac{H}{1{,}8} = \frac{30}{2}$$

$$H.2 = 1{,}8.30$$

$$H = \frac{1{,}8.30}{2}$$

$$H = \frac{54}{2}$$

$H = 27\ metros$; Letra a

## Relações métricas

As relações métricas relacionam as medidas dos elementos de um triângulo retângulo (triângulo com um ângulo de 90º).

Os elementos de um triângulo retângulo estão apresentados abaixo:

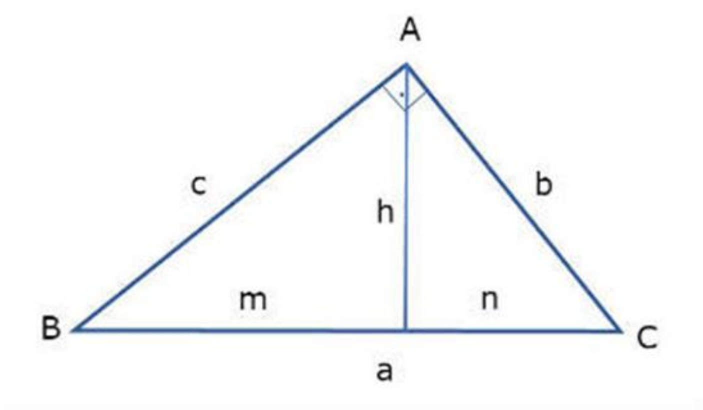


Figura 13 - Elementos de um triângulo sobre relações métricas

Sendo:

a: medida da hipotenusa (lado oposto ao ângulo de 90º)

b: cateto

c: cateto

h: altura relativa à hipotenusa

m: projeção do cateto c sobre a hipotenusa

n: projeção do cateto b sobre a hipotenusa

Para encontrar as relações métricas, utilizaremos semelhança de triângulos. Considere os triângulos semelhantes ABC, HBA e HAC, representados nas imagens:

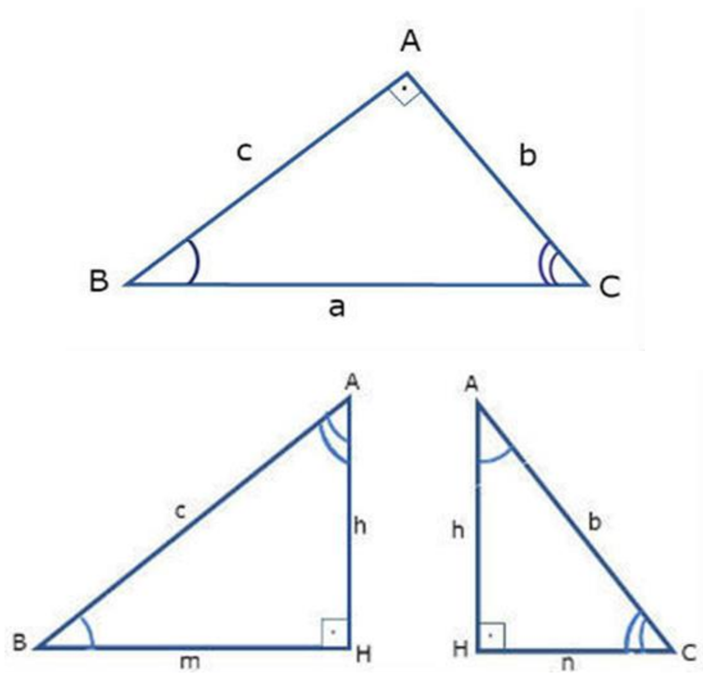


Figura 14 - Representação de três triângulos retângulos (Grande, Médio e Pequeno)

Como os triângulos ABC e HBA são semelhantes ($\Delta ABC \sim \Delta HBA$), temos as seguintes proporções:

1- Surge da relação do ângulo $\hat{A} \cong \hat{H}$ com o ângulo $\hat{B} \cong \hat{B}$.

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \rightarrow a.h = c.b$$

2- Surge da relação do ângulo $\hat{A} \cong \hat{H}$ com o ângulo $\hat{C} \cong \hat{A}$.

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \rightarrow c.c = a.m \rightarrow c^2 = a.m$$

3- Surge da relação do ângulo $\hat{B} \cong \hat{B}$ com o ângulo $\hat{C} \cong \hat{A}$.

$$\frac{b}{h} = \frac{c}{m} \rightarrow b.m = h.c$$

Como os triângulos ABC e HAC são semelhantes ($\Delta ABC \sim \Delta HAC$), temos as seguintes proporções:

1- Surge da relação do ângulo $\hat{A} \cong \hat{H}$ com o ângulo $\hat{B} \cong \hat{A}$.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \rightarrow b.b = a.n \rightarrow b^2 = a.n$$

2- Surge da relação do ângulo $\hat{A} \cong \hat{H}$ com o ângulo $\hat{C} \cong \hat{C}$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{h} \rightarrow a.h = b.c$$

3- Surge da relação do ângulo $\hat{B} \cong \hat{A}$com o ângulo $\hat{C} \cong \hat{C}$

$$\frac{b}{n} = \frac{c}{h} \rightarrow b.h = n.c$$

Como os triângulos HBA e HAC são semelhantes ($\Delta HBA \sim \Delta HAC$), temos as seguintes proporções:

1- Surge da relação do ângulo $\hat{H} \cong \hat{H}$ com o ângulo $\hat{B} \cong \hat{A}$

$$\frac{c}{b} = \frac{h}{n} \rightarrow c.n = b.h$$

2- Surge da relação do ângulo $\hat{H} \cong \hat{H}$ com o ângulo $\hat{A} \cong \hat{C}$

$$\frac{c}{b} = \frac{m}{h} \rightarrow c.h = b.m$$

3- Surge da relação do ângulo $\hat{B} \cong \hat{A}$ com o ângulo $\hat{A} \cong \hat{C}$

$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \rightarrow h.h = n.m \rightarrow h^2 = n.m$$

Temos ainda que a soma das projeções $m$ e $n$ é igual a hipotenusa do triangulo ABC, ou seja:

$a = m + n$

**Teorema de Pitágoras**

O filosofo grego Pitágoras nasceu na ilha de Samos provavelmente em 570 a.C., cerca de cinquenta anos depois do nascimento de Tales de Mileto.

Filho de um rico comerciante viajou pelo Egito, pela Babilônia e talvez tenha chegado a Índia.

Ao voltar para a Grécia, fixou-se em sua terra natal, mas, descontente com as arbitrariedades do governo de Samos, mudou-se para a colônia grega Crotona, situada na Itália. Lá fundou a escola pitagórica.

Nessa escola, havia aulas de Religião, Filosofia, Politica, Música, Astronomia e Matemática. Seus alunos eram divididos em duas categorias: os dos três primeiros anos eram chamados de ouvintes e os dos anos seguintes, de matemáticos, pois somente a estes eram revelados os segredos da Matemática. Aliás, a origem da palavra matemática (que significa "o aprendizado da arte, da ciência") é atribuída a Pitágoras.

O lema da escola era "Tudo é número". Nela, procuravam explicar com números tudo o que existe na natureza.

Os pitagóricos tinham o conhecimento como única aspiração e formaram uma sociedade secreta cujo emblema era um pentágono estrelado – ou pentagrama.

Os estudos dos pitagóricos trouxeram grandes contribuições para a Matemática, principalmente para a Geometria. Entre essas contribuições, a de maior sucesso foi sem dúvida o conhecido teorema de Pitágoras.

Mesmo depois da morte de Pitágoras, por volta de 500 a.C., a sociedade dos pitagóricos continuou a existir por mais de quatro séculos.

A mais importante das relações métricas é o Teorema de Pitágoras. Podemos demonstrar o teorema usando a soma de duas relações encontradas anteriormente.

Vamos somar a relação $b^2 = a.n$ com $c^2 = a.m$, conforme mostrado abaixo:

$$b^2 + c^2 = a.n + a.m$$

Colocado em evidencia “a”

$$b^2 + c^2 = a\,.(n + m)$$

Temos que das relações métricas a hipotenusa “a” é a soma das projeções “n” e “m. Sendo assim:

$$b^2 + c^2 = a.a$$

Logo temos o teorema de Pitágoras.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Assim, o Teorema de Pitágoras pode ser enunciado como:

A hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Exemplo de teorema de Pitágoras.

A figura mostra um edifício que tem 15 m de altura, com uma escada colocada a 8 m de sua base ligada ao topo do edifício. O comprimento dessa escada é de:

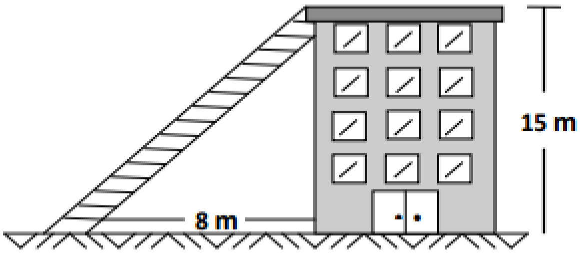


Figura 15 - Representação de um esquema de Teorema de Pitágoras

a) 12 m. b) 30 m. c) 15 m. d) 17 m. e) 20 m.

Resolução do problema:

Sabendo que a altura do edifício vale 15 metros é seja um dos catetos, e que a escada que está a 8 metros seja outro cateto, vamos descobrir o comprimento da escada que na nossa questão é a hipotenusa.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 15^2 + 8^2$$

$$a^2 = 225 + 64$$

$$a^2 = 289$$

$$a = \sqrt{289}$$

$$a = 17 \; metros \; de \; comprimeto$$

**Relações Trigonométricas do Triângulo Retângulo**

As razões trigonométricas são as relações existentes entre os lados de um triângulo retângulo. As principais são o seno, o cosseno e a tangente.

Seno de um ângulo agudo

Considerando a figura.

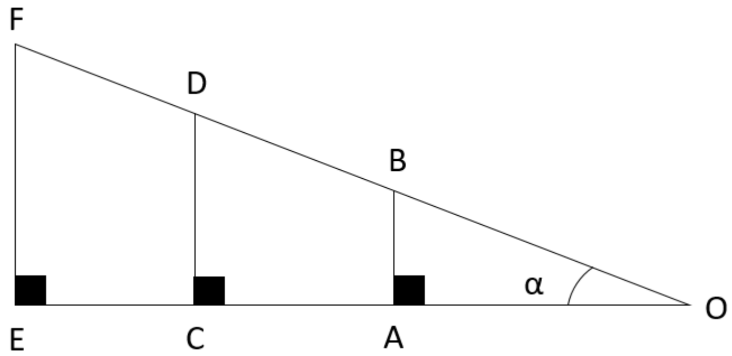


Figura 16 - Relações entre os lados de um triangulo retângulo.

Os triângulos retângulos $OAB, OCD$ e $OEF$ são semelhantes pelo caso AA, pois tem em comum o ângulo de medida α (também chamado de ângulo α) e um ângulo reto.

Como os triângulos $OAB$ e $OCD$ são semelhantes e os lados correspondentes são proporcionais, podemos escrever:

$$\frac{OA}{OC} = \underbrace{\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}}$$

Os triângulos $OAB$ e $OEF$ são semelhantes, portanto os lados correspondentes são proporcionais:

$$\frac{OA}{OE} = \underbrace{\frac{OB}{OF} = \frac{AB}{EF}}$$

Observe que as duas proporções que destacamos acima: $\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$ e $\frac{OB}{OF} = \frac{AB}{OB}$

Da propriedade fundamental das proporções, podemos escrever:

$$\frac{CD}{OD} = \frac{AB}{OB} \text{ e } \frac{EF}{OF} = \frac{AB}{OB}$$

Assim, temos: $\frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OF} = \frac{medida \; do \; cateto \; oposto \; a \propto}{medida \; da \; hipotenusa}$

Há infinitos outros triângulos retângulos que tem como ângulo interno o ângulo α e que, por isso, também são semelhantes aos triângulos $OAB, OCD$ e $OEF$.

Para todos esses triângulos retângulos, a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo α e a medida da hipotenusa é constante. Chamamos essa razão constante de seno do ângulo α e a indicamos por $sen \propto$.

Seno de um ângulo agudo de um triangula retângulo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

Considerando qualquer um desses triângulos, temos:

$$sen \propto = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \propto}{medida\ da\ hipotenusa}$$

Cosseno e Tangente de um ângulo agudo

Considere novamente os triângulos retângulos $OAB, OCD$ e $OEF$.

Como já vimos, os triângulos $OAB, OCD$ e $OEF$ são semelhantes.

De modo análogo ao que fizemos para a razão seno, dessa semelhança, obtemos:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{OE}{OF} = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \propto}{medida\ da\ hipotenusa}$$

Chamamos essa razão constante de cosseno de α e a indicamos por $\cos \propto$.

Cosseno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é a razão entre a medida do cateto adjacente a esse ângulo e a medida d hipotenusa.

Para qualquer um desses triângulos, temos:

$$\cos \propto = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \propto}{medida\ da\ hipotenusa}$$

Da mesma semelhança, também obtemos:

$$\frac{AB}{OA} = \frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE} = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \propto}{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \propto}$$

Chamamos essa razão constante de tangente do ângulo α e a indicamos por $tg\ \propto$.

Tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é a razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente a esse ângulo.

Considere qualquer dos triângulos da figura anterior, temos:

$$tg \; \propto = \frac{medida \; do \; cateto \; oposto \; a \; \propto}{medida \; do \; cateto \; adjacente \; a \; \propto}$$

**Ângulos Notáveis**

Os chamados ângulos notáveis são aqueles que aparecem com mais frequência, a saber:

| | 30º | 45º | 60º |
|---|---|---|---|
| Seno | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| Cosseno | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| Tangente | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |

Tabela 1 - Ângulos notáveis

Exemplos de Seno:

Um avião decola, percorrendo uma trajetória retilínea, formando com o solo um ângulo de 30° (suponha que a região sobrevoada pelo avião seja plana). Depois de percorrer 1.000 metros, a altura atingida pelo avião, em metros, é:

Solução do problema:

Analisando a seguinte situação da questão, pode-se descrever a seguinte ilustração:

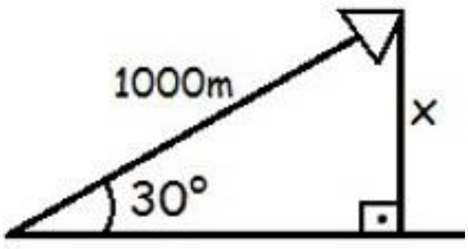


Figura 17 - Representação de relações trigonométricas para o exercício.

Usando a formulas para determinar o seno, temos:

$$sen \; \propto = \frac{medida \; do \; cateto \; oposto \; a \propto}{medida \; da \; hipotenusa}$$

$$sen \; 30º = \frac{x}{1000}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{1000}$$

$$2x = 1000$$

$$x = \frac{1000}{2}$$

$$x = 500\ metros$$

Então, a altura que o avião atingiu foi de 500 metros.

# 4. MEDIDAS PEDAGÓGICAS PARA MINIMIZAR AS DIFICULDADES: abordagem prática

Para descrever o processo da experiência, discorremos sobre alguns aspectos que caracterizam o processo de ensino e aprendizagem na Escola Ezequiel Lisboa.

## 4.1 A RESPEITO DAS AULAS EM SALA

O modelo de aula expositiva clássica, é no qual o docente desenvolve, comenta e apresenta a respeito de um estabelecido conteúdo em um determinado espaço de tempo. O docente tenta estabelecer um contato através de perguntas e questionamentos para tentar romper essa passividade do aluno, incentivando as ações em classe (FILHO, 2007).

A aula expositiva é bem mais efetiva em relação à facilidade propagação de conhecimento em que se pode abordar o conteúdo em certo tempo. E um modelo agradável para passar conceitos, definições e mecanismos de ações.

As aulas teóricas têm várias razões para ser a preferida em sala. Pode ser relevante como: facilidade na propagação do conhecimento referente ao tempo, pois tem que obedecer ao cronograma da escola por bimestre, de suma importância para as avaliações e aprendizado dos alunos; gera um período mais ágil para o professor preparar sua aula no dia e gera ainda mais tempo para preparar as próximas aulas; não há gasto com materiais para fazer projetos, se não com os materiais que o professor comumente usa em sala como pincel de quadro branco, tinta e apagador.

## 4.2 PARA ALÉM DA SALA DE AULA

Aula aplicada no cotidiano é algo com um grande diferencial, pois faz uso de materiais e equipamentos, para que os estudantes possam realizar o experimento, seja uma lei física ou um conceito, fazendo a relação da prática com a teoria aprendida em sala. Neste momento o estudante deixa de ser passivo e começa a ser ativo para poder realizar as pesquisas.

Evidentemente que nessas circunstâncias julga-se que a aula teórica vem procedendo de maneira exaustiva, sem relevância e autoritária, devido o foco da atenção está na imagem do docente e o estudante não se envolve no procedimento ensino. Por conseguinte, é notório renovar o conceito da aula.

A aula teórica segundo Lopes (1998) será capaz de ser remodelada em uma performance dinâmica, comunicativa e instigadora para o aluno em relação ao seu pensamento crítico.

As aulas práticas servem como um caráter de estímulo para as informações obtidas nas aulas teóricas, visto que o aprendizado de cada prática permite a memorização dos conhecimentos. A prática não implica meramente em ações ocorridas em laboratório, porém diferentes de outras experiências que podem acontecer e ser efetuadas em classe com equipamentos comum. Este fator permite a evolução dos estudantes na possibilidade de raciocínio, produção de princípios e componentes, além da compreensão dos processos.

Os princípios citado nas aulas teóricas, especialmente as mais abstratas, podem ter vantagens se apresentados por meio de dadas ações práticas, possibilitando ao estudante o momento de efetivamente realiza-la em oficina. Para isso, é necessário ainda que estas práticas prossigam em comum, de acordo com os conteúdos apresentados em classe, fazendo o conhecimento de princípios específicos e contextualizados para os estudantes.

Ações práticas, sempre que bem elaboradas pelo docente, permitem para que os estudantes produzam competências de comportamento de pesquisa cientificas e de observações de informações. O melhor é porque a produção em oficina vem de dúvidas geradas em sala de aula, pois possibilita que os educandos provem suas estimativas, projetem suas atividades para isto e as realizem. Além dos mais, os efeitos, são carregados para dentro da sala gerando o debate e a compreensão da questão.

A exposição prática apresenta a utilidade de estabelecer a compreensão, uma vez entendido o desenvolvimento, o estudante busca a não esquecer e a não desprezar, se ocorrer de esquece, conhecera as condições suficientes para atingir mis uma vez ao conceito. Bem como amenta os benefícios, o acontecimento das aulas prática não é tedioso e passa a ser a preferida dos estudantes.

A realização das aulas práticas demanda um pouco mais de tempo para a sua efetivação. Uma vez que esse tempo o docente não dispõe, se desejar atingir o planejamento. Logo para obter uma compreensão assimilada deve ocorrer em pelo menos umas três aulas práticas, o que seria capaz de ser transmitido dentro de apenas alguns minutos dentro de classe em aula teórica. Se já não fosse o suficiente, o tempo curto para a aula prática ainda ocorre a indisciplina com os alunos provocados pelo novo ambiente e menos casual para as aulas.

## 4.3 SOBRE O *LÓCUS* DA AULA PRÁTICA

Qualquer aula prática teria que ser exercida em um local próprio para que favoreça a experiência. O local mais apropriado é a sala de laboratório. O laboratório é bom para proporcionar ao estudante que bote em ação o que foi apresentado em classe montando a ideia e possibilitando o conhecimento. Entretanto, podemos considerar que são poucas as escolas que possuem uma sala adequada para essas ocasiões de pesquisas. Portanto propõe que as atividades sejam realizadas no ginásio se a escola possuir, pátio, sala de informática ou inclusive em lugares exterior do local da escola no momento em que há oportunidades para este fato.

É relevante que a exposição da aula prática seja apresentada em um local incomum do que os alunos estão familiarizados a aprender, ou seja, distante do ambiente da sala. Contudo nada proíbe para que a aula prática seja realizada dentro do ambiente da própria sala da classe.

## 4.4 MATERIAIS DIDÁTICOS

Ainda existe o contratempo que dificulta os educadores de realizarem aula prática é a escassez de objetos didáticos. Ainda conforme Borges (2002), aulas empíricas podem ser produzidas seja em qual for o ambiente e sem a dificuldade de materiais ou dispositivos aprimorados.

O Docente pode solicitar como trabalho para casa, para que os alunos desenvolvam instrumentos para os mesmos, por exemplo, o teodolito que pode ser feito com materiais simples e fácil de encontrar, transferidor de plástico ou de madeira, canudo ou tubo de antena, barbante e tachinha. O passo a passo de como construir o teodolito será abordado em outra seção. Por enquanto, a aula prática pode ser feita sem o acompanhamento de materiais especializados.

## 4. 5 A AULA PRÁTICA E SEUS REFLEXOS

A aula técnica será capaz de ocorrer em diferentes situações alinhadas à aula teórica, é ajustada conforme com o professor como sendo antes, durante e depois, vai depender de como o professor pretende preparar e o que o mesmo almeja de expectativa dos alunos. O que vai definir a situação de seu cumprimento é o propósito do docente.

A aula prática antes da teórica pode ser realizada quando o docente deseja criar o conhecimento do tema passo a passo com o aluno, dando os comandos necessários para a construção da ideia, ao contrário de repassar o conhecimento já pronto para os estudantes. Portanto, acertos e erros podem ocorrer, mas desde que sejam acompanhados pelo professor para analisar e corrigir, se algo não for de suas orientações, podendo os alunos descobrir os conceitos e estimular os seus conhecimentos para novas pesquisas.

A aula prática durante a teórica pode ser realizada quando o docente deseja fazer a abertura da aula com uma história do referido tema ou algum problema chave para despertar a curiosidade dos alunos. Assim, o docente faz uma abordagem prévia do assunto com os estudantes para montar as ideias iniciais, para depois partir para a aula prática e depois voltar para a aula teórica para finalizar os conceitos que foram mencionados no início da aula.

A aula prática após a aula teórica ocorre depois que o docente já transmitiu todo o conhecimento teórico para os estudantes. Com isso, o professor não tem uma participação ativa no momento de realizar a aula prática, pois, o aluno já tem os conhecimentos necessários para realizar as atividades práticas propostas pelo professor, mas tendo o acompanhamento necessário caso ocorra alguma situação problema como erros ou esquecimentos dos alunos na atividade prática.

Durante a aula prática, abordando os conhecimentos que os estudantes já adquiriram em sala, levando em consideração que os mesmos irão reproduzir as teorias e os exemplos, que antes era feita de forma mecânica somente através de cálculos e métodos repetitivos para a memorização.

Os alunos forma incentivados a desenvolver meios de artifícios juntamente com o professor através de ferramentas que eles utilizam no seu do dia a dia para reproduzir na prática as teorias e exemplos de questões que são comumente utilizadas em sala de aula como: calcular altura da torre pela sombra, altura do muro da frente da escola, comprimento da rampa de acessibilidade e medir a altura da Igreja São Miguel Arcanjo.

### 4.5.1 – Experiências com Trigonometria

Levando em consideração o que orienta a BNCC,

> a aprendizagem em Matemática no Ensino Fundamental – Anos Finais também está intrinsecamente relacionada à apreensão de significados dos objetos matemáticos. Esses significados resultam das conexões que os alunos estabelecem entre os objetos e seu cotidiano, entre eles e os diferentes temas matemáticos e, por fim, entre eles e os demais componentes curriculares (BRASIL, 2018, p. 298).

Assim,

> [...] para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática. No entanto, é necessário que eles desenvolvam a capacidade de abstrair o contexto, apreendendo relações e significados, para aplicá-los em outros contextos (**Idem**, p. 299).

Nessa perspectiva descrevemos quatro experiências com trigonometria.

✓ **Altura da torre pela sombra**

Essa questão de medir a altura da torre levou-se em consideração pelas curiosidades dos alunos em determinar quantos metros tinha altura da torre da rádio de Maracanã, fenômeno que já existia nas ideias dos alunos, porém nunca tinha sido despertado no ensino, fato que emerge de uma consciência gerada por um conhecimento vivido e experimentado, como assegura D' Ambrósio (2006) "O conhecimento é o gerado do saber, que vai, por sua vez, ser decisivo para a ação, e por conseguinte, é no comportamento, na prática, no fazer que se avalia, redefine e reconstrói o conhecimento (p. 21).

Nesse perspectiva, depois de assistirem a aula teórica sobre Teorema de Tales e Semelhança de Triângulos evidenciando que eles poderiam usar esses tópicos abordados, a aula aconteceu próxima à escola onde está localizada a torre da rádio da cidade e teve a presença dos 34 alunos na atividade prática numa manhã em que o sol se encontrava em uma posição favorável para a visualização da sombra, cuja experiência sucedeu-se, com a utilização dos instrumentos:

- (01) Uma corda de 10 metros de comprimento
- (01) Uma trena
- (01) Uma estaca de madeira
- A torre da rádio

O desenvolvimento foi do seguinte modo:

Uma equipe de estudantes ficou responsável em pegar as medidas da torre e a outra equipe em recolher as informações da estaca de madeira simultaneamente.

A equipe da torre utilizou a corda para medir a sombra da torre pois a trena não tinha tamanho o suficiente para medir e caso faltasse algum espaço para completar seria utilizada a trena. Sendo assim, a corda foi utilizada apenas uma vez tendo 10 metros e mais a trena para completar a sombra com 6 metros, gerando uma sombra de 16 metros de comprimento.

A equipe que estava responsável pela estaca de madeira, cravou a mesma no solo deixando para fora do solo o restante da estaca com 1,5 metros e a sombra projeta sobre o solo foi de 0,8 metros.

Foi possível notar dois triângulos. As duas equipes simultaneamente juntaram as informações obtidas da sombra da torre com a altura da estaca e a sombra da mesma. Utilizando dos tópicos de Teorema de Tales e Semelhança de Triângulos, gerou a seguinte proporção:

$$\frac{Altura\ da\ Torre}{Sombra\ da\ Torre} = \frac{Altura\ da\ estaca}{Sombra\ da\ estaca}$$

$$\frac{H}{16} = \frac{1{,}5}{0{,}8}$$

$$0{,}8 \times H = 1{,}5 \times 16$$

$$H = \frac{24}{0{,}8}$$

$$H = 30\ metros$$

Podemos então dizer que a altura da torre é de 30 metros.

Conforme orienta D'Ambrósio (2006) sobre o conhecimento consciente, percebemos o axioma apresentado no cálculo da proporção é construído a partir da percepção dos dados obtidos na experiência e isso aproxima a teoria da prática de forma significativa quando Ausubel retrata um novo subsunçor, uma nova aquisição de conhecimento (MOREIRA, 1999).

- ✓ **Altura do muro da frente da escola**

Após a aula de Teorema de Pitágoras, os alunos decidiram aplicar em algum lugar na prática o assunto abordado, então decidimos aplicar o teorema de Pitágoras para calcular a altura do muro da frente da escola como experimento.

Os materiais utilizados foram:

01(umas) escada

01(um) trena

Os alunos pegaram uma escada que se encontrava na escola e mediram, encontrando o tamanho de 4 metros.

Logo em seguida colocaram a escada encostada na parede formando uma diagonal. O pé da escada, segundo os alunos estava distante da parede 1,5 metros.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos que a parede e o solo são os catetos e que a escada será a hipotenusa.

$a^2 = b^2 + c^2$

$4^2 = 1{,}5^2 + c^2$

$16 = 2{,}25 + c^2$

$16 - 2{,}25 = c^2$

$13{,}75 = c^2$

$c = \sqrt{13{,}75}$

$c \cong 3{,}70$

Temos que a altura da parede que faz parte da frente da escola é de aproximadamente de 3,70 metros.

- ✓ **Comprimento da rampa de acessibilidade**

Após a aula de razões trigonométricas, foi feita sugestões a onde iria ser aplicada a prática, foi decidido que os alunos iriam calcular o comprimento da rampa de acessibilidade que fica em frente à escola.

Para essa atividade os alunos utilizaram:

(01) Uma trena

(01) Um transferidor grande

Os alunos utilizaram a trena para calcular a altura da rampa do ponto mais alto até o solo que possui uma altura de 1, 73 metros. Depois os alunos utilizaram o transferidor para calcular qual o ângulo que fica entre o solo e a rampa, encontrando um ângulo de 37º.

Feito as medidas, os alunos começaram a observar qual das razões trigonométricas poderiam utilizar:

$$sen \propto = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \propto}{medida\ da\ hipotenusa}$$

$$\cos \propto = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \propto}{medida\ da\ hipotenusa}$$

$$tg\ \propto = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \propto}{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \propto}$$

Depois de feita as análises, ficou decidido que eles utilizariam o Seno.

$$sen \propto = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \propto}{medida\ da\ hipotenusa}$$

$$sen\ 37º\ = \frac{1,73}{x}$$

Temos que, segundo a tabela de ângulos fornecida pelo livro didático da escola, o ângulo de 37º equivale 0,601815, então:

$$0,601815 = \frac{1,73}{x}$$

$$0,601815\mathrm{x} = 1,73$$

$$\mathrm{x} = \frac{1,73}{0,601815}$$

$$x \cong 2,88$$

A rampa da escola possui um comprimento de aproximadamente de 2,88 metros.

- ✓ **Altura da igreja são Miguel Arcanjo**

Esta aula prática foi efetivada após as aulas de razões trigonométricas, e teve como objetivo de medir a altura da igreja de São Miguel Arcanjo.

O material para este processo foi:

(01) Um Teodolito

(01) Uma Trena

Mas para este fato ocorrer precisa construir um teodolito caseiro, logo os materiais necessários para construção do teodolito são:

(01) Um transferidor

(01) Um canudo

(01) Uma fita adesiva

(01) Uma tachinha

(01) Uma cola

Para fazer a construção, basta fixar a tachinha com fita adesiva na parte central do transferidor, deixando a tachinha com mobilidade. Pega o canudo depois de passado cola e fixa na tachinha, de tal maneira que o canudo possa se movimentar completamente para ver os ângulos.

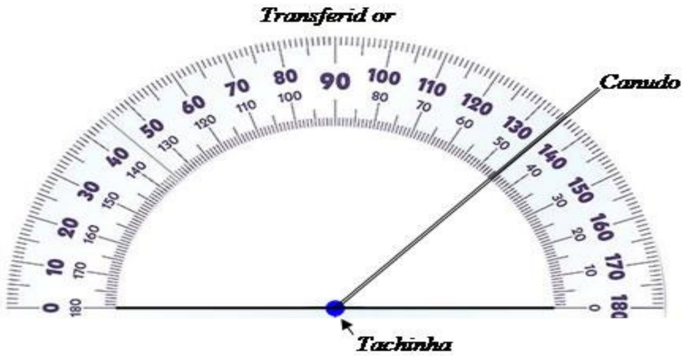


Figura 18 - Representação de um transferidor

Um estudante deslocasse da igreja a uma distância de 10 metros, o mesmo utiliza o teodolito para ver qual o ângulo de visão para o ponto mais da igreja. Após a utilização do teodolito verificou um ângulo de 38º.

Para calcular a altura, será necessária a definição de qual razão trigonométrica que irá ser utilizada:

$$sen \propto = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \propto}{medida\ da\ hipotenusa}$$

$$\cos \propto = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \propto}{medida\ da\ hipotenusa}$$

$$tg\ \propto = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \propto}{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \propto}$$

Depois de feita as análises ficou decidido que eles utilizariam a Tangente. Assim:

$$tg\ \propto = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \propto}{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \propto}$$

$$tg\ 38º = \frac{x}{10}$$

$$tg\ 38º = \frac{x}{10}$$

$$0{,}781286 = \frac{x}{10}$$

$$0{,}781286.\ 10 = x$$

$$x = 7{,}81286$$

Depois mediram a altura do aluno que estava com o teodolito, que é de 1,47 metros. Então somando o valor de $x$ com a altura do aluno, vamos obter a altura da igreja de 9, 28286 metros.

# 5 LIMITAÇÕES PARA O ENSINO

Depois de recolhida as informações foi fundamental levantar a questão dos debates e dos estudos das observações e ações usadas em relação aos estudantes, assim como das informações obtidas no tempo de encontros com os dirigentes administrativos da escola.

Essas análises foram classificadas em tópicos, a compreendê-los: problemas associados ao espaço físico e de objetos; problemas associados à sistema organizacional da escola; problemas derivados dos processos da educação tradicional; problemas derivados dos processos do trabalho docente; por fim, problemas resultantes das capacidades e habilidades dos estudantes.

## 5.1 PROBLEMAS ASSOCIADOS AO ESPAÇO FÍSICO E OBJETOS

A escola, lócus deste estudo, tem uma relevante busca por matrículas e como resultados, apresenta as salas cheias de alunos, em torno de 35 estudantes por classe, de modo que, se o docente decidir trabalhar com tarefas em pequenas equipes, necessitando de que as mesas sejam reorganizadas diferentes das filas em comuns, necessitaria de uma área maior, além da certa quantidade de barulho feito pelas conversas entre os membros das equipes.

Não pode evitar em apontar uma seguinte dificuldade que o educador é capaz enfrentar em um momento similar: a ausência de tempo para ajudar os problemas das equipes. Além da necessidade de ambiente físico para movimento ainda conta a impasse de comunicação com os membros dos grupos pelo tumulto que referimos.

Da mesma maneira, em relação a referência às objeções relacionadas no ambiente físico e de equipamento conseguimos relacionar, a ausência de equipamento disponível no colégio a fim de que o educador realize e produza os recursos educacionais que será utilizada pelos estudantes.

Os objetos disponíveis nos colégios, frequentemente, se resumem em projetor, papel A4, papel pautado, EVA, Cartolina comum, régua de 30cm, grampeador, tesoura, cola branca, cola de isopor e fita adesiva.

Percebemos a ausência de outros utensílios como compasso, transferidor, caixa de som, em suma certo conjunto de equipamento que contribuem para o docente na produção do trabalho com seus educandos.

Alguns dos equipamentos supracitados são comumente achados na escola, mas muitas vezes se encontram danificados ou até mesmo o colégio não possui, apesar de que devesse fazer parte dos equipamentos acessíveis em relação ao quadro educador no suporte de instrumentos educacionais de todo colégio. Se por ventura o docente necessitar de material que não se encontra disponível na escola, o mesmo terá que comprar os equipamentos para pôr em prática seus planos de aula.

A cópia de materiais que serão utilizados em sala, e mais um problema que se forma no espaço físico e material, ainda é continua no cotidiano do professor, pois, todos os dias são necessário material em classe. É bem como, tudo o que irá ser mostrado a partir representa à verdade em comum das escolas do município; a escola possui impressora a jato de tinta, mas disponível apenas para a secretaria da instituição, não sendo a impressora suficiente para reproduzir os materiais para os alunos devido ao alto custo que as impressoras jato de tinta leva para ser recarregada e sem falar que a mesma não consegue trabalhar em larga escala.

Desse modo, as impressões têm que ser realizadas fora do ambiente escolar, os trabalhos tem que ser rodados em copiadoras (Xerox) o que leva tempo e, além disso, os alunos na maioria das vezes tem que pagar o material, o que às vezes os mesmo não tem dinheiro para cobrir os custos que o professor teve para obter as impressões.

Cada uma das observações referidas foi analisada no decorrer da elaboração e realização das ações, de modo que elas foram analisadas em quaisquer das ações do seguimento organizado em uma carga horária de 72 horas aula (8 semanas), contudo, houve algumas atividades propostas em que se observou um pouco mais de dificuldades específicas, dentre elas, destacamos:

1 - No tempo de realizar a prática do exercício de medir o comprimento da rampa, a maior parte dos estudantes não levou o transferidor por conta que não tinha condições de comprar ou não encontraram o material.

2 - Os alunos que trouxeram os transferidores, porém não era o suficiente para a realização da atividade. Mas conseguimos 9 transferidores e distribuir entre as equipes é proporcionar o seguimento do objetivo da atividade proposta.
3 - O material que os alunos tinham levado para a escola como no caso do transferidor não tinha a marcação central.
4 - Ainda foi possível notar que dois dos transferidores estava com erros em suas marcações, sendo inviável usar o centro de marcação.
5 - Para fazer as medidas de sombras, a classe foi transferida para o ambiente fora da escola. Uma vez que a classe é enorme para ser trabalhada em sala, 34 estudantes divididos em dois segmentos.

Dessa maneira, a ação causou a duplicação do período para sua produção e as medidas de sombras acabaram realizadas em um período de 30 minutos. Essa situação atrapalhou um pouco o padrão previsto nas conclusões. Qualquer observação que irá ser feita, nos aponta algumas cautelas e atenção a ser tomado no instante de organização das tarefas similares até então apresentadas, expomos aqui. De início, devem-se verificar totalmente os objetos e todas as ações que irá ser praticada em classe ou ambiente externo. Na situação em que o professor trabalhe com uma classe muito ampla, será capaz de produzir ações paralelas, com a finalidade de dividir a turma em duas partes e que ocupem ambientes diferentes observados por outro docente.

Tendo como exemplo, o educador demanda realizar a mediação na frente da escola. Será capaz de fracionar a turma em duas partes, em que uma metade se direcione para o frente da escola e a outra metade para a biblioteca da escola junto com a sala de informática. Considerando que a turma foi dividida, o docente necessitara produzir uma atividade a se adequar ao ambiente físico em que a classe se encontra.

Tais características fogem ao que propõe a BNCC sobre as competências e habilidades que devem ser estimuladas na sala de aula, pois pensar num ensino de qualidade requer não apenas se pensar no que ensinar, mas em como, e com quais recursos. A aprendizagem para ser significativa conforme Ausubel, idealizou (MOREIRA, 1999) que o indivíduo deve perceber a relação do ensino proposto com os conhecimentos que já adquiriu e para isso necessita de experienciá-los, daí a necessidade de uma boa logística durante o ensino.

## 5.2 PROBLEMAS NO SISTEMA ORGANIZACIONAL DA ESCOLA

Em referência ao sistema organizador da escola, constamos em que se encontram ações que não estavam no planejamento, que param a aula no ato da explicação ou até antes de começar a aula e faz o docente ter que revisar sua aula, para que o seu planejamento seja conforme o esperado. De suma importância este fato, porque, a fim de que o estudante possa adquirir o conhecimento e com o intuito de que o conteúdo venha a ser exposto, é essencial um ótimo planejamento e a regularidade das aulas, sem interrupções.

O prosseguimento das aulas e o entendimento dos conteúdos e sua realização consistem dessa regularidade. Essas paralizações a que foi mencionamos são provocadas por: feriados, dias facultados, jogos escolares e feira de ciência. Essas paralisações que não estavam no planejamento fazem com que o docente venha a expor suas aulas, mas rápidas, precisando ter que alterar algumas partes do seu plano de aula devido ao tempo que fica pouco. As sucessões de ações não pode haver nenhuma falha por falta de alguma parte do conteúdo, pois é relevante ao método de ensino-aprendizagem.

As ações foram organizadas, levando-se em consideração de que o tempo das aulas é de 45 minutos, contudo, ocorreram alguns fatos como imprevistos que interromperam a sequência das aulas, impossibilitando umas quatro aulas, gerando uma consequência de o período da aula ter diminuído devido aos imprevistos.

No começo da realização da aula prática em relação às atividades, notamos que ocorreram algumas ações que interoperam as aulas e atrapalharam a comunicação com a os estudantes. Esse fator atrapalhou um pouco, porque não foi possível informar aos estudantes para levarem os equipamentos essenciais para a realização da atividade como: corda e trena. A maneira vista para solucionar este fato foi com que o docente viesse trazer os equipamentos para o desenvolvimento da aula, para não haver complicações na atividade proposta de medir a altura da torre.

As paralisações ocorreram durante a aplicação da aula teórica e a aula prática em quatro atos: semana da pátria, desfile cívico de 7 de setembro, realização das provas bimestrais e pelo plantão pedagógico para a entrega das provas. Desses quatros atos, o período avaliativo bimestral e o desfile cívico estavam presentes no calendário escolar concedido pela coordenação da escola. Vale ressaltar que, no período da realização das provas, os estudantes vêm para à escola somente para fazer as provas. As outras paralisações como a da semana da pátria vieram a ser informadas no dia da aula e o do plantão pedagógico um dia antes.

Outra dificuldade que as escolas com grande quantidade de alunos como a Ezequiel Lisboa, é que os estudantes se atrasam para entrar em sala aula, como resultados disso, alguns minutos são perdidos por esta ocasião especialmente após o intervalo. O pavilhão é a área ao redor da escola e faz com que os alunos fiquem espalhados e desconcentrados. A esse respeito Couceiro (2015) também defende sobre as condições de trabalho na escola, argumentando que

> A escola e os professores possuem deveres sim, mas os governos também. Infelizmente, é consenso de que os governos não têm cumprido sua obrigação social de assegurar as condições necessárias para prover um ensino de qualidade aos cidadãos (p 28).

Nesse aspecto, a responsabilidade com o ensino é de um coletivo, não se pode, portanto, esperar apenas da sala de aula, ou seja, do trabalho do professor para que os resultados sejam satisfatórios.

## 5.3 PROBLEMAS DERIVADOS DE PROCESSOS HABITUAIS

Essa parte retrata às questões relacionadas a concepções pedagógicas do ensino da Matemática, que em sua maioria segue o modelo da educação tradicional, que até este momento está ainda firme ao processo educacional. No trabalho, foi verificado ao menos dois tipos de ensino divergentes: o ensino tradicional e o ensino Empírico-ativista.

Sobre o método tradicional segundo (D'AMBRÓSIO, 1996; NACARATO, MENGALI; PASSOS, 2009) é o educador quem detém a posse de toda a sabedoria e o estudante é o recipiente aonde o conhecimento será depositado pelo professor.

Já no modo de ensino empírico-ativista (COUCEIRO, 2015) o estudante é o principal protagonista do seu particular desenvolvimento intelectual. O professor é o agente principal da atenção do aluno e começa a ser o intermediário entre este e o objeto de conhecimento, o professor é o mediador e orientador.

Como bem enfatiza Couceiro (2015) sobre a relação da Matemática com o desenvolvimento do pensamento “O desenvolvimento lógico-matemático ocorre quando os conceitos, a linguagem e a simbologia são significados e propiciam o desenvolvimento do raciocínio” (p. 50). Mas, essa interação acontece, sobretudo, através da troca de informações entre professor e estudantes, entre os estudantes na dinâmica de suas experiências.

Desse modo, tanto o ensino tradicional quanto o construtivismo têm condutas morais e políticas divergentes por meio do docente. Entretanto o professor encara algumas questões ao querer dar aulas em que o estudante tenha que aprender fazendo trabalhos e experiências.

A transição do sistema de aulas tradicional no qual o estudante permanece quieto, copiando os exercícios e resolvendo os mesmo de forma repetidamente e em conformidade com uma lição em que os mesmo pretendem ansiosamente resolver questões e realizar descobertas que apresenta uma grande oposição. A classe em aula construtivista é agitada originando uma opinião negativa em pessoas que estão ao redor da sala de aula, algumas pessoas acabam mencionando que não está havendo aula de matemática, devido ao barulho da interação que entre os alunos dentro de sala.

Outrossim, para Fossa (1995), a divergência mais forte entre classes de aula tradicional e construtivista, é que no construtivismo, a Matemática é verdadeiramente adquirida.

## 5.4 PROBLEMAS PROFISSIONAIS DO EDUCADOR

Os problemas dos seguintes padrões do trabalho do professor no decorrer da elaboração das aulas embasadas nas atividades, o docente encara inúmeros desafios. Bem como, a elaboração das atividades que leva um determinado momento do docente, além de várias horas de estudo para a realização da atividade. O docente trabalha em mais de uma escola. Assim, põe um pouco de dificuldade para produção de estudos e para produção de seguimentos das atividades segundo as quais foram apresentas nesse estudo.

Este é o cotidiano de uma grande parte dos docentes tanto do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

O professor quase não tem tempo para elaborar um plano de aula para as atividades e sequer fazer alguma observação das atividades, o docente opta em utilizar o modo de ensino tradicional. Fazer aulas expositivas e atividades de memorização consome menos tempo do que produzir atividades práticas e objetos manipulativos.

O plano das aulas expositivas outrora já está preparado em todos os livros da escola sem demandar tempo do professor. Não se pode ignorar que o docente foi preparado conforme o modelo tradicional, muitos frequentemente presumem que, verdadeiramente o estudante só se aprende com essas aulas expositivas e fixação de atividades para a sua memorização.

Essa falta de tempo implica numa escassez na formação continuada do professor, a considerar que a boa prática depende de uma boa formação, e a boa formação fomentará que o professor se torne um bom pesquisador, como bem enfatiza D'Ambrósio (1996): "Entre teoria e prática persiste uma relação dialética que leva o indivíduo a partir para a prática equipado com uma teoria e a praticar de acordo com essa teoria até a tingir os resultados desejados (p. 79).

Igualmente, o modo de ensino tradicional estabelece ao docente uma atribuição dominante de modo que só ele mesmo é quem sabe e fala; o estudante quase não se manifesta em aula e simplesmente só obedece aos comandos do professor.

Logo, o professor tem um pouco de tempo com as aulas tradicionais para desenvolver o seu cumprimento de carga horária, e isso o coloca numa zona de conforto, de modo que o hábito dessa prática o limita a desenvolver inovações pedagógicas e, consequente, dificultando a melhoria do ensino.

## 5.5 PROBLEMAS DE ORDEM DISCENTE

Nessa parte fica um dos principais momentos do trabalho e teria que ser bem analisado pela classe dos professores enquanto o exercício de educador.

Vale colocar em evidencia que não irá ser abordado todas as dificuldades apresentadas pelos estudantes, apenas pontos relevantes das observações.

Em suma, as dificuldades destacadas foram listadas sendo que já aguardávamos constatar nas observações realizadas: atraso dos estudantes para fazer as tarefas propostas. A atenção tem que está voltada para o tempo de praticar todas as atividades planejadas, como já havia sido evidenciado. No caso em que o docente programa uma sucessão de tarefas, nenhuma pode ser pulada ou esquecida, visto que as tarefas têm esse objetivo de construir o conhecimento do estudante. Esse acontecimento é apenas observado nas aulas a onde tem que ser manipular objetos. Mas também consomem muito tempo para fazer atividades que são inevitáveis como competências para contar, juntar, comparar e separar.

Deste modo, se queremos proporcionar aos estudantes condutas enquanto à: colaboração, compreensão, curiosidades pelas pesquisas e a questão de perguntar por meio de indagações, temos que apresentar e destacar essas condutas em sala de aula. Ainda tem o fato da carência de disposição por parte dos estudantes pelo conhecimento e a ausência de incentivo, o que leva os educandos a fazer as tarefas simplesmente perante aos pontos de vista do educador e além do mais, movidos por pontos que será adicionado na nota final da prova.

Ademais dos problemas pautados anteriormente, conferimos que demasiados alunos vêm de consecutivas frustrações nos seus estudos. Perante essa decorrência, os alunos têm pequeno interesse e coragem para responder os exercícios de matemática oferecidos pelos educadores, em pauta a esses anteriores feitos mal sucedidos

> Para o desenvolvimento das habilidades previstas para o Ensino Fundamental – Anos Finais, é imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas (BRASIL, 2018, p. 298).

Além disso, outros problemas atuam no conjunto de vícios que as tarefas em grupo geram. Alguns estudantes pretendem que o colega de classe faça o dever sozinho, dessa forma, não colaboram e nem sugerem sobre as formas de solucionar a atividade. Nessa perspectiva, nota-se que o estímulo e o interesse são primordiais no ensino.

> Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática (BRASIL, 2018, p. 298).

Desse modo, o interesse é motivado pela diversidade de recursos e metodologias desenvolvidos pelo professor, num processo de experimentação e construção prática dos conhecimentos matemáticos.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A produção deste trabalho foi elaborada com a expectativa de sistematizar uma experiência docente, na perspectiva de melhoramento da prática pedagógica e bom desenvolvimento das competências e habilidades de estudantes do 9ª ano. Durante as aulas na turma foram notadas algumas circunstâncias que provam que o estudo estava na direção certa, no qual foi decidido ministrar aula de trigonometria por meio de atividades práticas. A intenção não foi dar ênfase ao ensino da trigonometria, mas evidenciar alguns elementos que permeiam a prática do ensino na realidade pesquisada.

Assim, depois de realizada algumas experiências, pode-se comparar a turma do 9º B com a turma do 9º A, onde possui quase a mesma quantidade de aluno e quase o mesmo perfil de sala, a aula teórica realizada 9º A foi a mesma realizada no 9º B, é os alunos do 9º B obtiveram uma melhor desempenho durante as atividades, mostrando que desde o momento da aula prática os estudantes tiveram um ótimo rendimento, provando a memorização dos conceitos. Assim, a turma que teve a aula prática ficaram, mas motivados a estudar e as tarefas em sala era realizada de modo rápido.

Afinal, entendendo agora a prática da Educação Matemática, alguns problemas ou desafios básicos em que os docentes enfrentam, uma das maiores dificuldades da docência se constitui no desafio da aprendizagem dos alunos. Entretanto, incumbe ao docente se submeter a uma nova experiência na escola para tentar outro método de ensino. O docente tem inúmeras possibilidades de ensino e o presente trabalho retrata uma experiência docente que aproxima os conhecimentos matemáticos a realidades dos alunos, de modo que há uma conexão entre os conhecimentos já adquiridos socialmente e o construído no processo de ensino, e nesse aspecto considerou estar desenvolvendo a aprendizagem significativa dos estudantes.

Assim, se o professor deseja proporcionar aos estudantes um meio de estimular a estudarem, como o de construir o conhecimento por meio de atividades práticas, o docente tem que estar preparado para todas as dificuldades que irá enfrentar no novo modo de ensino, tendo a certeza de que os mesmos irão aprender a matemática.

O professor tem que ter o cuidado de conhecer a situação dos seus alunos, como ambiente físico da escola, quais os equipamentos a escola têm para dar suporte para determinadas atividades e caso a escola não tenha esse suporte se seus alunos têm os materiais em casa ou condições para os mesmos comprarem. Depois de ter conhecido a situação dos alunos e o ambiente físico da escola, o professor já pode elaborar o material didático adequado para a classe e verificar se o material está realmente adequado para a turma.

Na situação do docente ter que lidar com classes grandes deve-se buscar uma forma de desmembrar a classe para que as atividades aconteçam de modo eficiente. Nesse viés, é irrevogável que o docente explore todas as formas de recursos disponibilizados pela escola, seja pela biblioteca, sala de informática laboratório dentre outras maneiras. Logo, o docente conseguirá executar tarefas extras de tal maneira que a classe ocupe um ambiente disponível pela escola, tendo em vista que já haja alguma atividade elaborada e apropriada para esse espaço.

Outro cuidado que o professor tem que ter é em relação ao calendário pedagógico se a escola possuir. Pois, de acordo com o calendário da escola o docente tem que ficar atento às datas comemorativas e feriados, porque podem quebrar a sequência da aula. O docente tem que exibir o seu o planejamento para a coordenação da escola e para os outros professores, antes de começar a trabalhar o que se pretende, pois, essas situações de aula prática geralmente o espaço físico não é o de sala de aula, mas em um ambiente externo.

Uma importante recomendação é sobre a questão dos materiais que irá ser utilizado nas aulas práticas, sempre é bom socializar com a coordenação pedagógica e com a direção sobre a atividade a ser realizada, para que esses segmentos sejam apoiadores do fazer docente. O professor jamais deve temer o erro pois apenas aprendemos quando presenciamos situações em que não dominamos em sua plenitude. O fazer docente é uma construção contínua.

## REFERÊNCIAS


BIANCHINI, E. **Matemática** – 9ª ed. – São Paulo: Moderna, 2018.

COUCEIRO, K. C. U. dos S. **Metodologia do ensino da matemática**. Curitiba: Fael, 2015. 188 p.

CRESWELL, J. W. W. **Projeto de pesquisa:** métodos qualitativo, quantitativo e misto. 2ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática**: Da Teoria à Prática. 7.ed. Campinas, SP: Papirus, 1996.

FILHO, A. P. **Aula teórica:** quando utilizar? (Ribeirao Preto. Online), v. 40, n. 1, p. 3–6, 2007.

FOSSA, J. A. Hamlet. Antipholus e antipholus: lucrubações pedagógicas sobre a história da matemática. In: **Encontro nacional de educação matemática**, 5ª ed. 1995. Aracajú. Anais... Aracajú: SBEM, 1995. p.281-283.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6ª ed. São Paulo: Atlas, 2008.

LOPES, A. O. Aula expositiva: superando o tradicional. In: VEIGA, lima Passos Alencastro (Org.). **Técnicas de ensino:** por que não? 7ª ed. Campinas: Papirus, 1998.

LOPES, A. R. L. V.; BORBA, M. C. **Tendências em Educação Matemática**. Roteiro, Revista da UNOESC, Joaçaba, Santa Catarina, Brasil, Vol. XVI, nº 32, p. 49-61, jul./dez., 1994.

MOREIRA, A. M. A teoria da Aprendizagem significativa de Ausubel. In: MOREIRA, A. M. **Teorias de Aprendizagem**. EPU: São Paulo, 1999. 165p.

NACARATO, A.; MENGALI, B. L. S.; PASSOS, C. L. B. **A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental**: tecendo fios do ensinar e do aprender. Belo Horizonte: Autêntica, 2009. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

SOUZA, J. R.; PATARO, P. R. M. **Vontade de saber matemática**. 9º ano 3ª ed. São Paulo: FTD, 2015.


**Fontes de imagens:**
https://www.todamateria.com.br/semelhanca-de-triangulos-exercicios/
https://www.gabarite.com.br/dica-concurso/296-relacoes-metricas-no-triangulo-retangulo
https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/construindo-um teodolito.htm