



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CID TADEO SILVA DOS REIS

SALINÓPOLIS

2020

CID TADEO SILVA DOS REIS

APLICAÇÃO DA INTEGRAL NA ROTAÇÃO DAS CÔNICAS.

Trabalho de conclusão de curso apresentado a Universidade Federal do Pará, campus de salinópolis/PA, como requisito básico para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Amilcar Montalban Sayago

SALINÓPOLIS

2020

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a)
autor(a)**

S624a Siva dos Reis, Cid Tadeo.
Aplicação da integral na rotação das cônicas / Cid Tadeo
Siva dos Reis. — 2023.
56 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Amilcar Montabán Saygo
Trabalho de Conclusão (Graduação) - Universidade
Federal do Pará, , 3, Belém, 2023.

1. Cônicas . 2. Rotação . 3. Aplicação . 4. Integração
. I. Título.

CID TADEO SILVA DOS REIS

APLICAÇÃO DA INTEGRAL NA ROTAÇÃO DAS CÔNICAS.

Trabalho de conclusão de Curso - TCC, apresentado como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática, da faculdade de Matemática, Campus Universitário de Salinópolis/Pará, vinculada à Universidade Federal do Pará, como orientador o professor Dr. Amilcar montalban Sayago.

Aprovada em: 22 / 12 / 2023

Conceito: Excelente

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br AMILCAR MONTALBAN SAYAGO
Data: 16/02/2025 07:10:45-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Amilcar Montalban Sayago (Orientador)
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Documento assinado digitalmente
gov.br LUIZ GUTENBERG ROSARIO MIRANDA
Data: 16/02/2025 10:50:00-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Luiz Gutemberg Rosário Miranda
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Documento assinado digitalmente
gov.br JEZIEL DO NASCIMENTO CORREIA
Data: 16/02/2025 09:19:29-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Jeziel Do Nascimento Correia
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Esse trabalho 'e dedicado a minha família e
ao meu orientador.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus que me concedeu saúde e forças para concluir este trabalho. Tamb'ém agradeço ao professor Amílcar que me ajudou em muitos momentos difíceis e me incentivou.

RESUMO

Mostra-se que, o estudo de rotação das cônicas é uma base forte quando se tem por objetivo integrar as mesmas. Uma vez que, a inequação geral das cônica apresenta em uma de suas parcelas um termos misto, isto é, com duas varáveis, sendo necessário fazer a eliminação destes por meio da rotação dos eixos coordenados. Diante disso, a análise das inequações reduzidas em um novo sistema fica mais flexível o estudo na fronteira, podendo ser expressada com a igualdade uma função. Assim, chega-se ao resultado esperado, por meio das fórmulas de área, volume de revolução, área de superfície de revolução e comprimento de arco.

Palavras-chave: Cônicas. Aplicações. Rotação. Inequação. Integral.

ABSTRACT

It is shown that the study of rotation of conics is a strong basis when considering aim to integrate them. Since the general inequality of the conics presents in a of its plots a mixed terms, that is, with two variables, being necessary to make these are eliminated by rotating the coordinate axes. Given this, the analysis of the reduced inequalities in a new system makes the study at the frontier more flexible, and can be expressed with equality is a function. Thus, the expected result is reached, through the area formulas, volume of revolution, area surface of revolution and arc length.

Keywords: Conics. Applications. Rotation. Inequality. Integral.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	CÔNICAS	10
2.1	Cônicas	10
2.2	Parábola	10
2.3	Elipse	14
2.4	Hipérbole	17
3	ROTAÇÃO	20
4	APLICAÇÕES	24
4.1	Cálculo de áreas	24
4.2	Cálculo de volume de sólido de revolução	33
4.3	Cálculo de áreas de superfícies de revolução	39
4.4	Cálculo de comprimento de arco	50
5	CONCLUSÃO	55

1 INTRODUÇÃO

Com o objetivo, de se entender o estudo das cônicas no plano, possibilitou-se uma abordagem particular de cada cônica na sua forma canônica. Inicialmente foram feitas a apresentação de cada uma das cônicas, fazendo cálculos algébricos para chegar à sua forma canônica. Para isto, foram introduzidos os seguintes teoremas; 2.1, 2.2 e 2.3. Posteriormente estudamos a rotação dos eixos coordenados, saindo do sistema XOY para o sistema $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$, onde o ângulo de rotação θ é obtido girando o sistema XOY no sentido positivo, para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, chegando assim no sistema $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$, dado pela seguinte relação ;

$$\begin{cases} x = \bar{x} \cos(\theta) - \bar{y} \sin(\theta) \\ y = \bar{x} \sin(\theta) + \bar{y} \cos(\theta), \end{cases} \quad (1.1)$$

que se obtém da Figura 12 do Teorema 3.1.

Com isso, enunciamos o Teorema 3.2, o qual permite reduzir a equação geral das cônicas $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ na forma $\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0$, o que possibilitou expressar estas curvas como função de \bar{x} , uma vez, que a forma geral não é função. Diante disto, foi possível fazer a integração, agora com as curvas em um novo sistema de coordenadas como mostra a equação (3.6), isto é, como função. Sendo assim, partimos direto para as aplicações, calculando a área, volume de revolução, área de superfície de revolução e comprimento de arco, onde foram utilizados as seguintes fórmulas;

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \\ \mathcal{V} &= \pi \int_a^b [[f(x)]^2 - [g(x)]^2] dx. \\ \mathcal{A}_x &= 2\pi \int_a^b \left[f(x) \sqrt{1 + \left[\frac{d}{dx} f(x) \right]^2} + g(x) \sqrt{1 + \left[\frac{d}{dx} g(x) \right]^2} \right] dx. \\ \mathcal{L} &= \int_a^b \left[\sqrt{1 + \left[\frac{d}{dx} f(x) \right]^2} + \sqrt{1 + \left[\frac{d}{dx} g(x) \right]^2} \right] dx. \end{aligned}$$

Que podem ser encontradas em 4.1, 4.14, 4.23 e 4.36. Os problemas 4.1, 4.2, 4.3, 4.40, 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8 foram solucionados utilizando os teoremas, fórmulas e equações apresentados nas referências acima, bem como métodos de resoluções de cálculo diferencial e integral, concluindo o objetivo central.

2 CÔNICAS

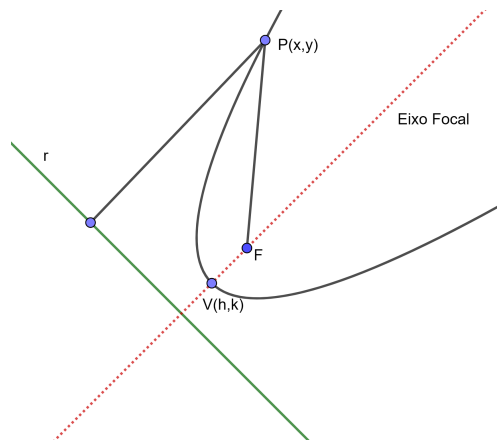
2.1 Cônicas

De [6], cônica é o título da obra em que o matemático e astrônomo grego apolônio de Pérgamo (262 a.C.-190 a.C.) apresenta o mais completo estudo das curvas obtidas a partir de cortes (secções) específicos em cones: a parábola, a elipse e a hipérbole, atribuindo a elas os nomes como são conhecidos até hoje. Essa obra auxiliou o trabalho de muitos pensadores, principalmente astrônomos. Copérnico, Kepler, Halley e Newton, por exemplo, fizeram uso de suas configurações para explicar fenômenos físicos, como as trajetórias dos planetas e a trajetória descrita por um projétil. O estudo da parábola segundo [1].

2.2 Parábola

Definição 2.1. Consideremos num plano Π um ponto F e uma reta diretriz r fixos, ao conjunto dos pontos $P(x,y)$ de Π equidistantes de F e r se dá o nome de parábola, isto é, $d(P, F) = d(P, r)$.

Figura 1: Construção da Parábola



Fonte: Elaborado pelo autor.

Da Figura 1 tem-se os elementos da parábola:

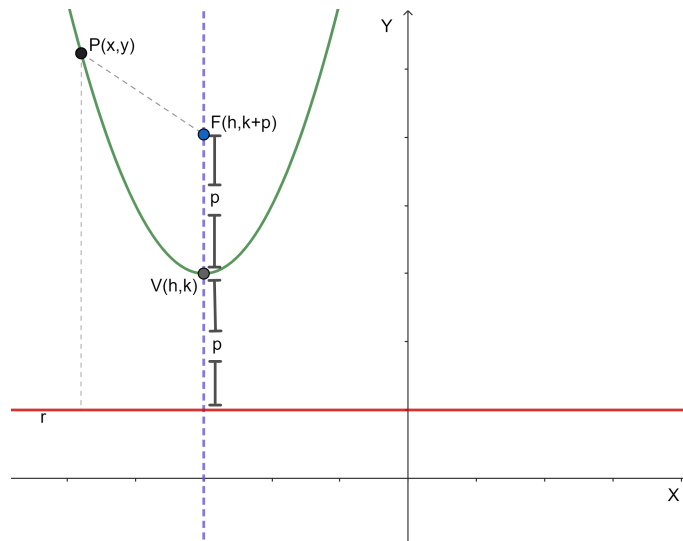
- F : Foco
- r : Diretriz
- $2p$: Parâmetro, isto é, $p = d(V, r) = d(V, F)$.
- Eixo de simetria: reta que passa por F e perpendicular a r .
- V : Vértice.

Teorema 2.1. Dado o foco F , $p > 0$ e o vértice $v(h, k)$ da parábola, tem-se;

- (i) Eixo focal vertical se e somente se;
- (a) A equação da parábola é $(y - k) = \frac{1}{4p}(x - h)^2$, com $\frac{1}{4p} > 0$;
- (b) A equação da parábola é $(y - k) = -\frac{1}{4p}(x - h)^2$, com $-\frac{1}{4p} < 0$;
- (ii) Eixo focal horizontal se e somente se;
- (a) A equação da parábola é $(x - h) = \frac{1}{4p}(y - k)^2$, com $\frac{1}{4p} > 0$;
- (b) A equação da parábola é $(x - h) = -\frac{1}{4p}(y - k)^2$, com $-\frac{1}{4p} < 0$

Demonstração.(i)-(a)

Figura 2: Parábola com concavidade para cima



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tomemos um sistema ortogonal como se mostra na Figura 2. Seja $F(h, p + k)$ o foco e a reta diretriz $r : y + p - k = 0$.

Usando a definição da parábola temos $d(P, F) = d(P, r)$, isto é,

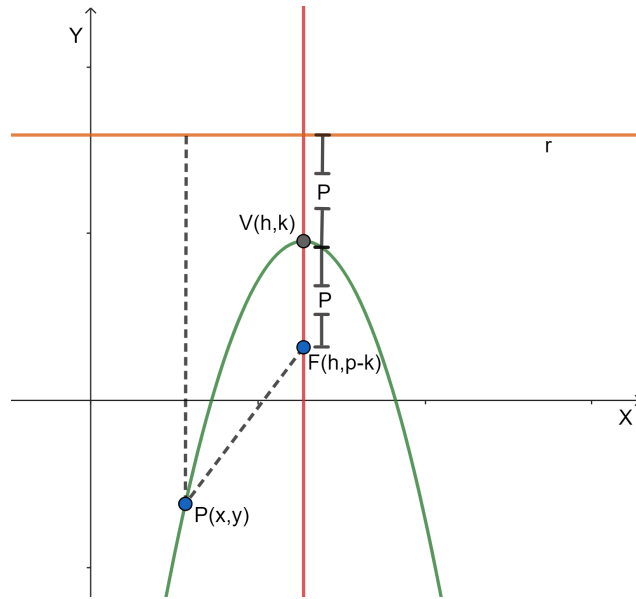
$$\begin{aligned} \sqrt{(x - h)^2 + (y - (p + k))^2} &= |y + p - k| \Leftrightarrow (x - h)^2 + (y - (p + k))^2 = (y + p - k)^2 \\ &\Leftrightarrow (x - h)^2 = (y + p - k)^2 - (y - (p + k))^2 \\ &\Leftrightarrow (x - h)^2 = (p - k + p + k)(2y - 2k) \\ &\Leftrightarrow 4p(y - k) = (x - h)^2 \\ &\Leftrightarrow (y - k) = \frac{1}{4p}(x - h)^2. \end{aligned}$$

□

Demonstração. (i)-(b)

Tomemos um sistema ortogonal como se mostra na Figura 3. Seja $F(h, p - k)$ o foco e a reta diretriz $r : -y + p + k = 0$.

Figura 3: Parábola com concavidade para baixo



Fonte: Elaborado pelo autor.

Usando a definição 2.1, $d(P, F) = d(P, r)$, isto é,

$$\begin{aligned}
 \sqrt{(x-h)^2 + (y - (-p+k))^2} &= |-y+p+k| \Leftrightarrow (x-h)^2 + (y - (-p+k))^2 = (-y+p+k)^2 \\
 &\Leftrightarrow (x-h)^2 = (-y+p+k)^2 - (y - (-p+k))^2 \\
 &\Leftrightarrow (x-h)^2 = (p+k+p-k)(-2y+2k) \\
 &\Leftrightarrow -4p(y-k) = (x-h)^2 \\
 &\Leftrightarrow (y-k) = -\frac{1}{4p}(x-h)^2.
 \end{aligned}$$

□

Demonstração. (ii)-(a)

Tomemos um sistema ortogonal como se mostra na Figura 4. Seja $F(h+p, k)$ o foco e a reta diretriz $r: x-p-h=0$.

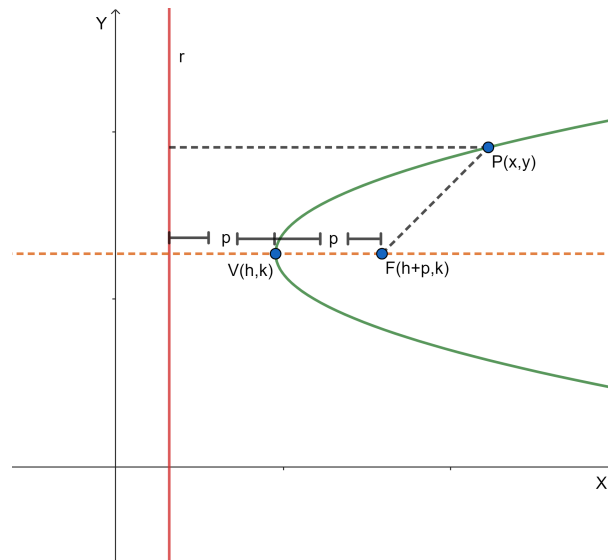
Usando a definição da 2.1 temos $d(P, F) = d(P, r)$, isto é,

$$\begin{aligned}
 \sqrt{(x-(h+p))^2 + (y-k)^2} &= |x+p-h| \Leftrightarrow (x-(h+p))^2 + (y-k)^2 = (x-p-h)^2 \\
 &\Leftrightarrow (y-k)^2 = (x+p-h)^2 - (x-(h+p))^2 \\
 &\Leftrightarrow (y-k)^2 = (p+h+p-k)(2x-2h) \\
 &\Leftrightarrow 4p(x-h) = (y-k)^2 \\
 &\Leftrightarrow (x-h) = \frac{1}{4p}(y-k)^2.
 \end{aligned}$$

□

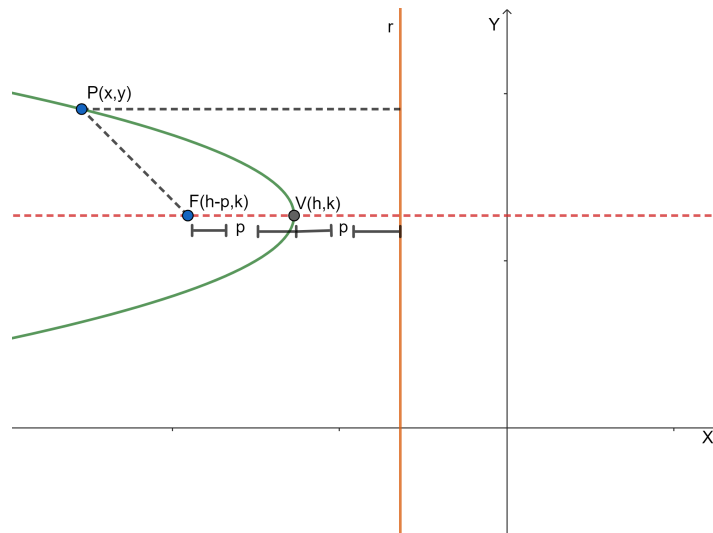
Demonstração. (ii)-(b)

Figura 4: Parábola com concavidade para direita



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 5: Parábola com concavidade para esquerda



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tomemos um sistema ortogonal como se mostra na Figura 5. Seja $F(h-p, k)$ o foco e a reta diretriz $r: -x + p + h = 0$.

Usando a definição 2.1, $d(P, F) = d(P, r)$, isto é,

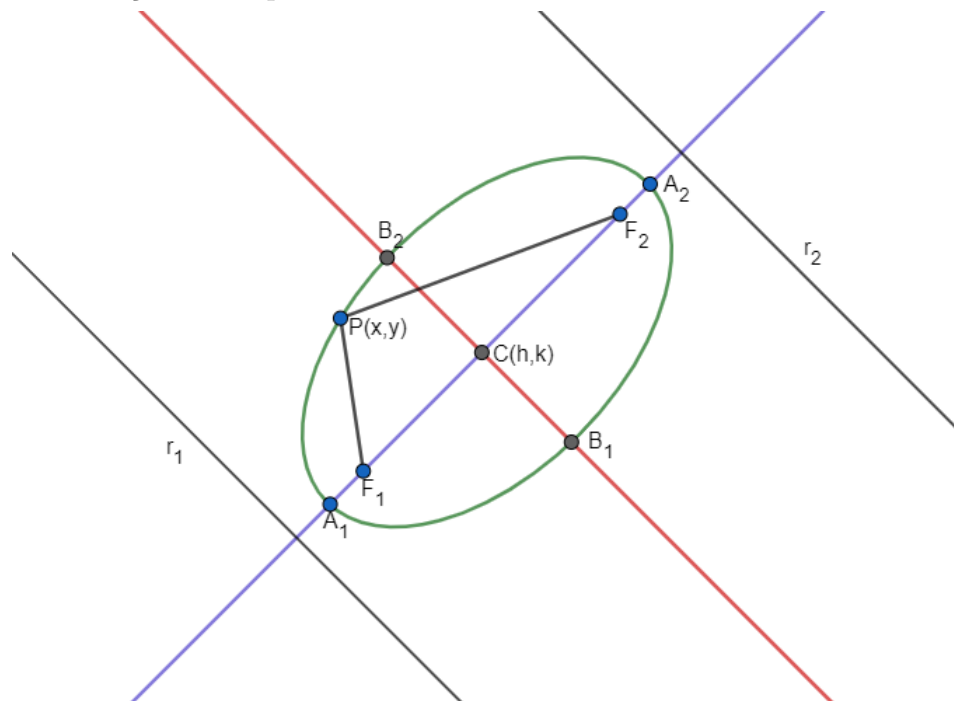
$$\begin{aligned}
 \sqrt{(x - (h - p))^2 + (y - k)^2} &= |-x + p + h| \Leftrightarrow (x - (h - p))^2 + (y - k)^2 = (-x + p + h)^2 \\
 &\Leftrightarrow (y - k)^2 = (-x + p + h)^2 - (x - (h - p))^2 \\
 &\Leftrightarrow (y - k)^2 = (p + h + p - k)(-2x + 2h) \\
 &\Leftrightarrow -4p(x - h) = (y - k)^2 \\
 &\Leftrightarrow (x - h) = -\frac{1}{4p}(y - k)^2.
 \end{aligned}$$

O estudo da elipse segundo [1].

2.3 Elipse

Definição 2.2. Consideremos em um plano Π dois pontos fixos F_1 e F_2 , com $2c > 0$ e $a > 0$ constante. Ao conjunto dos pontos $P \in \Pi$, tais que; $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$, se dá o nome de elipse.

Figura 6: Construção da Elipse.



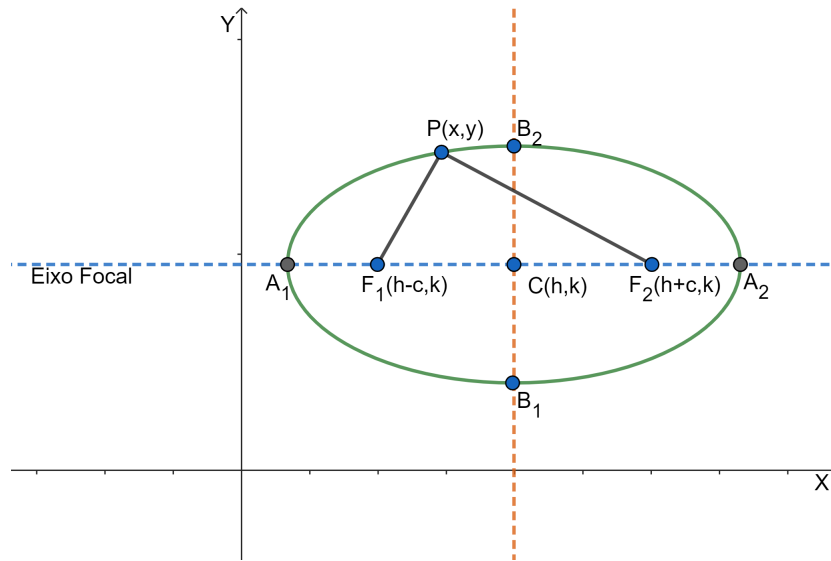
Fonte: Elaborado pelo autor.

Da Figura 6 tem-se os elementos da elipse:

- F_1, F_2 : Focos
- $d(F_1, F_2) = 2c$
- r_1 e r_2 : diretrizes
- $\overline{A_1A_2}$: Eixo maior
- $\overline{B_1B_2}$: Eixo menor
- Eixo de simetria: reta passa pelos focos e perpendicular a r_1 e r_2 .
- $C(h, k)$: Centro.
- $a^2 = b^2 + c^2$.

Teorema 2.2. Dados os focos F_1, F_2 e o centro $C(h, k)$ da elipse, temos que;

Figura 7: Eixo focal horizontal.



Fonte: Elaborado pelo autor.

(i) Eixo focal horizontal se e somente se a equação da elipse é: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, com $a > b$.

(ii) Eixo focal vertical se e somente se a equação da elipse é: $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$, com $a > b$.

Demonstração.

(i) Tomando um sistema ortogonal da Figura 7, para $P(x, y)$, $F_1(h - c, k)$ e $F_2(h + c, k)$, usando a definição (2.2), $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$, isto é;

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{(x-h+c)^2 + (y-k)^2} + \sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} = 2a \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{(x-h+c)^2 + (y-k)^2} = 2a - \sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} \\
 \Leftrightarrow & (\sqrt{(x-h+c)^2 + (y-k)^2})^2 = (2a - \sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2})^2 \\
 \Leftrightarrow & (x-h+c)^2 + (y-k)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} + (\sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2})^2 \\
 \Leftrightarrow & (x-h+c)^2 + (y-k)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} + (x-h-c)^2 + (y-k)^2 \\
 \Leftrightarrow & 4c(x-h) = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} \\
 \Leftrightarrow & (c(x-h) - a^2)^2 = (-a\sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2})^2 \\
 \Leftrightarrow & (c(x-h) - a^2)^2 = a^2((x-h-c)^2 + (y-k)^2) \\
 \Leftrightarrow & c^2(x-h)^2 - 2ca^2(x-h) + a^4 = a^2(x-h-c)^2 - 2a^2c(x-h) + a^2c^2 + a^2(y-k)^2 \\
 \Leftrightarrow & (a^2 - c^2)(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^4 - a^2c^2 \\
 \Leftrightarrow & b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2b^2.
 \end{aligned}$$

Como $(a^2 - c^2) \neq 0$, pois $a^2 - c^2 > 0$, pois $a > c > 0$. Mas $a^2 - c^2 = b^2$. Portanto,

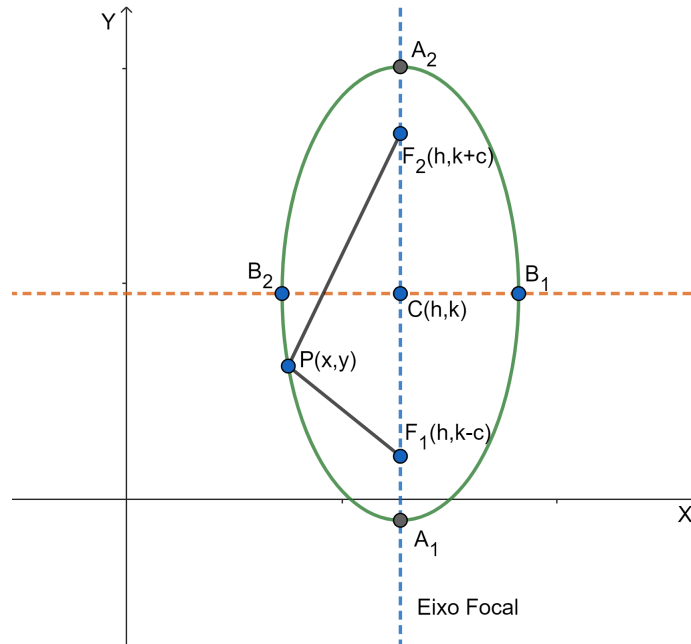
$$b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2b^2. \quad (2.1)$$

Dividindo a equação acima por a^2b^2 , temos;

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1. \quad (2.2)$$

□

Figura 8: Eixo focal Vertical.



Fonte: Elaborado pelo autor .

Demonstração.

(ii) Tomando um sistema ortogonal da Figura 8, para $P(x, y)$, $F_1(h, k - c)$ e $F_2(h, k + c)$, usando a definição (2.2), $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$, isto é;

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x-h)^2 + (y-k+c)^2} + \sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2} = 2a \\ \Leftrightarrow & \sqrt{(x-h)^2 + (y-k+c)^2} = 2a - \sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2} \\ \Leftrightarrow & \left(\sqrt{(x-h)^2 + (y-k+c)^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow & (x-h)^2 + (y-k+c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2} + \left(\sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow & (x-h)^2 + (y-k+c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2} + (x-h)^2 + (y-k-c)^2 \\ \Leftrightarrow & 4c(y-k) = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2} \\ \Leftrightarrow & (c(x-k) - a^2)^2 = \left(-a\sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow & (c(x-k) - a^2)^2 = a^2\left((x-h)^2 + (y-k-c)^2\right) \\ \Leftrightarrow & c^2(x-k)^2 - 2ca^2(x-k) + a^4 = a^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 - 2a^2c(y-k) + a^2c^2 \\ \Leftrightarrow & (a^2 - c^2)(x-k)^2 + a^2(y-h)^2 = a^4 - a^2c^2 \\ \Leftrightarrow & b^2(x-k)^2 + a^2(y-h)^2 = a^2b^2. \end{aligned}$$

Como $(a^2 - c^2) \neq 0$, pois $a^2 - c^2 > 0$, pois $a > c > 0$. Mas $a^2 - c^2 = b^2$. Portanto,

$$b^2(x - k)^2 + a^2(y - h)^2 = a^2b^2. \quad (2.3)$$

Dividindo a equação acima por a^2b^2 , temos;

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1. \quad (2.4)$$

□

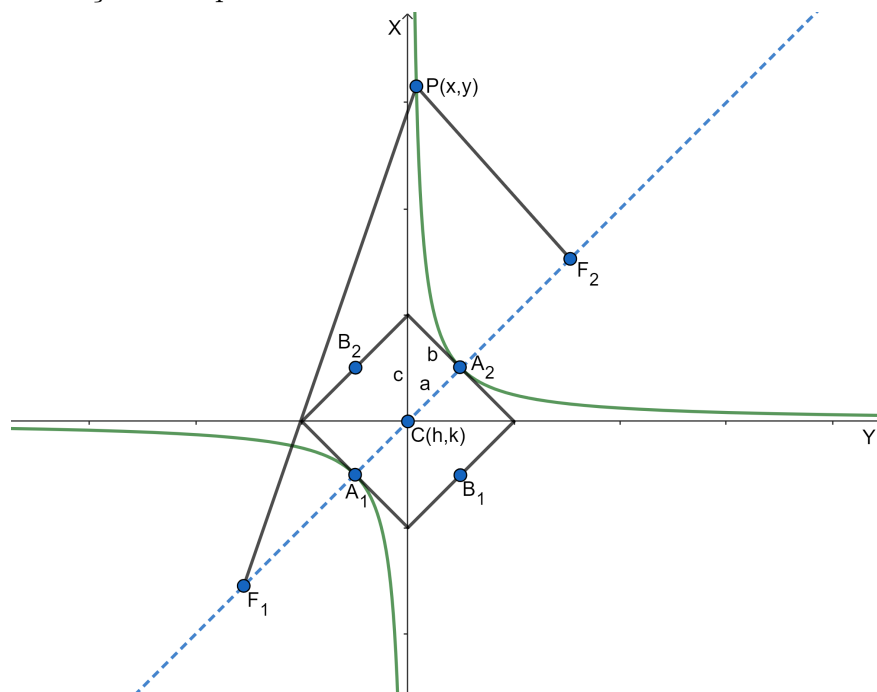
O estudo da hipérbole segundo [1].

2.4 Hipérbole

Definição 2.3. *Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano Π cujo valor absoluto da diferença das distâncias a dois pontos fixos (Focos) é constante e menor do que a distância entre os focos, ou seja, se P é um ponto da hipérbole que tem por focos os pontos F_1 e F_2 , então;*

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

Figura 9: Construção da hipérbole.

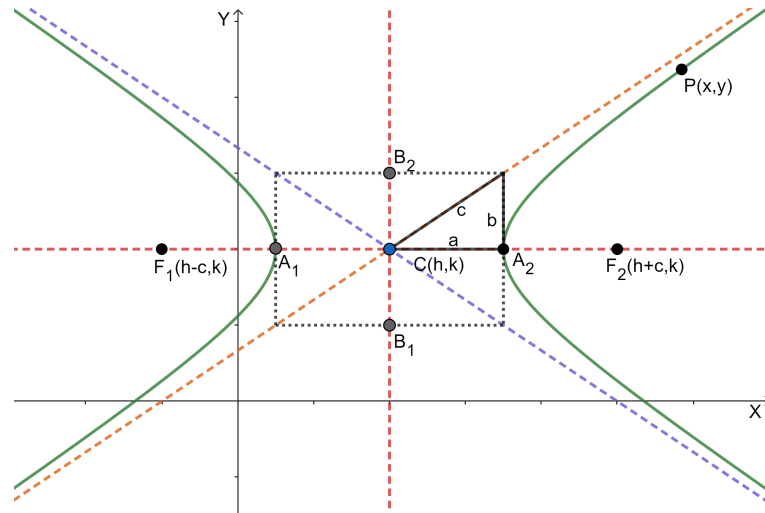


Fonte:Elaborado pelo autor

Da Figura 9 tem-se os elementos da hipérbole:

- F_1, F_2 :Focos
- $d(F_1, F_2) = 2c$

Figura 10: eixo focal horizontal



Fonte:Elaborado pelo autor.

- X e Y : assíntotas
- $\overline{A_1A_2}$: Eixo transversal
- $\overline{B_1B_2}$: Eixo conjugado
- $C(h, k)$: Centro.
- $a^2 = b^2 + c^2$.

Teorema 2.3. *Dados os focos F_1, F_2 e o centro $C(h, k)$ da hipérbole, temos que;*

(i) *Eixo focal horizontal se e somente se a equação da hipérbole é;*

$$H : \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

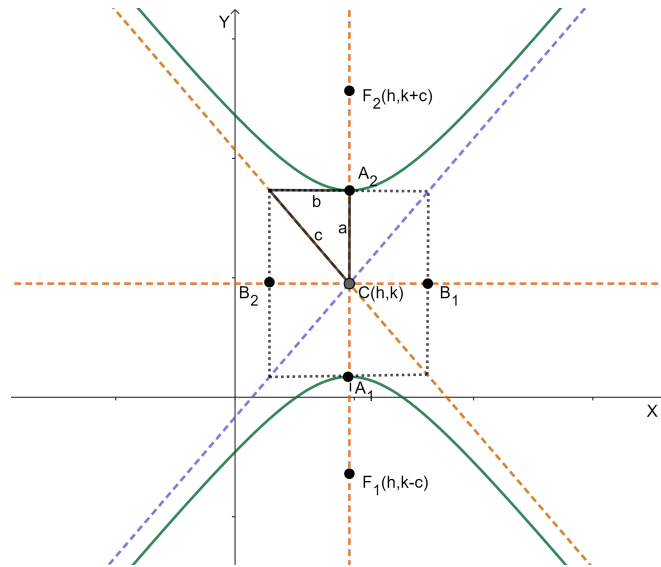
(ii) *Eixo focal vertical se e somente se a equação da hipérbole é;*

$$H : \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1.$$

Demonstração.

- (i) Tomando o sistema ortogonal da Figura 10, para $F_1(h-c, k), F_2(h+c, k)$ e o ponto $P(x, y)$, usando a Definição 2.3, $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$, isto é;

Figura 11: eixo focal vertical



Fonte:Elaborado pelo Autor.

$$\begin{aligned}
 d(P, F_1) - d(P, F_2) &= 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x-h+c)^2 + (y-k)^2} - \sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} = 2a \\
 &\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-h+c)^2 + (y-k)^2} \right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} \right)^2 \\
 &\Leftrightarrow (x-h+c)^2 + (y-k)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} + (x-h-c)^2 + (y-k)^2 \\
 &\Leftrightarrow (x-h+c)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} + (x-h-c)^2 \\
 &\Leftrightarrow 4(x-h)c = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} \\
 &\Leftrightarrow \left(c(x-h) - a^2 \right)^2 = \left(a\sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} \right)^2 \\
 &\Leftrightarrow c^2(x-h)^2 - 2a^2c(x-h) + a^4 = a^2(x-h-c)^2 + a^2(y-k)^2 \\
 &\Leftrightarrow c^2(x-h)^2 - 2a^2c(x-h) + a^4 = a^2(x-h)^2 - 2a^2c(x-h) + a^2c^2 + a^2(y-k)^2 \\
 &\Leftrightarrow (c^2 - a^2)(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = a^2(c^2 - a^2) \\
 &\Leftrightarrow \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.
 \end{aligned}$$

□

Demonstração.

(ii) Dados os focos $F_1(h, k - c)$, $F_2(h, k + c)$ e o ponto $P(x, y)$ tem-se;

$$\begin{aligned}
 d(P, F_1) - d(P, F_2) &= 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x-h)^2 + (y-k+c)^2} - \sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2} = 2a \\
 \Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-h)^2 + (y-k+c)^2} \right)^2 &= \left(2a + \sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2} \right)^2 \\
 \Leftrightarrow (x-h)^2 + (y-k+c)^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2} + (x-h)^2 + (y-k-c)^2 \\
 \Leftrightarrow (y-k+c)^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2} + (y-k-c)^2 \\
 \Leftrightarrow 4(y-k)c &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2} \\
 \Leftrightarrow \left(c(y-k) - a^2 \right)^2 &= \left(a\sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2} \right)^2 \\
 \Leftrightarrow c^2(y-k)^2 - 2a^2c(y-k) + a^4 &= a^2(x-h)^2 + a^2(y-k-c)^2 \\
 \Leftrightarrow c^2(y-k)^2 - 2a^2c(y-k) + a^4 &= a^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 - 2a^2c(y-k) + a^2c^2 \\
 \Leftrightarrow (c^2 - a^2)(y-k)^2 - a^2(x-h)^2 &= a^2(c^2 - a^2) \\
 \Leftrightarrow \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} &= 1.
 \end{aligned}$$

□

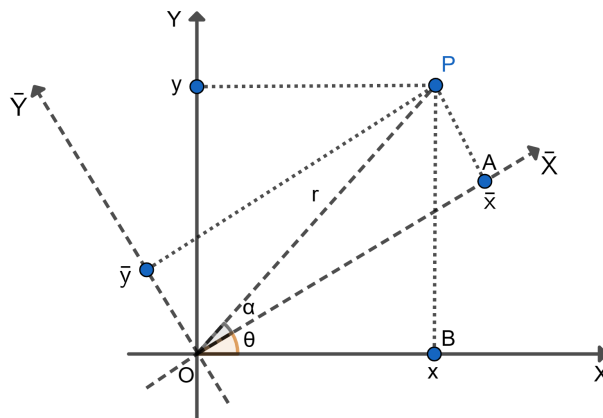
3 ROTAÇÃO

De [4], tem-se o seguinte Teorema;

Teorema 3.1. *Sejam XOY um sistema de eixos ortogonais no plano e seja $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ o sistema de eixos obtidos girando os eixos OX e OY de um ângulo θ , $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, no sentido positivo. Sejam (x, y) e (\bar{x}, \bar{y}) as coordenadas de um ponto P nos sistemas XOY e $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$, respectivamente. Além disso, seja α o ângulo que o vetor OP faz com o semieixo positivo $O\bar{X}$ e; $r = d(P, O)$, temos então:*

$$\begin{cases} x = \bar{x} \cos(\theta) - \bar{y} \sin(\theta) \\ y = \bar{x} \sin(\theta) + \bar{y} \cos(\theta). \end{cases} \quad (3.1)$$

Figura 12



Fonte: Elaborado pelo autor.

Demonstração. Da Figura 12 usando o triângulo retângulo AOP , tem-se:

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = \frac{\bar{x}}{r} \Rightarrow \bar{x} = r \cos(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) = \frac{\bar{y}}{r} \Rightarrow \bar{y} = r \text{sen}(\alpha) \end{cases} \quad (3.2)$$

e usando o triângulo retângulo BOP , tem-se:

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \theta) = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos(\alpha + \theta) \\ \text{sen}(\alpha + \theta) = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \text{sen}(\alpha + \theta). \end{cases} \quad (3.3)$$

Aplicando as identidades trigonométricas de ângulos compostos, da equação 3.3 segue que;

$$\begin{cases} x = r \cos(\alpha) \cos(\theta) - r \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\theta) \\ y = r \text{sen}(\alpha) \cos(\theta) + r \text{sen}(\theta) \cos(\alpha). \end{cases} \quad (3.4)$$

Substituindo a equação 3.2 em 3.4, temos;

$$\begin{cases} x = \bar{x} \cos(\theta) - \bar{y} \text{sen}(\theta) \\ y = \bar{x} \text{sen}(\theta) + \bar{y} \cos(\theta). \end{cases}$$

□

O Teorema a seguir foi motivado de [2].

Teorema 3.2. *Sejam XOY um sistema de eixos ortogonais fixado, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ um ângulo e, nesse sistema de eixos ortogonais considere a inequação geral do 2ª grau nas variáveis x e y :*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Cy + F \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0 \quad (3.5)$$

Então, a rotação positiva de centro O e amplitude θ reduz a inequação 3.5 à inequação:

$$\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + \bar{F} \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0 \quad (3.6)$$

onde (\bar{x}, \bar{y}) são as coordenadas de um ponto no sistema de eixo ortogonais $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ obtido pela rotação de centro O e amplitude θ dos eixos OX e OY . Além disso, temos:

$$\begin{cases} \theta = 45^\circ, \text{ se } A = C. \\ \tan 2\theta = \frac{B}{A-C}, \text{ se } A \neq C. \end{cases}$$

Demonstração. Substituindo a equação (3.1) em (3.5) obtemos a inequação nas coordenadas \bar{x} e \bar{y} :

$$A_\theta \bar{x}^2 + B_\theta \bar{x}\bar{y} + C_\theta \bar{y}^2 + D_\theta \bar{x} + E_\theta \bar{y} + F_\theta \leq 0,$$

onde,

$$A_\theta = A \cos^2 \theta + \text{sen} \theta \cos \theta + C \text{sen}^2 \theta.$$

$$B_\theta = 2(C - A) \text{sen} \theta \cos \theta + B(\cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta)$$

$$C_\theta = A \text{sen}^2 \theta - \text{sen} \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta.$$

$$D_\theta = D \cos \theta + E \text{sen} \theta$$

$$E_\theta = -D \text{sen} \theta + E \cos \theta$$

$$F_\theta = F.$$

Em forma de matriz temos o seguinte;

$$\begin{pmatrix} A_\theta & \frac{B_\theta}{2} \\ \frac{B_\theta}{2} & C_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

e

$$\begin{pmatrix} D_\theta \\ E_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Determinemos agora o ângulo θ , $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, para o qual o coeficiente B_θ da equação nas variáveis \bar{x} e \bar{y} é igual a zero.

Sendo

$$\begin{aligned} B_\theta &= 0 \\ 2(C - A) \text{sen} \theta \cos \theta + B(\cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta) &= 0 \\ (C - A) \text{sen} 2\theta + B \cos 2\theta &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Da equação 3.9, se $A = C$, $B \cos(2\theta) = 0$, $2\theta = 90^\circ$ então $\theta = 45^\circ$. Por outro lado se $A \neq C$, então $\tan 2\theta = \frac{B}{A-C}$.

Pela identidade trigonométrica $1 + \tan^2 2\theta = \sec^2 2\theta$, e pelo fato que $\tan 2\theta$ e $\sec 2\theta$ têm o mesmo sinal, já que $0 < 2\theta < 180^\circ$, obtemos que;

$$\cos 2\theta = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 2\theta}}, \quad \text{se } \frac{B}{A-C} > 0 \quad (3.10)$$

$$\cos 2\theta = -\sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 2\theta}}, \quad \text{se } \frac{B}{A-C} < 0.$$

Além disso, como $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ e $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, temos que;

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

e

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta.$$

Ou seja;

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} \quad (3.11)$$

e

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}.$$

Fazendo; $A_\theta = \bar{A}$, $C_\theta = \bar{C}$, $D_\theta = \bar{D}$, $E_\theta = \bar{E}$ e $F_\theta = \bar{F}$; das equações 3.7, 3.8 tem-se:

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Portanto, a inequação do segundo grau fica na forma,

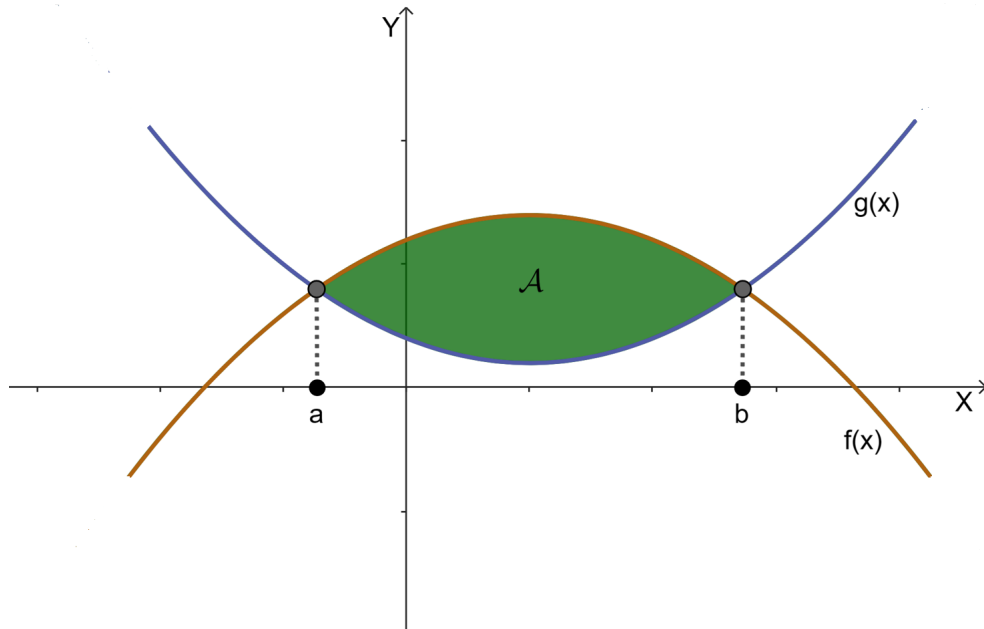
$$\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + \bar{F} \leq 0.$$

□

4 APLICAÇÕES

4.1 Cálculo de áreas

Figura 13: Gráfico



Fonte: Elaborado pelo autor.

Da Figura 13. De [5] temos a fórmula de área (\mathcal{A}) :

$$\mathcal{A} = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \quad (4.1)$$

Problema 4.1. Calcule a área do conjunto de todos os pontos (x, y) de:

$$\frac{52}{25}x^2 - \frac{72}{25}xy + \frac{73}{25}y^2 + \frac{24}{5}x - \frac{32}{5}y \leq 0 \quad (4.2)$$

e

$$\frac{52}{25}x^2 - \frac{72}{25}xy + \frac{73}{25}y^2 - 4 \leq 0. \quad (4.3)$$

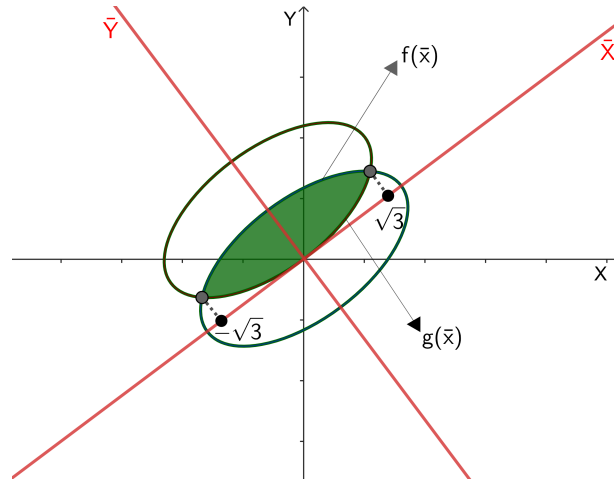
Solução :

Primeiro passo: Reduzindo por uma rotação dos eixos coordenados a inequação (4.2). Do Teorema 3.2, destacando os coeficientes da inequação $A = \frac{52}{25}$, $B = -\frac{72}{25}$, $C = \frac{73}{25}$, $D = \frac{24}{5}$, $E = -\frac{32}{5}$ e $F = 0$. Calculando seno e cosseno do ângulo de rotação θ , como $A \neq C$, temos que;

$$\tan(2\theta) = \frac{B}{A - C} = \frac{-\frac{72}{25}}{\frac{52}{25} - \frac{73}{25}} = \frac{24}{7},$$

com isso $2\theta \in I.Q$, usando as identidades trigonométricas de arco duplo das equações

Figura 14: Gráfico



Fonte: Elaborado pelo autor.

(3.10) e (3.11)

$$\cos(2\theta) = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2(2\theta)}} = \sqrt{\frac{1}{1 + (\frac{24}{7})^2}} = \frac{7}{25},$$

logo

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{2}} = \frac{4}{5}$$

e

$$\sin(\theta) = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{7}{25}}{2}} = \frac{3}{5}.$$

Agora calculando os coeficientes da inequação (3.6): \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} , \bar{E} temos que $\bar{F} = F = 0$, das equações (3.12) e (3.13) temos que;

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{52}{25} & \frac{-72}{25} \\ \frac{-72}{25} & \frac{73}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{24}{5} \\ -\frac{32}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Concluimos que $\bar{A} = 1$, $\bar{C} = 4$, $\bar{D} = 0$, $\bar{E} = -8$ e $\bar{F} = 0$. Da inequação (3.6) temos a inequação nas coordenadas \bar{x} e \bar{y} dada por:

$$\bar{x}^2 + 4\bar{y}^2 - 8\bar{y} \leq 0.$$

Fazendo o completamento de quadrados , tem-se;

$$\frac{\bar{x}^2}{4} + (\bar{y} - 1)^2 \leq 1. \quad (4.4)$$

Segundo passo: Reduzindo por uma rotação dos eixos coordenados a inequação (4.3). Do Teorema 3.2, destacando os coeficientes da inequação $A = \frac{52}{25}$, $B = -\frac{72}{25}$, $C = \frac{73}{25}$ e $F = -4$. Calculando seno e cosseno do ângulo de rotação θ , como $A \neq C$, temos que;

$$\tan(2\theta) = \frac{B}{A - C} = \frac{-\frac{72}{25}}{\frac{52}{25} - \frac{73}{25}} = \frac{24}{7},$$

com isso $2\theta \in I.Q$, usando as identidades trigonométricas de arco duplo das equações (3.10) e (3.11)

$$\cos(2\theta) = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2(2\theta)}} = \sqrt{\frac{1}{1 + (\frac{24}{7})^2}} = \frac{7}{25},$$

logo

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{2}} = \frac{4}{5}$$

e

$$\sen(\theta) = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{7}{25}}{2}} = \frac{3}{5}.$$

Agora calculando os coeficientes da inequação (3.6): \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} , \bar{E} temos que $\bar{F} = -4$, das equações (3.12) e (3.13) temos que;

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{52}{25} & -\frac{72}{25} \\ -\frac{72}{25} & \frac{73}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Concluimos que $\bar{A} = 1$, $\bar{C} = 4$, $\bar{D} = 0$, $\bar{E} = 0$ e $\bar{F} = -4$

Da inequação (3.6) temos a inequação nas coordenadas \bar{x} e \bar{y} é dada por:

$$\bar{x}^2 + 4\bar{y}^2 - 4 \leq 0.$$

Simplificando , tem-se:

$$\frac{\bar{x}^2}{4} + \bar{y}^2 \leq 1. \quad (4.5)$$

Calculando a intersecção entre as fronteiras das inequações (4.4), (4.5) da Figura 14 .

$$\begin{cases} \frac{\bar{x}^2}{4} + (\bar{y} - 1)^2 = 1 \\ \frac{\bar{x}^2}{4} + \bar{y}^2 = 1 \end{cases}$$

calculando \bar{x} tem-se :

$$\bar{x} = +\sqrt{3}$$

e

$$\bar{x} = -\sqrt{3}.$$

Portanto da Figura 14 temos os limites de integração entre $\bar{a} = -\sqrt{3}$ e $\bar{b} = \sqrt{3}$.

Expressando as curvas em função de \bar{x} , temos:

$$\bar{y} = -\sqrt{1 - \frac{\bar{x}^2}{4}} + 1 = g(\bar{x}) \quad (4.6)$$

e

$$\bar{y} = \sqrt{1 - \frac{\bar{x}^2}{4}} = f(\bar{x}). \quad (4.7)$$

Calculando a àrea da Figura 14 , usando a fórmula (4.1), temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left[\left(\sqrt{1 - \frac{\bar{x}^2}{4}} \right) - \left(-\sqrt{1 - \frac{\bar{x}^2}{4}} + 1 \right) \right] d\bar{x} \\ &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(2\sqrt{1 - \frac{\bar{x}^2}{4}} - 1 \right) d\bar{x} \\ &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 2\sqrt{1 - \frac{\bar{x}^2}{4}} d\bar{x} - \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} d\bar{x}. \end{aligned}$$

Chamamos:

$$I = \int \sqrt{1 - \frac{\bar{x}^2}{4}} d\bar{x}.$$

Fazendo a mudança variável, temos.

$$\text{sen}(\theta) = \frac{\bar{x}}{2} \Rightarrow 2\cos(\theta)d\theta = d\bar{x}$$

e

$$\theta = \arcsen\left(\frac{\bar{x}}{2}\right).$$

Usando a identidade trigonométrica,

$$\operatorname{sen}^2(\theta) + \operatorname{cos}^2(\theta) = 1 \Rightarrow \operatorname{cos}^2(\theta) = 1 - \operatorname{sen}^2(\theta),$$

temos:

$$\begin{aligned} I &= \int 2\sqrt{1 - \frac{\bar{x}^2}{4}} d\bar{x} \\ &= \int 2\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\theta)} 2\operatorname{cos}(\theta) d\theta \\ &= \int 4\operatorname{cos}(\theta)\operatorname{cos}(\theta) d\theta \\ &= 2 \int 2\operatorname{cos}^2(\theta) d\theta \\ &= 2 \left[\theta + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} \right] \\ &= 2 \left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{\bar{x}}{2}\right) + \frac{\bar{x}}{4}\sqrt{4 - \bar{x}^2} \right]. \end{aligned}$$

Logo temos de I , a área:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 2\sqrt{1 - \frac{\bar{x}^2}{4}} d\bar{x} - \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} d\bar{x} \\ &= 2 \left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{\bar{x}}{2}\right) + \frac{\bar{x}}{4}\sqrt{4 - \bar{x}^2} \right] \Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} - [\bar{x}] \Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \\ &= 2 \left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4 - \sqrt{3}^2} \right) - 2 \left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4 - (-\sqrt{3})^2} \right) \\ &\quad - (\sqrt{3} + \sqrt{3}) \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - 2 \left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - (\sqrt{3} + \sqrt{3}) \\ &= \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \\ &\approx 2,45u^2. \end{aligned}$$

Problema 4.2. Calcule a área do conjunto de todos os pontos (x, y) de:

$$\frac{104}{25}x^2 + \frac{144}{25}xy + \frac{146}{25}y^2 + \frac{64}{5}x - \frac{48}{5}y + 16 \leq 0 \quad (4.8)$$

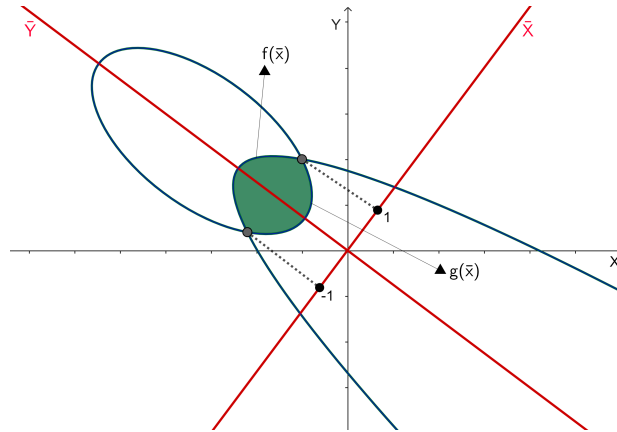
e

$$\frac{9}{25}x^2 + \frac{24}{25}xy + \frac{16}{25}y^2 - \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 3 \leq 0. \quad (4.9)$$

Solução :

Primeiro passo: Reduzindo por uma rotação dos eixos coordenados a inequação (4.8). Do Teorema 3.2, destacando os coeficientes da inequação $A = \frac{104}{25}$, $B = \frac{144}{25}$, $C = \frac{146}{25}$, $D = \frac{64}{5}$, $E = -\frac{48}{5}$ e $F = 16$. Calculando seno e cosseno do ângulo de rotação θ , como

Figura 15: Gráfico



Fonte: Elaborado pelo autor.

$A \neq C$, temos que;

$$\tan(2\theta) = \frac{B}{A - C} = \frac{\frac{144}{25}}{\frac{104}{25} - \frac{146}{25}} = -\frac{24}{7},$$

com isso $2\theta \in II.Q$, usando as identidades trigonométricas de arco duplo das equações (3.10) e (3.11);

$$\cos(2\theta) = -\sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2(2\theta)}} = -\sqrt{\frac{1}{1 + \left(-\frac{24}{7}\right)^2}} = -\frac{7}{25},$$

logo

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{7}{25}}{2}} = \frac{3}{5}$$

e

$$\sen(\theta) = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{2}} = \frac{4}{5}.$$

Agora calculando os coeficientes da inequação (3.6): \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} , \bar{E} temos que $\bar{F} = F = 16$, das equações (3.12) e (3.13) temos que;

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sen(\theta) \\ -\sen(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sen(\theta) \\ \sen(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{104}{25} & \frac{144}{25} \\ \frac{144}{25} & \frac{146}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{pmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{64}{5} \\ -\frac{48}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

Concluimos que $\bar{A} = 8$, $\bar{C} = 2$, $\bar{D} = 0$, $\bar{E} = -16$ e $\bar{F} = 24$. Da inequação (3.6) temos as inequações nas coordenadas \bar{x} e \bar{y} dada por:

$$8\bar{x}^2 + 2\bar{y}^2 - 16\bar{y} + 16 \leq 0.$$

Fazendo o completamento de quadros, tem-se;

$$\frac{\bar{x}^2}{2} + \frac{(\bar{y} - 4)^2}{8} \leq 1. \quad (4.10)$$

Segundo passo: Reduzindo por uma rotação dos eixos coordenados a inequação (4.9). Do Teorema 3.2, destacando os coeficientes da inequação $A = \frac{9}{25}$, $B = \frac{24}{25}$, $C = \frac{16}{25}$, $D = -\frac{4}{5}$, $E = \frac{3}{5}$ e $F = -3$. Calculando seno e cosseno do ângulo de rotação θ , como $A \neq C$, temos que;

$$\tan(2\theta) = \frac{B}{A - C} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{9}{25} - \frac{16}{25}} = -\frac{24}{7},$$

com isso $2\theta \in II.Q$, usando as identidades trigonométricas de arco duplo das equações (3.10) e (3.11);

$$\cos(2\theta) = -\sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2(2\theta)}} = \sqrt{\frac{1}{1 + (-\frac{24}{7})^2}} = -\frac{7}{25},$$

logo

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{7}{25}}{2}} = \frac{3}{5}$$

e

$$\text{sen}(\theta) = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{2}} = \frac{4}{5}.$$

Agora calculando os coeficientes da inequação (3.6): \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} , \bar{E} temos que $\bar{F} = -3$, das equações (3.12) e (3.13);

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{9}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & \frac{16}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Concluimos que $\bar{A} = 1$, $\bar{C} = 0$, $\bar{D} = 0$, $\bar{E} = 1$ e $\bar{F} = -3$. Da inequação (3.6) temos a inequação nas coordenadas \bar{x} e \bar{y} dada por:

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 3 \leq 0.$$

Expressando em função de \bar{x} , tem-se;

$$\bar{y} \leq -\bar{x}^2 + 3. \quad (4.11)$$

Calculando a intersecção entre as fronteiras das inequações (4.10), (4.11) da Figura 15.

$$\begin{cases} \frac{\bar{x}^2}{2} + \frac{(\bar{y}-4)^2}{8} = 1 \\ \bar{y} = -\bar{x}^2 + 3 \end{cases}$$

calculando \bar{x} tem-se ;

$$\bar{x} = +1$$

e

$$\bar{x} = -1.$$

Portanto da Figura 15 temos os limites de integração entre $\bar{a} = -1$ e $\bar{b} = 1$.

Expressando as curvas em função de \bar{x} , temos:

$$\bar{y} = -\sqrt{8 - 4\bar{x}^2} + 4 = g(\bar{x}) \quad (4.12)$$

e

$$\bar{y} = -\bar{x}^2 + 3 = f(\bar{x}). \quad (4.13)$$

Calculando a área da Figura 15, usando a fórmula (4.1), temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-1}^1 \left(-\bar{x}^2 + 3 + \sqrt{8 - 4\bar{x}^2} - 4 \right) d\bar{x} \\ &= \int_{-1}^1 (-\bar{x}^2 + 3) d\bar{x} + \int_{-1}^1 \sqrt{8 - 4\bar{x}^2} d\bar{x} - \int_{-1}^1 4 d\bar{x}. \end{aligned}$$

Chamamos:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \sqrt{8 - 4\bar{x}^2} d\bar{x} \\ &= \int 2\sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{\bar{x}^2}{2}} d\bar{x}. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável em I , temos.

$$\text{sen}(\theta) = \frac{\bar{x}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2} \cos(\theta) d\theta = d\bar{x}$$

e

$$\theta = \arcsen\left(\frac{\bar{x}}{\sqrt{2}}\right).$$

Usando a identidade trigonométrica,

$$\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \Rightarrow \cos^2(\theta) = 1 - \text{sen}^2(\theta).$$

Daí:

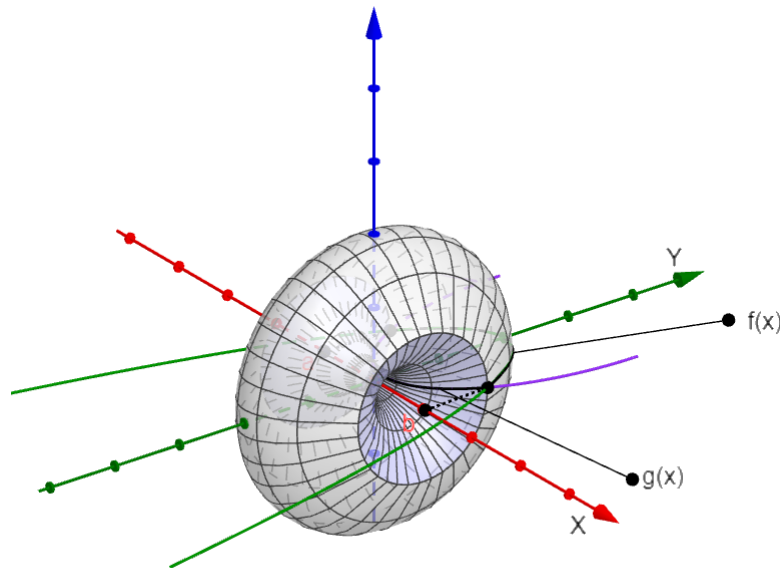
$$\begin{aligned} I &= \int 2\sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{\bar{x}^2}{2}} d\bar{x} \\ &= \int 2\sqrt{2} \sqrt{1 - \text{sen}^2(\theta)} \sqrt{2} \cos(\theta) d\theta \\ &= \int 4 \cos(\theta) \cos(\theta) d\theta \\ &= 2 \int 2 \cos^2(\theta) d\theta \\ &= 2 \left[\theta + \frac{\text{sen}(2\theta)}{2} \right] \\ &= 2 \left[\arcsen\left(\frac{\bar{x}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\bar{x}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{\bar{x}^2}{2}} \right]. \end{aligned}$$

Logo temos de I , a área:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-1}^1 -x^2 d\bar{x} + \int_{-1}^1 3d\bar{x} + \int_{-1}^1 \sqrt{8 - 4x^2} d\bar{x} - \int_{-1}^1 4d\bar{x} \\ &= \left[-\frac{\bar{x}^3}{3} \right]_{-1}^1 + 3[\bar{x}]_{-1}^1 + 2 \left[\arcsen\left(\frac{\bar{x}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\bar{x}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{\bar{x}^2}{2}} \right]_{-1}^1 - 4[\bar{x}]_{-1}^1 \\ &= -\frac{2}{3} + 6 + 2 \left(1 + \frac{\pi}{2} \right) - 8 \\ &= \pi - \frac{2}{3} \\ &\approx 2,47u^2. \end{aligned}$$

4.2 Cálculo de volume de sólido de revolução

Figura 16: Gráfico



Fonte: Elaborado pelo autor.

Da Figura 16. De [3] temos a fórmula de volume de revolução em torno ao eixo X (\mathcal{V}):

$$\mathcal{V} = \pi \int_a^b [[f(x)]^2 - [g(x)]^2] dx. \quad (4.14)$$

Problema 4.3. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno a $y = \frac{4}{3}x$, do conjunto de todos os pontos (x, y) de:

$$\frac{104}{25}x^2 + \frac{144}{25}xy + \frac{146}{25}y^2 + \frac{64}{5}x - \frac{48}{5}y + 16 \leq 0 \quad (4.15)$$

e

$$\frac{16}{25}x^2 + \frac{24}{25}xy + \frac{9}{25}y^2 - \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 3 \leq 0. \quad (4.16)$$

Solução : Do Problema 4.2, tem-se as inequações (4.8) e (4.9), que são as mesmas curvas do Problema 4.3.

$$\frac{\bar{x}^2}{2} + \frac{(\bar{y} - 4)^2}{8} \leq 1$$

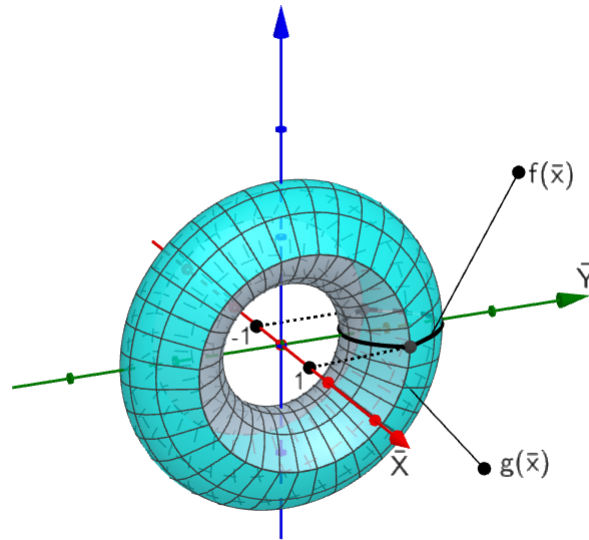
e

$$\bar{y} \leq -\bar{x}^2 + 3.$$

Portanto da Figura 17 temos os limites de integração entre $\bar{a} = -1$ e $\bar{b} = 1$.

Assim calculando o volume de revolução em torno ao eixo \bar{X} , usando a fórmula (4.14),

Figura 17: Gráfico



Fonte: Elaborado pelo autor.

temos que;

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V} &= \pi \int_{-1}^1 [(-\bar{x}^2 + 3)^2 - (-\sqrt{8 - 4\bar{x}^2} + 4)^2] d\bar{x} \\
 &= \pi \int_{-1}^1 [\bar{x}^4 - 6\bar{x}^2 + 9 - 8 + 4\bar{x}^2 + 8\sqrt{8 - 4\bar{x}^2} - 16] d\bar{x} \\
 &= \pi \int_{-1}^1 [\bar{x}^4 - 2\bar{x}^2 - 15] d\bar{x} + 8\pi \int_{-1}^1 \sqrt{8 - 4x^2} d\bar{x}.
 \end{aligned}$$

Do Problema 4.2, sabemos que pela mudança de variável a integral $\int \sqrt{8 - 4x^2} d\bar{x}$ é;

$$\int \sqrt{8 - 4x^2} d\bar{x} = \int 2\sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{\bar{x}^2}{2}} d\bar{x} = 2 \left(\theta + \frac{\text{sen}(2\theta)}{2} \right)$$

Assim, temos que;

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V} &= \pi \left[\frac{\bar{x}^5}{5} \right]_{-1}^1 - 2\pi \left[\frac{\bar{x}^3}{3} \right]_{-1}^1 - 15\pi \left[\bar{x} \right]_{-1}^1 + 16\pi \left[\arcsen\left(\frac{\bar{x}^2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\bar{x}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{\bar{x}^2}{2}} \right]_{-1}^1 \\
 &= \frac{2\pi}{5} - \frac{4\pi}{3} - 30\pi + 16\pi + 8\pi^2 \\
 &\approx 32,04u^3.
 \end{aligned}$$

Problema 4.4. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno a $y = \frac{7}{24}x$, do conjunto de todos os pontos (x, y) de:

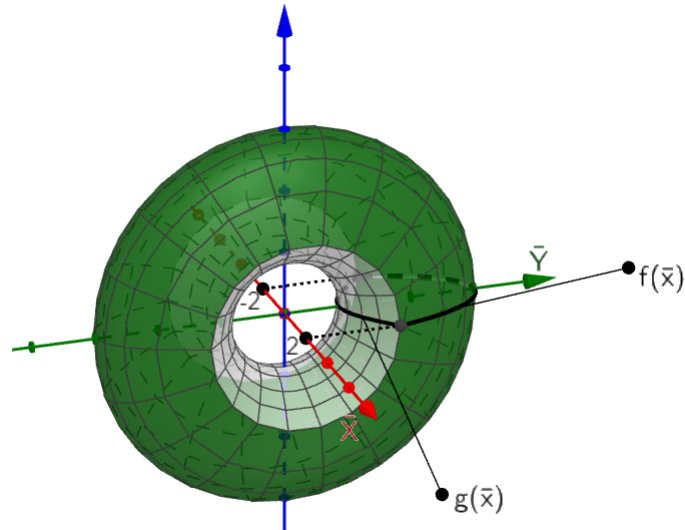
$$-\frac{1630}{625}x^2 - \frac{1680}{625}xy + \frac{1005}{625}y^2 - 6 \geq 0 \quad (4.17)$$

e

$$\frac{62992}{625}x^2 + \frac{30912}{625}xy + \frac{14508}{625}y^2 - 576 \leq 0. \quad (4.18)$$

Solução :

Figura 18: Gráfico



Fonte: Elaborado pelo autor.

Primeiro passo: Reduzindo por uma rotação dos eixos coordenados a inequação (4.17). Do Teorema 3.2, destacando os coeficientes da inequação $A = -\frac{1630}{625}$, $B = -\frac{1680}{625}$, $C = \frac{1005}{625}$, $D = 0$, $E = 0$ e $F = -6$. Calculando seno e cosseno do ângulo de rotação θ , como $A \neq C$, temos que;

$$\tan(2\theta) = \frac{B}{A - C} = \frac{-\frac{1680}{625}}{-\frac{1630}{625} - \frac{1005}{625}} = \frac{336}{527},$$

com isso $2\theta \in I.Q$, usando as identidades trigonométricas de arco duplo das equações (3.10) e (3.11);

$$\cos(2\theta) = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2(2\theta)}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{336}{527}\right)^2}} = \frac{527}{625},$$

logo

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{527}{625}}{2}} = \frac{24}{25}$$

e

$$\sin(\theta) = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{527}{625}}{2}} = \frac{7}{25}.$$

Agora calculando os coeficientes da inequação (3.6): \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} , \bar{E} temos que $\bar{F} = F = -6$,

das equações (3.12) e (3.13) temos que;

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \\ -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1630}{625} & -\frac{1680}{625} \\ -\frac{1680}{625} & \frac{1005}{625} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \\ \frac{7}{25} & \frac{24}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \\ -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Concluimos que $\bar{A} = -3$, $\bar{C} = 2$, $\bar{D} = 0$, $\bar{E} = 0$ e $\bar{F} = -6$. Da inequação (3.6) temos a inequação nas coordenadas \bar{x} e \bar{y} dada por:

$$-3\bar{x}^2 + 2\bar{y}^2 - 6 \geq 0.$$

Simplificando, tem-se;

$$\frac{\bar{y}^2}{3} - \frac{\bar{x}^2}{2} \geq 1. \quad (4.19)$$

Segundo passo: Reduzindo por uma rotação dos eixos coordenados a inequação (4.18). Do Teorema 3.2, destacando os coeficientes da inequação $A = \frac{62992}{625}$, $B = \frac{30912}{625}$, $C = \frac{14508}{625}$, $D = 0$, $E = 0$ e $F = -576$. Calculando seno e cosseno do o ângulo de rotação θ , como $A \neq C$, temos que;

$$\tan(2\theta) = \frac{B}{A - C} = \frac{\frac{30912}{625}}{\frac{62992}{625} - \frac{14508}{625}} = \frac{336}{527},$$

com isso $2\theta \in I.Q$, usando as identidades trigonométricas de arco duplo das equações (3.10) e (3.11);

$$\cos(2\theta) = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2(2\theta)}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{336}{527}\right)^2}} = \frac{527}{625},$$

logo

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{527}{625}}{2}} = \frac{24}{25}$$

e

$$\text{sen}(\theta) = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{527}{625}}{2}} = \frac{7}{25}.$$

Agora calculando os coeficientes da inequação (3.6): \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} , \bar{E} temos que $\bar{F} = -576$, das equações (3.12) e (3.13) temos que;

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24}{2} & \frac{7}{25} \\ -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{62992}{625} & \frac{30912}{625} \\ \frac{30912}{625} & \frac{14508}{625} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \\ \frac{7}{25} & \frac{24}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 108 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \\ -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Concluimos que $\bar{A} = 108$, $\bar{C} = 16$, $\bar{D} = 0$, $\bar{E} = 0$ e $\bar{F} = -576$. Da inequação (3.6) temos a inequação nas coordenadas \bar{x} e \bar{y} dada por:

$$108\bar{x}^2 + 16\bar{y}^2 - 576 \leq 0.$$

Simplificando, tem-se;

$$\frac{3\bar{x}^2}{16} + \frac{\bar{y}^2}{36} \leq 1. \quad (4.20)$$

Calculando a intersecção entre as fronteiras das inequações (4.19), (4.20) da Figura 18 .

$$\begin{cases} \frac{\bar{y}^2}{3} - \frac{\bar{x}^2}{2} = 1 \\ \frac{3\bar{x}^2}{16} + \frac{\bar{y}^2}{36} = 1 \end{cases}$$

calculando \bar{x} tem-se :

$$\bar{x} = +2$$

e

$$\bar{x} = -2$$

Portanto da Figura 18 temos os limites de integração entre $\bar{a} = -2$ e $\bar{b} = 2$.

Expressando as curvas em função de \bar{x} , temos:

$$\bar{y} = \sqrt{3 + \frac{3\bar{x}^2}{2}} = g(\bar{x}) \quad (4.21)$$

e

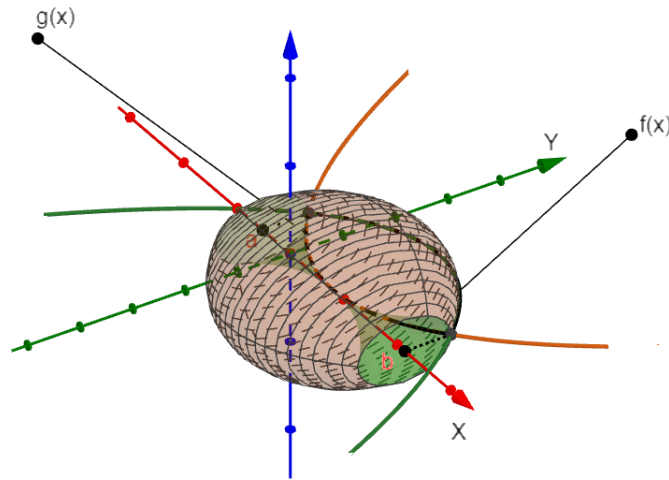
$$\bar{y} = \sqrt{36 - \frac{27\bar{x}^2}{4}} = f(\bar{x}). \quad (4.22)$$

Calculando o volume de revolução, usando a fórmula (4.14) temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \pi \int_{-2}^2 \left[\left(\sqrt{36 - \frac{27\bar{x}^2}{4}} \right)^2 - \left(\sqrt{3 + \frac{3\bar{x}^2}{2}} \right)^2 \right] d\bar{x}. \\ &= \pi \int_{-2}^2 \left[36 - \frac{27\bar{x}^2}{4} - 3 - \frac{3\bar{x}^2}{2} \right] d\bar{x}. \\ &= -\frac{33}{4}\pi \int_{-2}^2 \bar{x}^2 d\bar{x} - 33\pi \int_{-2}^2 d\bar{x}. \\ &= -\frac{33}{4}\pi \left[\frac{\bar{x}^3}{3} \right]_{-2}^2 + 33\pi [\bar{x}]_{-2}^2. \\ &= -44\pi + 132\pi. \\ &\approx 276,46u^3.\end{aligned}$$

4.3 Cálculo de áreas de superfícies de revolução

Figura 19: Gráfico



Fonte: Elaborado pelo autor.

Da Figura 19. De [5] temos a fórmula de área de superfície de revolução (\mathcal{A}_x) em torno ao eixo X :

$$\mathcal{A}_x = 2\pi \int_a^b \left[f(x) \sqrt{1 + \left[\frac{d}{dx} f(x) \right]^2} + g(x) \sqrt{1 + \left[\frac{d}{dx} g(x) \right]^2} \right] dx. \quad (4.23)$$

Problema 4.5. *Determine a área da superfície gerada pela rotação, em torno a $y = \frac{4}{3}x$, do conjunto de todos os pontos (x, y) da fronteira, de:*

$$-\frac{81}{25}x^2 - \frac{216}{25}xy - \frac{144}{25}y^2 + \frac{4}{5}x + \frac{72}{5}y - 4 \geq 0. \quad (4.24)$$

e

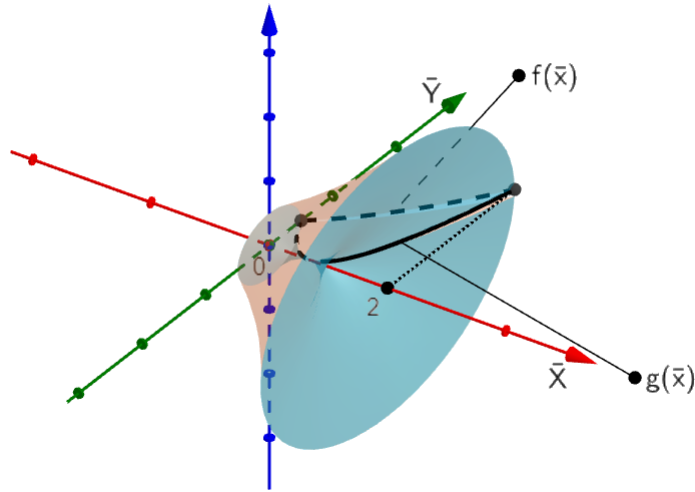
$$-\frac{9}{25}x^2 - \frac{24}{25}xy - \frac{16}{25}y^2 - \frac{44}{5}x + \frac{8}{5}y - 4 \leq 0. \quad (4.25)$$

Solução : Primeiro passo: Reduzindo por uma rotação dos eixos coordenados a inequação (4.24): Do Teorema 3.2, destacando os coeficientes da inequação $A = -\frac{81}{25}$, $B = -\frac{216}{25}$, $C = -\frac{144}{25}$, $D = \frac{4}{5}$, $E = \frac{72}{5}$ e $F = -4$. Calculando seno e cosseno do ângulo de rotação θ , como $A \neq C$, temos que;

$$\tan(2\theta) = \frac{B}{A - C} = \frac{-\frac{216}{25}}{-\frac{81}{25} + \frac{144}{25}} = -\frac{24}{7},$$

com isso $2\theta \in II.Q$, usando as identidades trigonométricas de arco duplo das equações

Figura 20: Gráfico



Fonte: Elaborado pelo autor.

(3.10) e (3.11) ;

$$\cos(2\theta) = -\sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2(2\theta)}} = -\sqrt{\frac{1}{1 + \left(-\frac{24}{7}\right)^2}} = -\frac{7}{25},$$

logo

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{7}{25}}{2}} = \frac{3}{5}$$

e

$$\text{sen}(\theta) = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{2}} = \frac{4}{5}.$$

Agora calculando os coeficientes da inequação (3.6): \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} , \bar{E} temos que $\bar{F} = F = -4$, das equações (3.12) e (3.13) temos que;

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{81}{25} & -\frac{216}{25} \\ -\frac{216}{25} & -\frac{144}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{72}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Concluimos que $\bar{A} = -9$, $\bar{C} = 0$, $\bar{D} = 12$, $\bar{E} = 8$ e $\bar{F} = -4$. Da inequação (3.6) temos a inequação nas coordenadas \bar{x} e \bar{y} dada por:

$$-9\bar{x}^2 + 12\bar{x} + 8\bar{y} - 4 \geq 0.$$

Simplificando, tem-se;

$$\bar{y} \geq \frac{(3\bar{x} - 2)^2}{8}. \quad (4.26)$$

Segundo passo: Reduzindo por uma rotação dos eixos coordenados a inequação (4.25): Do Teorema 3.2, destacando os coeficientes da inequação $A = -\frac{9}{25}$, $B = -\frac{24}{25}$, $C = -\frac{16}{25}$, $D = -\frac{44}{5}$, $E = \frac{8}{5}$ e $F = -4$. Calculando seno e cosseno do ângulo de rotação θ , como $A \neq C$, temos que;

$$\tan(2\theta) = \frac{B}{A - C} = \frac{-\frac{24}{25}}{-\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = -\frac{24}{7},$$

com isso $2\theta \in II.Q$, usando as identidades trigonométricas de arco duplo das equações (3.10) e (3.11)

$$\cos(2\theta) = -\sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2(2\theta)}} = -\sqrt{\frac{1}{1 + \left(-\frac{24}{7}\right)^2}} = -\frac{7}{25},$$

logo

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{7}{25}}{2}} = \frac{3}{5}$$

e

$$\text{sen}(\theta) = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{2}} = \frac{4}{5}.$$

Agora calculando os coeficientes da inequação (3.6): \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} , \bar{E} temos que $\bar{F} = -9$, das equações (3.12) e (3.13) temos que;

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{9}{25} & -\frac{24}{25} \\ -\frac{24}{25} & -\frac{16}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{44}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Concluimos que $\bar{A} = -1$, $\bar{C} = 0$, $\bar{D} = -4$, $\bar{E} = 8$ e $\bar{F} = -4$. Da inequação (3.6) temos a inequação nas coordenadas \bar{x} e \bar{y} é dada por:

$$-\bar{x}^2 - 4\bar{x} + 8\bar{y} - 4 \leq 0.$$

Simplificando, tem-se;

$$\bar{y} \leq \frac{(\bar{x} + 2)^2}{8} \quad (4.27)$$

Calculando a intersecção entre as fronteiras das inequações (4.26), (4.27) da Figura 20 .

$$\begin{cases} \bar{y} = \frac{(3\bar{x}-2)^2}{8} \\ \bar{y} = \frac{(\bar{x}+2)^2}{8} \end{cases}$$

calculando \bar{x} tem-se :

$$\bar{x} = 0$$

e

$$\bar{x} = 2.$$

Portanto da Figura 20 temos os limites de integração entre $\bar{a} = 0$ e $\bar{b} = 2$.

Expressando as curvas em função de \bar{x} , temos:

$$y = \frac{(3\bar{x} - 2)^2}{8} = f(\bar{x}) \quad (4.28)$$

e

$$\bar{y} = \frac{(\bar{x} + 2)^2}{8} = g(\bar{x}). \quad (4.29)$$

Calculando a área da superfície de revolução, usando a equação (4.23), temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\bar{x}} &= 2\pi \int_0^2 \frac{(\bar{x} + 2)^2}{8} \sqrt{1 + \left[\frac{d}{d\bar{x}} \frac{(\bar{x} + 2)^2}{8} \right]^2} d\bar{x} + 2\pi \int_0^2 \frac{(3\bar{x} - 2)^2}{8} \sqrt{1 + \left[\frac{d}{d\bar{x}} \frac{(3\bar{x} - 2)^2}{8} \right]^2} d\bar{x} \\ &= 2\pi \int_0^2 \frac{(\bar{x} + 2)^2}{8} \sqrt{1 + \left[\frac{1}{4}(\bar{x} + 2) \right]^2} d\bar{x} + 2\pi \int_0^2 \frac{(3\bar{x} - 2)^2}{8} \sqrt{1 + \left[\frac{3}{4}(3\bar{x} - 2) \right]^2} d\bar{x}. \end{aligned}$$

chamamos;

$$I = 2\pi \int_0^2 \frac{(\bar{x} + 2)^2}{8} \sqrt{1 + \left[\frac{1}{4}(\bar{x} + 2) \right]^2} d\bar{x}$$

e

$$II = 2\pi \int_0^2 \frac{(3\bar{x} - 2)^2}{8} \sqrt{1 + \left[\frac{3}{4}(3\bar{x} - 2)\right]^2} d\bar{x}.$$

Fazendo a mudança de variável em I, temos que;

$$\tan \theta = \frac{1}{4}(\bar{x} + 2) \Rightarrow 4 \sec^2 \theta d\theta = d\bar{x}$$

e

$$\bar{x} = 4 \tan \theta - 2.$$

Daí

$$I = 2\pi \int 8 \tan^2 \theta \sec^3 \theta d\theta.$$

Fazendo ;

$$u = \tan \theta$$

$$du = \sec^2 \theta d\theta$$

temos que;

$$\begin{aligned} I &= 16\pi \int u^2 \sec \theta du \\ &= 16\pi \int u^2 \sqrt{1 + u^2} du \\ &= 16\pi \left[\frac{u}{8} (1 + 2u^2) \sqrt{1 + u^2} - \frac{1}{8} \ln |u + \sqrt{1 + u^2}| + c \right] \\ &= 2\pi \left[\tan \theta (1 + 2 \tan^2 \theta) \sqrt{1 + \tan^2 \theta} - \ln |\tan \theta + \sqrt{1 + \tan^2 \theta}| + c \right] \\ &= 2\pi \left[\frac{(x+2)}{4} \left(1 + 2 \frac{(\bar{x}+2)^2}{16} \right) \sqrt{1 + \frac{(\bar{x}+2)^2}{16}} - \ln \left| \frac{(x+2)}{4} + \sqrt{1 + \frac{(\bar{x}+2)^2}{16}} \right| \right] \Bigg|_0^2 \\ &\approx 18,87. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável em II, temos que;

$$\tan \theta = \frac{3}{4}(3\bar{x} - 2) \Leftrightarrow \frac{4}{9} \sec^2 \theta d\theta = d\bar{x}$$

e

$$3\bar{x} = \frac{4}{3} \tan \theta + 2.$$

Daí

$$\begin{aligned} II &= 2\pi \int \frac{\frac{16}{9} \tan^2 \theta}{8} \sec \theta \frac{4}{9} \sec^2 \theta d\theta \\ &= \frac{16\pi}{81} \int \tan^2 \theta \sec^3 \theta d\theta. \end{aligned}$$

Fazendo ;

$$\begin{aligned} u &= \tan \theta \\ du &= \sec^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

temos que;

$$\begin{aligned} II &= \frac{16\pi}{81} \int u^2 \sec \theta du \\ &= \frac{16\pi}{81} \int u^2 \sqrt{1+u^2} du \\ &= \frac{16\pi}{81} \left[\frac{u}{8} (1+2u^2) \sqrt{1+u^2} - \frac{1}{8} \ln |u + \sqrt{1+u^2}| + c \right] \\ &= \frac{2\pi}{81} \left[\tan \theta (1+2 \tan^2 \theta) \sqrt{1+\tan^2 \theta} - \ln |\tan \theta + \sqrt{1+\tan^2 \theta}| + c \right] \\ &= \frac{2\pi}{81} \left[\frac{3(3\bar{x}-2)}{4} \left(1+2 \frac{9(3\bar{x}-2)^2}{16} \right) \sqrt{1+\frac{9(3\bar{x}-2)^2}{16}} - \ln \left| \frac{3(3\bar{x}-2)}{4} + \sqrt{1+\frac{9(3\bar{x}-2)^2}{16}} \right| \right] \Bigg|_0^2 \\ &\approx 14,90. \end{aligned}$$

Assim, somando as integrais I e II, temos que;

$$A_{\bar{x}} = I + II \approx 33,77u^2.$$

Problema 4.6. Determine a área da superfície gerada pela rotação, em torno a $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, do conjunto de todos os pontos (x, y) da fronteira de:

$$3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 + (12\sqrt{3} + 50)x + (12 - 50\sqrt{3})y + 36 \geq 0 \quad (4.30)$$

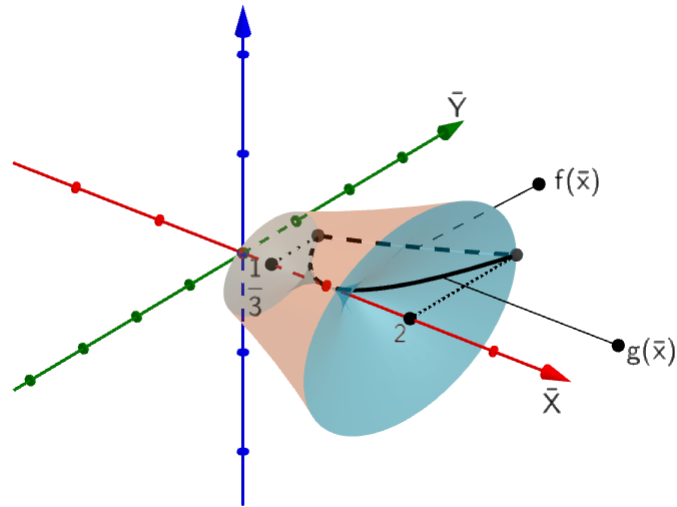
e

$$3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 + (2 - 4\sqrt{3})x - (2\sqrt{3} + 4)y + 4 \leq 0. \quad (4.31)$$

Solução :

Primeiro passo: reduzindo por uma rotação dos eixos coordenados a inequação (4.30). Do Teorema 3.2, destacando os coeficientes da inequação $A = 3$, $B = 2\sqrt{3}$, $C = 1$, $D = 12\sqrt{3} + 50$, $E = 12 - 50\sqrt{3}$ e $F = 36$. Calculando seno e cosseno do ângulo de rotação

Figura 21: Gráfico



Fonte: Elaborado pelo autor

θ , como $A \neq C$, temos que

$$\tan(2\theta) = \frac{B}{A-C} = \frac{2\sqrt{3}}{3-1} = \sqrt{3},$$

com isso $2\theta \in I.Q$, usando as identidades trigonométricas de arco duplo das equações (3.10) e (3.11);

$$\cos(2\theta) = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2(2\theta)}} = \sqrt{\frac{1}{1+(\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2},$$

logo

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{1+\cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e

$$\sin(\theta) = \sqrt{\frac{1-\cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Agora calculando os coeficientes da inequação (3.6): \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} , \bar{E} temos que ; $\bar{F} = F = 36$, das equações (3.12) e (3.13) temos que;

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & \frac{2\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12\sqrt{3} + 50 \\ 12 - 50\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -100 \end{pmatrix}.$$

Concluimos que $\bar{A} = 4$, $\bar{C} = 0$, $\bar{D} = 24$, $\bar{E} = -100$ e $\bar{F} = 36$. Da inequação (3.6) temos a inequação nas coordenadas \bar{x} e \bar{y} dada por:

$$4\bar{x}^2 + 24\bar{x} - 100\bar{y} + 36 \geq 0.$$

Simplificando, tem-se

$$\bar{y} \geq \frac{(\bar{x} + 3)^2}{25}. \quad (4.32)$$

Segundo passo: reduzindo por uma rotação dos eixos coordenados a inequação (4.31): Do Teorema 3.2, destacando os coeficientes da inequação $A = 3$, $B = 2\sqrt{3}$, $C = 1$, $D = 2 - 4\sqrt{3}$, $E = -2\sqrt{3} - 4$ e $F = 4$. Calculando seno e cosseno do ângulo de rotação θ , como $A \neq C$, temos que;

$$\tan(2\theta) = \frac{B}{A - C} = \frac{2\sqrt{3}}{3 - 1} = \sqrt{3},$$

com isso $2\theta \in I.Q$, usando as identidades trigonométricas de arco duplo das equações (3.10) e (3.11)

$$\cos(2\theta) = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2(2\theta)}} = \sqrt{\frac{1}{1 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2},$$

logo

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e

$$\sin(\theta) = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Agora calculando os coeficientes da inequação (3.6): \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} , \bar{E} temos que $\bar{F} = 4$, das equações (3.12) e (3.13) temos que;

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & \frac{2\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 - 4\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Concluimos que $\bar{A} = 4$, $\bar{C} = 0$, $\bar{D} = -8$, $\bar{E} = -4$ e $\bar{F} = 4$. Da inequação (3.6) temos a inequação nas coordenadas \bar{x} e \bar{y} dada por:

$$4\bar{x}^2 - 8\bar{x} - 4\bar{y} + 4 \leq 0.$$

Simplificando, tem-se;

$$\bar{y} \leq (\bar{x} - 1)^2. \quad (4.33)$$

Calculando a intersecção entre as fronteiras das inequações (4.32), (4.33) da Figura 21 .

$$\begin{cases} \bar{y} = \frac{(\bar{x}+3)^2}{25} \\ \bar{y} = (\bar{x} - 1)^2 \end{cases}$$

calculando \bar{x} tem-se :

$$\bar{x} = 2$$

e

$$\bar{x} = \frac{1}{3}$$

Portanto da Figura 21 temos os limites de integração entre $\bar{a} = \frac{1}{3}$ e $\bar{b} = 2$.

Expressando as curvas em função de \bar{x} , temos:

$$y = \frac{(\bar{x} + 3)^2}{25} = f(\bar{x}) \quad (4.34)$$

e

$$\bar{y} = (\bar{x} - 1)^2 = g(\bar{x}). \quad (4.35)$$

Calculando a área da superfície de revolução, usando a equação (4.23), temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\bar{x}} &= 2\pi \int_{\frac{1}{3}}^2 (\bar{x} - 1)^2 \sqrt{1 + \left[\frac{d}{d\bar{x}} (\bar{x} - 1)^2 \right]^2} d\bar{x} + 2\pi \int_{\frac{1}{3}}^2 \frac{(\bar{x} + 3)^2}{25} \sqrt{1 + \left[\frac{d}{d\bar{x}} \frac{(\bar{x} + 3)^2}{25} \right]^2} d\bar{x} \\ &= 2\pi \int_{\frac{1}{3}}^2 (\bar{x} - 1)^2 \sqrt{1 + [2(\bar{x} - 1)]^2} d\bar{x} + 2\pi \int_{\frac{1}{3}}^2 \frac{(\bar{x} + 3)^2}{25} \sqrt{1 + \left[\frac{2}{25} (\bar{x} + 3) \right]^2} d\bar{x} \end{aligned}$$

chamamos;

$$I = 2\pi \int_{\frac{1}{3}}^2 (\bar{x} - 1)^2 \sqrt{1 + [2(\bar{x} - 1)]^2} d\bar{x}$$

e

$$II = 2\pi \int_{\frac{1}{3}}^2 \frac{(\bar{x} + 3)^2}{25} \sqrt{1 + \left[\frac{2}{25}(\bar{x} + 3)\right]^2} d\bar{x}.$$

Fazendo a mudança de variável em I, temos que;

$$\tan \theta = 2(\bar{x} - 1) \Rightarrow \frac{1}{2} \sec^2 \theta d\theta = d\bar{x}$$

e

$$\bar{x} = \frac{1}{2} \tan \theta + 1.$$

Daí

$$I = 2\pi \int \frac{1}{8} \tan^2 \theta \cdot \sec^3 \theta d\theta.$$

Fazendo ;

$$u = \tan \theta$$

$$du = \sec^2 \theta d\theta$$

temos que;

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{4} \int u^2 \sec \theta du \\ &= \frac{\pi}{4} \int u^2 \sqrt{1 + u^2} du \\ &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{u}{8} (1 + 2u^2) \sqrt{1 + u^2} - \frac{1}{8} \ln |u + \sqrt{1 + u^2}| + c \right] \\ &= \frac{\pi}{32} \left[\tan \theta (1 + 2 \tan^2 \theta) \sqrt{1 + \tan^2 \theta} - \ln |\tan \theta + \sqrt{1 + \tan^2 \theta}| + c \right] \\ &= \frac{\pi}{32} \left[2(x - 1) \left(1 + 2 \cdot 4(\bar{x} - 1)^2 \right) \sqrt{1 + 4(\bar{x} - 1)^2} - \ln |2(\bar{x} - 1) + \sqrt{1 + 4(\bar{x} - 1)^2}| \right] \Bigg|_{\frac{1}{3}}^2 \\ &\approx 4,69. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável em II, temos que;

$$\tan \theta = \frac{2}{25}(\bar{x} + 3) \Rightarrow \frac{25}{2} \sec^2 \theta d\theta = d\bar{x}$$

e

$$\bar{x} = \frac{25}{2} \tan \theta - 3.$$

Daí

$$\begin{aligned} II &= 2\pi \int \frac{625 \tan^2 \theta}{25} \sec \theta \frac{25}{2} \sec^2 \theta d\theta \\ &= \frac{625\pi}{4} \int \tan^2 \theta \sec^3 \theta d\theta. \end{aligned}$$

Fazendo ;

$$\begin{aligned} u &= \tan \theta \\ du &= \sec^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

temos que;

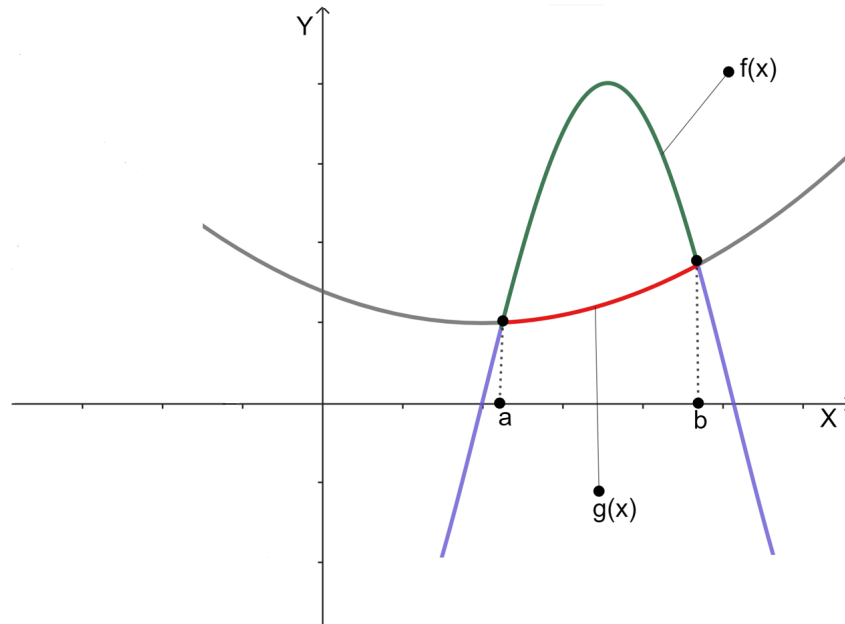
$$\begin{aligned} II &= \frac{625\pi}{4} \int u^2 \sec \theta du \\ &= \frac{625\pi}{4} \int u^2 \sqrt{1+u^2} du \\ &= \frac{625\pi}{32} \left[\frac{u}{8} (1+2u^2) \sqrt{1+u^2} - \frac{1}{8} \ln |u + \sqrt{1+u^2}| + c \right] \\ &= \frac{625\pi}{32} \left[\tan \theta (1+2 \tan^2 \theta) \sqrt{1+\tan^2 \theta} - \ln |\tan \theta + \sqrt{1+\tan^2 \theta}| + c \right] \\ &= \frac{625\pi}{32} \left[\frac{2}{25} (3\bar{x}-2) \left(1+2 \cdot \frac{4(3\bar{x}-2)^2}{625} \right) \sqrt{1+\frac{4(3\bar{x}-2)^2}{625}} \right. \\ &\quad \left. - \ln \left| \frac{2}{25} (3\bar{x}-2) + \sqrt{1+\frac{4(3\bar{x}-2)^2}{625}} \right| \right] \Bigg|_{\frac{1}{3}}^2 \\ &\approx 7,79. \end{aligned}$$

Assim, somando as integrais I e II, temos que;

$$\mathcal{A}_{\bar{x}} = I + II = 12,48u^2.$$

4.4 Cálculo de comprimento de arco

Figura 22: Gráfico



Fonte: Elaborado pelo autor.

Da figura 22. De [5] temos a fórmula do comprimento de arco (\mathcal{L}) :

$$\mathcal{L} = \int_a^b \left[\sqrt{1 + \left[\frac{d}{dx} f(x) \right]^2} + \sqrt{1 + \left[\frac{d}{dx} g(x) \right]^2} \right] dx. \quad (4.36)$$

Problema 4.7. Determine o comprimento de arco do conjunto de todos os pontos (x, y) da fronteira de:

$$-\frac{81}{25}x^2 - \frac{216}{25}xy - \frac{144}{25}y^2 + \frac{4}{5}x + \frac{72}{5}y - 4 \geq 0. \quad (4.37)$$

e

$$-\frac{9}{25}x^2 - \frac{24}{25}xy - \frac{16}{25}y^2 - \frac{44}{5}x + \frac{8}{5}y - 4 \leq 0. \quad (4.38)$$

Solução :

Do Problema 4.5, tem-se as inequações 4.28 e 4.29, que são as mesmas curvas do Problema 4.7,

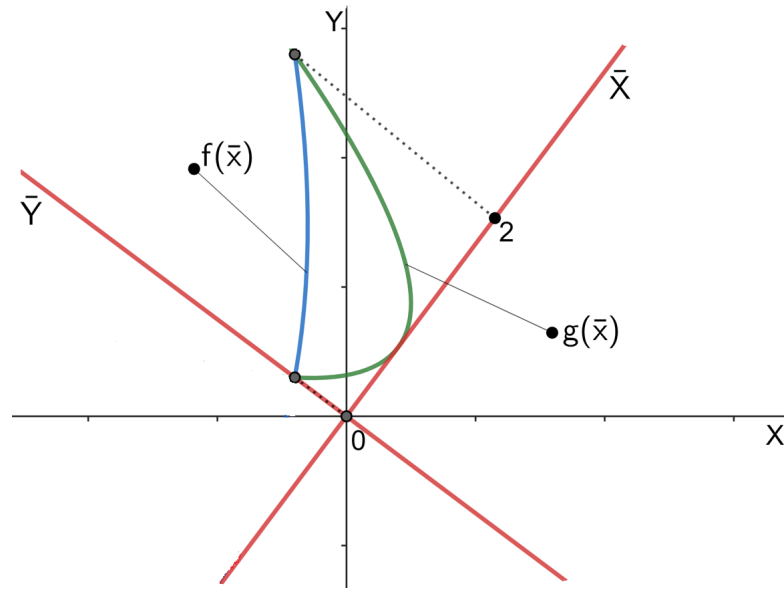
$$\bar{y} = \frac{(3\bar{x} - 2)^2}{8} = f(\bar{x})$$

e

$$\bar{y} = \frac{(\bar{x} + 2)^2}{8} = g(\bar{x}).$$

Portanto da Figura 23 temos os limites de integração entre $\bar{a} = 0$ e $\bar{b} = 2$.

Figura 23: Gráfico



Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, calculando o comprimento do arco, usando a fórmula (4.36), temos que;

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_0^2 \sqrt{1 + \left[\frac{d}{d\bar{x}} \frac{(3\bar{x} - 2)^2}{8} \right]^2} d\bar{x} + \int_0^2 \sqrt{1 + \left[\frac{d}{d\bar{x}} \frac{(\bar{x} + 2)^2}{8} \right]^2} d\bar{x} \\ &= \int_0^2 \sqrt{1 + \left[\frac{3}{4}(3\bar{x} - 2) \right]^2} d\bar{x} + \int_0^2 \sqrt{1 + \left[\frac{1}{4}(\bar{x} + 2) \right]^2} d\bar{x}, \end{aligned}$$

chamamos;

$$I = \int_0^2 \sqrt{1 + \left[\frac{3}{4}(3\bar{x} - 2) \right]^2} d\bar{x}$$

e

$$II = \int_0^2 \sqrt{1 + \left[\frac{1}{4}(\bar{x} + 2) \right]^2} d\bar{x}.$$

Fazendo a mudança de variável em I, temos que;

$$u = \frac{3}{4}(3\bar{x} - 2) \Rightarrow \frac{4}{9} du = d\bar{x}.$$

Daí

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{4}{9} \int \sqrt{1+u^2} du. \\
 &= \frac{4}{9} \left[\frac{u}{2} \sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2} \ln |u + \sqrt{1+u^2}| + C \right]. \\
 &= \frac{2}{9} \left[\frac{3}{4} (3\bar{x} - 2) \sqrt{1 + \frac{9}{16} (3\bar{x} - 2)^2} + \ln \left| \frac{3}{4} (3\bar{x} - 2) + \sqrt{1 + \frac{9}{16} (3\bar{x} - 2)^2} \right| \right] \Bigg|_0^2. \\
 &\approx 3,37.
 \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável em II, temos que;

$$u = \frac{1}{4}(\bar{x} + 2) \Rightarrow 4du = d\bar{x}.$$

Daí

$$\begin{aligned}
 II &= 4 \int \sqrt{1+u^2} du. \\
 &= 4 \left[\frac{u}{2} \sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2} \ln |u + \sqrt{1+u^2}| + C \right]. \\
 &= 2 \left[\frac{1}{4} (\bar{x} + 2) \sqrt{1 + \frac{1}{16} (\bar{x} + 2)^2} + \ln \left| \frac{1}{4} (\bar{x} + 2) + \sqrt{1 + \frac{1}{16} (\bar{x} + 2)^2} \right| \right] \Bigg|_0^2 \\
 &\approx 2,51.
 \end{aligned}$$

Assim, somando as integrais I e II, temos que;

$$\mathcal{L} = I + II \approx 5,88u.$$

Problema 4.8. Determine o comprimento de arco do conjunto de todos os pontos (x, y) da fronteira de:

$$3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 + (12\sqrt{3} + 50)x + (12 - 50\sqrt{3})y + 36 \geq 0 \quad (4.39)$$

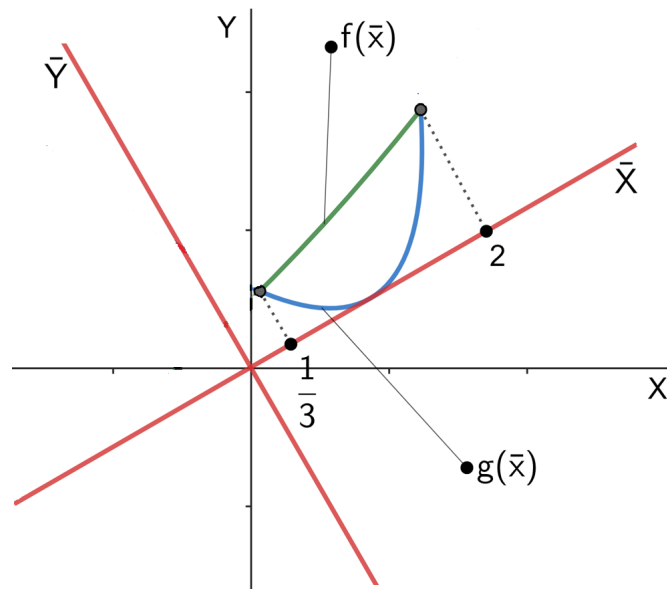
e

$$3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 + (2 - 4\sqrt{3})x - (2\sqrt{3} + 4)y + 4 \leq 0. \quad (4.40)$$

Solução : Do Problema 4.6, tem-se as inequações 4.34 e 4.35, que são as mesmas curvas do Problema 4.8,

$$\bar{y} = \frac{(\bar{x} + 3)^2}{25} = f(\bar{x})$$

Figura 24: Gráfico



Fonte: Elaborado pelo autor.

e

$$\bar{y} = (\bar{x} - 1)^2 = g(\bar{x}).$$

Portanto da Figura 24 temos os limites de integração entre $\bar{a} = \frac{1}{3}$ e $\bar{b} = 2$.

Assim, calculando o comprimento do arco, usando a fórmula (4.36), temos que;

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_{\frac{1}{3}}^2 \sqrt{1 + \left[\frac{d}{d\bar{x}} \frac{(\bar{x} + 3)^2}{25} \right]^2} d\bar{x} + \int_{\frac{1}{3}}^2 \sqrt{1 + \left[\frac{d}{d\bar{x}} (\bar{x} - 1)^2 \right]^2} d\bar{x} \\ &= \int_{\frac{1}{3}}^2 \sqrt{1 + \left[\frac{2}{25} (\bar{x} + 3) \right]^2} d\bar{x} + \int_0^2 \sqrt{1 + [2(\bar{x} - 1)]^2} d\bar{x}, \end{aligned}$$

chamamos;

$$I = \int_{\frac{1}{3}}^2 \sqrt{1 + \left[\frac{2}{25} (\bar{x} + 3) \right]^2} d\bar{x}$$

e

$$II = \int_0^2 \sqrt{1 + [2(\bar{x} - 1)]^2} d\bar{x}.$$

Fazendo a mudança de variável em I, temos que;

$$u = \frac{2}{25} (\bar{x} + 3) \Rightarrow \frac{25}{2} du = d\bar{x}.$$

Daí

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{25}{2} \int \sqrt{1+u^2} du. \\
 &= \frac{25}{2} \left[\frac{u}{2} \sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2} \ln |u + \sqrt{1+u^2}| + C \right]. \\
 &= \frac{25}{4} \left[\frac{2}{25} (\bar{x} + 3) \sqrt{1 + \frac{4}{625} (\bar{x} + 3)^2} + \ln \left| \frac{2}{25} (\bar{x} + 3) + \sqrt{1 + \frac{4}{625} (\bar{x} + 3)^2} \right| \right] \Bigg|_{\frac{1}{3}}^2. \\
 &\approx 1,75.
 \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável em II, temos que;

$$u = 2(\bar{x} - 1) \Rightarrow \frac{1}{2} du = d\bar{x}.$$

Daí

$$\begin{aligned}
 II &= \frac{1}{2} \int \sqrt{1+u^2} du. \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{u}{2} \sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2} \ln |u + \sqrt{1+u^2}| + C \right]. \\
 &= \frac{1}{4} \left[2(\bar{x} - 1) \sqrt{1 + 4(\bar{x} - 1)^2} + \ln \left| 2(\bar{x} - 1) + \sqrt{1 + 4(\bar{x} - 1)^2} \right| \right] \Bigg|_{\frac{1}{3}}^2 \\
 &\approx 2,30.
 \end{aligned}$$

Assim, somando as integrais I e II, temos que;

$$\mathcal{L} = I + II \approx 4,05u.$$

5 CONCLUSÃO

Na primeira parte do trabalho foram obtidas as equações reduzidas da parábola, elipse e hipérbole através de três Teoremas. Em seguida introduziu-se o Teorema de redução da equação geral das cônicas por uma rotação dos eixos coordenados na forma reduzida, onde foi calculado o ângulo de inclinação que gera o novo sistema de coordenadas. Com isto, possibilitou-se fazer a aplicação das fórmulas das integrais vistas nas aplicações acima. Contudo, observou-se que, os resultados dos Problemas, foram obtidos com duas casas decimais, dando a entender que estas integrações não eram simples. Por exemplo, nas integrações dos Problemas 4.1 e 4.2 não foi possível obter os cálculos de superfície de revolução e comprimento de arco, visto serem equações de elipses e hipérbolas, o que dificultou na derivada destas. Portanto, estes Problemas ficam em aberto, deixando assim a oportunidade de se usarem outros métodos para solucioná-los.

Referências

- [1] BOULOS, Paulo; DE CAMARGO, Ivan. Geometria analítica. CEP, v. 4533, p. 004, 1987.
- [2] FRENSEL, Katia; DELGADO, J. Aula 21. Geometria Analítica.
< <https://www.professores.uff.br/katiafrensel/wp-content/uploads/sites/115/2017/08/aula21.pdf>>. Acesso em 08/2017.
- [3] SAMPAIO, João Carlos Vieira; VILLAGRA, Guillermo Antonio Lobos. Integrais definidas e aplicações. 2012..
- [4] LEHMANN, C.H. *Geometria Analítica*. 13a ed. México: Limusa Edições, 1989.
- [5] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um Curso de Cálculo-vol. 1, 5a. edição. Editora LTC, p. 48, 2001.
- [6] DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, v. 3, 2013.