



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ABAETETUBA  
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FLÁVIO RUAN CONCEIÇÃO DA TRINDADE

**TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS:** aplicações sobre  
funções reais contínuas em intervalos limitados e fechados

ABAETETUBA-PA

2024

FLÁVIO RUAN CONCEIÇÃO DA TRINDADE

**TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS:** aplicações sobre  
funções reais contínuas em intervalos limitados e fechados

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Faculdade de Ciência Exatas e Tecnologia do Campus Universitário de Abaetetuba, da Universidade Federal do Pará, como requisito obrigatório para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Dra. Suellen Cristina Queiroz

Arruda

ABAETETUBA-PA

2024

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD  
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará  
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

---

T832t Trindade, Flávio Ruan Conceição da.  
Teorema de Bolzano-Weierstrass : aplicações sobre funções  
reais contínuas em intervalos limitados e fechados / Flávio Ruan  
Conceição da Trindade. — 2024.  
57 f. : il. color.

Orientador(a): Prof<sup>ª</sup>. Dra. Suellen Cristina Queiroz Arruda  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade  
Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Curso de  
Matemática, Abaetetuba, 2024.

1. Teorema de Bolzano-Weierstrass. 2. Sequências. 3.  
Funções contínuas. I. Título.

CDD 515

---

FLÁVIO RUAN CONCEIÇÃO DA TRINDADE


**TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS:** aplicações sobre  
funções reais contínuas em intervalos limitados e fechados

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia do Campus Universitário de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará - UFPA, Pólo Universitário de Barcarena, como requisito obrigatório para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Data da aprovação: 06 de março de 2024

Conceito: Excelente (E)


**Banca Examinadora:**

Documento assinado digitalmente  
 SUELLEN CRISTINA QUEIROZ ARRUDA  
Data: 08/03/2024 12:44:44-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup>. Suellen Cristina Queiroz Arruda


Orientadora - FACET/CABAE/UFPA

Documento assinado digitalmente  
 MANOEL JEREMIAS DOS SANTOS  
Data: 11/03/2024 10:14:55-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Manoel Jeremias dos Santos

Membro Interno - FACET/CABAE/UFPA

Documento assinado digitalmente  
 DALMI GAMA DOS SANTOS  
Data: 08/03/2024 16:47:48-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Dalmi Gama dos Santos Membro

Externo - FAMAT/CUNTINS/UFPA

A Deus, por me conduzir até esse momento,  
e à minha família por todo apoio, amor e  
carinho.

# *AGRADECIMENTOS*

---

Primeiramente, quero expressar minha profunda gratidão a Deus, a fonte inesgotável de possibilidades e realizações. Às duas mulheres extraordinárias que iluminam meu caminho: minha mãe, Nazaré Monteiro, e minha amada companheira, Ana Beatriz. Cada momento ao lado de vocês é um presente que aquece meu coração, nas alegrias e nas adversidades. Seus sábios conselhos e apoio incansável são o que me mantêm firme e me fazem seguir a diante.

Quero estender meu reconhecimento caloroso aos amigos da minha jornada acadêmica, por todas as vivências compartilhadas. Nossa cumplicidade nos estudos, a ajuda mútua incansável e os momentos de descontração formam um tesouro de lembranças que levarei comigo. David, Jow, Marlon, Roni, Cris, Clê, Dulci, Lí e Maria, por tudo o que passamos juntos, desejo que cada um de vocês trilhe um caminho repleto de realizações e conquistas excepcionais. Estarei torcendo por vocês!

Gostaria de agradecer também a minha orientadora, Prof<sup>a</sup>. Suellen Arruda, por todo apoio, dedicação e paciência. Sei que não fui um dos seus melhores alunos, mas com certeza você foi a melhor professora que tive. E a todos os professores que iluminaram meu caminho com conhecimento, sou grato além das palavras.

Não posso deixar de agradecer aos amigos e familiares que, com amor inabalável, estiveram ao meu lado durante toda esta jornada. Compreenderam minha dedicação e me impulsionaram, mesmo nos momentos em que minha presença era escassa. Seu apoio inabalável e incentivo constante são tesouros que carregarei para sempre em meu coração. Obrigado, por tudo!

Renda-se, como eu me rendi. Mergulhe no que você não conhece como eu mergulhei. Não se preocupe em entender, viver ultrapassa qualquer entendimento (Clarice Lispector).

# *RESUMO*

---

O Teorema de Bolzano-Weierstrass se constitui como uma das mais importantes ferramentas da Análise Matemática ao estabelecer uma relação entre as propriedades de sequências limitadas e a existência de subsequências convergentes. O presente trabalho tem por objetivo demonstrar o Teorema de Bolzano-Weierstrass e apresentar duas de suas aplicações sobre funções reais contínuas definidas em intervalos limitados e fechados. A aplicação do teorema em questão reforça a sua relevância no estudo de funções contínuas e proporciona aprofundamento teórico na área.

**Palavras-chave:** Teorema de Bolzano-Weierstrass; Sequências; Funções contínuas.

# *ABSTRACT*

---

The Bolzano-Weierstrass theorem is one of the most important tools of mathematical analysis in establishing a relationship between the properties of limited sequences and the existence of convergent subsequences. The present work aims to demonstrate the Bolzano-Weierstrass theorem and to present two of its applications on continuous real functions defined in limited and closed intervals. The application of the theorem in question reinforces its relevance in the study of continuous functions and provides theoretical reflection in the area.

**Keywords:** Bolzano-Weierstrass Theorem; Sequences; Continuous functions.

# LISTA DE FIGURAS

---

1.1	Representação do triângulo retângulo isósceles. . . . .	18
2.1	Representação da sequência $(u_n)$ . . . . .	25
2.2	Representação da sequência $(v_n)$ . . . . .	25
2.3	Representação da sequência $(a_n)$ . . . . .	25
2.4	Representação da sequência $(b_n)$ . . . . .	26
2.5	Interpretação da Definição 2.2. . . . .	27
2.6	Representação da sequência dada no Exemplo 2.9 . . . . .	31
2.7	Construção da subsequência $(x_{n_k})$ . . . . .	36
3.1	Gráfico da $f$ do Exemplo 3.9. . . . .	46
3.2	Gráfico da $f$ do Exemplo 3.10. . . . .	48
3.3	Gráfico da $f$ do Exemplo 3.11. . . . .	49
3.4	Gráfico da $f$ do Exemplo 3.12 . . . . .	49
3.5	Gráfico da $f$ do Exemplo 3.13. . . . .	50
3.6	Gráfico da $f$ do Exemplo 3.14. . . . .	52
3.7	Gráfico da $g$ do Exemplo 3.15 . . . . .	53

# SUMÁRIO

---

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>1 OS NÚMEROS REAIS</b>	<b>13</b>
1.1 Axiomas de corpo e corpo ordenado . . . . .	13
1.2 Supremo e ínfimo . . . . .	16
1.3 Corpo ordenado completo . . . . .	18
1.4 Intervalos e valor absoluto . . . . .	22
<b>2 O TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS</b>	<b>24</b>
2.1 Sequências numéricas e convergência . . . . .	24
2.2 Prova do Teorema de Bolzano-Weierstrass . . . . .	34
<b>3 APLICAÇÕES DO TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS</b>	<b>37</b>
3.1 Funções reais e limite . . . . .	37
3.2 Funções contínuas . . . . .	45
3.3 Aplicação 1: Teorema de Weierstrass . . . . .	50
3.4 Aplicação 2: Teorema da Continuidade Uniforme . . . . .	54
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>56</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>57</b>

# INTRODUÇÃO

---

Nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral, algumas noções são abordadas de forma intuitiva e geral, sem certo rigor e precisão. Ao estudo mais aprofundado e formal dos números reais e das funções reais damos o nome de Análise Real.

Um dos principais objetivos da Análise Real é formalizar a teoria da continuidade de funções, em termos de definições e teoremas. Formalmente, uma função  $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita *contínua* em um ponto  $a \in X$  se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Equivalentemente, a continuidade de funções pode ser expressa em termos de sequências da seguinte forma: Uma função  $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é *contínua* no ponto  $a \in X$  se, para qualquer sequência  $(x_n)$  em  $X$  que converge para  $a$ , a sequência  $(f(x_n))$  converge para  $f(a)$ . Neste contexto, um dos resultados mais importantes é o *Teorema de Bolzano-Weierstrass*, o qual garante condições de convergência para sequências limitadas de números reais.

O Teorema de Bolzano-Weierstrass é chamado assim em homenagem a dois ilustres matemáticos: Bernard Bolzano (1781-1848) e Karl Weierstrass (1815-1897). O teorema, tal como é conhecido atualmente, foi desenvolvido por meio da combinação dos resultados e contribuições desses dois matemáticos ao longo do tempo. A ênfase de Weierstrass na rigorização e formalização da Matemática contribuiu para o estabelecimento do teorema em questão em sua forma mais abrangente, que é ensinada e aplicada na Análise Matemática e em outros campos da Matemática até hoje.

O presente trabalho propõe-se a demonstrar o Teorema de Bolzano-Weierstrass e apresentar duas de suas aplicações sobre funções reais contínuas definidas em intervalo limitados e fechados, a saber, Teorema de Weierstrass e Teorema da Continuidade Uniforme. Para alcançar este objetivo, o trabalho foi organizado em três capítulos: o capítulo 1 será dedicado ao estudo do conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais como corpo ordenado completo, estabelecendo essencialmente a Propriedade do Supremo; o capítulo 2 destina-se ao estudo sobre convergência de sequências a fim de demonstrar o Teorema de Bolzano-Weierstrass. Por fim, o capítulo 3 se debruça sobre a teoria de limite e continuidade para aplicar o Teorema de Bolzano-Weierstrass sobre funções contínuas definidas em intervalos limitados e fechados.

---

# OS NÚMEROS REAIS

---

Este capítulo concentra-se no conjunto dos números reais, denotado por  $\mathbb{R}$ , que constitui a base fundamental da Análise Matemática. Vários fatos elementares a respeito dos números reais são admitidos como axiomas, os quais não necessitam de demonstração, no entanto, a partir deles é possível deduzir certas consequências, que são provadas como teoremas.

É importante esclarecer que todas as propriedades dos números reais decorrem diretamente dos seus axiomas. Estes, por sua vez, apresentam o conjunto dos números reais como um *corpo ordenado completo*.

## 1.1 Axiomas de corpo e corpo ordenado

Nesta seção, apresentaremos as definições de *corpo* e *corpo ordenado*. Para um estudo mais abrangente sobre a teoria de corpos, sugere-se consultar, de preferência, livros que tratam de estruturas algébricas, como, por exemplo, a referência [2].

**Definição 1.1.** *Um corpo é um conjunto não vazio  $\mathbb{K}$  munido de duas operações, chamadas de adição (+) e multiplicação ( $\cdot$ ), que satisfazem certas propriedades, chamadas os axiomas de corpo.*

*A adição faz corresponder a cada par de elementos  $x, y \in \mathbb{K}$  sua soma  $x + y \in \mathbb{K}$ ,*

enquanto a multiplicação associa a esses elementos o seu produto  $x.y \in \mathbb{K}$ . As operações de adição e multiplicação em  $\mathbb{K}$  gozam dos seguintes axiomas:

- (1) *Associatividade:* Para quaisquer  $x, y, z \in \mathbb{K}$ , tem-se  $x + (y + z) = (x + y) + z$  e  $x.(y.z) = (x.y).z$ .
- (2) *Comutatividade:* Para quaisquer  $x, y \in \mathbb{K}$ , tem-se  $x + y = y + x$  e  $x.y = y.x$ .
- (3) *Existência de elemento neutro da adição:* Existe  $0 \in \mathbb{K}$  tal que  $x + 0 = x$ , para todo  $x \in \mathbb{K}$ . O elemento  $0$  é chamado de zero.
- (4) *Existência de simétrico:* Para todo  $x \in \mathbb{K}$ , existe um elemento em  $-\mathbb{K}$  tal que  $x + (-x) = 0$ .
- (5) *Existência de elemento neutro da multiplicação:* Existe  $1 \in \mathbb{K}$ , chamado de unidade, tal que  $1 \neq 0$  e  $x.1 = x$ , para qualquer  $x \in \mathbb{K}$ .
- (6) *Existência de inverso multiplicativo:* Para todo  $x \neq 0$  em  $\mathbb{K}$ , existe  $x^{-1} \in \mathbb{K}$  tal que  $x.x^{-1} = 1$ .
- (7) *Distributividade:* Para todo  $x, y, z \in \mathbb{K}$ , tem-se  $x.(y + z) = x.y + x.z$  e  $(y + z).x = y.x + z.x$ .

**Exemplo 1.1.** É imediato que o conjunto  $\mathbb{Q}$  é um corpo, pois goza de todas as propriedades citadas acima. Porém,  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{N}$  não são corpos.

**Definição 1.2.** Um corpo  $\mathbb{K}$  é dito corpo ordenado se contiver um subconjunto  $P \subset \mathbb{K}$ , denominado conjunto dos elementos positivos de  $\mathbb{K}$ , com as seguintes condições:

- (C1) Para todo  $x, y \in P$ , tem-se  $x + y \in P$  e  $x.y \in P$ ;
- (C2) Dado  $x \in \mathbb{K}$ , apenas uma das seguintes possibilidades ocorre:

$$\text{ou } x = 0, \text{ ou } x \in P, \text{ ou } -x \in P.$$

Ao designar por  $-P$  o conjunto dos elementos  $-x$ , onde  $x \in P$ , temos que  $\mathbb{K} = P \cup (-P) \cup \{0\}$ , sendo os conjuntos  $P$ ,  $-P$  e  $\{0\}$  dois a dois disjuntos.

**Exemplo 1.2.** *O conjunto  $\mathbb{Q}$  dos racionais é um corpo ordenado, onde  $P$  é o formado pelos números racionais positivos.*

Em um corpo ordenado  $\mathbb{K}$ , podemos definir uma ordem entre os seus elementos da seguinte maneira:

$$x < y \text{ (lê-se: } x \text{ é menor que } y\text{) se } y - x \in P,$$

ou seja,

$$x < y \text{ se } y = x + z, \text{ com } z \in P.$$

De maneira análoga,

$$x > y \text{ (lê-se: } x \text{ é maior que } y\text{) se } x - y \in P.$$

A relação de ordem  $<$  em um corpo ordenado  $\mathbb{K}$  satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) *Transitividade:* Se  $x < y$  e  $y < z$ , então  $x < z$ ;
- (ii) *Tricotomia:* Para quaisquer  $x, y \in \mathbb{K}$ , ocorre exatamente uma das possibilidades:  $x < y$  ou  $x = y$  ou  $x > y$ ;
- (iii) *Motonicidade da adição:* Se  $x < y$  então  $x + z < y + z$ , para todo  $z \in \mathbb{K}$ ;
- (iv) *Motonicidade da multiplicação:* Se  $x < y$  então  $x.z < y.z$ , para todo  $z > 0$ .  
Agora, se  $z < 0$  então  $x < y$  implica  $x.z > y.z$ .

As demonstrações das propriedades acima podem ser consultadas em [6].

## 1.2 Supremo e ínfimo

Nesta seção, estudaremos os conceitos de supremo e ínfimo de um conjunto. Para isso, veremos antes as definições de conjuntos limitados superiormente e inferiormente em um corpo ordenado.

**Definição 1.3.** *Sejam  $\mathbb{K}$  um corpo ordenado e  $A$  um subconjunto de  $\mathbb{K}$ . Diz-se que  $A$  é limitado superiormente se existe  $b \in \mathbb{K}$  tal que  $b \geq x$ , para todo  $x \in A$ . Neste caso, dizemos que  $b$  é uma cota superior de  $A$ . Analogamente,  $A \subset \mathbb{K}$  diz-se limitado inferiormente se existe  $a \in \mathbb{K}$  tal que  $a \leq x$ , para todo  $x \in A$ . Neste caso, diz-se que  $a$  é uma cota inferior de  $A$ .*

*Se o conjunto for limitado tanto superiormente quanto inferiormente, então podemos simplesmente afirmar que ele é limitado.*

**Exemplo 1.3.** *No corpo ordenado  $\mathbb{Q}$  dos números racionais, o conjunto  $\mathbb{N}$  não é limitado superiormente, mas é limitado inferiormente por 0. Por outro lado, o conjunto  $\mathbb{Z}$  dos números inteiros não é limitado superiormente e nem inferiormente.*

Em um conjunto limitado superiormente (inferiormente) não há uma única cota superior (inferior), podem haver várias cotas superiores (inferiores).

**Exemplo 1.4.** *Seja  $A = \{x \in \mathbb{Q}; x \leq 2\} \subset \mathbb{Q}$ . Temos que  $\frac{5}{2}$  é cota superior de  $A$ , pois,  $\frac{5}{2} \in \mathbb{Q}$  e é maior que todos os elementos de  $A$ . Mas, o número 2 também é uma cota superior para esse conjunto. Portanto,  $\frac{5}{2}$  e 2 são cotas superiores para  $A$ .*

A definição subsequente introduz o conceito de *supremo* de um conjunto, que corresponde a menor de suas cotas superiores, caso exista.

**Definição 1.4.** *Sejam  $\mathbb{K}$  um corpo ordenado e  $A$  um subconjunto de  $\mathbb{K}$ . Diz-se que  $b \in \mathbb{K}$  é o supremo de  $A$ , escreve-se  $b = \sup A$ , se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i)  $b \geq x$ , para todo  $x \in A$ ;

(ii) Dado  $\varepsilon > 0$  qualquer, existe  $x \in A$  tal que  $b - \varepsilon < x$ .

A condição (i) estabelece que  $b$  é uma cota superior para o conjunto  $A$ , enquanto (ii) afirma que não existe nenhuma cota superior menor do que esta. Portanto,  $b$  é a menor das cotas superiores possíveis para o conjunto  $A$ .

**Exemplo 1.5.** Considere o subconjunto  $A = \{y \in \mathbb{Q}; 0 < y < 1\}$  do corpo ordenado  $\mathbb{Q}$ . Note que, todo número racional  $x \geq 1$  é uma cota superior para  $A$  e  $\sup A = 1$ . Evidentemente, se definirmos  $B = \{y \in \mathbb{Q}; 0 \leq y \leq 1\}$ , tem-se que  $\sup B = 1$ .

Por esse exemplo, observamos que o supremo de um conjunto, quando existe, pode pertencer ou não ao conjunto.

De modo análogo, a definição a seguir traz o conceito de *ínfimo* de um conjunto, que é definido como a maior de suas cotas inferiores, caso exista.

**Definição 1.5.** Sejam  $\mathbb{K}$  um corpo ordenado e  $A$  um subconjunto de  $\mathbb{K}$ . Diz-se que  $a \in \mathbb{K}$  é o *ínfimo* de  $A$ , escreve-se  $a = \inf A$ , se as seguintes condições são satisfeitas:

(i)  $a \leq x$ , para todo  $x \in A$ ;

(ii) Dado  $\varepsilon > 0$  qualquer, existe  $x \in A$  tal que  $x < a + \varepsilon$ .

**Exemplo 1.6.** Considere novamente os subconjuntos  $A = \{y \in \mathbb{Q}; 0 < y < 1\}$  e  $B = \{y \in \mathbb{Q}; 0 \leq y \leq 1\}$  do corpo ordenado  $\mathbb{Q}$ , dados no Exemplo 1.5. Observe que  $\inf A = \inf B = 0$ . Da mesma maneira que ocorre para o supremo, o *ínfimo* de um conjunto, quando existe, pode ou não pertencer ao conjunto.

O próximo resultado trata da unicidade do supremo em um conjunto.

**Proposição 1.1.** O supremo de um conjunto, quando existe, é único.

**Demonstração.** Seja  $A$  um subconjunto de um corpo ordenado  $\mathbb{R}$ , com  $A \neq \emptyset$  e limitado superiormente. Suponhamos que tanto  $b$  quanto  $c$  sejam supremos de  $A$ , ou seja,  $b = \sup A$  e  $c = \sup A$ . Vamos mostrar que  $b$  e  $c$  devem ser iguais. De fato, como

$b$  é cota superior e  $c$  é supremo de  $A$ , da Definição 1.4, segue que  $c \leq b$ . Por outro lado, se  $c$  é cota superior e  $b$  é supremo de  $a$ , obtemos  $b \leq c$ . Por tricotomia, tem-se que  $c = b$ .  $\square$

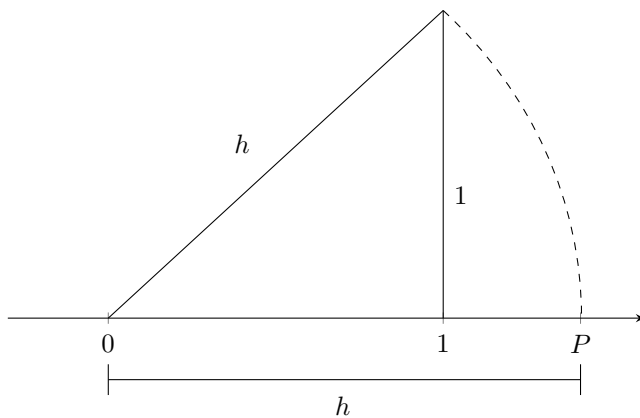
De modo análogo, provamos que o ínfimo de um conjunto, quando existe, é único.

### 1.3 Corpo ordenado completo

Em relação ao corpo ordenado  $\mathbb{Q}$ , um fato que deve ser dito é que cada número racional corresponde a um único ponto sobre a reta numérica. Porém, a recíproca não é verdadeira, ou seja, não é verdade que todo ponto da reta numérica esteja associado a um número racional.

Ainda na Grécia Antiga, os matemáticos da Escola Pitagórica descobriram que a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles, com catetos de medida igual a 1, não correspondia a um número racional.

Figura 1.1: Representação do triângulo retângulo isósceles.



Fonte: Autoria própria, 2024.

O lema a seguir traduz a descoberta dos estudiosos da Escola Pitagórica, cuja demonstração pode ser consultada nas referências [1] e [6].

**Lema 1.1.** *Não existe um número racional cujo quadrado seja igual a 2 (Em outras palavras,  $\sqrt{2}$  não é racional).*

Na Análise Matemática, a inexistência de raízes quadradas racionais de certos números inteiros mostra uma insuficiência do corpo ordenado  $\mathbb{Q}$ , que é a seguinte: “existem conjuntos limitados de números racionais que não possuem supremo (ou ínfimo)”. Vamos esclarecer este ponto com o exemplo a seguir:

**Exemplo 1.7.** *O subconjunto dos racionais dado por  $X = \{x \in \mathbb{Q}; x > 0 \text{ e } x^2 > 2\}$  não possui ínfimo em  $\mathbb{Q}$ . Com efeito, seja  $Y$  o conjunto auxiliar dado por*

$$Y = \{x \in \mathbb{Q}; x > 0 \text{ e } x^2 < 2\}.$$

*Como já observamos no lema 1.1, temos que não existe  $r \in \mathbb{Q}$  tal que  $r^2 = 2$ . Logo, dado  $r \in \mathbb{Q}^+$ , segue que  $r \in X$  ou  $r \in Y$ . Temos, pois, dois fatos a verificar:*

(1) *Se  $x \in X$ , então existe  $y \in X$  tal que  $y < x$ .*

(2) *Se  $x \in Y$ , então existe  $y \in Y$  tal que  $x < y$ .*

*Faremos a prova do fato (1), visto que (2) segue análogo. Assim, como  $x \in X$ , donde  $x = \frac{p}{q}$ , com  $p, q \in \mathbb{N}$ . Então  $\left(\frac{p}{q}\right)^2 > 2$ , ou seja,  $p^2 - 2q^2 > 0$ . Tome  $y = \frac{np-1}{nq}$ , com  $n \in \mathbb{N}$ . Afirmamos que para  $n$  suficientemente grande teremos  $y \in X$ . De fato,*

$$\begin{aligned} y \in X &\iff \left(\frac{np-1}{nq}\right)^2 > 2 &\iff (p^2 - 2q^2)n^2 - 2pn + 1 > 0 \\ & &\iff n > \frac{p+q}{\sqrt{2p^2-2q^2}} > \frac{p}{\sqrt{2p^2-2q^2}}. \end{aligned}$$

*Ou seja, basta tomar  $n > \frac{p}{\sqrt{2p^2-2q^2}}$  para que  $y = \frac{np-1}{nq} \in X$ . Assim,  $y \in X$  é tal que*

$$y = \frac{np-1}{nq} = \frac{np}{nq} - \frac{1}{nq} < \frac{np}{nq} = \frac{p}{q} = x.$$

Em outras palavras,  $y < x$ , e então vale o fato (1). Agora, suponha, por absurdo, que exista  $x_0 = \inf X$ . Então,  $x_0 \leq x, \forall x \in X$ . Pelo fato (1), segue que  $x_0 \notin X$ . Então,  $x_0 \in Y$ , e pelo fato (2), existirá  $z \in Y$  tal que  $z^2 < 2$  e então  $z$  é uma cota inferior para  $X$ , um absurdo! Portanto, não existe  $\inf X$ , embora  $X$  seja limitado inferiormente.

Corpos ordenados que não possuem essa mesma insuficiência dos números racionais  $\mathbb{Q}$  são chamados *completos*. Mais precisamente:

**Definição 1.6.** *Um corpo ordenado  $\mathbb{K}$  chama-se completo quando todo subconjunto não-vazio de  $\mathbb{K}$  limitado superiormente possui supremo em  $\mathbb{K}$ .*

Em virtude da não-completeza do conjunto  $\mathbb{Q}$ , faz-se necessário construir um conjunto numérico, cujos elementos estejam em correspondência biunívoca com os pontos da reta numérica. O conjunto que soluciona esta problemática é o corpo dos números reais, o qual é denotado por  $\mathbb{R}$ .

A construção de tal corpo é bastante técnica e foge do objetivo central deste trabalho. Dessa forma, definiremos o conjunto dos números reais por meio do axioma fundamental na Análise Matemática, conhecido também como *Propriedade do Supremo*:

**Axioma 1.1** (Propriedade do Supremo). *Existe um corpo ordenado completo  $\mathbb{R}$ , chamado corpo dos números reais, com  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ , tal que todo subconjunto não-vazio de  $\mathbb{R}$  limitado superiormente possui supremo em  $\mathbb{R}$ .*

A seguir algumas aplicações clássicas da Propriedade do Supremo:

**Proposição 1.2.** *Todo subconjunto não vazio de  $\mathbb{R}$ , limitado inferiormente, possui ínfimo.*

**Demonstração.** Sejam  $A \subset \mathbb{R}$  um conjunto limitado inferiormente e  $a$  uma cota inferior de  $A$ . Assim,  $a \leq x$ , para todo  $x \in A$ , e daí  $-a \geq -x$ , para todo  $x \in A$ . Designando por  $-A$  o conjunto

$$-A = \{-x; x \in A\},$$

observa-se, em virtude de  $-a \geq -x$ , que  $-A$  é limitado superiormente. Pela Propriedade do Supremo 1.1,  $-A$  possui supremo. Mostremos que

$$\sup(-A) = -\inf A.$$

De fato, chamando  $\alpha = \sup(-A)$ , teremos  $\alpha \geq -x$ , para todo  $x \in A$  e daí  $-\alpha \leq x$ , para todo  $x \in A$ , o que implica que  $-\alpha$  é cota inferior do conjunto  $A$ . Deve-se mostrar que ela é a maior de suas cotas inferiores. Seja  $\beta$  uma cota inferior de  $A$ , isto é,  $\beta \leq x$ , para todo  $x \in A$ . Logo,  $-\beta \geq -x$  e assim  $-\beta$  é cota superior do conjunto  $-A$  e pela definição de supremo  $-\beta \geq \alpha$  e então  $\beta \leq -\alpha$ , isto é,  $-\alpha$  é a maior das cotas inferiores de  $A$ . Portanto, todo subconjunto não vazio de  $\mathbb{R}$ , limitado inferiormente, possui ínfimo.  $\square$

**Proposição 1.3.** *O conjunto dos números naturais,  $\mathbb{N}$ , não é limitado superiormente.*

**Demonstração.** Suponhamos, por contradição, que o conjunto  $\mathbb{N}$  seja limitado superiormente. Pelo axioma 1.1,  $\mathbb{N}$  possui supremo, digamos  $\alpha$ , e assim,  $n \leq \alpha$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . O conjunto dos naturais possui a propriedade de que se  $n \in \mathbb{N}$  então  $n+1 \in \mathbb{N}$ , o que acarreta  $n+1 \leq \alpha$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Daí,  $n \leq \alpha - 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Esta última desigualdade nos diz que  $\alpha - 1$  é cota superior de  $\mathbb{N}$ , o que é contradição, pois  $\alpha$  é o supremo de  $\mathbb{N}$ . Portanto, temos que  $\mathbb{N}$  não é limitado superiormente.  $\square$

**Proposição 1.4.** *(Propriedade Arquimediana) Dados  $a, b \in \mathbb{R}$ , com  $0 < a < b$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $na > b$ .*

**Demonstração.** Suponhamos, por contradição, que  $na \leq b$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Isto implica que o conjunto  $A = \{na; n \in \mathbb{N}\}$  é limitado superiormente (pois  $b$  é uma de suas cotas superiores). Pelo axioma 1.1,  $A$  possui supremo, digamos  $\alpha$ . Assim,  $na \leq \alpha$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , donde  $(n+1)a \leq \alpha$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , de modo que  $na \leq \alpha - a$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $a > 0$ ,  $\alpha - a$  seria cota superior de  $A$ , menor que o seu supremo  $\alpha$ , o que é impossível. Então, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $na > b$ .  $\square$

É conveniente mencionar que *todo corpo ordenado completo é arquimediano*, no entanto, a recíproca dessa afirmação não vale, pois o corpo dos racionais  $\mathbb{Q}$  é arquimediano, mas não é um corpo ordenado completo.

Devido à garantia de que, para qualquer número real positivo, há sempre um número natural  $n$  que o supera, a Proposição 1.4 desempenha um papel essencial em nosso estudo. Isso se torna fundamental na construção de seqüências convergentes e nas demonstrações que realizaremos futuramente.

## 1.4 Intervalos e valor absoluto

Dados  $a, b \in \mathbb{R}$ , com  $x < y$ , chama-se *intervalo* qualquer um dos seguintes conjuntos abaixo:

1.  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$  (intervalo fechado);
2.  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$  (intervalo aberto);
3.  $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$  (intervalo fechado à direita);
4.  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$  (intervalo fechado à esquerda);
5.  $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$  (semirreta fechada à esquerda);
6.  $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$  (semirreta aberta à esquerda);
7.  $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$  (semirreta fechada à direita);
8.  $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$  (semirreta aberta à direita);
9.  $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$  (reta real).

Os quatro primeiros intervalos são intervalos limitados. Os demais são ilimitados.

O *valor absoluto ou módulo* de um número real  $x$ , indicado por  $|x|$ , é definido da seguinte maneira:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Geometricamente, o valor absoluto de  $x$  representa a distância de  $x$  até a origem da reta real.

Uma outra forma de definir o valor absoluto de um número real  $x$  é

$$|x| = \max\{-x, x\}.$$

Temos então:  $|x| \geq x$  e  $|x| \geq -x$ , o que implica em  $-|x| \leq x \leq |x|$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

A demonstração do teorema a seguir decorre diretamente da definição de valor absoluto.

**Teorema 1.1.** *Sejam  $x, a \in \mathbb{R}$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $-a \leq x \leq a$ ;
- (ii)  $x \leq a$  e  $-x \leq a$ ;
- (iii)  $|a| \leq a$ .

O próximo teorema apresenta as propriedades fundamentais sobre valor absoluto, cujas demonstrações podem ser consultadas em [3] e [6]

**Teorema 1.2.** *Para quaisquer  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , valem as seguintes propriedades:*

- (i)  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (*Desigualdade triangular*);
- (ii)  $|xy| = |x||y|$ ;
- (iii)  $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|$ ;
- (iv)  $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$ .

---

# O TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS

---

Ao longo deste capítulo, exploraremos o conceito de seqüências de números reais e suas propriedades mais elementares, com o intuito de estudar bases necessárias para a demonstração do Teorema de Bolzano Weierstrass, que é conhecido por estabelecer uma propriedade essencial das seqüências limitadas.

## 2.1 Sequências numéricas e convergência

Nesta seção, vamos estudar uma classe especial de funções reais, chamada *seqüências reais*, dando ênfase às questões de convergência.

**Definição 2.1.** *Uma seqüência de números reais é uma função  $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa a cada número natural  $n$  um número real  $x_n$ , chamado o  $n$ -ésimo termo ou termo geral da seqüência.*

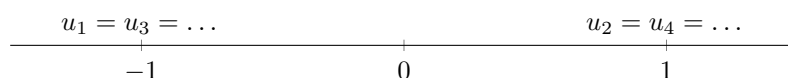
*Utilizaremos a notação  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  ou simplesmente  $(x_n)$  para representar uma seqüência de números reais. Enquanto que a notação  $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$  será usada para denotar o conjunto dos termos dessa seqüência.*

No estudo do comportamento das sequências, uma abordagem importante é a representação dos termos de uma sequência na reta numérica. Esta visualização será adotada em alguns momentos deste capítulo.

**Exemplo 2.1.** *Os exemplos a seguir ilustram o conceito de sequência.*

- (i) *A sequência  $(-1, 1, -1, 1, \dots)$  possui como  $n$ -ésimo termo  $u_n = (-1)^n$  e  $\{-1, 1\}$  é o seu conjunto de termos.*

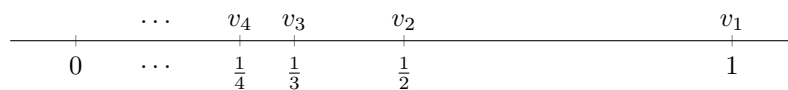
Figura 2.1: Representação da sequência  $(u_n)$ .



Fonte: Autoria própria, 2024.

- (ii) *A sequência  $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$  possui como termo geral  $v_n = \frac{1}{n}$  e o seu conjunto de termos é dado por  $\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$ .*

Figura 2.2: Representação da sequência  $(v_n)$ .



Fonte: Autoria própria, 2024.

- (iii) *A sequência  $(1, 2, 3, 4, \dots)$  definida por  $a_n = n$  possui  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$  como conjunto de termos.*

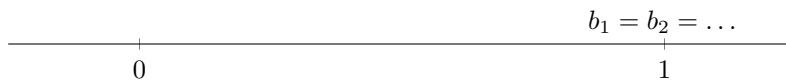
Figura 2.3: Representação da sequência  $(a_n)$ .



Fonte: Autoria própria, 2024.

(iv) A sequência constante  $(1, 1, 1, 1, \dots)$  cujo termo geral é dado por  $b_n = (-1)^{2n}$  possui como conjunto de termos o conjunto unitário  $\{1\}$ .

Figura 2.4: Representação da sequência  $(b_n)$ .



Fonte: Autoria própria, 2024.

Existem sequências nas quais é impossível determinar a expressão que caracteriza o termo geral, como é o caso da sequência dos números primos:  $(2, 3, 5, 7, 11, \dots)$ .

**Observação 2.1.** É importante salientar que uma função  $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  não é necessariamente injetiva, pode ocorrer  $m \neq n \Rightarrow x_m = x_n$ , como é o caso da sequência  $(u_n)$  dada por  $u_n = (-1)^n$ . Entretanto, se a função  $x$  for injetiva, ou seja,  $m \neq n \Rightarrow x_m \neq x_n$ , então teremos uma sequência de termos distintos, sem repetições, como é o caso da sequência  $(v_n)$  definida por  $v_n = \frac{1}{n}$ .

De maneira intuitiva, uma sequência  $(x_n)$  é convergente se, à medida que o índice  $n$  aumenta significativamente, os termos  $x_n$  se aproximam e permanecem tão próximos quanto desejado de um certo número  $l$ , chamado de *limite da sequência*. Em termos matemáticos, segue a definição de convergência:

**Definição 2.2.** Uma sequência  $(x_n)$  converge para um número  $l \in \mathbb{R}$  se, para qualquer real  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|x_n - l| < \varepsilon, \text{ para todo } n > n_0.$$

O número  $l$  é chamado o limite da sequência  $(x_n)$  e escreve-se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l, \lim x_n = l \text{ ou } x_n \rightarrow l.$$

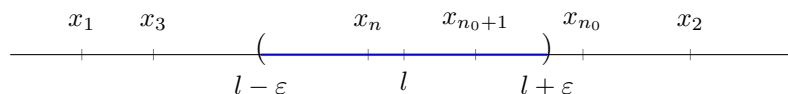
Uma sequência que não converge é dita divergente.

Observe que

$$|x_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon.$$

Portanto, podemos interpretar a Definição 2.2 da seguinte forma: A sequência  $(x_n)$  converge para um número  $l$  se para qualquer  $\varepsilon > 0$  dado, o intervalo  $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$  contém todos os termos  $x_n$  da sequência exceto para um número finito de índices  $n$ . Em outras palavras, se  $n_0$  é o maior índice de  $n$  tal que  $x_n \notin (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ , então fora do intervalo  $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$  só poderá estar os termos  $x_1, x_2, \dots, x_{n_0}$ , logo, para todo  $n > n_0$ , teremos  $x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ .

Figura 2.5: Interpretação da Definição 2.2.



Fonte: Autoria própria, 2024.

**Exemplo 2.2.** A sequência constante do Exemplo 2.1 (iv), dada por  $b_n = (-1)^{2n}$ , converge para  $l = 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Com efeito, para qualquer  $\varepsilon > 0$ , dado arbitrariamente, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |b_n - l| = |(-1)^{2n} - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon.$$

Isso mostra que  $b_n \rightarrow 1$ .

De forma geral, toda sequência constante  $(x_n)$  com  $x_n = \alpha$  converge para  $l = \alpha$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exemplo 2.3.** A sequência

$$(z_n) = \left( \frac{n}{n+6} \right) = \left( \frac{1}{7}, \frac{2}{8}, \frac{3}{9}, \dots, \frac{n}{n+6}, \dots \right)$$

converge para  $l = 1$ . Com efeito, para todo  $\varepsilon > 0$  dado,

$$|z_n - l| = \left| \frac{n}{n+6} - 1 \right| = \frac{6}{n+6} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{6}{\varepsilon} - 6.$$

Assim, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 (= \frac{6}{\varepsilon} - 6)$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow |z_n - 1| < \varepsilon$ .

O exemplo acima ilustra que quanto menor o valor de  $\varepsilon$  mais rigorosos estaremos sendo em relação à proximidade entre  $z_n$  e o limite 1, o que exige em aumentar progressivamente o índice  $n$ . De fato, quanto menor o  $\varepsilon$ , maior o número  $n_0 = \frac{6}{\varepsilon} - 6$ . Assim, se  $\varepsilon = 10^{-1}$ , então  $n_0 = 54$ ; se  $\varepsilon = 10^{-2}$ , então  $n_0 = 594$ ; em geral, se  $\varepsilon = 10^{-k}$ , então  $n_0 = 6 \cdot 10^k - 6$ .

Por outro lado, se escolhermos um valor muito grande para  $\varepsilon$ , pode ocorrer de não existir uma condição para o índice  $n$ . Isso é o que ocorre com  $\varepsilon = 2$  no exemplo em questão, resultando em  $n_0 = -3$ .

**Exemplo 2.4.** A sequência do Exemplo 2.1 (ii), cujo termo geral é dado por  $v_n = \frac{1}{n}$ , converge para  $l = 0$ .

Inicialmente, observe que à medida que  $n \rightarrow \infty$ , os termos de  $(v_n)$  se aproximam de 0, conforme mostra a Figura 2.2. Com efeito, para qualquer  $\varepsilon > 0$  dado, pela Propriedade Arquimediana 1.4, existe um  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_0 > 1/\varepsilon$ . Isso garante que para todo  $n > n_0$  temos

$$n > n_0 > 1/\varepsilon \Rightarrow 1/n < 1/n_0 < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Isso mostra que  $v_n \rightarrow 0$ .

**Exemplo 2.5.** A sequência dada no Exemplo 2.1 (iii) é divergente, pois à medida que o índice  $n \rightarrow \infty$ , os termos  $a_n$  tornam-se indefinidamente grandes, de modo que  $\lim a_n = +\infty$ . Formalmente, isso significa que, dado qualquer real  $M > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  (que pode depender de  $M$ ) tal que, para todo  $n > n_0$ , tem-se  $a_n > M$ .

Analogamente, uma sequência  $(x_n)$  também é divergente quando, dado qualquer  $M > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n > n_0$ , tem-se  $x_n < M$ . Neste caso, escreve-se  $\lim x_n = -\infty$ .

**Exemplo 2.6.** *Uma sequência pode divergir sem que os seus elementos se tornem arbitrariamente grandes, como é o caso da sequência  $(u_n)$  dada no Exemplo 2.1 (i). De fato, nenhum  $l$  real pode ser seu limite, pois o intervalo  $(l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2})$  não pode conter simultaneamente o 1 e o  $-1$ . Assim, dado  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , não existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que*

$$(-1)^n \in \left( l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2} \right), \forall n > n_0.$$

A divergência, neste caso, decorre de os termos se “acumularem” junto aos dois valores  $-1$  e  $1$ .

Um resultado importante relacionado às sequências convergentes é a unicidade de seu limite.

**Teorema 2.1.** *Se  $(x_n)$  for uma sequência convergente, então o seu limite será único.*

**Demonstração.** Suponha uma sequência  $(x_n)$  tal que  $\lim x_n = a$  e  $\lim x_n = b$ . Vamos mostrar que  $a = b$ . Com efeito, seja  $\varepsilon > 0$  um número arbitrário. Como  $\lim x_n = a$  e  $\lim x_n = b$ , existem  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tais que

$$n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad n > n_2 \Rightarrow |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ , resulta da desigualdade triangular que, para todo  $n > n_0$ , tem-se

$$|a - b| = |(a - x_n) + (x_n - b)| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como  $\varepsilon > 0$  é arbitrariamente pequeno, fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , obtemos  $a = b$ . □

Quando o conjunto dos termos de uma sequência é limitado, isto é, quando existem números reais tais que todos os termos da sequência pertencem ao intervalo formado por estes valores, diremos que esta sequência é limitada. Mais precisamente,

**Definição 2.3.** *Uma sequência  $(x_n)$  é dita limitada se existe uma constante positiva  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $|x_n| \leq M$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Exemplo 2.7.** *A sequência  $(u_n)$  dada no Exemplo 2.1 (i) é limitada, pois  $|(-1)^n| \leq 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

Uma sequência  $(x_n)$  é dita *limitada inferiormente* se existe uma constante  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $a \leq x_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por outro lado,  $(x_n)$  é dita *limitada superiormente* se existe  $b \in \mathbb{R}$  tal que  $x_n \leq b$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se  $(x_n)$  é limitada superiormente e inferiormente, diz-se simplesmente que  $(x_n)$  é *limitada*.

**Exemplo 2.8.** *A sequência  $(v_n)$  do Exemplo 2.1 (ii) é limitada inferiormente e superiormente, pois, sendo  $n$  um inteiro positivo, então  $n \geq 1 > 0$ , o que implica em  $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Portanto,  $(v_n)$  é limitada.*

O teorema a seguir nos garante a limitação de toda sequência convergente.

**Teorema 2.2.** *Toda sequência convergente é limitada.*

**Demonstração.** Considere  $(x_n)$  uma sequência tal que  $\lim x_n = a$ . Então, fixando  $\varepsilon = 1$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n > n_0$ , tem-se  $x_n \in (a - 1, a + 1)$ . Este fato já implica dizer, que a partir do índice  $n = n_0 + 1$ , a sequência  $(x_n)$  é limitada. Agora, seja o conjunto finito  $K = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, a - 1, a + 1\}$ . Como este conjunto é finito, considere  $m$  o menor e  $M$  o maior elemento de  $K$ , então  $m \leq x_n \leq M$ , para todo  $n \leq n_0$ . Logo,  $(x_n)$  é limitada para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

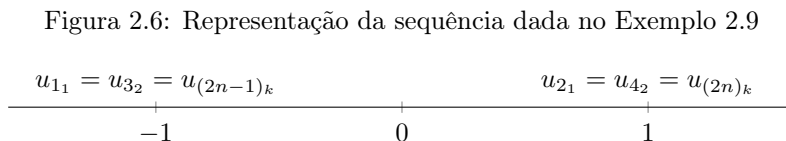
**Observação 2.2.** *A recíproca desse resultado não ocorre, ou seja, o fato de uma sequência ser limitada não implica que ela seja convergente. Por exemplo, a sequência  $(u_n)$  definida por  $u_n = (-1)^n$  é limitada, veja o Exemplo 2.7, porém, não é convergente, conforme observamos no Exemplo 2.6.*

Enunciaremos agora a definição de *subsequência*, a qual é formada por um ou mais termos retirados de uma sequência, porém, mantendo a ordem relativa dos termos. Mais precisamente:

**Definição 2.4.** *Uma subsequência de uma sequência  $(x_n)$  é uma restrição dessa sequência a um subconjunto infinito  $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$  de  $\mathbb{N}$ . Utilizaremos a notação  $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$  ou simplesmente  $(x_{n_k})$  para representar uma subsequência.*

**Exemplo 2.9.** *A sequência  $(-1, 1, -1, 1, \dots)$  dada por  $u_n = (-1)^n$ , veja o Exemplo 2.1 (i), possui duas subsequências. De fato, para  $n$  ímpar, temos a subsequência  $(-1, -1, -1, \dots)$  cujo  $n$ -ésimo termo é dado por  $u_{2n-1} = (-1)^{2n-1}$ . Agora, para  $n$  par, temos a subsequência  $(1, 1, 1, 1, \dots)$  dada por  $u_{2n} = (-1)^{2n}$ .*

A figura abaixo ilustra o comportamento dos índices das subsequências em relação a sequência original.



Fonte: Autoria própria, 2024.

Em ambos os casos, as subsequências são constantes, o que implica em convergência, sendo que a subsequência  $(u_{2n-1})$  converge para  $-1$  e a subsequência  $(u_{2n})$  converge para  $1$ . Este exemplo nos diz que mesmo a sequência sendo divergente, veja o Exemplo 2.6, ela possui subsequências que convergem.

**Observação 2.3.** *Toda subsequência de uma sequência limitada é limitada. De fato, como uma subsequência é formada por termos da sequência e esta, por hipótese, é limitada, então existe  $M > 0$  de modo que qualquer termo da subsequência terá  $|x_{n_k}| \leq M$ , com  $k \in \mathbb{N}$ . Portanto, a subsequência também é limitada.*

Da mesma forma que qualquer subsequência de uma sequência limitada também é limitada, o teorema seguinte prova que qualquer subsequência de uma sequência convergente é convergente e converge para o mesmo limite.

**Teorema 2.3.** *Se uma sequência  $(x_n)$  converge para um limite  $l$ , então toda subsequência de  $(x_n)$  também converge para  $l$ .*

**Demonstração.** Seja  $(x_{n_k})$  uma subsequência de  $(x_n)$ . Como  $x_n \rightarrow l$ , então dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n > n_0$ , tem-se  $|x_n - l| < \varepsilon$ . Como os índices da subsequência formam um subconjunto infinito, existe entre eles um  $n_{k_0} > n_0$  de modo que

$$k > k_0 \Rightarrow n_k > n_{k_0} > n_0 \Rightarrow |x_{n_k} - l| < \varepsilon.$$

Pontanto  $\lim x_{n_k} = l$ . □

**Observação 2.4.** *O Teorema 2.3, em conjunto com o Teorema 2.1, pode ser útil para mostrar que uma dada sequência não é convergente. Para isto, basta verificar se a sequência possui pelo menos duas subsequências com limites distintos. Um exemplo onde podemos fazer tal aplicação é a sequência do Exemplo 2.9.*

A definição a seguir se refere a uma classe de sequências importante que nos fornecerá um critério de convergência mais adiante.

**Definição 2.5.** *Diz-se que uma sequência  $(x_n)$  é crescente se  $x_n < x_{n+1}$  para todo  $n$  e decrescente se  $x_n > x_{n+1}$  para todo  $n$ . Diz-se que a sequência é não-decrescente se  $x_n \leq x_{n+1}$  para todo  $n$  e não-crescente se  $x_n \geq x_{n+1}$  para todo  $n$ . Em qualquer um dos casos diz-se que a sequência  $(x_n)$  é monótona.*

**Exemplo 2.10.** *A sequência  $(1, 2, 3, \dots, n, \dots)$ , dada no Exemplo 2.1 (iii), é uma sequência monótona crescente, sendo limitada inferiormente por 1 e ilimitada superiormente. Em vista do Teorema 2.2, esta sequência não é convergente.*

**Exemplo 2.11.** A sequência  $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$ , dada no Exemplo 2.1 (ii), é uma sequência monótona decrescente e limitada, veja o Exemplo 2.8. Além disso, o Exemplo 2.4 nos mostra que esta sequência é convergente.

Assim como a limitação de uma sequência não garante a sua convergência, os exemplos acima mostram que a monotonicidade também não é condição suficiente para a convergência de uma sequência. No entanto, o próximo resultado nos permite assegurar que uma sequência monótona e limitada é convergente, mesmo na ausência do conhecimento prévio sobre o seu limite.

**Teorema 2.4.** *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

**Demonstração.** Suponhamos, sem perda de generalidade, que  $(x_n)$  seja uma sequência monótona não-decrescente e limitada, isto é,  $x_n \leq x_{n+1}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Seja  $A$  o conjunto dos valores dessa sequência, isto é,

$$A = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}.$$

Uma vez que  $(x_n)$  é limitada, tem-se, em particular, que  $A$  é limitado superiormente. Assim, pela Propriedade do Supremo 1.1, existe  $b \in \mathbb{R}$  tal que  $b = \sup A$ . Afirmamos que  $b = \lim x_n$ . Com efeito, tome qualquer  $\varepsilon > 0$ . Desde que  $b$  é cota superior para  $A$ , tem-se  $x_n \leq b$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Além disso, como  $b - \varepsilon < b$ , segue que o número  $b - \varepsilon$  não é cota superior para o conjunto  $A$ . Logo, existe algum  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $b - \varepsilon < x_{n_0}$ . E, por fim, como a sequência  $(x_n)$  é não-decrescente, obtemos

$$n > n_0 \Rightarrow b - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq b < b + \varepsilon,$$

o que implica dizer que  $\lim x_n = b$ . □

A demonstração do teorema acima nos fornece uma importante consequência:

**Corolário 2.1.** *Se  $(x_n)$  é uma sequência não-decrescente e limitada superiormente,*

então  $x_n$  converge para  $\sup A$ , onde  $A = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ . De forma análoga, se  $(x_n)$  for não-crescente e limitada inferiormente, então  $x_n$  converge para  $\inf A$ .

## 2.2 Prova do Teorema de Bolzano-Weierstrass

Antes de demonstrar o Teorema de Bolzano-Weierstrass, vamos estabelecer um resultado necessário para a prova, conhecido como Teorema dos Intervalos Encaixados.

**Teorema 2.5** (Intervalos Encaixados). *Dada uma sequência decrescente  $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$  de intervalos limitados e fechados  $I_n = [a_n, b_n]$ , existe pelo menos um número real  $c$  tal que  $c \in I_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , ou seja,  $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ . Além disso, se o comprimento  $|I_n| = b_n - a_n$  tender a zero, então  $c$  será único, isto é,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$ .*

**Demonstração.** Como  $I_{n+1} \subset I_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos que  $\dots \subset [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \subset \dots \subset [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ , ou seja,

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1.$$

Note que as sequências  $(a_n)$  e  $(b_n)$  são, respectivamente, não-decrescente e não-crescente. Além disso, os conjuntos  $A = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$  é limitado superiormente por  $b_1$  e  $B = \{b_n; n \in \mathbb{N}\}$  é limitado inferiormente por  $a_1$ . Decorre do Corolário 2.1 que existem  $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$  tais que  $\lim a_n = l_1$  e  $\lim b_n = l_2$ , onde  $l_1 = \sup A$  e  $l_2 = \inf B$ . Como  $a_n < b_n$  para todo  $n$ , segue que  $a_n \leq l_1 \leq l_2 \leq b_n$  para todo  $n$ . Logo,  $[l_1, l_2] \subset I_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  e, portanto, qualquer  $c \in [l_1, l_2]$  satisfaz que  $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ . Note que, se  $l_1 < l_2$ , tem-se  $[l_1, l_2] = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ . Agora, se  $l_1 = l_2$ , que significa dizer que  $(b_n - a_n) \rightarrow 0$ , então  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$  ao tomar  $c = l_1 = l_2$ .  $\square$

Além de ser frequentemente utilizado na prova do Teorema Bolzano-Weierstrass, o Teorema 2.5 é também usado para estabelecer que o conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais

é não-enumerável. A demonstração desta última afirmação pode ser consultada na referência [6].

**Teorema 2.6** (Bolzano-Weierstrass). *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

**Demonstração.** Seja  $(x_n)$  uma sequência limitada, então existem  $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$  tal que  $x_n$  está toda contida no intervalo fechado  $I_1 = [a_1, b_1]$ , de comprimento  $l$ . Dividindo o intervalo  $I_1$  ao meio, obtemos dois subintervalos limitados e fechados, cada um de comprimento  $\frac{l}{2}$ . Como  $(x_n)$  possui infinitos elementos, algum (ou ambos) desses subintervalos possui infinitos elementos da sequência. Sem perda de generalidade, escolhemos o subintervalo  $I_2 = [a_2, b_2]$  tal que  $x_n \in I_2$ . Repetindo o argumento anterior, tomamos um intervalo  $I_3 = [a_3, b_3]$ , de comprimento  $\frac{l}{2^2}$ , tal que  $x_n \in I_3$  para uma infinidade de índices  $n$ . Continuando com esse processo indefinidamente, sempre tomando-se aquele subintervalo que contém uma infinidade de índices  $n$ , obtemos uma sequência de intervalos limitados e fechados, de modo que

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_{k-1} \supset I_k \supset \cdots$$

Pelo Teorema dos Intervalos Encaixados, existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $c \in I_k$ , para todo  $k$ . Agora, seja  $x_{n_1}$  um elemento de  $(x_n)$  no intervalo  $I_1$ ,  $x_{n_2}$  no intervalo  $I_2$ , e assim sucessivamente. Seguindo este raciocínio, obtemos  $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \dots$  de tal forma que  $x_{n_k} \in I_k$  para todo  $k$ . Temos então uma subsequência  $(x_{n_k})$  de  $(x_n)$ . Afirmamos que a subsequência  $(x_{n_k})$  obtida converge para  $c$ . De fato, dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{l}{2^{n_0}} < \varepsilon$ , de modo que  $I_m \subset (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$  para  $m > n_0$ . Portanto, para  $k > n_0$ ,  $n_k$  será maior do que  $n_0$  (pois  $n_k \geq k$ ), logo,  $x_{n_k}$  estará no intervalo  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ . Note ainda que  $x_{n_k} \in I_k$  e  $c \in I_k$ , o que implica que  $|c - x_{n_k}| \leq \frac{l}{2^{k-1}} \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow +\infty$ . Portanto,  $(x_{n_k})$  é uma subsequência de  $(x_n)$  tal que  $x_{n_k} \rightarrow c$ .  $\square$

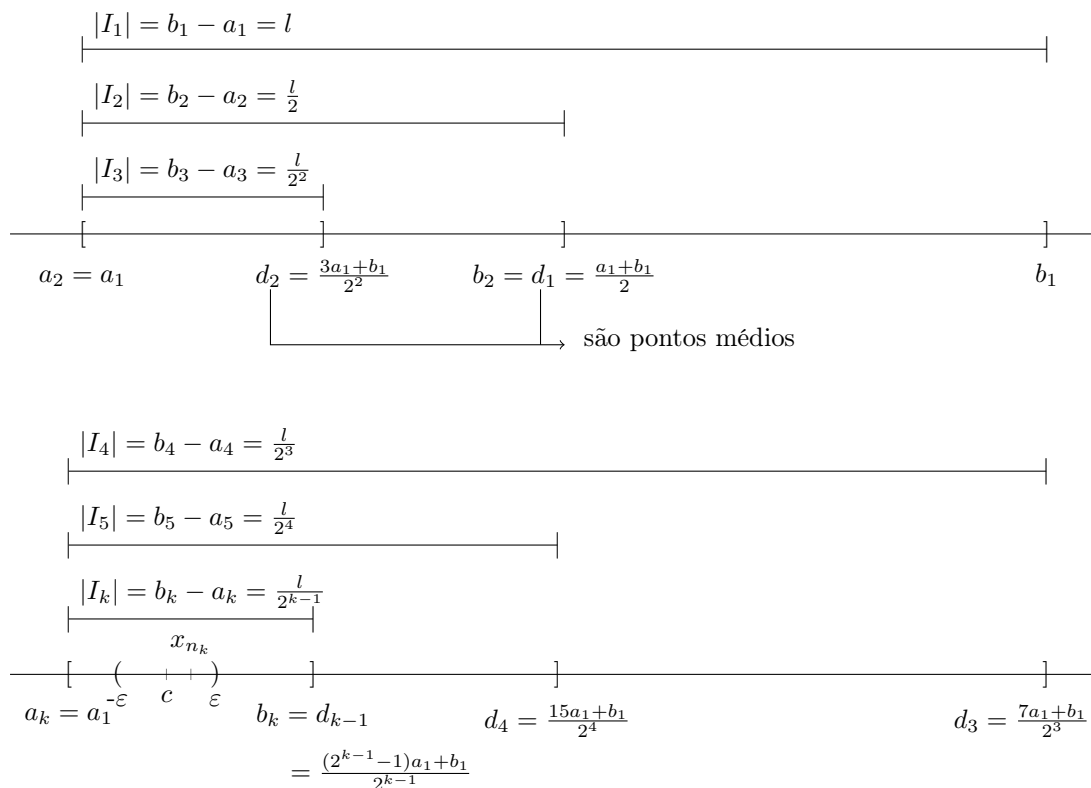
Em outras palavras, o Teorema de Bolzano-Weierstrass estabelece que se tivermos

uma sequência de números reais contida em um intervalo específico (limitado e fechado), então sempre podemos encontrar uma subsequência sua que converge para um valor limite.

Obviamente, se  $(x_n)$  é convergente então, pelo Teorema 2.2, é limitada, e assim admite pelo menos duas subsequências de termos pares ou ímpares que, pelo Teorema 2.3, convergem para o mesmo valor. Entretanto, o Teorema 2.6 nada fala sobre a sequência ser convergente.

A figura abaixo ilustra a construção da subsequência  $(x_{n_k})$  de  $(x_n)$ .

Figura 2.7: Construção da subsequência  $(x_{n_k})$ .



Fonte: Autoria própria, 2024.

---

# APLICAÇÕES DO TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS

---

Neste capítulo, abordaremos duas aplicações do Teorema de Bolzano-Weierstrass em funções reais contínuas definidas em intervalos limitados e fechados, a saber, o *Teorema de Weierstrass* e o *Teorema da Continuidade Uniforme*. Para isso, é fundamental a compreensão dos conceitos de limite e continuidade de funções reais.

## 3.1 Funções reais e limite

Uma *função*  $f : X \rightarrow Y$  consta de três partes:

- (i) Um conjunto  $X$ , chamado o *domínio da função*, ou o conjunto onde a função é definida;
- (ii) Um conjunto  $Y$ , chamado o *contradomínio da função*, ou o conjunto onde a função toma valores;
- (iii) Uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento  $x \in X$ , um único elemento  $f(x) \in Y$ , chamado o valor que a função assume em  $x$  (ou no ponto  $x$ ).

Em nosso trabalho, estamos interessados somente em funções cujos domínios sejam subconjuntos dos números reais, principalmente intervalos limitados e fechados, e o contradomínio sempre o conjunto dos números reais. Tais funções são denominadas *funções reais*.

Antes de falarmos sobre limites de funções, veremos o seguinte conceito topológico que será fortemente utilizado na definição de limite:

**Definição 3.1.** Diz-se que  $a \in \mathbb{R}$  é ponto de acumulação de um conjunto  $X \subset \mathbb{R}$  se, para todo  $\varepsilon > 0$ , tem-se  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$ . Em outras palavras, quando, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $x \in X$ , com  $x \neq a$ , tal que  $0 < |x - a| < \varepsilon$ . Denota-se por  $X'$  o conjunto dos pontos de acumulação de  $X$ .

Um ponto  $a \in X$  que não é um ponto de acumulação de  $X$  é considerado um *ponto isolado* deste conjunto, isto equivale a dizer que existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap X = \{a\}.$$

Chama-se *discreto* o conjunto cujos pontos são todos isolados.

Prosseguiremos agora com o seguinte resultado:

**Teorema 3.1.** Sejam  $X \subset \mathbb{R}$  e  $a \in \mathbb{R}$ , as seguintes afirmações são equivalentes:

1.  $a$  é ponto de acumulação de  $X$ ;
2.  $a = \lim x_n$ , onde  $(x_n)$  é uma sequência de elementos de  $X$ , dois a dois distintos;
3. Todo intervalo aberto contendo  $a$  contém uma infinidade de pontos de  $X$ .

**Demonstração.** Vamos mostrar que (1)  $\Rightarrow$  (2). Com efeito, seja  $a \in X'$ , da definição de ponto de acumulação, existe  $x_1 \in X$ , com  $x_1 \neq a$ , tal que  $0 < |x_1 - a| < 1$ . Tomando  $\varepsilon_2 = \min\{|x_1 - a|, 1/2\}$ , vemos que existe  $x_2 \in X$ , com  $x_2 \neq a$ , tal que  $0 < |x_2 - a| < \varepsilon_2$ . Seja  $\varepsilon_3 = \min\{|x_2 - a|, 1/3\}$ . Existe  $x_3 \in X$ , com  $x_3 \neq a$ , tal que

$0 < |x_3 - a| < \varepsilon_3$ . Procedendo desta forma, encontramos uma sequência de elementos  $x_n \in X$  com  $|x_{n+1} - a| < |x_n - a|$  e  $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ . Assim, os  $x_n$  são dois a dois distintos, pertencem a  $X$  e  $\lim x_n = a$ . As implicações  $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$  são óbvias.  $\square$

**Corolário 3.1.** *Se  $X' \neq \emptyset$  então  $X$  é infinito.*

A demonstração deste resultado segue imediatamente do teorema acima. Por outro lado, se  $X$  é finito, então  $X' = \emptyset$ . Com efeito, sendo  $X$  finito, para qualquer  $x \in X$ , sempre será possível encontrar  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  tal que nenhum outro ponto de  $X$  esteja contido neste intervalo, exceto o próprio  $x$ , contrariando assim a Definição 3.1.

**Exemplo 3.1.** *O conjunto dos pontos de acumulação de cada um dos intervalos  $(a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $[a, b]$  é  $[a, b]$ .*

**Exemplo 3.2.** *No conjunto  $\mathbb{Q}$  e  $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ , temos  $\mathbb{Q}' = (\mathbb{R} - \mathbb{Q})' = \mathbb{R}' = \mathbb{R}$ .*

Por esses exemplos, podemos observar que um ponto de acumulação de um conjunto pode ou não pertencer ao conjunto. Outro fator importante, exemplificado abaixo, é que a recíproca do Corolário 3.1 não é verdadeira.

**Exemplo 3.3.** *Nos conjuntos  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{N}$ , todos os pontos são isolados. Isto é,  $\mathbb{Z}' = \mathbb{N}' = \emptyset$ .*

Agora, retomaremos a noção de limite, porém, de uma forma mais geral. Em vez de sequências, como foi visto no capítulo anterior, consideraremos funções reais.

**Definição 3.2.** *Sejam  $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real e  $a \in \mathbb{R}$  um ponto de acumulação de  $X$ . Diremos que  $l \in \mathbb{R}$  é o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $a$ , e escreveremos  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ , se, dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , existir  $\delta > 0$  tal que*

$$x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Intuitivamente,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  significa que  $f(x)$  pode se tornar tão próximo do limite  $l$  quanto se queira, desde que se tome  $x \in X$  suficientemente próximo, porém diferente, de  $a$ .

**Observação 3.1.** *Conforme a Definição 3.2, só tem sentido escrever  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  quando  $a \in X'$ . No entanto, se considerarmos  $a \notin X'$  na Definição 3.2, então todo número real  $l$  seria limite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow a$ . Com efeito, inicialmente, note que  $0 < |x - a| < \delta$  equivale a dizer que  $x \in (a - \delta, a + \delta)$  e  $x \neq a$ . Assim,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  significa que, para todo intervalo aberto  $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ , existe um intervalo aberto  $(a - \delta, a + \delta)$  tal que*

$$f(V_\delta) \subset (l - \varepsilon, l + \varepsilon), \text{ com } V_\delta := (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta).$$

*Agora, sendo  $a \notin X'$  (ou seja,  $a$  é um ponto isolado em  $X$ ), existe  $\delta > 0$ , tal que  $V_\delta = \emptyset$  (isto é,  $0 < |x - a| < \delta, x \in X$ , não se verifica para  $x$  algum). Então, dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , tomando este  $\delta$ . Será sempre verdade que  $\emptyset = f(V_\delta) \subset (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ , seja qual for  $l$ . Logo, teríamos  $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .*

**Observação 3.2.** *Ao considerarmos  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , não exigimos que a pertença ao domínio da função  $f$ , ou seja, que  $f$  esteja ou não definida no ponto  $a$ . Nos casos mais interessantes de limite, tem-se  $a \notin X$ .*

**Observação 3.3.** *Mesmo que ocorra  $a \in X$ , a afirmação  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  não fornece informações sobre o valor de  $f(a)$ , apenas descreve exclusivamente o comportamento dos valores de  $f(x)$  à medida que  $x$  se aproxima de  $a$ , com  $x \neq a$ . Em termos explícitos, é possível ter  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ .*

**Exemplo 3.4.** *Provemos que*

$$\lim_{x \rightarrow 1} 3x + 2 = 5.$$

*Com efeito, seja  $f(x) = 3x + 2$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , precisamos encontrar  $\delta > 0$  tal que para todo  $x$  com  $0 < |x - 1| < \delta$ , tenhamos  $|f(x) - 5| < \varepsilon$ . Para isso, avaliamos:*

$$|f(x) - 5| = |3x + 2 - 5| = |3x - 3| = |3(x - 1)| = 3|x - 1|.$$

Dese que  $0 < |x - 1| < \delta$ , temos

$$|f(x) - 5| = 3|x - 1| < 3\delta.$$

Como precisamos ter  $|f(x) - 5| < \varepsilon$ , basta tomar  $\varepsilon = 3\delta$ , e então obtemos  $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ . Portanto, dado  $\varepsilon > 0$ , conseguimos obter um  $\delta > 0$  que (neste caso depende de  $\varepsilon$ ) satisfaz as desigualdades exigidas da definição de limite. Portanto, o limite  $\lim_{x \rightarrow 1}(3x + 2) = 5$  existe. Além disso, note que  $\lim_{x \rightarrow 1}(3x + 2) = f(1)$ .

**Exemplo 3.5.** O limite de uma função constante é a própria constante. Em outras palavras, se  $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $f(x) = k$ , para todo  $x \in X$ , onde  $k \in \mathbb{R}$  e  $a \in X'$ , então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k.$$

De fato, dado  $\varepsilon > 0$ , podemos obter  $\delta > 0$  tal que

$$x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - k| = |k - k| = 0$$

o que prova a afirmação. Aqui, o  $\delta$  não depende de  $\varepsilon$  e nem do ponto  $a$ .

**Exemplo 3.6.** Considere  $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ , com  $x \neq 0$ . Então

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0,$$

embora  $f$  não esteja definida em  $x = 0$ . Com efeito, dado  $\varepsilon > 0$ , seja  $\delta = \varepsilon$  e tomando  $0 < |x - 0| < \delta$ , teremos

$$|f(x) - 0| = \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| < \varepsilon,$$

observando que  $|\sin t| \leq 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 3.7.** Dado um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função satisfazendo

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \forall x, y \in I,$$

onde  $M$  é uma constante positiva. Funções que satisfazem essa condição são chamadas funções lipschitzianas, onde  $M$  é a constante de Lipschitz. Nesse caso, tem-se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Para verificarmos o limite acima, tomemos  $\varepsilon > 0$  arbitrário e consideremos  $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ . Assim, se  $x \in I$  e  $0 < |x - a| < \delta$ , então

$$|f(x) - f(a)| \leq M|x - a| < M\delta = M\left(\frac{\varepsilon}{M}\right) = \varepsilon,$$

o que mostra o limite acima. Observemos que o  $\delta$  depende de  $\varepsilon$ , mas não depende do ponto  $a \in I$ .

O resultado a seguir estabelece uma das principais propriedades do limite de uma função. A demonstração será omitida, mas pode ser consultada em [6].

**Teorema 3.2** (Unicidade do limite). *Sejam  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in X'$ . Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l_1$  e  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l_2$ , então  $l_1 = l_2$ .*

A definição a seguir traz a noção de limite de uma função  $f$  quando  $x$  tende para  $a$ , considerando  $x$  apenas à direita de  $a$  ou apenas à esquerda de  $a$ . Quando isso ocorre, estamos estudando os limites laterais de  $f$  em  $a$ .

**Definição 3.3.** *Sejam  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $X \subset \mathbb{R}$ , e  $a \in X'_+$  (conjunto dos pontos de acumulação à direita de  $X$ ). Diz-se que o número real  $l$  é o limite à direita de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $a$ , e escrevemos*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l.$$

se, para qualquer  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in (a, a + \delta) \cap X \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ .

De modo análogo se define o *limite à esquerda*. Se  $a$  é um ponto de acumulação à esquerda ( $a \in X'_-$ ) do domínio da função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , diremos que o limite à esquerda de  $f(x)$ , quando  $x$  tende para  $a$ , é o número  $l$ , e escreveremos

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l.$$

Um outro resultado de grande valia para verificarmos a existência ou não do limite de uma função é o seguinte:

**Teorema 3.3.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in X'_+ \cap X'_-$ . Então existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  se, e somente se, existem e são iguais os limites laterais  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ .*

**Demonstração.** Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ , então por definição, para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \cap (X - \{a\}) \Rightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon).$$

Isso implica que tanto o limite à direita quanto o limite à esquerda são iguais a  $l$ . Reciprocamente, se  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ , então para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $x \in (a, a + \delta_1) \cap X \Rightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$  e existe  $\delta_2 > 0$  tal que  $x \in (a - \delta_2, a) \cap X \Rightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ . Escolhendo  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , garantimos que

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \cap (X - \{a\}) \Rightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon).$$

Logo  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ . □

**Exemplo 3.8.** *Considere a função  $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x + \frac{x}{|x|}$ .*

Temos os seguintes limites laterais:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1,$$

Como os limites laterais são diferentes segue do Teorema 3.3 que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  não existe.

O teorema abaixo nos permite relacionar o conceito de limite de uma função com o de sequência. Este fato motivará a definição de função contínua em termos de sequências que será abordada na primeira seção do próximo capítulo.

**Teorema 3.4.** *Sejam  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in X'$ . Então,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  se, e somente se,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$  para toda sequência de pontos  $x_n \in X - \{a\}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .*

**Demonstração.** Suponhamos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  e que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , com  $x_n \in X - \{a\}$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Como  $x_n \rightarrow a$ , para o  $\delta > 0$  encontrado acima, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n > n_0 \Rightarrow 0 < |x_n - a| < \delta.$$

Então, em particular, tem-se

$$n > n_0 \Rightarrow |f(x_n) - l| < \varepsilon,$$

o que implica em  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$ . Reciprocamente, suponhamos que não se tenha  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ . Então, existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$  podemos obter  $x_n \in X$  com  $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$  e  $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$ . Então, existe uma sequência  $(x_n) \subset X$ , com  $x_n \neq a$ , tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , mas  $(f(x_n))$  não converge para  $l$ .  $\square$

## 3.2 Funções contínuas

Funções, tais como as lipschitzianas, que satisfazem  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , são ditas *funções contínuas*. Intuitivamente, uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se *contínua* em um ponto  $a \in X$  quando é possível tornar  $f(x)$  arbitrariamente próximo de  $f(a)$ , desde que se tome  $x$  suficientemente próximo de  $a$ . Mais precisamente,

**Definição 3.4.** *Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua no ponto  $a \in X$  quando, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existir  $\delta > 0$  tal que*

$$x \in X \text{ e } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Em termos de intervalos reais, a Definição 3.4 equivale a dizer que, dado qualquer intervalo  $J = (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ , existirá um intervalo  $I = (a - \delta, a + \delta)$  tal que  $x \in (X \cap I)$  implica  $f(x) \in J$ .

**Observação 3.4.** *Ao contrário da definição de limite, só faz sentido indagar se  $f$  é contínua no ponto  $a$  quando  $a \in X$ . Além disso, se  $a \in X$  é um ponto de acumulação em  $X$ , então a função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em  $a$  se, e somente se,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existir e for igual a  $f(a)$ , ou seja,*

$$f \text{ contínua em } a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Em virtude do Teorema 3.4, a noção de continuidade de funções pode ser expressa em termos de sequências.

**Definição 3.5.** *Diz-se que a função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua no ponto  $a \in X$  se, para qualquer sequência  $(x_n)$  em  $X$ , com  $x_n \rightarrow a$ , tivermos  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ . Caso contrário, diz-se que  $f$  é descontínua em  $a$  ou que  $a$  é uma descontinuidade de  $f$ . Se  $f$  for*

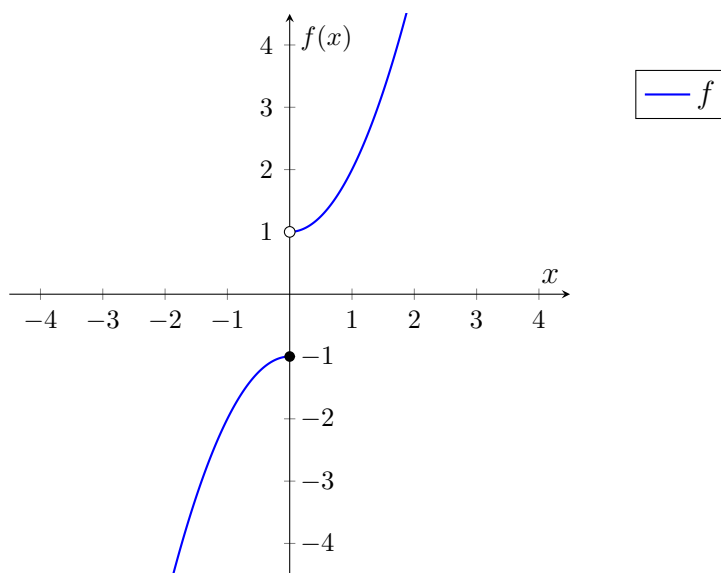
contínua em todos os pontos de seu domínio  $X$ , diz-se que  $f$  é contínua.

**Exemplo 3.9.** Mostremos que a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } x > 0, \\ -x^2 - 1, & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

é descontínua em  $x = 0$  e contínua em todos os outros pontos de  $\mathbb{R}$ . O gráfico, mostrado na Figura 3.1, ilustra o comportamento da função  $f$ .

Figura 3.1: Gráfico da  $f$  do Exemplo 3.9.



Fonte: Autoria própria, 2024.

Facilmente podemos ver que a função possui uma descontinuidade em  $x = 0$ . No entanto, vamos demonstrar este fato usando a Definição 3.5.

Vamos começar considerando o ponto  $a > 0$ . Com efeito, seja  $(x_n)$  uma sequência real convergindo para  $a$ . Como  $a > 0$  e  $x_n \rightarrow a$ , existe um índice  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n > 0$  para todo  $n > n_0$ . Portanto,

$$f(x_n) = x_n^2 + 1 \rightarrow a^2 + 1 = f(a),$$

o que mostra que  $f$  é contínua em  $a > 0$ . Um argumento semelhante pode ser usado no caso em que  $a < 0$ . Analisemos agora o comportamento da função em 0. Para isso, consideremos a sequência  $(x_n)$  dada por  $x_n = \frac{1}{n}$ . Verifica-se que  $0 < x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ .

Assim,

$$f(x_n) = \frac{1}{n^2} + 1 \rightarrow 1.$$

Por outro lado, considerando a sequência  $(x_n)$ ,  $x_n = -\frac{1}{n}$ , verifica-se que  $x_n = -\frac{1}{n} \rightarrow 0$ .

Assim,

$$f(x_n) = -\frac{1}{n^2} - 1 \rightarrow -1,$$

ou seja,

$$-1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

Consequentemente,  $f$  não é contínua em 0.

A partir deste momento, vamos explorar a continuidade de funções em um intervalo de  $\mathbb{R}$ . Antes, consideremos a seguinte definição:

**Definição 3.6.** Diz-se que a função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada superiormente se existir um número  $M$  tal que  $f(x) \leq M$ , para todo  $x \in I$ . Analogamente,  $f$  é limitada inferiormente se existir um número  $N$  tal que  $f(x) \geq N$ , para todo  $x \in I$ .

Em outras palavras, a função  $f$  é limitada superiormente se o conjunto-imagem

$$Im(f) = \{f(x); x \in I\}$$

tem uma cota superior e, neste caso, definimos o supremo de  $f$ , denotado por  $\sup f$ , como sendo o supremo de  $Im(f)$ . Analogamente definimos o ínfimo de  $f$ , denotado por  $\inf f$ , como sendo o ínfimo de  $Im(f)$ .

Diz-se que  $f$  é limitada, se for limitada tanto superiormente, quanto inferiormente.

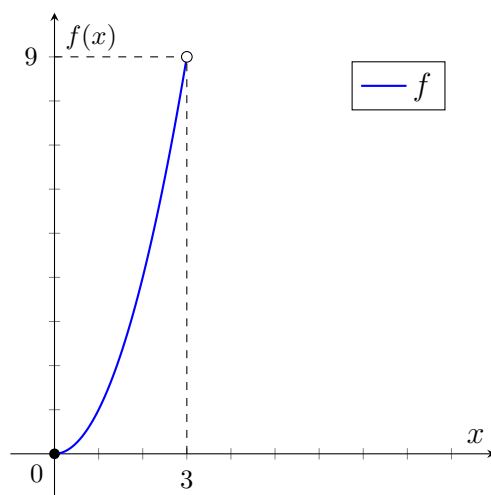
Dada uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  limitada superiormente. Diz-se que a função assume máximo em  $I$  quando existir um ponto  $a \in I$  tal que  $f(a) = \sup f$ . Neste caso, o

número  $\sup f$  será chamado de *máximo* de  $f$ .

De forma análoga, uma função limitada inferiormente assume *mínimo* em  $I$  quando existir um ponto  $a \in I$  tal que  $f(a) = \inf f$ . Neste caso, o número  $\inf f$  será chamado de *mínimo* de  $f$ .

**Exemplo 3.10.** *Seja a função  $f : [0, 3) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$ , cujo gráfico é mostrado na Figura 3.2 abaixo.*

Figura 3.2: Gráfico da  $f$  do Exemplo 3.10.



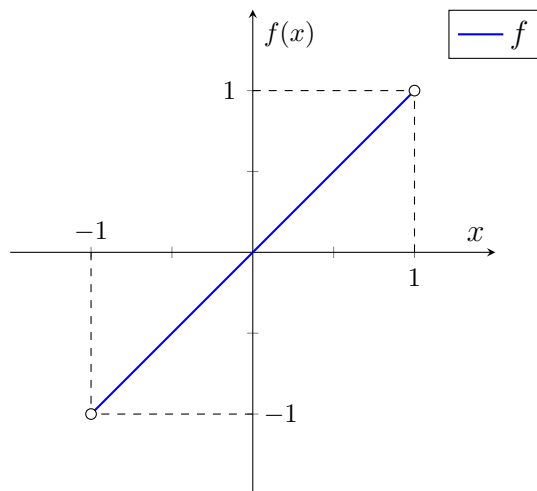
Fonte: Autoria própria, 2024.

*Primeiramente, observe que  $f$  é contínua em  $[0, 3)$ . Temos que  $0 \leq f(x) < 9$  e, assim,  $f$  é limitada superiormente e inferiormente. Além disso,*

$$f(0) = 0 = \inf\{f(x); x \in [0, 3)\},$$

*logo, 0 é o ponto de mínimo de  $f$ . Porém, apesar de  $f$  ser limitada superiormente, não existe  $x \in [0, 3)$  tal que  $f(x) = 9 = \sup\{f(x); x \in [0, 3)\}$ , isto é, não há ponto no domínio de  $f$  que atinja o valor 9, que é o supremo dos valores da função  $f$ .*

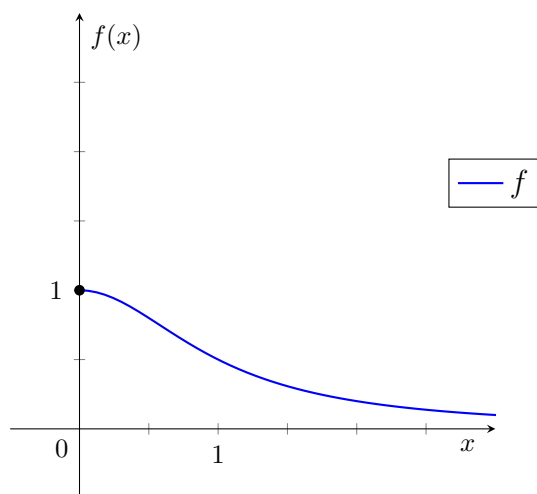
**Exemplo 3.11.** *Consideremos a função  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x$ , cujo gráfico esboçamos na Figura 3.3.*

Figura 3.3: Gráfico da  $f$  do Exemplo 3.11.

Fonte: Autoria própria, 2024.

Inicialmente, observe que  $f$  é contínua em  $(-1, 1)$ . Como  $-1 < f(x) < 1$ , temos que  $f$  é limitada superiormente e inferiormente. Apesar disso, não existe nenhum ponto do domínio da  $f$  que atinja o valores 1 e  $-1$ , que são o supremo e ínfimo da  $f$ .

**Exemplo 3.12.** A função  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , cujo gráfico esboçamos na Figura 3.4, é definida por  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

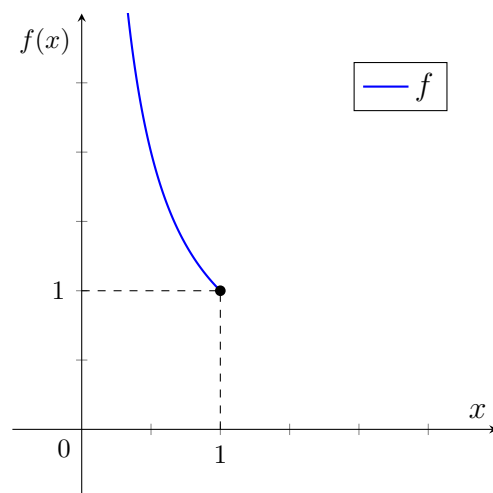
Figura 3.4: Gráfico da  $f$  do Exemplo 3.12

Fonte: Autoria própria, 2024

Temos que  $f$  é contínua e limitada, assumindo seu valor máximo no ponto  $x = 0$ , uma vez que  $f(0) = 1 = \sup\{f(x); x \in [0, +\infty)\}$ . Por outro lado, não existe  $x \in [0, +\infty)$  tal que  $f(x) = 0 = \inf\{f(x); x \in [0, +\infty)\}$ .

**Exemplo 3.13.** Considere a função  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \frac{1}{x}$  para  $x \in (0, 1]$ , cujo gráfico representamos na Figura 3.13.

Figura 3.5: Gráfico da  $f$  do Exemplo 3.13.



Fonte: Autoria própria, 2024.

Notemos que  $f$  é contínua e limitada inferiormente, porém, não é limitada superiormente. Além disso, temos  $f(1) = 1 = \inf\{f(x); x \in (0, 1]\}$ , logo, 1 é o ponto de mínimo de  $f$ .

### 3.3 Aplicação 1: Teorema de Weierstrass

Vimos nos exemplos 3.10 a 3.13 funções com domínio em diferentes tipos de intervalos. Além disso, observamos que nem toda função contínua definida em um intervalo limitado é limitada, como é o caso do Exemplo 3.13. O lema a seguir garante que toda função contínua definida em um intervalo fechado e limitado é limitada.

**Lema 3.1.** *Toda função contínua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada.*

**Demonstração.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua em um intervalo fechado e limitado  $[a, b]$ . Vamos mostrar que  $f$  é limitada superiormente. Suponhamos, por contradição, que  $f$  não seja limitada superiormente. Assim, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $x_n \in [a, b]$  tal que  $f(x_n) > n$ . Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass (Teorema 2.6), podemos obter uma subsequência  $(x_{n_k})$  de  $(x_n)$  convergindo para algum ponto  $x \in [a, b]$ , isto é,  $x_{n_k} \rightarrow x$ . Dada a continuidade de  $f$ , obtemos  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$ . Portanto, a partir de um certo índice  $n_j$  temos  $f(x_{n_j}) < f(x) + 1$ , o que implica dizer que a sequência  $(f(x_{n_k}))$  é, em particular, limitada. No entanto, isso contradiz o fato de que  $f(x_{n_j}) > n_j$ . Portanto,  $f$  é limitada superiormente. Analogamente, mostramos que  $f$  é limitada inferiormente e, assim,  $f$  limitada.  $\square$

Usando o lema acima chegamos à primeira aplicação do nosso trabalho, a qual é conhecida como Teorema de Weierstrass. Através deste resultado, veremos que uma função contínua definida em um intervalo limitado e fechado sempre assume valores máximo e mínimo em pontos de seu domínio.

**Teorema 3.5** (Weierstrass). *Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua em  $[a, b]$ , então  $f$  assume valores máximo e mínimo em  $[a, b]$ .*

**Demonstração.** Desde que  $f$  é uma função contínua no intervalo fechado e limitado  $[a, b]$ , pelo Lema 3.1,  $f$  é limitada superiormente e inferiormente. Seja

$$M = \sup\{f(x); x \in [a, b]\}.$$

Assim, podemos construir uma sequência  $(x_n)$  em  $[a, b]$  tal que  $f(x_n) \rightarrow M$ . Usando o Teorema de Bolzano-Weierstrass, encontramos uma subsequência  $(x_{n_k})$  de  $(x_n)$  que converge para um certo  $x \in [a, b]$ . Como  $f$  é contínua segue de  $x_{n_k} \rightarrow x$  que  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$ . Por outro lado, como  $f(x_n) \rightarrow M$  teremos que  $f(x_{n_k}) \rightarrow M$ . Pela unicidade do limite, concluímos que  $f(x) = M$ , ou seja, a função  $f$  atinge máximo em  $[a, b]$ . De modo análogo, mostramos que  $f$  atinge mínimo em  $[a, b]$ .  $\square$

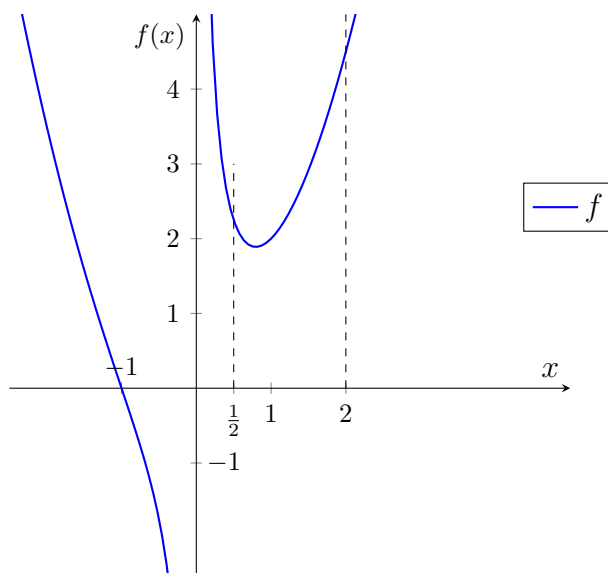
Em termos gerais, o Teorema de Weierstrass nos garante que em toda função contínua  $f$  definida em um intervalo fechado e limitado  $I$  existem  $x_1, x_2 \in I$  tais que  $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ , para todo  $x \in I$ .

**Exemplo 3.14.** *Seja  $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida por  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ . Mostremos que  $f$  admite máximo e mínimo no intervalo  $I = [\frac{1}{2}, 2]$ .*

Inicialmente, note que  $f$  é contínua em  $I$ , uma vez que  $f$  resulta de uma soma de uma função polinomial com uma função racional em  $x$ , sendo ambas contínuas no intervalo  $[\frac{1}{2}, 2]$ . Desde que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e limitada em  $I$ , decorre do Teorema de Weierstrass que existem  $x_1, x_2 \in [\frac{1}{2}, 2]$  tais que  $f(x_1)$  é o valor mínimo de  $f$  em  $[\frac{1}{2}, 2]$  e  $f(x_2)$  o valor máximo de  $f$  neste intervalo, onde

$$f(x_1) = \inf \left\{ x^2 + \frac{1}{x}; x \in \left[ \frac{1}{2}, 2 \right] \right\} \text{ e } f(x_2) = \sup \left\{ x^2 + \frac{1}{x}; x \in \left[ \frac{1}{2}, 2 \right] \right\}$$

Figura 3.6: Gráfico da  $f$  do Exemplo 3.14.



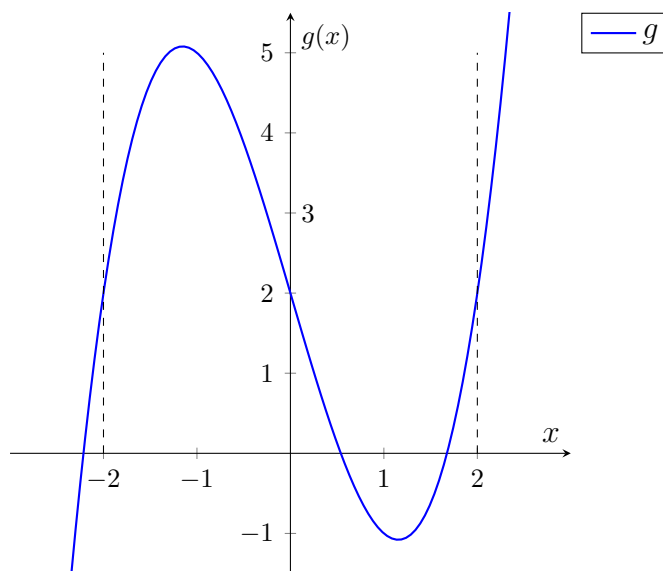
Fonte: Autoria própria, 2024.

**Exemplo 3.15.** Mostremos que a função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = x^3 - 4x + 2$  admite máximo e mínimo no intervalo  $I = [-2, 2]$ .

Como  $g$  é uma função polinomial, então  $g$  é contínua, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , em particular,  $g$  é contínua em  $I$ . Pelo Teorema de Weierstrass, existem  $x_1, x_2 \in [-2, 2]$  tais que  $g(x_1)$  é o valor mínimo e  $g(x_2)$  o valor máximo de  $g$  neste intervalo. Portanto,

$$g(x_1) = \inf\{x^3 - 4x + 2 \mid -2 \leq x \leq 2\} \text{ e } g(x_2) = \sup\{x^3 - 4x + 2 \mid -2 \leq x \leq 2\}.$$

Figura 3.7: Gráfico da  $g$  do Exemplo 3.15



Fonte: Autoria própria, 2024

A existência de máximo e mínimo parece evidente a partir da visualização do gráfico da função contínua. No entanto, a determinação destes pontos é um processo que vai além de uma simples observação visual, pois, em algumas situações específicas, o gráfico pode ser complexo e desafiador de visualizar, exigindo assim uma análise muito mais detalhada, dado que o Teorema de Weierstrass não especifica onde esses pontos extremos ocorrem exatamente.

Para identificar com precisão os máximos e mínimos de uma função contínua,

precisaríamos estender este trabalho ao estudo teórico das Derivadas, o qual possibilitaria analisar o comportamento da função em torno dos pontos críticos e assim determinar se são máximos, mínimos ou pontos de inflexão.

### 3.4 Aplicação 2: Teorema da Continuidade Uniforme

**Definição 3.7.** Uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $I$  é um intervalo de  $\mathbb{R}$ , é dita uniformemente contínua em  $I$  se, para qualquer  $\varepsilon > 0$ , dado arbitrariamente, existe  $\delta > 0$  tal que

$$x, y \in I, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

**Exemplo 3.16.** A função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = ax + b$  é uniformemente contínua. De fato, dado  $\varepsilon > 0$ , escolhemos  $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$ . Então, para qualquer  $y \in I$ , temos

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |(ax + b) - (ay + b)| = |ax - ay| = |a||x - y| < |a|\delta = \varepsilon.$$

**Exemplo 3.17.** Toda função lipschitziana é uniformemente contínua. De fato, considere  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função lipschitziana. Conforme o Exemplo 3.7, dado  $\varepsilon > 0$ , basta tomar  $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$  que teremos

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| < \varepsilon.$$

Logo,  $f$  é uniformemente contínua em  $I$ .

Note que se  $f$  é uniformemente contínua, então  $f$  é também contínua, basta tomar  $y = a$ . Porém, a recíproca não é verdadeira, como mostra o exemplo abaixo.

**Exemplo 3.18.** A função  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$  é contínua, mas não é uniformemente contínua. Com efeito, dado  $\varepsilon = 1$ , tomemos  $x = n$  e  $y = n + \frac{1}{n}$ .

Então, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tomando  $\delta > 0$  tal que  $\delta > \frac{1}{n}$ , teremos

$$|x - y| = \left| n - \left( n + \frac{1}{n} \right) \right| = \frac{1}{n} < \delta,$$

porém,

$$|f(x) - f(y)| = \left| n^2 - \left( n + \frac{1}{n} \right)^2 \right| = \left| -2 - \frac{1}{n^2} \right| = 2 + \frac{1}{n^2} > 1 = \varepsilon.$$

Portanto,  $f$  não é uniformemente contínua.

O próximo teorema corresponde à segunda aplicação do nosso trabalho, o qual nos diz que a recíproca citada acima vale quando a função contínua estiver definida em um intervalo limitado e fechado.

**Teorema 3.6.** *Seja  $I$  um intervalo limitado e fechado. Toda função contínua  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uniformemente contínua.*

**Demonstração.** Suponhamos que  $f$  não seja uniformemente contínua. Então, por definição, existe um  $\varepsilon > 0$  tal que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , podemos encontrar  $x_n, y_n \in I$  de modo que  $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$  e  $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ . Desde que  $I$  é limitado e fechado, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, podemos obter uma subsequência  $(x_{n_k})$  de  $(x_n)$  que converge para um ponto  $x \in I$ . E, como

$$|y_{n_k} - x| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| \leq \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x|,$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ , segue que  $\lim y_{n_k} = x$ . Finalmente, como  $f$  é contínua, por hipótese, então  $\lim f(x_{n_k}) = \lim f(y_{n_k}) = f(x)$ , o que implica em  $\lim [f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})] = 0$ . Porém, este fato contradiz a desigualdade  $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$ , para todo  $k$ . Logo,  $f$  é uniformemente contínua.  $\square$

# *CONSIDERAÇÕES FINAIS*

---

Por meio deste trabalho, tivemos a oportunidade de mergulhar nos fundamentos da Análise Matemática, explorando desde os alicerces dos números reais, passando por sequências numéricas, limites e funções contínuas, culminando na aplicabilidade do Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Vimos que os conceitos de sequências numéricas são essenciais para compreendermos o Teorema de Bolzano-Weierstrass, o qual estabelece condições de convergência para sequências limitadas. Em particular, o teorema é essencial quando lidamos com funções contínuas definidas em intervalos limitados e fechados, dado que a continuidade de funções pode ser expressa em termos de sequências.

Finalmente, acreditamos que este trabalho pode contribuir para a formação dos acadêmicos do curso de Matemática que buscam avançar em seus estudos por meio de uma pós-graduação na área de Análise.

# REFERÊNCIAS

---

- [1] ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Análise Matemática para Licenciatura**. 3. ed. [revisada e ampliada]. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.
- [2] DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, Gelson. *Álgebra Moderna*. 4. ed. São Paulo: Atual, 2003.
- [3] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise I**. 2. ed. [reimpr.]. Rio de Janeiro: LTC, 2011.
- [4] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.
- [5] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo, vol. 1**. 5. ed. [reimpr.]. Rio de Janeiro: LTC, 2014.
- [6] LIMA, Elon Lages. **Análise Real, vol. 1**. 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA (Coleção Matemática Universitária), 2008.
- [7] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise, vol. 1**. 15. ed. Rio de Janeiro: IMPA (Coleção Projeto Euclides), 2019.