



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE BRAGANÇA
FACULDADE DE MATEMÁTICA

JEFERSON TIAGO DO ROZARIO SILVA

WILLIAMS DE SOUZA DIAS

MATEMÁTICA COMO FATOR DECISIVO NA INVESTIGAÇÃO CRIMINAL

BRAGANÇA-PA

2023

JEFERSON TIAGO DO ROZARIO SILVA

WILLIAMS DE SOUZA DIAS

MATEMÁTICA COMO FATOR DECISIVO NA INVESTIGAÇÃO CRIMINAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Elizardo Fabricio Lima Lucena.

Co-Orientador: Prof. Me. Nelson Ned Nascimento Lacerda.

BRAGANÇA-PA

2023

JEFERSON TIAGO DO ROZARIO SILVA

WILLIAMS DE SOUZA DIAS

MATEMÁTICA COMO FATOR DECISIVO NA INVESTIGAÇÃO CRIMINAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática.

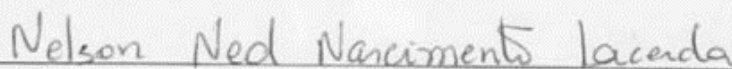
APROVADO EM: 23/06/2023

BANCA EXAMINADORA



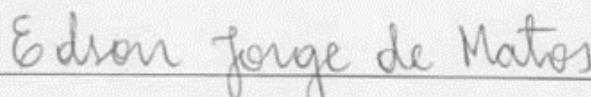
Prof. Dr. Elizardo Fabrício Lima Lucena Lucena

Orientador- UFPA



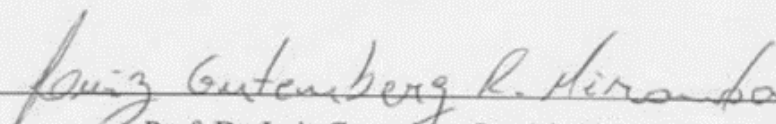
Prof. Me. Nelson Ned Nascimento Lacerda

Co-orientador – UFPA



Prof. Dr. Edson Jorge de Matos

Examinador Interno- UFPA



Prof. Dr. Luiz Gutemberg Rosário Miranda

Examinador Interno- UFPA

Dedicamos este trabalho aos nossos pais, pelo incentivo, aos nossos amigos pela ajuda e aos nossos professores do curso, pela colaboração, para que isso se tornasse possível.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos inicialmente a Deus pela vida, e por nos conceder este momento tão importante, além de nos sustentar e nos dar forças para que a cada dia possamos vencer nossos desafios.

Agradecemos a Universidade Federal do Pará pela oportunidade ímpar de estudar nesta tão conceituada instituição, e por compartilhar seus conhecimentos com excelência, por nos capacitar e nos preparar para o mercado de trabalho.

Agradecemos ao orientador deste trabalho, Prof. Dr. Elizardo Fabrício Lima Lucena, por sua acolhida, apoio e luz em momentos de desânimo, sua ajuda e colaboração foram pilares importantes para sustentação e conclusão deste trabalho.

Somos gratos ao professor Me. Nelson Ned Nascimento Lacerda, por sua ajuda em momentos obscuros, por momentos de motivações e pela sua colaboração como co-orientador deste Trabalho por sua organização de ideias.

Agradecemos a Faculdade de Matemática FAMAT e seus professores que fazem parte desta, por nos acolher e conceder a oportunidade de fazer parte desta respeitada instituição. Em especial aos professores, Carlos Alessandro Da Costa Baldez, Edson Jorge de Matos e ao professor Luiz Gutemberg Rosário, por seu tratamento acolhedor, por sua humildade, e pela amizade com seus alunos

Agradecimento na pessoa de Williams de Souza Dias. Agradeço a Eliana Borges de Sousa, minha querida mãe, por me apoiar e por sempre acreditar que este momento se concretizaria; à Guilherme de Oliveira Dias, meu pai, que fez sacrifícios além de suas forças para me proporcionar o que de melhor existia dentro de suas possibilidades; à minha companheira Jhessica Thainá da Costa Silva por me apoiar sem reservas nos momentos de dificuldade; à Ingrid de Souza Dias, minha irmã que sempre me apoiou; à José Márcio de Araújo Melo amigo e irmão de longa data e que trilhou comigo essa jornada; à Jeferson Tiago do Rozario Silva amigo que sempre esteve presente nas horas difíceis e que fez parte desse trabalho de conclusão.

Aos colegas e amigos de curso das turmas: Augusto Corrêa 2016 e Bragança 2016 da UFPA- Campus Bragança por me proporcionarem momentos ímpares de alegria, conforto e aprendizagem, momentos que levarei para a vida toda.

Agradecimento na pessoa de Jeferson Tiago do Rozario Silva. Sou grato a Maria de Jesus Campelo do Rozario por me proporcionar a vida e pelos seus inúmeros sacrifícios, conselhos e incentivos, agradeço a Joel Sousa da Silva, meu querido pai por me ajudar de forma

de forma direta e indireta nesta caminhada, agradeço a Emanuelle Maria Oliveira Macedo, minha namorada, por estar comigo nos momentos difíceis de muitas dificuldades e provas, por sempre acreditar em mim, e por sempre me dar ânimo no momentos que precisei, Agradeço Ao meu grande amigo Williams de Souza Dias, pelas ajudas durante as minhas dificuldades neste curso, por muitas vezes me sustentar nos estudos e pela amizades que fizemos durante todos esses momentos reunidos, muito obrigado pela confiança e por ter acreditado neste projeto e por fazer parte dele.

A todos que de alguma maneira auxiliaram em minha formação acadêmica e propiciaram aporte para a elaboração deste trabalho, nossos mais sinceros agradecimentos.

“A imaginação é mais importante que o conhecimento. O conhecimento é limitado, enquanto a imaginação abraça o mundo inteiro, estimulando o progresso, e dando origem à evolução.”

(Albert Einstein)

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo promover estudos acerca da aplicação matemática na investigação criminal, haja vista que investigação criminal é um assunto que engloba várias ciências e representa um importante papel para a sociedade. A investigação criminal relacionada a matemática pode promover estudos em diversos campos, como em crimes de lavagem de dinheiro, crimes cibernéticos e crimes como balísticas entre outros. Em relação à matemática aplicada na investigação criminal, podemos destacar as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) que são utilizadas em diversos campos de aplicações. Podemos ainda destacar a Lei de Resfriamento de corpos que foi pioneira neste campo de pesquisa. Portanto com este trabalho pretendemos destacar a aplicação matemática em assuntos que desperte o interesse em aprender matemática de uma forma mais prazerosa e interessante.

Palavras-chaves: Investigação Criminal. Lei de resfriamento de corpos. Equações diferenciais Ordinárias. Aplicações em EDO.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Campo de direções da EDO para $k > 0$	22
Figura 2 - Decaimento da temperatura	27

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Horário de medições e temperatura do corpo	25
---	----

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	11
1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM	13
1.1 Classificação pelo Tipo	13
1.2 Classificação pela Ordem	14
1.3 Classificação Como Linear e Não-Linear	15
1.4 Solução para uma Equação Diferencial	15
2 EDO E A LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON	18
2.1 ISAAC NEWTON	18
2.2 VARIÁVEIS SEPARÁVEIS – SOLUÇÕES DE EDO	18
2.3 LEI DE RESFRIAMENTO DE CORPOS	20
3 A PERÍCIA CRIMINAL E A LEI RESFRIAMENTO DE CORPOS NA SOLUÇÃO DE CRIMES	24
3.1 Perícia Criminal	24
3.2 Aplicação da Lei de Resfriamento de Corpos.	25
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	29

INTRODUÇÃO

A matemática está inserida em diversos campos de estudo, compreendê-la muitas vezes pode se tornar uma tarefa difícil em vários casos, uma das estratégias que nos ajudam a acelerar o entendimento desta disciplina é a aplicação delas em casos que fazem com que seu estudo fique mais prazeroso e se torne mais interessante.

Na verdade, aprender matemática não é tarefa fácil, mas é preciso inovar o ensino mostrando cada vez mais a importância dessa área do conhecimento no dia-dia. Com isso, o aluno tende a ser um sujeito crítico e participativo para que o processo de ensino e aprendizagem possa fluir naturalmente. (SANTOS; FRANÇA; SANTOS, 2007. p.13)

Dentre os vários casos que podemos encontrar aplicações matemáticas, temos a investigação criminal, que é um dos ramos mais usados pelos órgãos de segurança pública do planeta, o ramo da investigação criminal está em constante desenvolvimento, e vem sendo cada vez mais conhecido em filmes e series de ficção científica pela mídia.

Como este assunto trabalha com a interdisciplinaridade, podemos destacar a química, física e a matemática como ferramentas chaves que quase sempre são recorrentes para definir importante conclusão e decisões, para identificar gotas de sangue, substancias ilícitas, balística, a medida de um cadáver, o ângulo de um tiro, a medida de um ferimento, a área de uma mancha de sangue, banco de dados de digitais e de genética, algoritmos e criptografias são importantes fatores que sem eles seria quase que impossível concluir a maioria dos casos.

Existem casos de homicídios que muitas vezes não são o que parece ser, como por exemplo: A polícia é chamada para uma ocorrência, chegando lá se depara com um cadáver jogado no meio de uma pista asfaltada, até então tudo parece ser um atropelamento, mas quando este cadáver é estudado de perto, são encontradas hematomas em seu pescoço, ferimentos padrões e que levam a polícia a conclusão de que ao invés de ser um acidente de transito se trata mesmo de um corpo que foi assassinado por estrangulamento e jogado no meio desta rodovia.

E estas conclusões só são possíveis através de anos de estudo nesta área. Assuntos relacionados a Medicina, Biologia, física e Matemática, ajudam a polícia a pensar em outras possíveis trajetórias, e dessa forma chegar aos verdadeiros culpadas.

Em relação à matemática aplicada na investigação criminal, podemos destacar as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) que são utilizadas em diversos campos de aplicações.

Podemos ainda destacar a Lei de Resfriamento de corpos que foi pioneira neste campo de pesquisa.

Portanto o objetivo deste trabalho é mostrar aplicações de Equações Diferenciais Ordinárias. Em particular, a Lei De Resfriamento de corpos nas investigações criminais, questões que com este contexto teve relevância e puderam ser decisivos para conclusão de investigações, e que puderam apontar um eventual suspeito em crimes.

Durante o desenvolvimento deste trabalho, fizemos pesquisas em dois ramos, pesquisas bibliográficas disponíveis na internet no site google acadêmico, sobre medicina legal, ciência forense, investigação criminal, casos de crimes que aconteceram onde foi percebido o uso de cálculos simples de matemática. Dentre estes assuntos pesquisados identificamos casos que peritos e policiais puderam relacionar e inserir a matemática para a solução de crimes. Onde a matemática pode ser um fator que mudou o rumo das investigações.

Pesquisamos livros na biblioteca de matemática sobre resfriamento de Newton, e chegamos à conclusão em mostrar uma aplicação de cálculos de resfriamento de Newton.

Neste trabalho mostraremos noções de Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem, e mostraremos sua aplicação em uma questão contextualizada sobre investigação criminal.

1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

A definição de **Equação Diferencial** é dita como uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes.

Equações diferenciais são classificadas de acordo com o **tipo**, a **ordem** e a **linearidade**. A seguir iremos mostrar algumas definições, aplicações e teoremas de EDO, para isso foi utilizado como bibliografia os livros **Equações Diferenciais Aplicadas**, autores Djairo G. de Figueiredo e Aloisio Freiria Neves; **Equações Diferenciais - Volume, 1**, autores Dennis G. Zill, Michael R. Cullen.

1.1 Classificação pelo Tipo

Se uma equação contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável dependente, ela é chamada de **Equação Diferencial Ordinária (EDO)**. Por exemplo, as equações:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} - 5y &= 1 \\ (y - x)dx + 4xdy &= 0 \\ \frac{du}{dx} - dvdx &= x \\ \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 6y &= 0\end{aligned}$$

São equações diferenciais ordinárias. Uma equação que envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é chamada de **Equação Diferencial Parcial (EDP)**. Por exemplo, as equações:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dy} &= -\frac{dv}{dx} \\ x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} &= u \\ \frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{d^2u}{dt^2} - 2\frac{du}{dt}\end{aligned}$$

São equações diferenciais parciais.

1.2 Classificação pela Ordem

A ordem da derivada de maior ordem em uma equação diferencial é. Por definição, a ordem da equação. Por exemplo,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

É uma equação diferencial ordinária de segunda ordem (ou de ordem dois). Como a equação diferencial $(y - x)dx + 4xdy = 0$ pode ser escrita na forma

$$4x \frac{dy}{dx} + y = x$$

Dividindo -se pela diferencial dx, trata-se então de uma diferencial ordinária de primeira ordem. A equação

$$a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

É uma equação diferencial parcial de quarta ordem.

Embora as equações diferenciais parciais sejam muito importantes, seu estudo demanda um bom conhecimento de teoria de equações diferenciais ordinárias. Portanto, na discussão que se segue, limitaremos nossa atenção as equações diferenciais ordinárias.

Uma equação diferencial ordinária geral de n-ésima ordem é frequentemente representada pelo simbolismo

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

1.3 Classificação Como Linear e Não-Linear

Uma equação diferencial é chamada de linear quando pode ser escrita na forma

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

Observe que as equações diferenciais lineares são caracterizadas por duas propriedades:

- (i) A variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau: isto é, a potência de cada termo envolvendo y é 1.
- (ii) Cada coeficiente depende apenas da variável independente x .

Uma equação que não é linear é chamada de **não-linear**.

As equações

$$\begin{aligned} x \, dy + y \, dx &= 0 \\ y'' - 2y' + y &= 0 \quad \text{e} \\ x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} - x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + 5y &= e^x \end{aligned}$$

São equações diferenciais ordinárias de primeira, segunda e terceira ordens, respectivamente.

1.4 Solução para uma Equação Diferencial

A definição de solução para uma equação diferencial é dada como. Qualquer função f definida em algum intervalo I , que, quando substituída na equação diferencial, reduz a equação a uma identidade, é chamada de solução para a equação no intervalo.

Em outras palavras, uma solução para uma equação diferencial ordinária

$$F(x, y, y', \dots, y^n) = 0 \tag{1}$$

É uma função f que possui pelo menos n derivadas e satisfaz a equação; isto é,

$$F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0 \quad (1.1)$$

para todo x no intervalo I . Dependendo do contexto da discussão. I pode representar um intervalo aberto (a, b) , um intervalo fechado $[a, b]$, um intervalo infinito $(0, \infty)$ e assim por diante.

A seguir algumas aplicações de Equação Diferencial Ordinária (EDO)

1.) Verifique que $y = \frac{x^4}{16}$ é uma solução para a equação não – linear.

$$\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$$

no intervalo $(-\infty, \infty)$.

Solução:

Uma maneira de comprovar se uma dada função é uma solução é escrever a equação diferencial como $\frac{dy}{dx} - xy^{\frac{1}{2}} = 0$ e verificar, após a substituição, se a diferença acima $\frac{dy}{dx} - xy^{\frac{1}{2}}$ é zero para todo x no intervalo. Usando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3}{16} = \frac{x^3}{4} \quad e \quad y^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{x^4}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{4}$$

Percebemos que

$$\frac{dy}{dx} - xy^{\frac{1}{2}} = \frac{x^3}{4} - x \left(\frac{x^4}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{4} = 0$$

Para todo número real.

2.) A função $y = xe^x$ é uma solução para a equação linear.

$$y'' - 2y' + y = 0$$

no intervalo $(-\infty, \infty)$. Para verificar isso, calculamos

$$y' = xe^x + e^x \quad \text{e} \quad y'' = xe^x + 2e^x$$

Observe

$$y'' - 2y' + y = (xe^x + 2e^x) - 2(xe^x + e^x) + xe^x = 0$$

Para todo número real.

Note que, nos Exemplos 1 e 2, a função constante $y = 0$ também satisfaz a equação diferencial dada para todo x real. Uma solução para uma equação diferencial que é identicamente nula em um intervalo I é em geral referida como **solução trivial**.

3.) Verifica-se que:

$$\begin{aligned} y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad y = c_1 e^x, \\ y = c_2 e^{-x} \quad \text{e} \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \end{aligned}$$

São todas soluções da equação diferencial linear de segunda ordem

$$y'' - y = 0.$$

Note que $y = c_1 e^x$ é uma solução para qualquer escolha de c_1 . Mas $y = e^x + c_1, c_1 \neq 0$, não satisfaz a equação, pois, para essa família de funções, temos

$$y'' - y = -c_1$$

2 EDO E A LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON

Neste capítulo mostraremos uma breve biografia de Isaac Newton, além disso veremos o método de solução por variável separável, e também sobre a lei de resfriamento de corpos, aonde saberemos quais as conclusões que Newton teve para a criação deste estudo e definiremos a lei de resfriamento de corpos.

2.1 ISAAC NEWTON

Isaac Newton nasceu em Londres, no ano de 1643. Astrônomo, cientista, físico, filósofo, químico, mecânico e matemático, trabalhou junto com Leibniz na elaboração do cálculo infinitesimal. Durante sua trajetória, ele descobriu várias leis da física, dentre suas contribuições, podemos destacar a lei fundamental da gravitação, e os métodos de cálculos diferencial e integral.

Dentre muitas de suas realizações escreveu e publicou obras que contribuíram significativamente com a matemática e com a Física. Além disso, escreveu também sobre Química, Alquimia, cronologia e Teologia. Nesta última área, chegou a analisar profecias bíblicas, em especial sobre o Livro de Daniel e o último livro da Bíblia: Apocalipse. Newton tinha um grande interesse pela Escatologia e o tema do fim do mundo. Devido a sua modéstia, não foi fácil convencê-lo a escrever o livro *Principia*, considerado uma das obras científicas mais importantes do mundo.

Newton tinha um temperamento tranquilo e era uma pessoa bastante modesta. Ele se dedicava muito ao seu trabalho e muitas vezes deixava até de se alimentar e também de dormir por causa disso. Além de todas as descobertas que ele fez, acredita-se que ocorreram muitas outras que não foram anotadas.

Faleceu em 31 de março de 1727, aos 84 anos, após uma vida de grandes descobertas e realizações.

2.2 VARIÁVEIS SEPARÁVEIS – SOLUÇÕES DE EDO

Se $g(x)$ é uma função contínua dada, então a equação de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \quad (I)$$

Pode ser resolvida por integração. A solução para a equação (I) é:

$$y = \int g(x) dx + c$$

Definição de Equação Separável.

Uma equação diferencial é chamada separável ou tem variáveis separáveis. Quando ela é da forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

Observe que uma equação separável pode ser escrita como

$$h(y) \frac{dy}{dx} = g(x) \quad (II)$$

É fácil ver que (II) se reduz a (I) quando $h(y) = 1$.

Mas, se $y = f(x)$ denota uma solução para (II), temos

$$h(f(x))f'(x) = g(x)$$

Logo,

$$\int h(f(x))f'(x) dx = \int g(x)dx + c \quad (III)$$

Sabemos que $dy = f'(x)dx$, portanto (III) é o mesmo que

$$\int h(y) dy = \int g(x)dx + c \quad (IV)$$

Método de Solução

A equação (IV) indica o procedimento de resolução para equações diferenciais separáveis. Uma solução, em geral é obtida integrando ambos os lados de $h(y)dy = g(x) dx$.

A seguir mostraremos uma solução de variável separável, resolvendo o Exemplo (1) a seguir:

Exemplo (1): Resolva $(1 + x)dy - ydx = 0$

Solução: Temos que $(1 + x)dy - ydx = 0$ e o mesmo que

$$(1 + x)dy = ydx$$

Agora dividindo por $(1 + x)y$ a equação, segue que

$$\frac{(1 + x)dy}{(1 + x)y} = \frac{ydx}{(1 + x)y}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1 + x}$$

Integrando, vem que

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1 + x}$$

$$\ln(y) = \ln(1 + x) + c_1$$

$$e^{\ln(y)} = e^{\ln(1+x)+c_1}$$

$$y = e^{\ln(1+x)} e^{c_1}$$

onde $e^{c_1} = c$, portanto:

$$y = (1 + x)c$$

Vale ressaltar que este não é o único método de solução para Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's), existe vários outros, dentre eles destacamos: Soluções para Equações Homogêneas, Exatas, Lineares, de Bernoulli, de Ricatti, de Clairaut, e o Método de Picard. Uma das referências que o leitor pode usar para encontrar esses métodos é o capítulo 2, do livro Equações Diferenciais - Volume 1, autores Dennis G. Zill, Michael R. Cullen.

2.3 LEI DE RESFRIAMENTO DE CORPOS

Segundo os autores Zill e Culler (2001), com a empírica lei de resfriamento de newton, a taxa de resfriamento de um corpo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo (T) e a temperatura do meio ambiente (T_a).

A frase acima é uma descrição verbal de uma equação diferencial. Antes de tomar um café, geralmente esperamos um pouco até que o líquido esfrie. Uma xícara de café fica quase intragável se esfriar até chegar à temperatura ambiente.

O método criado por Newton para a determinação de variação de temperatura, foi de grande importância tanto como método matemático a ser estudado e usado como base para outras aplicações, como o estudo da resistência de certos materiais quanto ao resfriamento.

Para compreendermos a lei de resfriamento de Newton usaremos como base o artigo (COSTA, 2018)

Para compreendermos melhor a fórmula criada por Newton precisamos conhecer um fenômeno conhecido como: Equilíbrio térmico, sendo este um dos principais conceitos da termodinâmica.

Assim, quando um corpo com temperatura T é exposto em um ambiente com temperatura T_0 e levando em consideração que $T \neq T_0$ o corpo irá entrar em equilíbrio térmico com o ambiente, em outras palavras o calor será transferido de onde a temperatura é maior para uma temperatura menor.

Newton observou que um corpo quente tem sua temperatura diminuída com o passar do tempo e não perdendo contato pelo calor, assim pelo princípio de conservação de energia que o equilíbrio térmico com o ambiente só é possível porque o calor que é retirado do corpo é levado pelo vento. Diante disto, é possível verificar que algumas variáveis nas quais as taxas de resfriamento dependem são:

- A diferença entre a temperatura do corpo e do ambiente
- A superfície ao qual o corpo está sendo exposto
- O calor específico
- As condições do ambiente
- E o tempo de contato entre o corpo e o meio externo

As variáveis citadas acima permitiram a Newton a representação de uma Equação Diferencial que se estabeleceu da seguinte maneira:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \quad (2.1)$$

Onde, T é a temperatura do corpo no instante t dado em graus Celsius, t o tempo de contato entre o corpo e o ambiente, sendo este dado em segundos, T_a é a temperatura do

ambiente dada em Celsius e k a constante de proporcionalidade que irá depender da superfície, do material e do calor específico que o corpo é constituído.

Ao analisarmos a equação, observamos que a constante k aparece com o sinal de negativo, isto sugere que existe um processo de resfriamento, ou seja, a temperatura do corpo diminui com o passar do tempo. Sabemos que a lei de resfriamento de um corpo trata-se de uma EDO separável, assim ela se representa da seguinte forma:

$$\frac{1}{T - T_a} \frac{dT}{dt} = -k \quad (2.2)$$

Integrando (2.2) em relação ao tempo, temos:

$$\ln(T - T_a) = -kt + k_0 \quad (2.3)$$

Assim, aplicando a função exponencial em (2.3)

$$T - T_a = e^{kt} e^{k_0} \quad (2.4)$$

E, substituindo e^{k_0} pela constante C , assim, a solução da EDO na equação (2.1), será definida na equação:

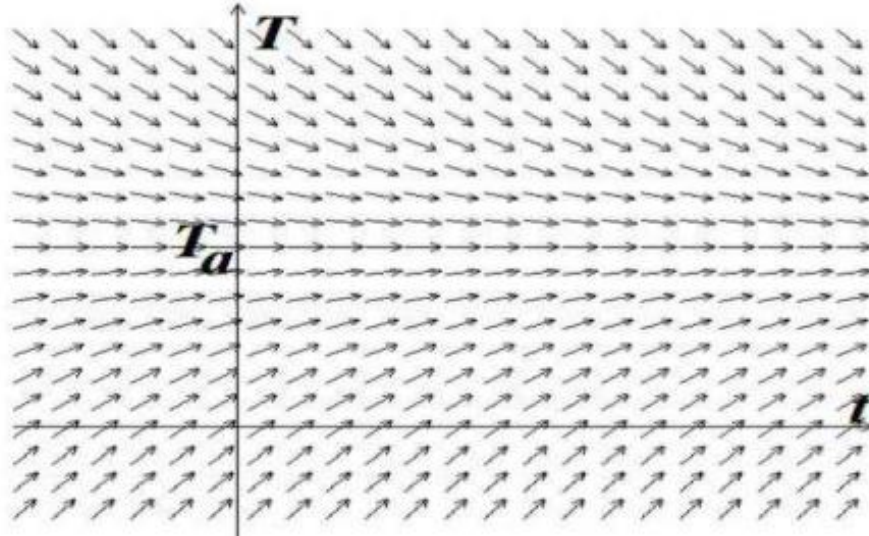
$$T(t) = T_a + C e^{-kt} \quad (2.5)$$

Considerando que a temperatura inicial do corpo $T(0) = T_0$. A equação (2.5) ficará do tipo:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a) e^{-kt} \quad (2.6)$$

A equação (2.6) é a solução geral de Equação Diferencial Ordinária (2.2). Assim, se $k > 0$ a solução (2.6) converge para T_a . Se $k < 0$ então (2.6) diverge.

Figura 1 - Campo de direções da EDO para $k > 0$.



Fonte: Maria de Fátima Carvalho Costa (2018 apud BARIVIERA et al 2017)

Tal aplicação se torna possível devido a mecanismos bioquímicos que são mantidos em nosso corpo a uma temperatura constante de aproximadamente $36,5^{\circ}\text{C}$. Quando ocorre o óbito, estes mecanismos deixam de funcionar e, então, a temperatura do corpo começa a diminuir da mesma forma que uma xícara de café esfria depois de servido. Assim, é possível determinar a hora aproximada de óbito de uma pessoa através de um modelo matemático de Equação Diferencial Ordinária aplicada na Lei de Variação de Temperatura de Newton. (SILVA, 2010, p. 51).

3 A PERÍCIA CRIMINAL E A LEI RESFRIAMENTO DE CORPOS NA SOLUÇÃO DE CRIMES

Neste capítulo conheceremos o trabalho do perito criminal na cena do crime, aprenderemos sua atuação e conheceremos o que é a investigação criminal, qual a sua importância e quando ela foi criada no Brasil, e quando Izaac Newton usou pela primeira vez a lei de resfriamento de corpos.

3.1 Perícia Criminal

Perito criminal é o profissional que atua na área da investigação criminal, e busca evidenciar algum vestígio específico na cena do crime, antes de qualquer coisa é necessário isolar o local do crime com a fita de isolamento.

Homicídios, crimes ambientais, acidentes de trânsito essas são algumas das situações em que o perito criminal atua.

É com base na análise desses profissionais que o poder judiciário consegue ter entendimento da cena do crime.

O trabalho do perito criminal é como se fosse os olhos dos juizes na cena do crime. Este profissional colhe todas as evidencias possíveis e preserva o local da cena do crime, para que auxilie de alguma forma o juiz que está fazendo o julgamento do processo criminal para que assim o mesmo possa tirar suas próprias conclusões e tome a melhor decisão, baseados nas informações coletadas

Os materiais utilizados como ferramentas cruciais do perito são luzes forenses, cada uma emite um espectro de cor para poder mostrar ou evidenciar algum vestígio específico, cada luz ou cor evidencia um material que queremos encontrar, seja uma mancha de sangue, mancha de urina ou de sêmen, luvas, fitas métricas, termômetros, câmeras e óculos.

Em 1701, quando tinha quase 60 anos, Newton publicou anonimamente um artigo intitulado “Scala Graduum Caloris” [Newton 1701], em que descreve um método para medir temperaturas de até 1000°C, algo impossível aos termômetros da época. (SOUZA, 2007)

Mas vale ressaltar que este método nos dias de hoje é raramente utilizado pois existem uma série de fatores que devemos observar, como a corrente do vento, e a própria temperatura do corpo que está sendo examinado, e dependendo dessas questões os resultados da aplicação da lei de resfriamento de Newton nos mostra somente resultados aproximados.

3.2 Aplicação da Lei de Resfriamento de Corpos.

Este trabalho tomará como exemplo dois artigos que mostram a aplicação da Lei de Resfriamento de Corpos em questões envolvendo Perícia Criminal.

Silva (2010) mostra que, suponhamos que o corpo de uma vítima de assassinato foi encontrado às 22 horas. Às 22h e 30min o perito criminal chegou e imediatamente tomou a temperatura do cadáver, que era de $32,5^{\circ}\text{C}$. Uma hora mais tarde, tomou a temperatura outra vez e encontrou $31,5^{\circ}\text{C}$. A temperatura do ambiente foi mantida constante a $16,5^{\circ}\text{C}$. Devemos admitir também que a temperatura normal de uma pessoa viva seja, aproximadamente, de $36,5^{\circ}\text{C}$. É possível determinar a hora aproximada em que essa pessoa veio a óbito?

Os valores atribuídos neste exemplo são meramente ilustrativos.

Tabela 1 - Horário de medições e temperatura do corpo

Horário das Medições	Temperatura do Corpo
Hora de Óbito?	$T=36,5^{\circ}\text{C}$
22h30min	$T=32,5^{\circ}\text{C}$
23h30min	$T=31,5^{\circ}\text{C}$

Fonte: Da Silva (2010)

Tomamos os seguintes parâmetros:

T - A temperatura do corpo

T_a - A temperatura do ambiente

Tomaremos como tempo inicial a primeira medição da temperatura $T_0 = 32,5^{\circ}$ quando $t=0$, então,

$$T_a = 16,5^{\circ}$$

$$T(0) = 32,5^{\circ} \text{ (tempo em que o perito efetuou a 1ª medição da temperatura)}$$

$$T(1) = 31,5^{\circ} \text{ (tempo em que o perito efetuou a 2ª medição da temperatura)}$$

Como vimos, a função que determina a temperatura aproximada de um corpo em relação ao tempo é dada por:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt} \quad (3.1)$$

$$T(t) = 16,5 + (32,5 - 16,5)e^{-kt}$$

$$T(t) = 16,5 + 16.e^{-kt} \quad (3.2)$$

Assim, no Instante em que $t = 1$, temos:

$$T(1) = 16,5 + 16.e^{-k.1}$$

$$31,5 = 16,5 + 16.e^{-k}$$

$$31,5 - 16,5 = 16.e^{-k}$$

$$16e^{-k} = 15$$

$$e^{-k} = \frac{15}{16} \quad (3.3)$$

Resolvendo a equação exponencial (3.3), temos que,

$$\ln e^{-k} = \ln\left(\frac{15}{16}\right)$$

$$-k = \ln\left(\frac{15}{16}\right) \quad (3.4)$$

Multiplicando (-1) em (3.4) em ambos os lados, segue

$$k = -\ln\left(\frac{15}{16}\right)$$

$$k = -(\ln(15) - \ln(16))$$

$$k \cong 0,0645385.$$

Assim, para determinar o horário em que o indivíduo veio a óbito, substituímos $T = 36,5^\circ\text{C}$ e $k \cong 0,0645385$ na equação (3.2):

$$T(t) = 16,5 + 16.e^{-kt}$$

$$36,5 = 16,5 + 16.e^{-0,0645385t}$$

$$36,5 - 16,5 = 16.e^{-0,0645385t}$$

$$16.e^{-0,0645385t} = 20$$

$$e^{-0,0645385t} = \frac{20}{16} \quad (3.5)$$

Resolvendo a equação exponencial (3.5), tem-se

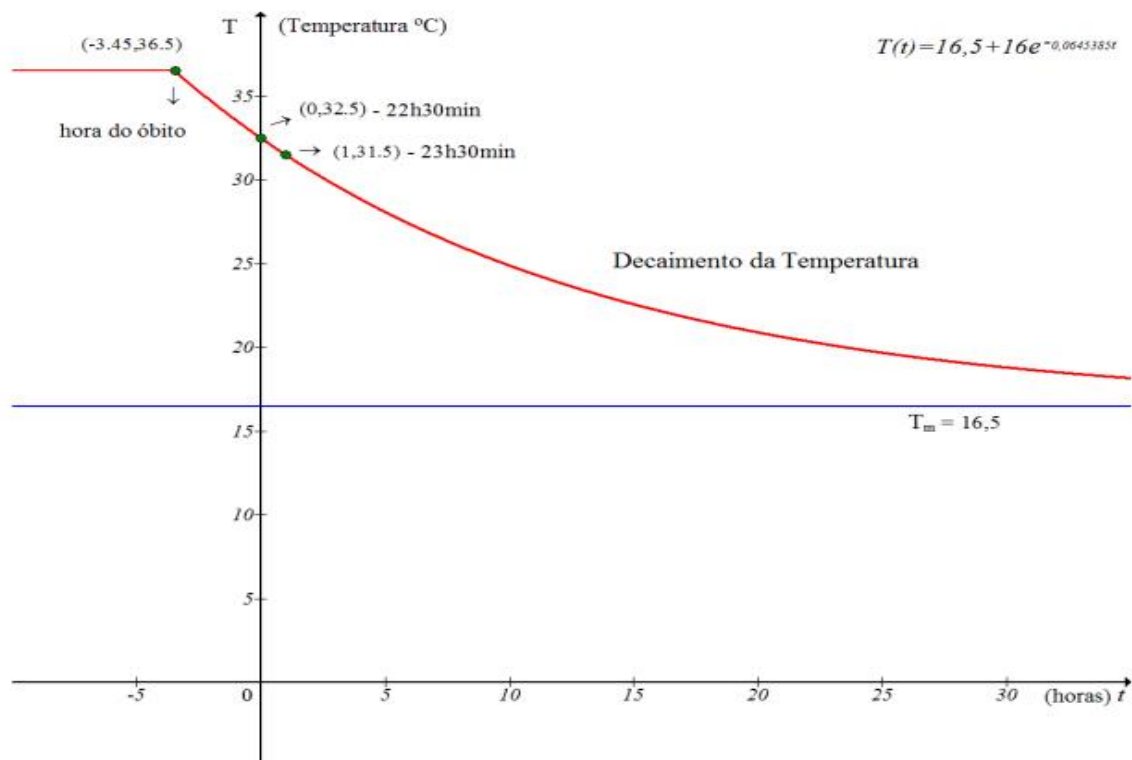
$$\begin{aligned} \ln e^{-0,0645385t} &= \ln\left(\frac{20}{16}\right) \\ -0,0645385t &= \ln(20) - \ln(16) \\ t &\cong \frac{\ln(20) - \ln(16)}{-0,0645385} \\ &\cong -3,4575 \text{ horas ou } -3\text{h}:27\text{min.} \end{aligned}$$

Sendo que o perito tomou a primeira temperatura do corpo às 22h30min, conclui-se que esse corpo veio a óbito 3h27min atrás. Logo, a hora aproximada do óbito ocorreu por volta das 19h03min.

O gráfico a seguir (figura 1) mostra o decaimento de temperatura do corpo a partir da função obtida, onde o eixo vertical representa a temperatura do corpo, o eixo horizontal o tempo em horas.

Considerando que a temperatura no instante do óbito estava em torno de 36,5°C, e a origem como o tempo em que o perito executou a 1ª medição de temperatura.

Figura 2 – Decaimento da temperatura



Fonte: Da Silva (2010)

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Espera-se que este trabalho possa contribuir com os estudos da aplicação matemática onde proporcione mais estudos sobre esta área, e que possa servir de exemplo, para trabalhos futuros. Ser professor é uma profissão que precisa ser constantemente reciclada e reinventada, por isso acreditamos que o professor de matemática, deve sempre buscar qualificação profissional para si, estudar e saber sempre mais sobre os assuntos que ministra, para assim poder atender e prestar um serviço de ensino de alto grau de qualidade para a sociedade em que vive. Pensando nisso este trabalho buscou ajudar na formação e entendimento no que diz respeito a Equações Diferenciais de 1º Ordem, com definições e exemplos. Para esse trabalho usamos a famosa Lei de Resfriamento de um Corpo com exemplos em criminologia assim alcançando o objetivo desta obra. Concluimos este trabalho com a expectativa que este gere frutos no que diz respeito ao melhoramento do processo de ensino-aprendizagem da matemática das escolas públicas assim como o mesmo pode servir de ponto de partida para futuros trabalhos. Vale ressaltar que a relação da matemática na investigação criminal é um tema muito robusto, e esperamos que daqui para a frente outras pessoas que acharem um trabalho como este interessante possam conduzi-lo abordando mais temas, como estatística na investigação criminal, crimes financeiros descobertos através da matemática entre outros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

COSTA, M. F. C. **O estudo da lei de resfriamento de corpos através das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem**. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande- UFCG, Cuité-PB, 2018.

FIGUEIREDO, D. G; NEVES, A. F. **Equações Diferenciais Aplicadas**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA- Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2018

SANTOS, J. A.; FRANÇA, K. V.; DOS SANTOS, L. S. B. **Dificuldades na Aprendizagem de Matemática**. 2007. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Centro Universitário Adventista de São Paulo, São Paulo, 2007.

SUAPESQUISA.COM. **Biografia de Isaac Newton**. Disponível em: <<https://www.suapesquisa.com/biografias/isaacnewton/>>. Acesso em: 22 Mai. 2023.

SILVA, J. S. F. Sobre o problema da variação de temperatura de um corpo. **CONNECTION LINE - Revista Eletrônica da UNIVAG**, v. 0, n. 5, p. 44-55, 2010.

SOUZA, R. O. **A perícia criminal no Brasil – Explicação histórica, legislativa e a função do perito**. 2011. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Química) – Universidade de Brasília, Brasília – DF, 2011.

ZILL, D.G; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais – Volume 1**. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.