



**SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ABAETETUBA
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA**

ASSIS MACIEL SACRAMENTO

**MODELAGEM E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS OSCILATÓRIOS UTILIZANDO
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM**

ABAETETUBA - PA

2018

ASSIS MACIEL SACRAMENTO

**MODELAGEM E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS OSCILATÓRIOS UTILIZANDO
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, como requisito final para obtenção do grau de Licenciado em Física, sob orientação do Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa.

ABAETETUBA – PA

2018

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

S123m Sacramento, Assis Maciel.
MODELAGEM E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
OSCILATÓRIOS UTILIZANDO EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
DE SEGUNDA ORDEM / Assis Maciel Sacramento. — 2018.
78 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade
Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Curso de
Educação do Campo, Abaetetuba, 2018.

1. Oscilações. 2. EDO. 3. Runge-Kutta. I. Título.

CDD 530

ASSIS MACIEL SACRAMENTO

**MODELAGEM E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS OSCILATÓRIOS UTILIZANDO
UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL LINEAR DE SEGUNDA ORDEM**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado e aprovado, para a obtenção do título de Licenciado em Física pelo corpo docente da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba.

Abaetetuba, 08 de Março de 2018.

Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa
UFPA
Orientador

Prof. Dr. Manuel Eleutério Rodrigues
UFPA
Examinador

Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa
UFPA
Examinador

"Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades, lembrai-vos de que as grandes coisas do homem foram conquistadas do que parecia impossível."

(CHARLES CHAPLIN)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida e por ter me proporcionado chegar até aqui, me dando força para não desistir. A minha maravilhosa família, meu pai Antônio Francisco, minha mãe Maria Antônia, meus irmãos Aldenice Sacramento, Alcir Sacramento e Alcilene Sacramento, meus tios em especial ao pastor Reginaldo e família, meus avós, meus primos em especial Josicléia Sacramento e Jilvam Sacramento, por toda a dedicação e paciência contribuindo diretamente para que eu pudesse ter um caminho mais fácil e prazeroso durante esses anos.

Agradeço também ao meu colega/amigo/irmão professor Luciano Quaresma pela ajuda e paciência durante todos esses anos de curso e a minha querida colega/amiga/irmã Débora Matos. Agradeço a esta instituição de ensino por ter me dado à chance e todas as ferramentas que permitiram chegar hoje ao final desse ciclo de maneira satisfatória.

A minha eterna família, a turma de Física 2013, pela amizade e carinho adquirido durante esses anos de curso. Aos meus conterrâneos Mayane Fortes, Luiza Ferreira, Arnaldo Alves, Rodrigo Lobato e Wanderson Ferreira, pela parceria e amizade. Aos parceiros Romário Xavier, Dhonata Oliveira, Wenderson Aires, Elizan Lobato e Numas Viera. A meu orientador Dr. Manuel Costa, pela paciência e apoio no decorrer deste trabalho de conclusão de curso, agradeço muito a ele, a esta banca examinadora pela disponibilidade. A todos os meus amigos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação.

Muito Obrigado!

RESUMO

Apesar da grande utilidade, nem sempre equações diferenciais ordinárias possuem solução analítica e exigem, portanto, uma abordagem numérica. Um dos métodos numéricos mais utilizados é o de Runge-Kutta de 4ª ordem e, neste trabalho, é analisada a sua eficiência ao comparar seus resultados com os obtidos analiticamente. Para isso foi realizada uma pesquisa bibliográfica para elucidar os conteúdos fundamentais relevantes, para o estudo de oscilações em três casos, no oscilador harmônico simples, no circuito RLC em série e no pêndulo amortecido e forçado, sendo realizado posteriormente um tratamento computacional e numérico destes sistemas. Da comparação entre os resultados numéricos e analíticos, pode-se constatar que o método de Runge-Kutta apresenta eficácia e robustez para estes casos e a sua implementação computacional fornece resultados confiáveis mesmo em situações onde as soluções analíticas não se aplicam (Pêndulo amortecido e forçado), onde a solução é caótica em alguns casos.

Palavras-chave: Oscilações. EDO. Runge-Kutta.

ABSTRACT

Despite the great utility, ordinary differential equations sometimes don't have analytical solution and therefore require a numerical approach. One of the most used numerical methods is the Runge-Kutta 4th order, and in this work, its efficiency is analyzed when comparing its results with those obtained analytically. For this, a bibliographic research was carried out to elucidate the relevant fundamental contents, for the study of oscillations in three cases, the simple harmonic oscillator, the series RLC circuit and the damped and driven pendulum, and a computational and numerical treatment of these systems was, then, done. From the comparison between the numerical and analytical results, it can be concluded that the Runge-Kutta method presents efficacy and robustness for these cases and its computational implementation provides reliable results even in situations where analytical solutions do not apply (damped and driven pendulum), where the solution is chaotic in some cases.

Keywords: Oscillations. ODE. Runge-Kutta.

Índices de Ilustrações

Figuras

Figura 1 - Oscilador Massa-Mola.....	31
Figura 2 - Circuito RLC em série com uma fonte de tensão.	34
Figura 3 - Pêndulo Amortecido e Forçado.	39
Figura 4 - Representação gráfica dos resultados analítico e numérico do sistema massa-mola	48
Figura 5 - Representação gráfica do erro relativo percentual do sistema massa-mola.....	49
Figura 6 - Representação gráfica dos resultados analítico e numérico da carga no circuito RLC	52
Figura 7 - Representação gráfica dos resultados analítico e numérico da corrente no circuito RLC	53
Figura 8 - Representação gráfica do erro relativo obtido por meio da aproximação numérica da carga do circuito RLC.....	53
Figura 9 - Representação gráfica do erro relativo obtido por meio da aproximação numérica da corrente do circuito RLC	54
Figura 10 - Representação gráfica da solução numérica do sistema pêndulo amortecido e forçado para os valores 1.12 e 1.2 de $B = f$	55
Figura 11 - Representação gráfica do resultado numérico do pêndulo amortecido e forçado para $B = 1, 12$	56
Figura 12 - Representação gráfica do resultado numérico do pêndulo amortecido e forçado para $B = 1, 2$	56
Figura 13 - Plano Cartesiano Complexo.....	61
Figura 14 - Triângulo Retângulo	61
Figura 15 - Diagrama de um Resistor.....	64
Figura 16 - Resistores	64
Figura 17 - Diagrama de um Capacitor	65
Figura 18 - Capacitores.....	65
Figura 19 - Diagrama de um Indutor	66
Figura 20 - Indutores	66

Tabelas

Tabela 1: Soluções possíveis de uma equação não-homogênea.....	24
Tabela 2- Dados do sistema massa-mola.....	70
Tabela 3 - Dados da carga no circuito RLC em Série	71
Tabela 4 - Dados da corrente no Circuito RLC em Série	72
Tabela 5– Dados (até $t = 300$) do Pêndulo Amortecido e Forçado.....	73

Sumário

INTRODUÇÃO	9
1. Estudo das Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem	11
1.1 Equações Diferenciais Ordinárias	11
1.2 Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem	12
1.2.1 Problema de valor inicial para Equações Lineares de Segunda Ordem	14
1.2.2 Redução de PVI de Segunda Ordem para PVI de Primeira Ordem	15
1.3 Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes	16
1.3.1 Método de Solução por meio das raízes da Equação Característica	16
1.4 Equações Não-Homogêneas	22
1.4.1 Método dos Coeficientes Indeterminados	23
2. Método Numérico	25
2.1 Método de Runge-Kutta	25
2.2.1 Método de Runge-Kutta de 1ª Ordem	27
2.2.2 Método de Runge-Kutta de 2ª Ordem	27
2.2.3 Método de Runge-Kutta de 3ª Ordem	29
2.2.4 Método de Runge-Kutta de 4ª ordem	30
3. Modelagem de Oscilações Mecânicas e Elétricas.....	31
3.1 Sistema Massa-Mola	31
3.2 Circuito Elétrico RLC em Série	34
3.3 Pêndulo Amortecido e Forçado	39
4. Soluções dos Problemas Oscilatórios	46
4.1 Resolução analítica e numérica	46
4.1.1 Sistema Massa-mola	46
4.1.2 Circuito RLC em Série	49
4.1.3 Pêndulo Amortecido Forçado	54
Considerações Finais	58
Referencias Bibliográficas	59
Apêndice A – Números Complexos	61
Apêndice B – Equação de Euler	63
Apêndice C – Componentes Elétricos do Circuito RLC	64
Apêndice D – Coordenadas Polares	68

Apêndice E – Algoritmo método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4)	69
Apêndice F – Tabelas	70

INTRODUÇÃO

No século XVII, quando Sir Isaac Newton e Gottfried Leibniz construíram as bases do cálculo diferencial e integral, eles abriram, também, as portas para o desenvolvimento das equações diferenciais. Neste contexto, além deles, físicos e matemáticos como os irmãos Jacob e Johann Bernoulli, passaram a determinar algumas soluções mais simples para equações diferenciais de primeira e segunda ordem, as quais envolvem, respectivamente, derivadas de primeira e segunda ordem, associadas a problemas da mecânica e da geometria [1]. As equações diferenciais, deste ponto em diante, ganharam importância e utilidade ao modelar cada vez mais, e melhor, os mais diversos problemas de interesse, principalmente devido à segunda lei de Newton, que lida com a aceleração, a segunda derivada da posição, e permite formular as equações de movimento [2], por exemplo, de corpos submetidos a forças conhecidas, as quais são equações diferenciais de segunda ordem.

Apesar da grande utilidade e abrangência, nem todas as equações diferenciais são de fácil resolução e, além disso, existem aquelas que simplesmente não possuem solução analítica. Por este motivo, com a evolução das equações diferenciais surgiram, também, os chamados métodos numéricos de solução, que resolvem estas equações através de simplificações das derivadas presentes. Apesar do erro inerente a estes procedimentos, é possível utilizá-los sem problemas dentro da margem de erro dos resultados obtidos, a qual pode ser reduzida ao custo de um esforço maior na implementação de tais métodos.

Desta forma, este trabalho tem como objetivo geral verificar a eficiência e a aplicabilidade de um dos métodos numéricos mais utilizados, o método de Runge-Kutta, através da sua implementação computacional. Para isso, os objetivos específicos são mostrar as definições básicas sobre as equações diferenciais e sua classificação, mostrar o método de Runge-kutta até a 4ª ordem, modelar três sistemas físicos, quais sejam, o oscilador harmônico simples, o circuito RLC em série e o pêndulo amortecido e forçado, através de equações diferenciais, resolver as equações de movimento destes três sistemas analítica e numericamente (com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem), e, por fim, comparar os resultados obtidos.

Para a realização deste trabalho foi feito o estudo de bibliográficos através de alguns livros e artigos. Para o estudo de equações diferenciais, foram utilizados os livros Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno [2], Equações Diferenciais [3], Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem [5], Cálculo (volumes 1 e 2) [4, 14].

Para o método de Runge-Kutta foram utilizados Cálculo Numérico com Aplicações [6], Introdução aos Sistemas Dinâmicos: Uma abordagem prática com Maxima [7] e Numerical Analysis [8]. Por fim, para o estudo das oscilações foram utilizados os livros Fundamentos da Física (volumes 2 e 3) [9, 10], Curso de Física Básica (volumes 2 e 3) [11, 17], Física II: Termodinâmica e Ondas [12], Física III: Eletromagnetismo [16], Física para Engenheiros: Mecânica, Oscilações e Ondas, Termodinâmica [13], Mecânica Clássica (volumes 1 e 2) [15, 18] e Classical Mechanics: System of Particles and Hamiltonian Dynamics [19].

Para cumprir seus objetivos, o presente trabalho está dividido em quatro capítulos e um apêndice. O capítulo 1 trata do estudo das equações diferenciais lineares de segunda ordem, equações homogêneas e as equações não-homogêneas, e os tipos de soluções possíveis destas. No capítulo 2 será discutido o método numérico de Runge-Kutta, dando atenção especial para o método de Runge-Kutta de quarta ordem. O capítulo 3 abordará a modelagem das oscilações mecânicas e elétricas, oscilador harmônico simples, circuito RLC em série e pêndulo amortecido e forçado. O capítulo 4 descreverá os problemas práticos que serão resolvidos analiticamente, em seguida são analisados seus resultados e comparados com a resolução obtida pelo método numérico com auxílio computacional. Por fim, devido a alguns assuntos matemáticos, componentes elétricos e tabelas extensas que foram citados neste trabalho, temos os apêndices, com algumas explicações básicas e informações mais completas para auxiliar aos leitores.

CAPITULO 1

Estudo das Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem

Este capítulo trata do estudo das equações diferenciais lineares e não-lineares de segunda ordem, as quais têm aplicações em muitos problemas de Engenharia, Física, Química, Biologia, entre outras. Uma equação diferencial de segunda ordem é uma equação que envolve derivada de segunda ordem de funções e são usadas para descrever o comportamento de sistemas dinâmicos, como a mecânica de vibrações e na teoria dos circuitos elétricos [2]. As equações diferenciais, de modo geral, constituem uma peça fundamental para a montagem de um grande quebra-cabeça para as ciências exatas. Entretanto, devido à extensão deste assunto, neste trabalho serão tratadas as equações diferenciais de segunda ordem, visto que essas equações modelam os problemas físicos propostos, como sistema massa-mola, circuitos RLC, que é um circuito formado por um Resistor (R), um Indutor (L) e um Capacitor (C) e pêndulo amortecido e forçado.

Estes casos apresentam soluções analíticas, entretanto isso não ocorre para muitos dos problemas que envolvem estas equações, principalmente para os casos mais complexos, como quando as equações são não-lineares. Desta forma, não existem regras ou métodos que permitam exibir soluções em termos de funções elementares, embora suas soluções existam e possam, quase sempre, ser determinados por métodos numéricos. Assim, é fundamental verificar a validade e a precisão de tais meios de solução. Este trabalho, então, compara ambos os resultados para ratificar a eficiência do método de Runge-Kutta de 4ª ordem e a sua aplicabilidade para casos mais complexos. Com este objetivo, este capítulo inicia tratando dos aspectos básicos das equações diferenciais.

1.1 Equações Diferenciais Ordinárias

Definição 1: Uma equação diferencial é aquela que contém uma função de uma ou mais variáveis independentes e suas derivadas, em relação a uma ou mais variáveis independentes, como segue, com i variáveis independentes e a variável dependente y com suas derivadas até a n -ésima ordem [3]:

$$f(x_i, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

Definição 2: Uma equação diferencial pode ser ordinária (EDO), caso contenha apenas funções de uma variável independente, da dependente e de suas derivadas, em relação à variável independente. Segue exemplo,

$$y'' - 2y' + 6y = 0, \quad (2)$$

uma equação diferencial também pode ser classificada como parcial (EDP), caso ela tenha funções de uma variável independente, da dependente e de suas derivadas com relação à duas ou mais variáveis independentes [3]. Tal equação (ver, (3)), não será abordada no presente trabalho.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (3)$$

Definição 3: Uma equação diferencial pode ser de primeira, segunda ou n-ésima ordem, dependendo da derivada de maior ordem presente na equação. De forma geral, se y é uma função de t , logo, uma EDO de ordem n pode ser escrita da seguinte forma, como mostrado em (1) [3].

$$f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

onde f é uma função de t, y e suas derivadas $y', y'', \dots, y^{(n)}$.

Definição 4: Uma equação diferencial é chamada de linear quando a variável dependente y e suas derivadas são de grau 1, ou seja, a potência de cada termo que envolve a variável y é igual a 1, e os coeficientes dependem de uma única variável t . Já uma equação não linear é toda equação que nega por definição a equação linear, por exemplo, se aparecem termos não-lineares como y'^2 , $\sin(y'')$, $y' \ln(y)$ e $xy'y''$, o que impedem a obtenção da forma geral de uma equação linear, como veremos na seção seguinte. A equação (1) é uma EDO linear de grau n [3].

1.2 Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem

A equação diferencial de segunda ordem é usualmente escrita pela forma [2, 4]:

$$y'' + p(t)y' + h(t)y = g(t) \quad (4)$$

onde a linha representa a diferenciação em relação a variável independente t , visto que o t representa o tempo para fenômenos físicos. Sendo as funções p , h e g reais e dependentes de t . Neste sentido, define-se equação de segunda ordem devido a derivada de maior ordem presente em (4) ser 2 (y''), para a situação linear é porque y não é multiplicada por nenhuma das suas derivadas e nem as derivadas de y não se multiplicam entre si [2]. Com isso, pode-se reescrever (4) da seguinte forma:

$$Q(t)y'' + P(t)y' + R(t)y = G(t). \quad (5)$$

Assim, considerando $Q(t) \neq 0$, divide-se (5) por $Q(t)$, obtendo desta maneira (4). Onde,

$$p(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}, \quad h(t) = \frac{R(t)}{Q(t)}, \quad g(t) = \frac{G(t)}{Q(t)} \quad (6)$$

para que uma equação diferencial de segunda ordem seja considerada homogênea, o termo da função $g(t)$ da equação (4), ou $G(t)$ da equação (5), deve ser necessariamente igual à zero, para todo t . Mas, se as equações (4) e (5) forem diferentes de zero, a equação é dita não-homogênea. Assim, se essas equações forem consideradas homogêneas, logo serão escritas da seguinte forma, respectivamente [2, 4]:

$$Q(t)y'' + P(t)y' + R(t)y = 0, \quad (7)$$

ou

$$y'' + p(t)y' + h(t)y = 0. \quad (8)$$

Para resolver uma equação diferencial de segunda ordem deve-se obter uma família de soluções. Se duas soluções de uma EDO de segunda ordem são conhecidas, então a combinação linear¹ das mesmas, é também uma solução. Este fato é conhecido como princípio da superposição que será abordado e demonstrado a seguir [2].

Teorema 1: Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da equação linear homogênea (8), logo a combinação:

¹Uma combinação linear tem a forma $\sum_i c_i x_i = 0$. Para este trabalho, considera-se $i = 2$.

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \quad (9)$$

sendo c_1 e c_2 constantes quaisquer, é também uma solução da equação (8). Para provar o teorema 1, basta substituir a expressão (9) em (8). Logo, temos:

$$\begin{aligned} y'' + p(t)y' + h(t)y &= 0, \\ &= [c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)]'' + p(t)[c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)]' + h(t)[c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)], \\ &= c_1 y_1''(t) + c_2 y_2''(t) + p(t)c_1 y_1'(t) + p(t)c_2 y_2'(t) + h(t)c_1 y_1(t) + h(t)c_2 y_2(t), \\ &= c_1 [y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + h(t)y_1(t)] + c_2 [y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + h(t)y_2(t)], \\ &= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

A partir de (10) verifica-se que a (9) é solução de (8). Portanto, isso mostra que a solução é linearmente independentes, tal fato acontece pelo fato de que a equação e suas derivadas são lineares [2]. A independência linear desta solução, como mostrado no teorema 1, mostra que é possível termos uma família de soluções à depender das constantes c_1 e c_2 . De modo que, pode-se verificar que as funções y_1 e y_2 são linearmente dependentes, em um intervalo I se existir duas constantes c_1 e c_2 , que não podem ser ambas nulas, tais que $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = 0$, para todo t em I . Por outro lado, se as duas funções y_1 e y_2 forem linearmente independentes em um intervalo I , logo as únicas constantes para as quais $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = 0$, para todo t em I , são $c_1 = c_2 = 0$. Logo, nem y_1 nem y_2 é múltiplo constante um do outro [2, 4].

1.2.1 Problema de valor inicial para Equações Lineares de Segunda Ordem

Antes de abordar o problema de valor inicial (PVI) para EDO de 2ª ordem, necessita-se introduzir o PVI para EDO de 1ª ordem. Ao fazer uma aplicação das equações diferenciais, geralmente precisa-se encontrar uma solução que satisfaça algumas condições adicionais. Em muitos problemas físicos, por exemplo, a solução de uma equação diferencial não é dada de forma geral, mas de forma particular, de maneira que satisfaça uma condição do tipo $y(t_0) = y_0$, onde t_0 é um número em um dado intervalo real e y_0 é um número real arbitrário [4]. Esta é chamada condição inicial e o problema é denominado problema de valor inicial de primeira ordem. O teorema de existência e unicidade garante que a solução de um problema de valor

inicial existe e ela é única [2]. Um problema de valor inicial para uma equação diferencial de segunda ordem tem que ter duas condições iniciais $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y'_0$. Ou seja,

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + h(t)y = g(t), \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y'_0. \end{cases} \quad (11)$$

Assim, (11) é um problema de valor inicial (P.V.I), onde p , h e g são contínuas num intervalo aberto I e t_0, y_0 e y'_0 são números reais. Então, há somente uma solução para este problema, e a solução existe para todo intervalo I [2].

1.2.2 Redução de PVI de Segunda Ordem para PVI de Primeira Ordem

Para resolver equações de ordem elevada, por meio das condições iniciais, basta fazer a redução a um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Neste sentido, seja o problema de valor inicial representado por [2]:

$$\begin{cases} y'' = g(t, y, y'), \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y'_0. \end{cases} \quad (12)$$

Fazendo uma mudança de variável na equação (12), $y' = z$, obtêm-se:

$$z' = g(t, y, z), \quad (13)$$

assim, reduz-se o PVI à seguinte forma:

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = g(t, y, z), \\ y(t_0) = y_0, \\ z(t_0) = z_0. \end{cases} \quad (14)$$

Portanto, para determinar a solução da equação (12), necessita-se resolver o sistema de equações diferenciais de primeira ordem dada pela equação (14) [2].

1.3 Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes

Um procedimento para obter soluções particulares de uma EDO linear de segunda ordem é possível se as funções que acompanham as derivadas de primeira e segunda ordem de y e a própria função y forem constantes. Para isso, podem-se considerar as funções Q , P e R sendo constantes da equação diferencial (7) e, substituindo-as por constantes dadas a , b e c , sendo $a \neq 0$. Deste modo, tem-se [4]:

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (15)$$

analisando as equações de segunda ordem, uma função que defira de suas derivadas por constantes indica ser uma solução. Percebe-se, então, que a solução pode ser dada por uma função exponencial [4]. Assim, supondo que $y = e^{\mu t}$ seja uma solução para a equação (15), onde μ é um parâmetro a ser determinado, vem que $y' = \mu e^{\mu t}$ e $y'' = \mu^2 e^{\mu t}$. Substituindo esses valores em (15), resulta-se em:

$$a\mu^2 e^{\mu t} + b\mu e^{\mu t} + ce^{\mu t} = 0, \quad (16)$$

$$(a\mu^2 + b\mu + c)e^{\mu t} = 0, \quad (17)$$

como $e^{\mu t} \neq 0$, desta forma a solução ficará:

$$a\mu^2 + b\mu + c = 0. \quad (18)$$

Logo, a equação (18) é chamada de equação auxiliar ou equação característica da equação diferencial (15).

1.3.1 Método de Solução por meio das raízes da Equação Característica

Para obter a solução de uma equação diferencial homogênea do tipo (15), temos que resolver a equação característica (18), onde μ é a raiz dessa equação. Visto que, uma equação do segundo grau apresenta duas raízes que podem ser reais e distintas, reais e iguais, ou complexas. As raízes da equação característica podem ser encontradas usando a fórmula de Bháskara² [4]:

² Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$, as raízes são dadas por $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$$\mu = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad (19)$$

onde Δ é dada por;

$$\Delta = b^2 - 4ac, \quad (20)$$

portanto, a raiz μ_1 é igual a:

$$\mu_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (21)$$

e conseqüentemente a raiz μ_2 é similar à raiz de μ_1 , a menos de um sinal positivo para negativo como mostra a equação (22) abaixo:

$$\mu_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (22)$$

As raízes geradas, μ_1 e μ_2 têm sinais diferentes, pois segunda a fórmula de Bháskara que mostra que existe um sinal " \pm ", indicando o cômputo de dois cálculos para obter as raízes, μ_1 e μ_2 respectivamente, como mostrado em (21) e (22). Dependendo do tipo de equação, há uma raiz positiva, uma negativa ou uma nula. Desta forma, a solução da equação característica depende do tipo da raiz obtida. Visto que, existem três casos a serem considerados com relação às raízes da equação característica [4], como segue:

1º Caso: Para $b^2 - 4ac > 0$, determina-se duas raízes reais e distintas, ou seja, μ_1 e μ_2 são números reais diferentes entre si. Como visto anteriormente, a solução de uma equação diferencial de segunda ordem é dada por (9), isto é:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

Deste modo, $y_1(t) = e^{\mu_1 t}$ e $y_2(t) = e^{\mu_2 t}$ são soluções linearmente independentes da equação (9). Sendo as raízes μ_1 e μ_2 da equação característica (18) reais e distintas, então a solução geral da equação (15) é dada por [2]:

$$y = c_1 e^{\mu_1 t} + c_2 e^{\mu_2 t}, \quad (23)$$

para provar que realmente essa solução é verdadeira, precisa-se encontrar as derivadas de primeira e segunda ordem de y e substituir na expressão (15). Assim,

$$y' = c_1\mu_1 e^{\mu_1 t} + c_2\mu_2 e^{\mu_2 t}, \quad (24)$$

$$y'' = c_1\mu_1^2 e^{\mu_1 t} + c_2\mu_2^2 e^{\mu_2 t}, \quad (25)$$

desta forma, substituindo (23), (24) e (25) na equação (15) e manipulando algebricamente os termos, têm-se:

$$y'' + by' + cy = c_1(a\mu_1^2 + b\mu_1 + c)e^{\mu_1 t} + c_2(a\mu_2^2 + b\mu_2 + c)e^{\mu_2 t}. \quad (26)$$

Nota-se que o termo entre parênteses da expressão (26) é nulo, assim como mostrado na equação (17). Entretanto, a função y dada pela equação (23) é uma solução da equação diferencial de segunda ordem [2, 4].

2º Caso: Para $b^2 - 4ac = 0$, calcula-se duas raízes reais e iguais da equação característica, ou seja, $\mu_1 = \mu_2 = -\frac{b}{2a}$, a princípio têm-se apenas uma solução, para a equação (15), sendo $y_1(t) = e^{(-bt/2a)}$ [4]. Deste modo:

$$\mu = -\frac{b}{2a} \Rightarrow 2a\mu + b = 0, \quad (27)$$

sendo $y_1 = e^{\mu t}$ uma solução da equação (15), precisamos que a outra seja linearmente independente. Para isso, utilizaremos o método de redução de ordem de D'Alembert [15], aplicável quando temos uma solução e precisamos de outra linearmente independente, como buscamos. A segunda solução deve ter a forma

$$y_2(t) = v(t)y_1(t). \quad (28)$$

Como $y_2' = v'y_1 + vy_1'$ e $y_2'' = vy_1'' + 2v'y_1' + v''y_1$, podemos substituir isto na equação (8), mais geral, e obter

$$v(y_1'' + py_1' + hy_1) + v'(2y_1' + py_1) + v''y_1 = 0, \quad (29)$$

como y_1 é solução da equação (8), por princípio neste caso, o primeiro parêntese desta equação é nulo. Assim, resta

$$y_1 v'' + (2y_1' + py_1)v' = 0, \quad (30)$$

dividindo esta equação por y_1 , obtemos

$$\frac{dv'}{dt} = -\left(p + \frac{2y_1'}{y_1}\right)v', \quad (31)$$

$$\frac{dv'}{v'} = -\left(p + \frac{2y_1'}{y_1}\right)dt, \quad (32)$$

integrando, temos

$$\ln v' + c_a = -\int \left(p + \frac{2y_1'}{y_1}\right)dt, \quad (33)$$

isolando v' ,

$$v' = e^{-\int \left(p + \frac{2y_1'}{y_1}\right)dt - c_a} = e^{-\int p dt - \int \frac{2y_1'}{y_1} dt - c_a} = e^{-\int p dt} e^{-\int \frac{2y_1'}{y_1} dt} e^{-c_a}, \quad (34)$$

como

$$-\int \frac{2y_1'}{y_1} dt = -2\ln y_1 + c_b = \ln y_1^{-2} + c_b, \quad (35)$$

temos,

$$v' = e^{-\int p dt} e^{\ln y_1^{-2}} e^{c_b} e^{-c_a}, \quad (36)$$

assim,

$$v' = c_c \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dt}, \quad (37)$$

logo,

$$dv = c_c \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dt} dt, \quad (38)$$

onde $c = e^{cb} e^{-ca}$. Integrando esta equação, obtemos

$$v = c_c \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dt} dt - c_d, \quad (39)$$

a segunda solução é, então

$$y_2(t) = v(t)y_1(t) = c_c y_1(t) \int \frac{1}{y_1(t)^2} e^{-\int p(t) dt} dt - c_d y_1(t), \quad (40)$$

como não precisamos de uma família de soluções para y_2 e o segundo termo é a primeira solução, podemos usar $c_c = 1$ e $c_d = 0$. Desta forma,

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{1}{y_1(t)^2} e^{-\int p(t) dt} dt. \quad (41)$$

Para o caso dos coeficientes constantes, $p(t) = b/a$ e, quando $\mu_1 = \mu_2 = \mu = -b/2a$ e $y_1 = e^{\mu t}$, temos

$$y_2(t) = e^{-\frac{b}{2a}t} \int \frac{1}{\left(e^{-\frac{b}{2a}t}\right)^2} e^{-\int \frac{b}{a} dt} dt, \quad (42)$$

assim,

$$y_2(t) = e^{-\frac{b}{2a}t} \int \frac{e^{-\frac{b}{a}t}}{e^{-\frac{b}{a}t}} dt = t e^{-\frac{b}{2a}t} = t e^{\mu t}, \quad (43)$$

por fim,

$$y(t) = c_1 e^{\mu t} + c_2 t e^{\mu t}, \quad (44)$$

daí, utilizando $c_1 = c_2 = 1$ e fazendo as derivadas das equações diferenciais de primeira e segunda ordem para provar que é solução da equação (15), têm-se:

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= a(\mu^2 e^{\mu t} + \mu^2 t e^{\mu t} + 2\mu e^{\mu t}) + b(\mu e^{\mu t} + \mu t e^{\mu t} + e^{\mu t}) + (c e^{\mu t} \\ &+ c t e^{\mu t}), \end{aligned} \quad (45)$$

$$= (a\mu^2 + b\mu + c + 2a\mu + b)e^{\mu t} + (a\mu^2 + b\mu + c)t e^{\mu t}, \quad (46)$$

$$= 0(e^{\mu t}) + 0(t e^{\mu t}) = 0. \quad (47)$$

Portanto, como o lado direito da expressão é nulo prova-se que $y_1 = e^{\mu t}$ e $y_2 = t e^{\mu t}$ são soluções da equação (15).

3º Caso: Para $b^2 - 4ac < 0$, tem-se duas raízes complexas conjugadas, ou seja, μ_1 e μ_2 da equação característica são números complexos (ver apêndice A). Neste caso a solução da equação característica tem seguinte forma [4]:

$$\mu = \alpha \pm \beta i, \quad (48)$$

logo,

$$\mu_1 = \alpha + \beta i \text{ e } \mu_2 = \alpha - \beta i. \quad (49)$$

onde,

$$\alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{[\sqrt{|b^2 - 4ca|}] i}{2a}. \quad (50)$$

Usando a equação de Euler (ver, Apêndice B) [4], tem-se:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta, \quad (51)$$

assim, a solução da equação diferencial apresenta a seguinte forma:

$$y = C_1 e^{\mu_1 t} + C_2 e^{\mu_2 t} = C_1 e^{(\alpha + \beta i)t} + C_2 e^{(\alpha - \beta i)t},$$

$$y = C_1 e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t) + C_2 e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t),$$

$$y = e^{\alpha t} [(C_1 + C_2) \cos \beta t + i(C_1 + C_2) \operatorname{sen} \beta t],$$

$$y(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \operatorname{sen} \beta t). \quad (52)$$

Para as raízes complexas (49) da equação característica (18), a solução geral da equação (15) é a equação (44), onde $c_1 = C_1 + C_2$ e $c_2 = i(C_1 + C_2)$ [4].

1.4 Equações Não-Homogêneas

Partindo da definição de uma equação diferencial homogênea é possível observar que as não-homogêneas tem um comportamento definido em duas partes. Uma por sua parte homogênea e outra pela parte que a torna não-homogênea, do coeficiente de não homogeneidade [5]. Neste sentido, para resolver uma equação diferencial não-homogênea deve-se resolver primeiro a sua parte homogênea, por meio da equação característica e em seguida achar a solução particular do termo não-homogênea de $g(t)$. Para isto, é necessário compreender dois métodos para encontrar a solução particular, são eles o método dos coeficientes indeterminados e o método da variação dos parâmetros [2]. Portanto, este método fornece uma solução particular para uma equação não-homogênea dada pela equação (4), onde sua solução particular irá depender da função $g(t)$. Para provar este fato, utiliza-se o seguinte teorema [2]:

Teorema 3: Se $y_p(t)$ é uma solução particular da equação não-homogênea (4). Seja $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluções fundamentais da equação homogênea correspondente. Logo, a solução geral da equação (4) é $Y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t)$. Assim, dizemos que a solução geral da equação (4) é dada pela soma da solução da equação homogênea, com a solução particular da equação não-homogênea, isto é [4]:

$$Y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t), \quad (53)$$

ou

$$Y(t) = y_h(t) + y_p(t). \quad (54)$$

Portanto, $y_h(t)$ é a solução geral da equação homogênea, cujas soluções já foram expostas e $y_p(t)$ é a solução particular usando o contexto de equação não-homogênea [4].

Demonstração do teorema 3:

Para provar este teorema, considera-se $Y(t)$ uma solução da equação (4) e $y_p(t)$ uma solução particular desta equação. Para isso, precisa-se mostrar que a equação $y_h(t) = Y(t) - y_p(t)$ é solução da equação homogênea associada.

Tem-se que a equação (15) e substituindo-se y e suas derivadas por $Y(t)$, temos que:

$$\begin{aligned} y_h''(t) + p(t)y_h'(t) + h(t)y_h(t) &= \\ &= (Y(t) - y_p(t))'' + p(t)(Y(t) - y_p(t))' + h(t)(Y(t) - y_p(t)), \\ &= (Y''(t) + p(t)Y'(t) + h(t)Y(t)) - (y_p''(t) + p(t)y_p'(t) + h(t)y_p(t)), \\ &= g(t) - g(t) = 0. \end{aligned}$$

Desta forma conclui-se que $Y(t)$ é solução geral de uma equação diferencial homogênea associada [4].

1.4.1 Método dos Coeficientes Indeterminados

O método dos coeficientes indeterminados aborda uma forma para obter a solução particular $y_p(t)$, da equação não-homogênea com coeficientes desconhecidos. Este método pode ser aplicado à equação linear não-homogênea de qualquer ordem, como os coeficientes constantes. Para isso, a função $g(t)$ deve ser polinomial, exponencial ou um par de funções seno e cosseno [2]. Portanto, tem-se como exemplo a equação (4) que é um polinômio de grau G , logo a sua função $g(t)$ deve ser necessariamente um polinômio também de grau G . Neste sentido o método requer uma hipótese inicial, a qual, caso não apresente solução, deve ser multiplicada por t ou por t^2 . Este método é mais vantajoso, visto que, é feita uma hipótese para chegar à equação particular. Contudo, como os cálculos são extensos, se feitos manualmente, recorre-se a um sistema de álgebra computacional, que facilitam esses cálculos para muitas aplicações práticas que serão abordadas neste trabalho. A Tabela 1 mostra as funções $g(t)$ que podem ser aplicadas neste método [2].

Tabela 1: Soluções possíveis de uma equação não-homogênea

Função $g(t)$	Solução particular $y_p(t)$
$g(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$	$y_p(t) = At^n + Bt^{n-1} + \dots + Ct + D$
$g(t) = Ce^{kt}$	$y_p(t) = Ae^{kt}$
$g(t) = C \cos(kt)$	$y_p(t) = A \cos(kt) + B \sin(kt)$
$g(t) = C \sin(kt)$	

Fonte: Adaptado Boyce e Diprima, 2009.

Portanto, a função $g(t)$ é um polinômio para equação linear não-homogênea, onde podemos encontrar uma solução particular y_p que é um polinômio de grau G , visto que, se y for um polinômio, logo a equação (23) também é um polinômio. Entretanto, substituímos a equação particular igual a um polinômio na equação e determinamos os coeficientes [2].

CAPITULO 2

Método Numérico

Neste capítulo iremos abordar os métodos numéricos que serão usados para obter uma aproximação da solução de um problema de valor inicial. Estes métodos são uteis para EDO's lineares e não-lineares. Para o presente trabalho será abordado uma EDO de segunda ordem, onde existem problemas em que os métodos analíticos não são eficazes para obter uma solução, ou a resolução por meio deles se torna muito difícil, exige um grau de complexidade mais elevada. Por isso, será feita neste capítulo um estudo dos métodos de Runge-Kutta de primeira, segunda, terceira e quarta ordem.

2.1 Método de Runge-Kutta

Os métodos de Runge-Kutta foram desenvolvidos no ano de 1900 pelo matemático e físico alemão Carl David Runge (1856-1927) e por outro matemático alemão M. Wilhelm Kutta (1867-1944) [2]. Tais métodos consistem em aproveitar as qualidades inerentes dos métodos da série de Taylor de ordem mais elevada e ao mesmo tempo eliminar seu maior complicador, ou seja, avaliar derivadas de funções do tipo $f(x, y)$ tornando os métodos da série de Taylor computacionalmente impraticáveis somado ao fato da necessidade de calcular $f(x, y)$ no número de pontos dependendo da ordem do método [6].

Chama-se a atenção para o fato de os métodos de $f(x, y)$, apesar de serem auto iniciáveis (pois são de passo um) e não trabalharem com derivadas de $f(x, y)$, apresentando a desvantagem de não haver uma estimativa simples para o erro, o que inclusive poderia ajudar na escolha do passo h . Existem ainda adaptações dos métodos de Runge-Kutta que são simples operacionalmente e que são usadas também para estimativas de erros e controle do tamanho do passo h [7]. Contudo, no referido trabalho será implementado o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, no que diz respeito à solução numérica de um problema prático, pois a técnica de solução apresentada no capítulo 2 não contempla algumas equações. Sem dúvidas, um método bastante utilizado, apesar de relativamente antigo (Runge-Kutta). Como os demais métodos numéricos para o tratamento de EDO's, reduzimos a equação de ordem superior, como o caso geral de segunda ordem [7, 8],

$$\frac{d^2y}{dx^2} + q(x) \frac{dy}{dx} = r(x), \quad (55)$$

a um conjunto de equações de primeira ordem, neste caso

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= z(x), \\ \frac{dz}{dx} &= r(x) - q(x)z(x),\end{aligned}\tag{56}$$

onde $z(x)$ é uma nova função, em geral com alguma interpretação física significativa, como a velocidade linear ou a velocidade angular, quando trabalhamos com posições ou ângulos.

Após isso temos que analisar como discretizar as funções de uma dada EDO. Seja uma equação do tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),\tag{57}$$

a solução numérica consiste em calcular o valor de y para uma sequência discreta de pontos x_n , estimando os valores das derivadas nos intervalos $[x_n, x_{n+1}]$. Usualmente, a variável independente, isto é, o parâmetro, é o tempo. Podemos representar, então, a equação (57) como:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(t, x),\tag{58}$$

para calcular os valores para instante t_1 discretos. Os diversos métodos numéricos apresentam os meios para obtermos cada ponto através do ponto anterior. Basicamente, discretizarmos o tempo aumentando-o através de incrementos constantes h . Desta forma [7],

$$\begin{aligned}t_1 &= t_0 + h, \\ t_2 &= t_1 + h = t_0 + 2h, \\ t_n &= t_{n-1} + h = t_0 + nh.\end{aligned}\tag{59}$$

Para discretizar a variável, fazemos,

$$\begin{aligned}x_0 &= x(t_0), \\ x_1 &= x(t_1) = x(t_0 + h), \\ x_n &= x(t_n) = x(t_0 + nh).\end{aligned}\tag{60}$$

Um dos métodos mais simples, porém pouco preciso, é o de Euler. Neste método, partimos da definição de derivada a partir de limites [7],

$$\dot{x}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \quad (61)$$

utilizando a discretização nas equações (59) e (60), temos

$$\dot{x}(t_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t_n+h) - x(t_n)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_{n+1} - x_n}{h}, \quad (62)$$

para valores suficientemente pequenos de h , podemos aproximar o valor de x_{n+1} de

$$x_{n+1} \approx x_n + h\dot{x}(t_n) = x_n + hf(t_n, x_n). \quad (63)$$

Onde $f(t_n, x_n)$ é oriundo da equação (58). Dada à equação (63), vemos a importância de termos as condições iniciais (t_0, x_0) , pois, a partir delas podemos determinar todos os demais pontos, com precisão dependendo de h [7].

2.2.1 Método de Runge-Kutta de 1ª Ordem

O método de Runge-Kutta de primeira ordem, também chamado de método de Euler que é obtido a partir do polinômio de Taylor [6]. Assim,

$$y_{n+1} = y_n + hy', \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (64)$$

onde, $y' = f(t_n, x_n)$. Então, temos a sequência:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (65)$$

Podemos concluir que o método de Runge-Kutta de primeira ordem é o método de Euler básico.

2.2.2 Método de Runge-Kutta de 2ª Ordem

Para obter o segundo método, necessita-se fazer $f(x_n, y_n) = (\alpha K_1 + \beta K_2)$ e substituir em (65) [6]. Desta forma:

$$y_{n+1} = y_n + h(\alpha k_1 + \beta k_2), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \quad (66)$$

Assim,

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f[x_n + ph, y_n + qhf(x_n, y_n)] \end{aligned} \quad (67)$$

Para obter a equação do método de Runge-Kutta de 2ª ordem, as constantes α , β , p e q em (66) e (67) devem ser determinadas. Para isso, deve-se fazer a expansão de k_2 em uma série de Taylor [6].

$$k_2 = f(x_n, y_n) + ph \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) + qhf(x_n, y_n) \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) + \sigma(h^2), \quad (68)$$

substituindo (67) e (68) em (66), tem-se:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h[(\alpha + \beta)f(x_n, y_n)] \\ &\quad + h^2 \left[\beta p \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) + \beta q f(x_n, y_n) \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n) + \sigma(h^3) \right], \end{aligned} \quad (69)$$

Por outro lado, ao expandir-se a solução teórica $y(x)$ em torno de x_n até o termo h^2 , tem-se:

$$y(x_n + h) = y(x_n) + \frac{h}{1!} f'(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2!} f''(x_n, y(x_n)) + \sigma(h^3), \quad (70)$$

como,

$$f'(x_n, y(x_n)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y(x_n)) + f(x_n, y(x_n)) \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y(x_n)), \quad (71)$$

fazendo a substituição de (71) em (70), resulta em:

$$\begin{aligned} y(x_n + h) &= y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) \\ &\quad + \frac{h^2}{2!} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y(x_n)) + f(x_n, y(x_n)) \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y(x_n)) \right] + \sigma(h^3). \end{aligned} \quad (72)$$

Igualando-se os termos de mesma potência, em relação à h , em (69) e (72), obtém-se:

$$\begin{aligned}
f(x_n, y(x_n)) &= (\alpha + \beta)f(x_n, y_n) \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y(x_n)) \right. \\
&\quad \left. + f(x_n, y(x_n)) \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y(x_n)) \right] \\
&= \beta p \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) + \beta q f(x_n, y_n) \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n).
\end{aligned} \tag{73}$$

Da equação (73), tem-se o sistema a baixo:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1, \\ \beta p = \frac{1}{2}, \\ \beta q = \frac{1}{2}. \end{cases}, \tag{74}$$

para este sistema disposto de três equações e quatro incógnitas, assim adota-se alguns valores arbitrário para uma das incógnitas, como $\beta = 1, \alpha = 0, p = 1/2$ e $q = 1/2$. Desta forma, o método de Runge-Kutta de 2ª ordem será:

$$y_{n+1} = y_n + hk_2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \tag{75}$$

onde,

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n), \\ k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right). \end{cases} \tag{76}$$

Substituindo k_2 em (75), obtêm-se o método de Runge-Kutta de 2ª ordem [6]

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \tag{77}$$

2.2.3 Método de Runge-Kutta de 3ª Ordem

Os métodos de Runge-Kutta de ordens maiores são obtidos de modo semelhante aos de segunda ordem [6]. Assim, têm-se:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2), & n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ k_1 = f(x_n, y_n), \\ k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 = f(x_n + h, y_n + 2hk_2 - hk_1). \end{cases} \quad (78)$$

2.2.4 Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

Análogo aos métodos anteriores encontra-se também o de 4ª ordem, o qual vai ser utilizado e implementado neste trabalho por ter precisão maior em relação aos métodos 1ª, 2ª e 3ª ordens, como segue [6, 8]:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), & n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ k_1 = f(x_n, y_n), \\ k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3). \end{cases} \quad (79)$$

possuindo erro de truncamento igual a:

$$\epsilon_n = \frac{h^5}{5!} y^{(5)}(\epsilon), x_{n-1} < \epsilon < x_n \quad (80)$$

para cada $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

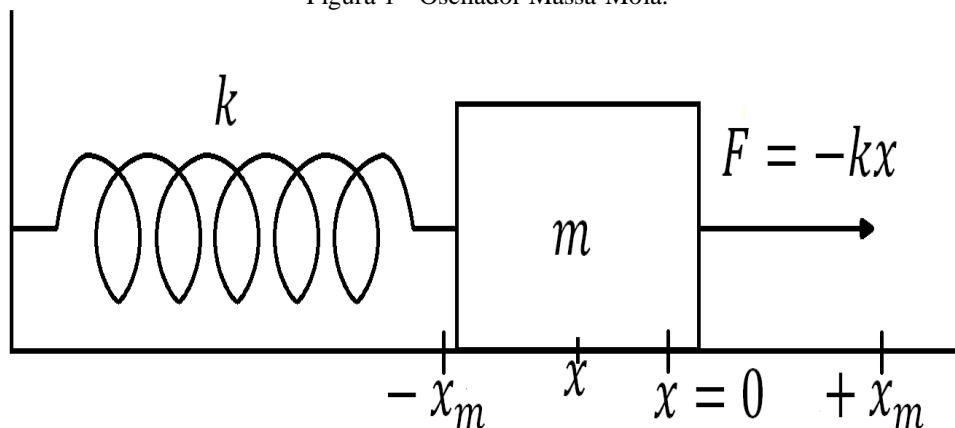
Modelagem de Oscilações Mecânicas e Elétricas

Neste capítulo é feita uma modelagem das oscilações mecânicas, como o movimento de uma massa presa a uma mola, oscilações em circuitos elétricos, como o fluxo cargas elétricas em um Circuito RLC em série e o movimento do pêndulo amortecido e forçado [9]. Existem outros problemas físicos que podem ser resolvidos por equações diferenciais de segunda ordem, mas aqui serão abordados os três supracitados.

3.1 Sistema Massa-Mola

O sistema massa-mola sem atrito constitui um oscilador harmônico simples, onde este consiste em um corpo de massa m preso na extremidade de uma mola que se encontra fixado a uma parede e, apoiado sobre uma superfície horizontal perfeitamente polida, como mostra a Figura 1 [10, 11]. Vale ressaltar que o trabalho está levando em consideração um oscilador na horizontal, onde a força que age no corpo é a força elástica, já para um oscilador na vertical, a força que atua sobre o corpo é a força peso e a elástica. A princípio o sistema encontra-se em equilíbrio estático na posição $x = 0$, mas, a partir do momento em que se imprime uma força F sobre o corpo, ele executa oscilações para a esquerda e para a direita da posição de equilíbrio, variando o comprimento da mola de $-x_m < x < +x_m$, executando um movimento harmônico simples (MHS). Isso acontece devido uma força restauradora que age no corpo de massa m , que tem sinal contrário ao da força aplicada neste corpo [10, 12].

Figura 1 - Oscilador Massa-Mola.



Fonte: Autoria Própria, 2018.

Para um oscilador na horizontal adotando o sistema de coordenadas com origem no ponto $x = 0$ o eixo y na posição vertical e o eixo x na posição horizontal, o módulo desta força restauradora é proporcional à elongação da mola dada pela lei de Hooke³ [10, 13]:

$$F = kx, \quad (81)$$

onde k é a constante da mola e x é a variação do comprimento da mola sendo F a força elástica exercida pela mola. Porém, a lei de Hooke deixa de valer para grandes deformações da mola, além de seu limite elástico, quando ela passa a sofrer deformações permanentes [11]. Representando a equação (81) na forma vetorial, temos:

$$\vec{F} = -kx\hat{x}, \quad (82)$$

o sinal negativo vem do fato de que a força restauradora aponta sempre na posição contrária do vetor deslocamento. O vetor posição é representado por:

$$\vec{r} = x\hat{x}, \quad (83)$$

desta forma, lei de Hooke representada na equação (82), torna-se:

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}, \quad (84)$$

a equação do movimento é obtida usando a segunda lei de Newton, para um corpo de massa m , que é dada pela equação (84). Logo, fazendo a substituição de (82) e a segunda derivada de (83) em (84), obtemos:

$$-kx\hat{x} = m\ddot{x}\hat{x} \Rightarrow -kx = m\ddot{x}, \quad (85)$$

logo, a equação do movimento oscilatório sem amortecimento é dada por:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \quad (86)$$

com frequência angular sendo:

³ Robert Hooke (1635-1703) foi um cientista inglês que atuou em várias áreas. Publicou em 1665, seu livro de maior impacto, *Micrographia*. Hooke publicou sua lei sobre o comportamento elástico em 1676 como um anagrama: *ceiinoossituv*.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (87)$$

onde ω é a frequência angular do MHS, como representado na equação (87) e é medida em radianos [10]. A frequência f representa o número de oscilações por segundo, que tem como unidade de medida o Hertz (Hz). O período τ é dado pelo inverso da frequência, logo:

$$\tau = \frac{1}{f}. \quad (88)$$

Quando nos referimos à frequência angular, temos que o período é

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (89)$$

deste modo, substituindo a equação (87) em (86), temos:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (90)$$

Sendo a equação do movimento oscilatório sem amortecimento, isto é, não possui o termo b na equação, que é o termo de amortecimento. Para a equação característica de (90) (ver, (18)), assume-se $a = 1$, $b = 0$ e $c = \omega^2$, tem-se:

$$\mu^2 + \omega^2 = 0, \quad (91)$$

então, fazendo as manipulações matemáticas da sessão 1.3.1, obtemos:

$$\begin{aligned} \mu^2 &= -\omega^2, \\ \mu &= \pm\sqrt{-\omega^2}, \\ \mu &= \pm i\omega. \end{aligned} \quad (92)$$

Assim, de acordo com a equação (52), obtém-se:

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}, \quad (93)$$

onde $\alpha = 0$ e $\beta = \omega$ e, logo, podemos representa-la como:

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t, \quad (94)$$

adotando $c_1 = A \cos \varphi$ e $c_2 = A \sin \varphi$, logicamente com A e φ constantes. Assim,

$$x(t) = A \cos \varphi \cos \omega t + A \sin \varphi \sin \omega t, \quad (95)$$

a partir da relação trigonométrica $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ [13]. Obtemos,

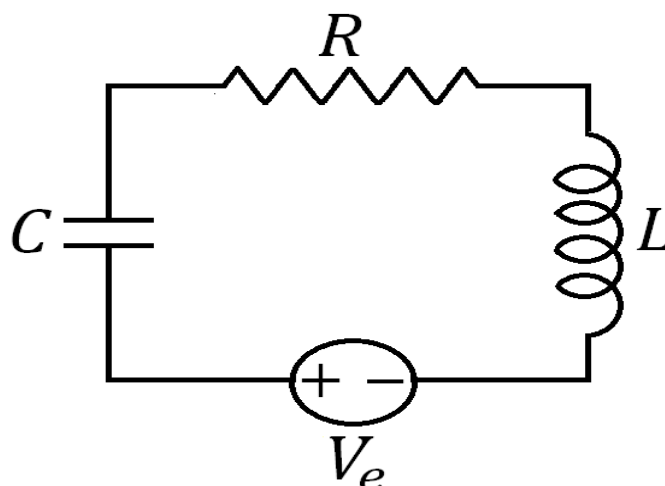
$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (96)$$

Esta forma para solução é de interpretação mais simplificada, pois A é a amplitude da oscilação e φ é a fase.

3.2 Circuito Elétrico RLC em Série

Um circuito RLC em série é constituído por pelo menos, um resistor (R), um capacitor (C) e um indutor (L) ligados em série, como o capacitor carregado no instante $t = 0$ [9]. O resistor dissipa energia em forma de calor, enquanto que o capacitor e o indutor armazenam energia, através de campo elétrico e campo magnético, respectivamente. No apêndice deste trabalho, é tratada de forma mais detalha sobre esses três elementos elétricos (ver, Apêndice C). Este trabalho abordará apenas circuitos em série, assim como o que está representado na Figura 2. Daí conclui-se que com a presença da resistência R a soma das energias elétrica e magnética não é mais constante, visto que, elas diminuem com o tempo devido à resistência presente no circuito que dissipa parte dessa energia transformando-a em energia térmica [9].

Figura 2 - Circuito RLC em série com uma fonte de tensão.



Fonte: Autoria Própria, 2018.

Para obter a equação que modela este tipo de circuito, podemos partir da lei das malhas de Kirchhoff para circuitos RLC em série, que diz que “a soma algébrica das diferenças de potencial (d.d.p) nos três elementos é zero” [7]. Assim, aplicando a lei das malhas de Kirchhoff, no circuito acima, temos [15]:

$$V_R + V_L + V_C = V_e, \quad (97)$$

desta forma, podemos obter uma equação para a carga, em termos de suas derivadas a partir das fórmulas para as tensões no resistor, no indutor e no capacitor (ver, Apêndice C), como segue:

$$IR + Li + \frac{Q}{C} = V_e, \quad (98)$$

onde

$$I = \dot{Q}, \quad (99)$$

Fazendo a substituição de (99) em (98), em seguida, dividindo por L e reorganizando os termos, têm-se [16, 9]:

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = V_e. \quad (100)$$

Adotando, $\gamma = R/2L$ e $\omega_0^2 = 1/LC$ [16, 17]. Desta forma,

$$\ddot{Q} + 2\gamma\dot{Q} + \omega_0^2Q = V_e, \quad (101)$$

onde V_e é a tensão da fonte. Assumindo $V_e = V_0 \cos(\omega t)$, isto é a fonte gera uma tensão que oscila com a amplitude V_0 e frequência ω . Logo, temos:

$$\ddot{Q} + 2\gamma\dot{Q} + \omega_0^2Q = V_0 \cos(\omega t). \quad (102)$$

Portanto, a equação (102) é descrita por uma equação diferencial de segunda ordem não-homogênea com coeficientes constantes. Para obter a solução desta equação, vamos começar resolvendo primeiro sua parte homogênea utilizando o método de solução por meio das raízes da equação característica representado na subseção 1.3.1, do presente trabalho.

Comparando com a equação (18), vemos que $a = 1$, $b = 2\gamma$ e $c = \omega_0^2$. Logo, a equação característica deste problema é:

$$\mu^2 + 2\gamma\mu + \omega_0^2 = 0. \quad (103)$$

Deste modo, o valor de μ dependerá da combinação entre R , L e C , pois

$$\Delta = 4\gamma^2 - 4\omega_0^2, \quad (104)$$

logo,

$$\mu = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad (105)$$

assim, temos os valores para μ dependentes do valor dentro da raiz, como abaixo. Com isso, teremos os três casos discutidos na seção 1.3 dependendo do valor da raiz.

Desta forma, se $\gamma^2 < \omega_0^2$,

$$Q(t) = c_1 e^{(-\gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2})t} + c_2 e^{(-\gamma - i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2})t}, \quad (106)$$

neste caso, $\alpha = -\gamma$ e $\beta = i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, o que faz com que esta solução possa ser escrita, de acordo com (52), ou seja:

$$Q(t) = e^{-\gamma t} \left(c_1 \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t \right) + c_2 \text{sen} \left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t \right) \right), \quad (107)$$

mostrando que a solução oscila com frequência $(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2})$ e amplitude que decresce na forma $e^{-\gamma t}$. Este caso é conhecido, analogamente ao caso de um oscilador harmônico amortecido, como subcrítico [16].

Por outro lado, quando $\gamma^2 = \omega_0^2$, $\mu_1 = \mu_2 = -\gamma$ e a solução se torna [15]

$$Q(t) = c_1 e^{-\gamma t} + c_2 t e^{-\gamma t}, \quad (108)$$

o que nos diz que o sistema já não oscila, pois a carga no circuito apenas decai exponencialmente tendendo a zero. Este caso é chamado de crítico [16].

Por fim, quando $\gamma^2 > \omega_0^2$, a solução é

$$Q(t) = c_1 e^{\left(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right)t} + c_2 e^{\left(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right)t}. \quad (109)$$

A qual também não oscila, enquanto a carga decai exponencialmente tendendo a zero. Este caso é o supercrítico [16].

Para prosseguir com a resolução deste problema, vamos utilizar o caso subcrítico e, para simplificar a equação (107), utilizamos a mesma relação da equação (96). Desta forma, obtemos, a solução homogênea, isto é:

$$Q(t) = Ae^{-\gamma t} \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t + \varphi\right). \quad (110)$$

Para isso existem vários métodos, os quais, em geral, são escolhidos de acordo com o segundo membro da equação (102). Vamos, então, utilizar o método dos coeficientes indeterminados, discutido na subseção (1.4.1). De acordo com a Tabela 1, a solução particular Q_p deve ser:

$$Q_p = a \cos \omega t + b \sen \omega t, \quad (111)$$

assim, calculando \dot{Q}_p e \ddot{Q}_p , temos:

$$\dot{Q}_p = -a\omega \sen(\omega t) + b\omega \cos \omega t, \quad (112)$$

$$\ddot{Q}_p = -a\omega^2 \cos \omega t - b\omega^2 \sen \omega t, \quad (113)$$

substituindo em (102), segue:

$$\begin{aligned} -\omega^2[a \cos(\omega t) + b \sen(\omega t)] + 2\gamma\omega[-a \sen(\omega t) + b \cos(\omega t)] \\ + \omega_0^2[a \cos(\omega t) + b \sen(\omega t)] = V_0 \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (114)$$

Desta equação podemos obter a e b para determinar Q_p na equação (111). Para isso, colocamos os senos e cossenos em evidência em ambos os membros, como segue:

$$\begin{aligned} (-\omega^2 a \cos(\omega t) + 2\gamma\omega b + \omega_0^2 a) \cos(\omega t) + (-\omega^2 b - 2\gamma\omega a + \omega_0^2 a) \sen(\omega t) \\ = V_0 \cos(\omega t) + 0. \sen(\omega t), \end{aligned} \quad (115)$$

temos, então que:

$$\begin{cases} -\omega^2 a + 2\gamma\omega b + \omega_0^2 a = V_0 \\ -\omega^2 b - 2\gamma\omega a + \omega_0^2 b = 0 \end{cases} \quad (116)$$

tal sistema fornece:

$$-2\gamma\omega a = b\omega^2 - b\omega_0^2 \Rightarrow -2\gamma\omega a = b(\omega^2 - \omega_0^2) \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)}{-2\gamma\omega}, \quad (117)$$

$$b \left(-\frac{a}{b}\omega^2 + 2\gamma\omega + \frac{a}{b}\omega_0^2 \right) = V_0, \quad (118)$$

$$b \left[\frac{(\omega^2 - \omega_0^2)\omega^2}{2\gamma\omega} + 2\gamma\omega - \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)\omega_0^2}{2\gamma\omega} \right] = V_0, \quad (119)$$

$$b \frac{(\omega^4 - \omega_0^2\omega^2 + 4\gamma^2\omega^2 - \omega^2\omega_0^2 + \omega_0^4)}{2\gamma\omega} = V_0, \quad (120)$$

$$b = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2 = 2\gamma\omega V_0. \quad (121)$$

Onde, $\varepsilon = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2$, com:

$$b = \frac{2\gamma\omega V_0}{\varepsilon}, \quad (122)$$

$$a = b \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)}{-2\gamma\omega} = \frac{2\gamma\omega V_0}{\varepsilon} \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)}{-2\gamma\omega}, \quad (123)$$

$$a = -V_0 \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)}{\varepsilon}, \quad (124)$$

dessa forma, a solução particular é dada por:

$$Q_P = -\frac{V_0(\omega^2 - \omega_0^2)}{\varepsilon} \cos(\omega t) + \frac{2\gamma\omega V_0}{\varepsilon} \sen(\omega t). \quad (125)$$

A solução geral para o problema é a soma das soluções homogênea e particular. Logo, para $\gamma^2 > \omega_0^2$, temos:

$$Q(t) = Ae^{-\gamma t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + \varphi\right) - \frac{V_0}{\varepsilon} \left((\omega^2 - \omega_0^2) \cos(\omega t) - 2\gamma\omega \sen(\omega t) \right). \quad (126)$$

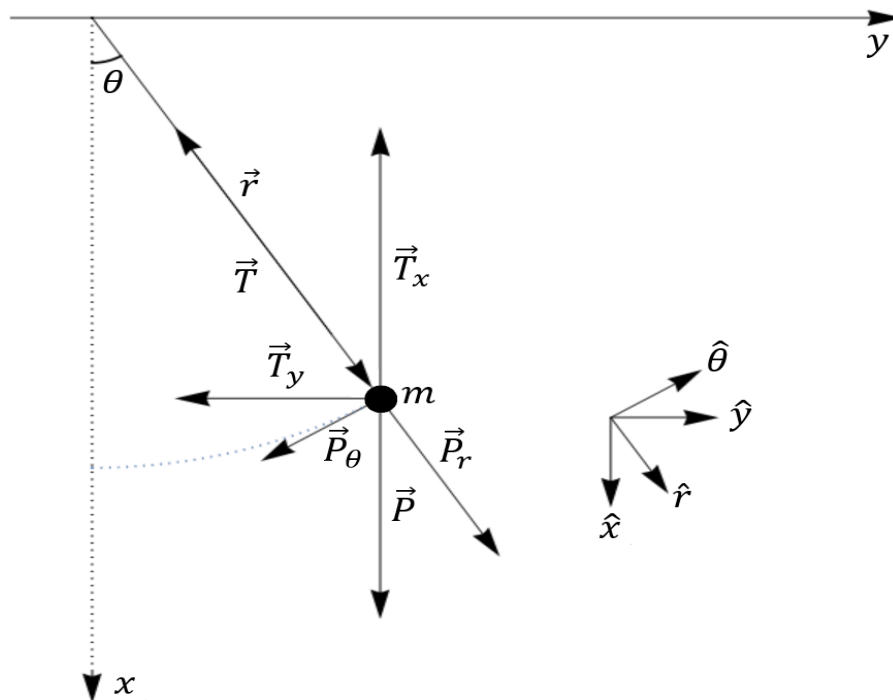
Podemos obter uma solução específica, dada às condições iniciais.

3.3 Pêndulo Amortecido e Forçado

O Pêndulo amortecido e forçado se caracteriza por um sistema mecânico, no qual é aplicada uma força externa a um pêndulo afetando seu movimento, também sob efeito dissipativo da força de atrito. A força externa, em geral, é capaz de impedir que o atrito pare o movimento do pêndulo e gera uma dinâmica mais complicada no sistema. Para analisar este caso, vamos partir do pêndulo simples, que desconsidera o atrito e a força externa, pois, como veremos, após a formulação da equação de movimento, detalhada nesta seção, é simples inserir novos termos.

O pêndulo simples é constituído por uma partícula de massa m e suspensa por um fio inextensível de comprimento l como mostrado na Figura 3 [11]. O Pêndulo executa um movimento periódico, que o caracteriza como um MHS. Quando o pêndulo está em repouso, as duas forças que agem sobre a partícula são o seu peso P e a tensão T aplicada pelo fio se equilibram [10]. Porém, se o pêndulo for afastado da sua posição de equilíbrio, de modo que a direção do fio faça um ângulo θ com a vertical, a componente do peso perpendicular ao fio faz o pêndulo oscilar em torno da sua posição de equilíbrio, sobre ação da gravidade g . O peso está livre para oscilar no plano, para a esquerda e para a direita da vertical que passa pelo ponto fixo do fio [10].

Figura 3 - Pêndulo Amortecido e Forçado.



Fonte: Autoria Própria, 2018.

Adotando a extremidade fixa da haste do pêndulo, ou seja, o ponto de suspensão do pêndulo, como origem de um sistema cartesiano, sendo o eixo x apontando na vertical para baixo e o y na horizontal para a direita, em coordenadas cartesianas temos o vetor posição \vec{r} dado por:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}, \quad (127)$$

onde, x e y são suas componentes nas direções dos versores \hat{x} e \hat{y} , respectivamente. A tensão \vec{T} é dada por:

$$\vec{T} = -T_x\hat{x} - T_y\hat{y}, \quad (128)$$

em termos de suas componentes tem-se também \vec{P} , apenas com componente vertical, dado por:

$$\vec{P} = P\hat{x}. \quad (129)$$

Para facilitar a análise deste problema optou-se em utilizar coordenadas polares. Analisando a figura 3, identificam-se as seguintes relações trigonométricas para x e y , como esperado [15], ou seja:

$$x = r \cos \theta \text{ e } y = r \sen \theta \quad (130)$$

e,

$$y = r \sen \theta. \quad (131)$$

Desta forma, o vetor \vec{r} é:

$$\vec{r} = r \cos \theta \hat{x} + r \sen \theta \hat{y}. \quad (132)$$

Em coordenadas polares devemos ter os versores \hat{r} e $\hat{\theta}$, os quais descrevem, respectivamente, as direções radial e tangencial de uma circunferência de raio r , centrada na origem, a qual coincide com a trajetória descrita pelo pêndulo neste problema. A taxa de variação do vetor \vec{r} , com relação à r e a θ , fornece exatamente estas direções que procuramos. Para obtermos os versores, então, basta dividirmos estas derivadas pelos seus módulos. Desta forma, obtemos:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -r \operatorname{sen} \theta \hat{x} + r \operatorname{sen} \theta \hat{y}, \quad (133)$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| = \sqrt{(-r \operatorname{sen} \theta)^2 + (r \operatorname{sen} \theta)^2} = r, \quad (134)$$

e o versor tangencial sendo definido por:

$$\hat{\theta} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right|} = -\operatorname{sen} \theta \hat{x} + \operatorname{sen} \theta \hat{y}. \quad (135)$$

Temos também, que:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \cos \theta \hat{x} + \operatorname{sen} \theta \hat{y}, \quad (136)$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = \sqrt{(\cos \theta)^2 + (\operatorname{sen} \theta)^2} = 1, \quad (137)$$

e o versor radial sendo:

$$\hat{r} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right|} = \cos \theta \hat{x} + \operatorname{sen} \theta \hat{y}. \quad (138)$$

Desta forma, o vetor posição torna-se:

$$\vec{r} = r \cos \theta \hat{x} + r \operatorname{sen} \theta \hat{y} = r(\cos \theta \hat{x} + \operatorname{sen} \theta \hat{y}), \quad (139)$$

sendo em coordenadas polares:

$$\vec{r} = r \hat{r}. \quad (140)$$

E o vetor tensão:

$$\vec{T} = -T \cos \theta \hat{x} - T \operatorname{sen} \theta \hat{y} = T(\cos \theta \hat{x} + \operatorname{sen} \theta \hat{y}), \quad (141)$$

que em coordenadas polares, tem-se:

$$\vec{T} = -T \hat{r}. \quad (142)$$

Por outro lado, o peso está apenas na direção \hat{x} , mas utilizando relações trigonométricas têm-se:

$$\hat{x} = \cos\theta \hat{r} - \sin\theta \hat{\theta}, \quad (143)$$

assim, segue:

$$\vec{P} = P(\cos\theta \hat{r} - \sin\theta \hat{\theta}), \quad (144)$$

que em coordenadas polares, obtém-se:

$$\vec{P} = P \cos\theta \hat{r} - P \sin\theta \hat{\theta}. \quad (145)$$

O que nos mostra as componentes $P_r = P \cos\theta \hat{r}$ na direção radial e $P_\theta = -P \sin\theta \hat{\theta}$ na direção tangencial. Assim, pela segunda lei de Newton, a força resultante \vec{F} é dada por:

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}, \quad (146)$$

como atuam no corpo apenas a força peso e a tensão, temos que a força resultante é:

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{T}. \quad (147)$$

Precisamos, então, da segunda derivada do vetor posição. Neste ponto, devemos nos atentar para a variação dos versores \hat{r} e $\hat{\theta}$ com o ângulo θ . Desta forma, vamos partir das seguintes relações (140), temos:

$$\hat{r} = \cos\theta \hat{x} + \sin\theta \hat{y}. \quad (148)$$

No entanto, antes de determinar as derivadas, deve-se levar dois fatos em consideração, isto é:

- $\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{d\hat{y}}{dt} = 0$, mas $\frac{d\hat{r}}{dt} \neq 0$ e $\frac{d\hat{\theta}}{dt} \neq 0$, pois estes dependem de θ , ângulo este que varia com o tempo, de acordo com o movimento do pêndulo.
- $\frac{dr}{dt} = 0$, pois o comprimento do vetor \vec{r} , isto é, seu módulo $[\vec{r}]$, é constante e igual à l , sendo o comprimento do fio inextensível do pêndulo.

Assim,

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} = r\frac{d}{dt}(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}), \quad (149)$$

$$\dot{\vec{r}} = r\left[\frac{d}{dt}\cos\theta\hat{x} + \cos\theta\frac{d\hat{x}}{dt} + \frac{d}{dt}\sin\theta\hat{y} + \sin\theta\frac{d\hat{y}}{dt}\right], \quad (150)$$

$$\dot{\vec{r}} = r\left[-\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{x} + \cos\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{y}\right], \quad (151)$$

$$\dot{\vec{r}} = r(-\text{sen}\theta\dot{\theta}\hat{x} + \text{cos}\theta\dot{\theta}\hat{y}) = r\dot{\theta}(-\text{sen}\theta\hat{x} + \text{cos}\theta\hat{y}), \quad (152)$$

$$\dot{\vec{r}} = r\dot{\theta}\hat{\theta}. \quad (153)$$

O que relaciona a velocidade linear $\dot{\vec{r}}$ à velocidade angular $\dot{\theta}$. Fazendo, então, a segunda derivada, temos:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\dot{\theta}\hat{\theta}) = \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\frac{d}{dt}(\dot{\theta}\hat{\theta}) = \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\left(\frac{d\dot{\theta}}{dt}\hat{\theta} + \dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt}\right), \quad (154)$$

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{d}{dt}(-\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}), \quad (155)$$

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\left[\frac{d}{dt}(-\text{sen}\theta)\hat{x} - \text{sen}\theta\frac{d\hat{x}}{dt} + \frac{d}{dt}(\text{cos}\theta)\hat{y} + \text{cos}\theta\frac{d\hat{y}}{dt}\right], \quad (156)$$

$$\ddot{\vec{r}} = r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}(-\text{sen}\theta\dot{\theta}\hat{x} - \text{sen}\theta\dot{\theta}\hat{y}) = r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}(-\dot{\theta})(\text{cos}\theta\hat{x} + \text{sen}\theta\hat{y}), \quad (157)$$

$$\ddot{\vec{r}} = r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{r} = r(\ddot{\theta}\hat{\theta} - \dot{\theta}^2\hat{r}). \quad (158)$$

O que nos dá a aceleração linear como uma composição da aceleração tangencial, na direção $\hat{\theta}$, e da aceleração centrípeta na direção \hat{r} . Assim, observando a equação (152), vemos que $|\dot{\vec{r}}|^2 = r^2\dot{\theta}^2$, o que nos mostra que:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{\dot{r}^2}{r}, \quad (159)$$

visualizando desta maneira a aceleração centrípeta em (157). Desta forma, substituindo (147) e (157) em (146), obtemos:

$$\vec{P} + \vec{T} = m\ddot{\vec{r}}, \quad (160)$$

$$P \cos \theta \hat{r} - P \sin \theta \hat{\theta} - T \hat{r} = mr(\ddot{\theta} \hat{\theta} - \dot{\theta}^2 \hat{r}), \quad (161)$$

$$mg \cos \theta \hat{r} - mg \sin \theta \hat{\theta} - T \hat{r} = mr\ddot{\theta} \hat{\theta} - mr\dot{\theta}^2 \hat{r}, \quad (162)$$

assim, comparando os termos nas mesmas direções, temos:

$$\hat{r} \Rightarrow mg \cos \theta - T = -mr\dot{\theta}^2, \quad (163)$$

onde vemos que, como $mr\dot{\theta}^2 = m \frac{v^2}{r}$, o segundo membro nos indica a força centrípeta. Na outra direção, obtém-se:

$$\hat{\theta} \Rightarrow -mg \sin \theta = mr\ddot{\theta}, \quad (164)$$

como o módulo do vetor posição coincide com o comprimento do fio do pêndulo. Desta forma,

$$r = l, \quad (165)$$

obtemos a equação de movimento para o pêndulo simples em coordenadas polares,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (166)$$

A qual é suficiente para obtermos a dinâmica do sistema, pois as trajetórias descritas são representadas por pares ordenados (r, θ) e já conhecemos r da relação (165). Assim, como a dinâmica do sistema é dada pela direção tangencial do movimento, para analisarmos casos mais complexos podemos modificar diretamente a equação de movimento (164). Mesmo que adicionemos um termo mais geral na equação da força resultante, apenas a componente tangencial afetará diretamente o movimento. Assim, para considerarmos o atrito, basta introduzirmos um termo proporcional à $-\dot{\theta}$ e, para uma força externa periódica, um termo proporcional ao $\cos(\omega t)$. Assim, devemos ter:

$$mr\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - b\dot{\theta} + A \cos(\omega t), \quad (167)$$

uma equação mais geral é, então:

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{ml} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = \frac{A}{ml} \cos(\omega t), \quad (168)$$

considerando, $\gamma = b/ml$, $\omega_0^2 = g/l$ e $B = A/ml$, escrevemos (151) como:

$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \omega_0^2 \text{sen } \theta = B \cos(\omega t). \quad (169)$$

Ambas as equações de movimento não são lineares por conta do termo com *seno* de θ , já que o termo com o cosseno tem apenas dependência de t e não da função θ como o outro. Deste modo, não há um método geral para a obtenção de uma solução analítica. Ainda assim, o método numérico utilizado neste trabalho pode estimar satisfatoriamente o resultado, ratificando os resultados já obtidos na literatura [19].

CAPITULO 4

Soluções dos Problemas Oscilatórios

O presente capítulo irá demonstrar e comparar as duas formas de resolução para problemas oscilatórios que foram abordados neste trabalho. Primeiro será abordado à forma de resolução analítica, e em seguida a resolução numérica. Onde o intuito do trabalho é comparar as duas formas de resoluções e analisar a vantagens e desvantagens de cada método. Para a resolução analítica será utilizado o método abordado na seção 1.3 e para a numérica será aplicado o método de Runge-Kutta (ver, Apêndice E) abordado na seção 2.1 com o auxílio computacional.

4.1 Resolução analítica e numérica

Nesta seção iremos fazer a resolução analítica das equações do oscilador harmônico simples, circuito elétrico RLC em série e pêndulo amortecido e forçado. A partir do que foi abordado no Capítulo 1 e 3, podemos fazer essa resolução, visto que, as equações (90), (102) e (166) são descritas por uma EDO de segunda ordem com coeficientes constantes, cujas soluções são dadas por (96), (110) e (169).

4.1.1 Sistema Massa-mola

Para comparar a solução do sistema massa-mola obtido analiticamente, bem como numericamente, discutido na seção seguinte, vamos considerar um sistema com uma massa de $m = 2 \text{ kg}$, acoplada a uma mola de constante elástica $k = 0,5 \text{ N/m}$, deslocada $x = 0,8 \text{ m}$ da posição de equilíbrio da mola, no instante inicial, quando é abandonada sem impulso. Nestas condições, podemos obter os parâmetros da solução (96). Neste sentido, inicialmente, deriva-se (96), implicando na velocidade da massa, como segue:

$$\dot{x}(t) = -A\omega \text{sen}(\omega t + \varphi), \quad (170)$$

agora fazendo $t = 0$ em (96) e (170), obtém-se, respectivamente:

$$x(0) = A \cos(\varphi) = 0,8m, \quad (171)$$

e,

$$\dot{x}(0) = -A\omega \text{sen}(\varphi) = 0. \quad (172)$$

assim, dividindo (172) por (171), temos:

$$\frac{\text{sen}\varphi}{\text{cos}\varphi} = 0, \quad (173)$$

resultando,

$$\varphi = \text{arctg}0 = 0, \quad (174)$$

logo inserindo (174) em (171), tem-se:

$$A\text{cos}0 = 0,8, \quad (175)$$

e, logo,

$$A = 0,8m. \quad (176)$$

Para determinar a frequência angular ω , insere-se $m = 2 \text{ kg}$ e $k = 0,5 \text{ N/m}$ em (71), isto é:

$$\omega = \sqrt{\frac{0,5}{2}} = 0,5 \text{ Hz}, \quad (177)$$

desta forma, a solução para (80) é:

$$x(t) = 0,8 \cos(0,5t). \quad (178)$$

Calculando o período, temos

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 12,5664s, \quad (179)$$

assim,

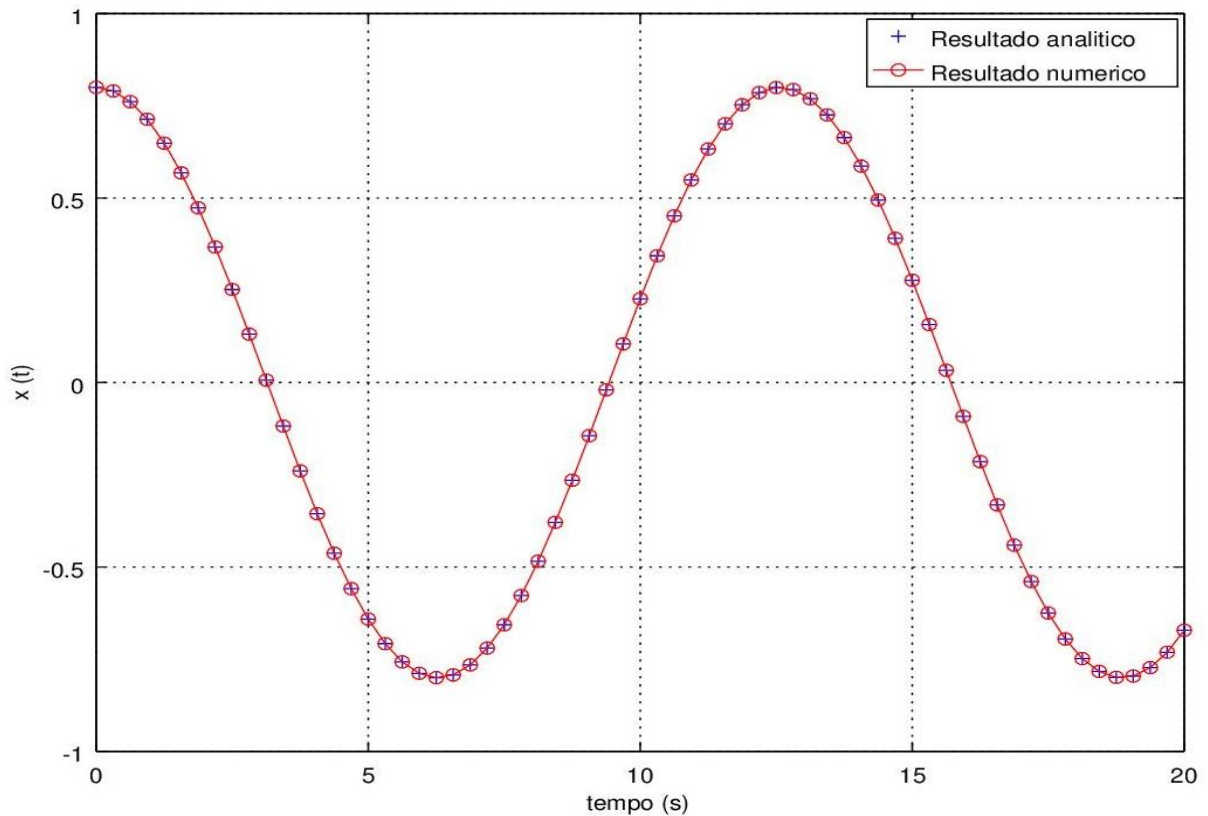
$$x(12.5664) = 0,8m = x(0). \quad (180)$$

Para esse problema, as condições iniciais usadas para obter as soluções analítica e numérica, foram:

$$x(0) = 0,8 \quad \text{e} \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (181)$$

Para efeito de uma comparação qualitativa da resolução analítica (178) e numérica (ver, Figura 4), onde esta última obtida pelo método de Runge-Kutta, implementado pelo algoritmo RK4 (ver, Apêndice E) com 64 passos (h), através de uma rotina computacional escrita na linguagem Fortran 90, utilizando as condições iniciais (181), onde os resultados encontram-se registrados na Tabela 2 (ver, Apêndice F). A visualização gráfica da Figura 4 foi obtida utilizando o software de domínio público chamado Octave.

Figura 4 - Representação gráfica dos resultados analítico e numérico do sistema massa-mola.

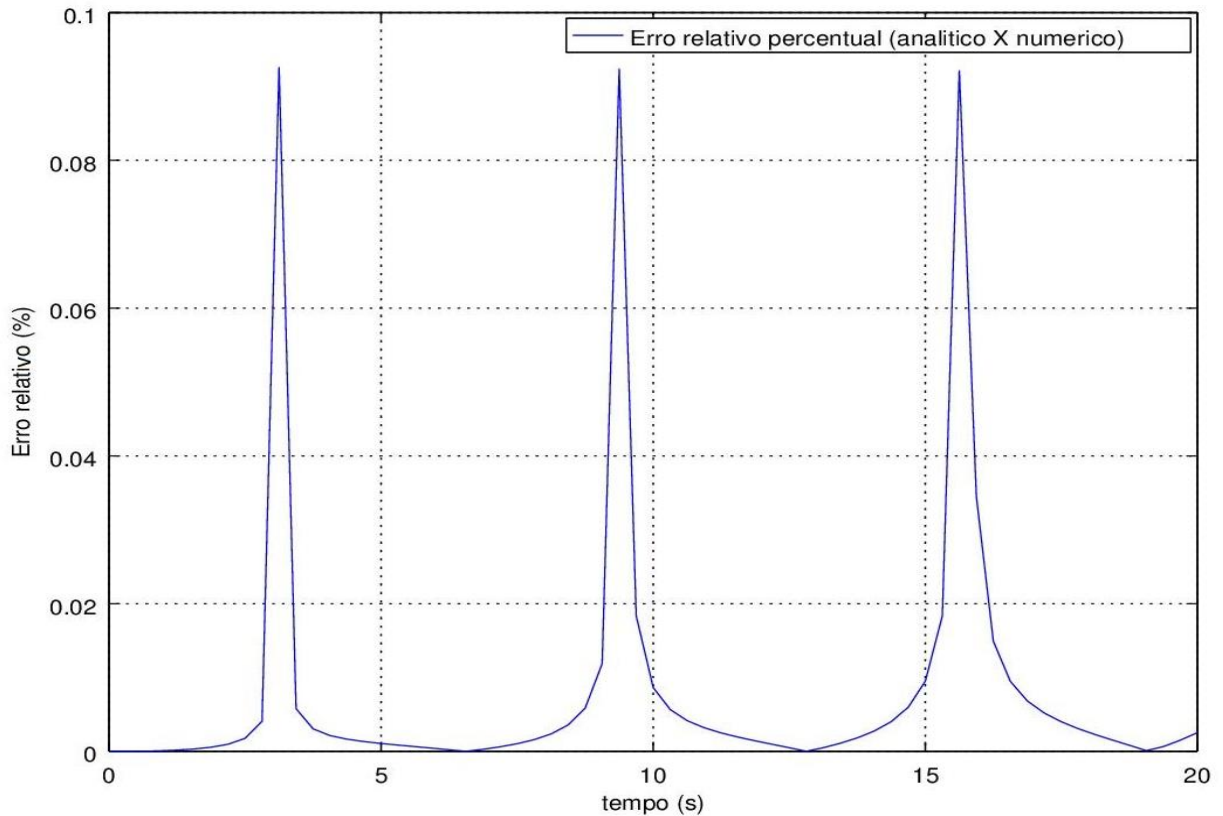


Fonte: Autoria Própria, 2018.

Analisando a Figura 4, constata-se um ajuste satisfatório nos dois resultados. No entanto, para ratificar tal constatação calcula-se o erro relativo percentual⁴ disponibilizado na Tabela 2 (ver, Apêndice F) bem como geometricamente visualizado na Figura 5.

⁴ Erro relativo percentual $E_R = \frac{|X - \bar{X}|}{X} 100$, onde X caracteriza o valor exato e \bar{X} o valor aproximado.

Figura 5 - Representação gráfica do erro relativo percentual do sistema massa-mola



Fonte: Autoria Própria, 2018.

Ainda como análise da Figura 5, verifica-se que temos um erro máximo de módulo menor que 0.1 %, estes picos no gráfico do erro se devem às regiões nas quais os pontos da solução numérica estão mais espaçados, próximos aos pontos onde a posição é zero, isto é, a posição de equilíbrio do sistema massa-mola. Este espaçamento é resultado da maior velocidade do corpo nesta posição. Desta análise podemos deduzir também que nas regiões com mais pontos o erro é menor e, de fato, é visível que o erro tende a zero nos instantes nos quais o corpo muda de direção, quando a velocidade se anula.

4.1.2 Circuito RLC em Série

Para comparar a solução do Circuito RLC em Série obtido analiticamente, bem como numericamente, vamos considerar um circuito com uma fonte de tensão de $V_0 = 12V$, um capacitor de $50\mu F$, um indutor com de indutância $L = 200\text{ mH}$ e um resistor com uma resistência baixa de $R = 20\ \Omega$, que dissipa a energia no circuito e, para determinarmos qual dos três casos representa o comportamento do sistema, calculamos os valores de ω_0 e γ , a partir da relação $\gamma = R/2L$ e $\omega_0^2 = 1/LC$, de modo que obtemos $\gamma^2 < \omega_0^2$, o que indica o caso subcrítico (ver, seção 3.2). Podemos, então, obter uma solução específica a partir de duas

condições iniciais. Desta forma, vamos considerar que não há cargas ou corrente no instante $t = 0$. Assim, temos

$$Q(0) = A \cos \varphi - \frac{V_0(\omega^2 - \omega_0^2)}{\varepsilon} = 0, \quad (182)$$

tomando a derivada da equação (126), obtemos a corrente:

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) = & -A\gamma e^{-\gamma t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + \varphi\right) \\ & + A e^{-\gamma t} \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + \varphi\right) \\ & - \frac{V_0(\omega^2 - \omega_0^2)}{\varepsilon} \omega \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{2\gamma\omega V_0}{\varepsilon} \omega \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (183)$$

assim, a segunda condição inicial resulta em

$$\dot{Q}(0) = -A\gamma \cos \varphi - A \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \operatorname{sen} \varphi + \frac{2\gamma\omega^2 V_0}{\varepsilon} = 0. \quad (184)$$

Para obtermos a solução final, precisamos apenas calcular as constantes vindas da formulação do problema para achar a e b . Logo,

$$\frac{V_0(\omega^2 - \omega_0^2)}{\varepsilon} = -0,000120003, \quad (185)$$

com isso, obtemos da equação (182)

$$A \cos \varphi = -0,000120003, \quad (186)$$

calculando agora

$$\frac{2\gamma\omega^2 V_0}{\varepsilon} = 2,70012 \times 10^{-7}, \quad (187)$$

$$\gamma = 50, \quad (188)$$

$$\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = 312,2499, \quad (189)$$

obtemos da equação (184),

$$-50A \cos \varphi - 312,2499A \operatorname{sen} \varphi = -2,70012 \times 10^{-7}, \quad (190)$$

dividindo, então, a equação (190) pela (186), temos que

$$-50 - 312,2499 \operatorname{tg} \varphi = \frac{-2,70012 \times 10^{-7}}{-0,000120003}, \quad (191)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{0,00225005 + 50}{-312,2499} = -0,160135, \quad (192)$$

a fase da solução, desta forma, é

$$\varphi = \operatorname{arctg}(-0,160135) = -0,158787, \quad (193)$$

substituindo este resultado na equação (186), obtemos

$$A \cos(-0,158787) = -0,000120003, \quad (194)$$

e, assim,

$$A = \frac{-0,000120003}{0,98742} = -0,000121531, \quad (195)$$

determinadas estas constantes, podemos escrever a solução final para a carga $Q(t)$:

$$\begin{aligned} Q(t) = & -0,000121531 e^{-50t} \cos(312,2499t - 0,158787) \\ & + 0,000120003 \cos\left(\frac{3}{2}t\right) + 1,80008 \times 10^{-7} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}t\right). \end{aligned} \quad (196)$$

Para este caso, a corrente é obtida substituindo a e b na equação (183). Assim,

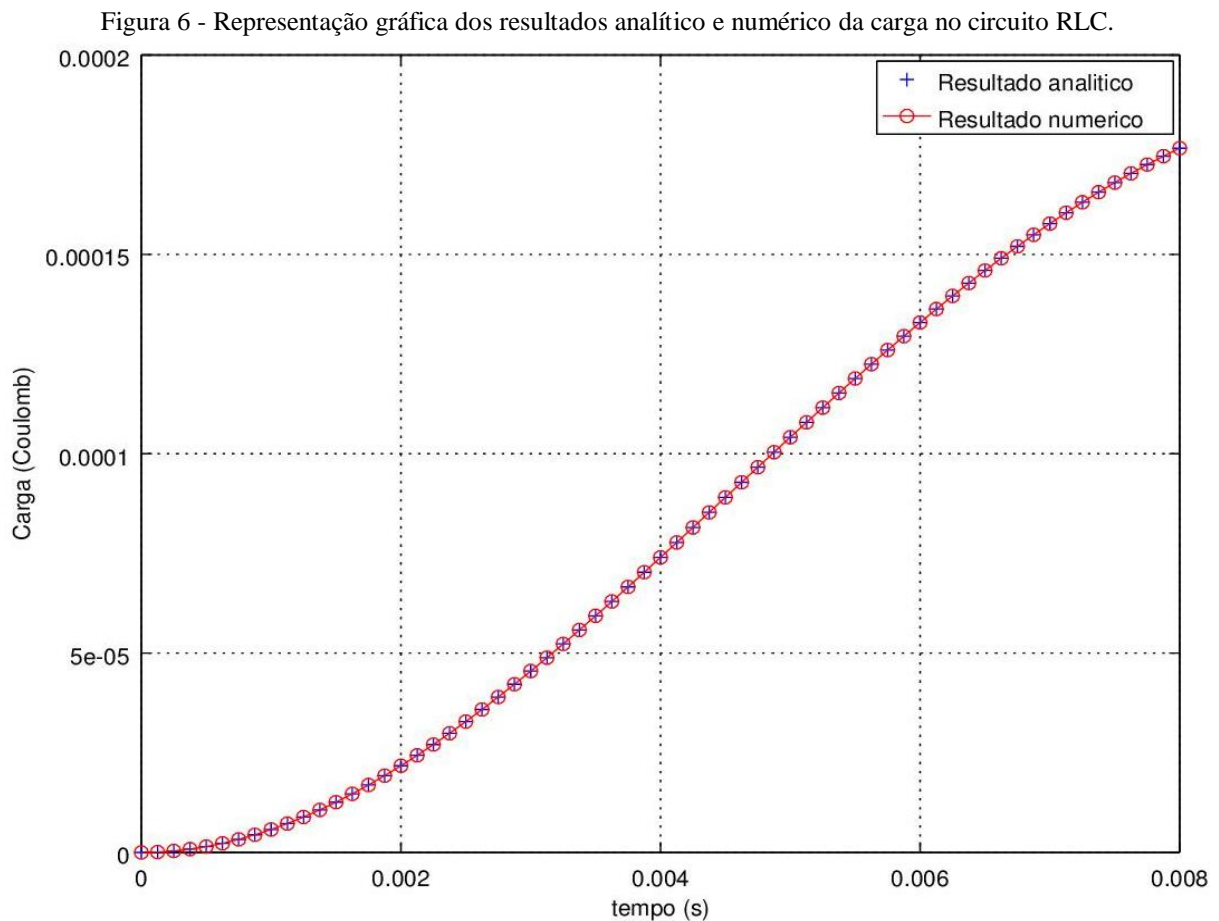
$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) = & 0,00607657 e^{-50t} \cos(312,25t - 0,158787) \\ & + 0,0379482 e^{-50t} \operatorname{sen}(312,2499t - 0,158787) \\ & - 0,000180004 \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}t\right) + 2,70012 \times 10^{-7} \cos\left(\frac{3}{2}t\right). \end{aligned} \quad (197)$$

Logo, as condições iniciais para obter as soluções analítica e numérica para o problema do Circuito RLC em série são:

$$x(0) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (198)$$

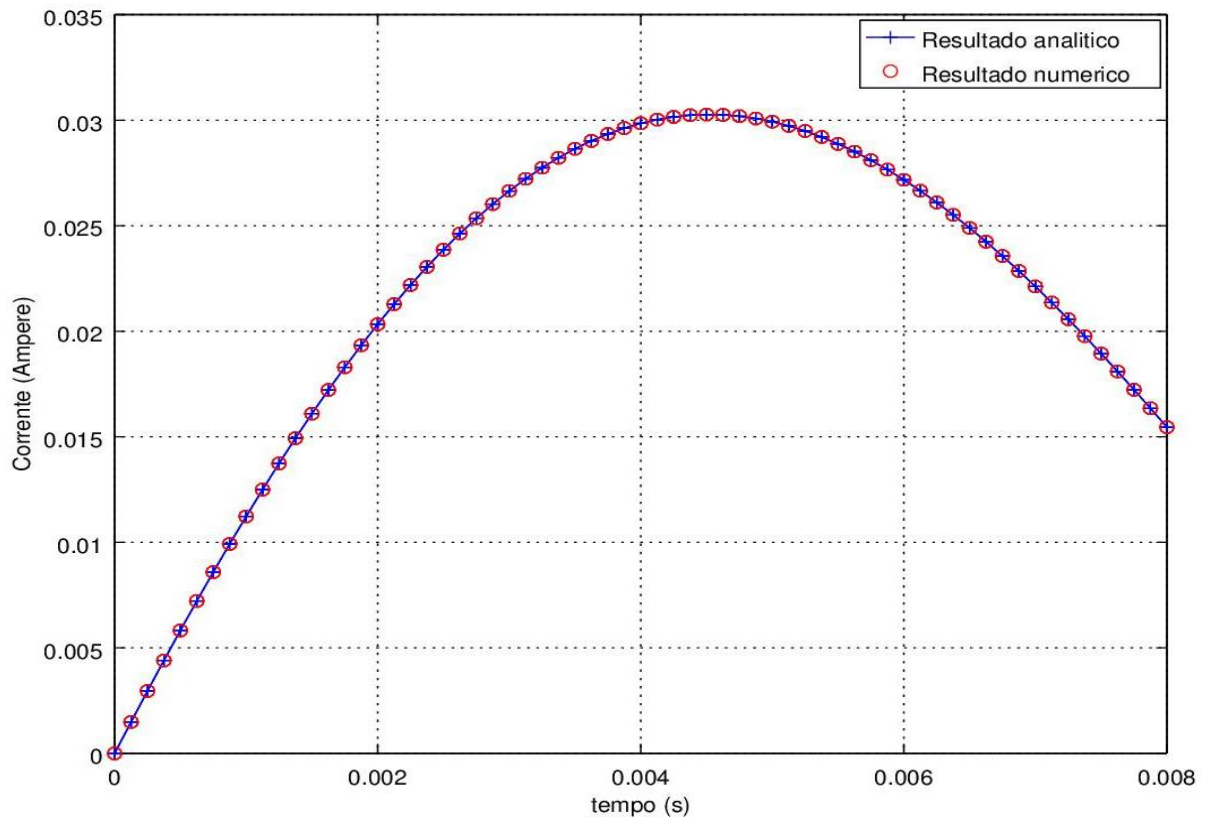
Utilizando a mesma estratégia de comparação da subseção 4.1.1 comparou-se o resultado analítico e numérico do problema em questão utilizando as condições iniciais (182), onde tais resultados são visualizados nas Figuras 6 e 7, respectivamente, onde os cálculos estão registrados nas Tabelas 3 e 4, também com 64 passos no algoritmo RK4 (ver, Apêndice F). Em seguida temos uma representação geométrica do erro relativo percentual para ambos os casos representado nas Figura 8 e 9, salienta-se que os registros referentes aos erros obtidos estão computados nas Tabelas 3 e 4 nesta ordem (ver, Apêndice F).

Podemos observar nas Figuras 6 e 7 que, apesar de termos carga e corrente nulas no instante inicial, a tensão gera uma corrente, a qual, por sua vez, gera um aumento das cargas. Após isso a corrente diminui e causa a diminuição das cargas. A repetição deste processo leva à oscilação característica para este sistema, a qual depende apenas da tensão da fonte após um tempo, uma vez que a solução referente aos componentes eletrônicos, observável nos instantes iniciais nas figuras abaixo, decai exponencialmente com o tempo.



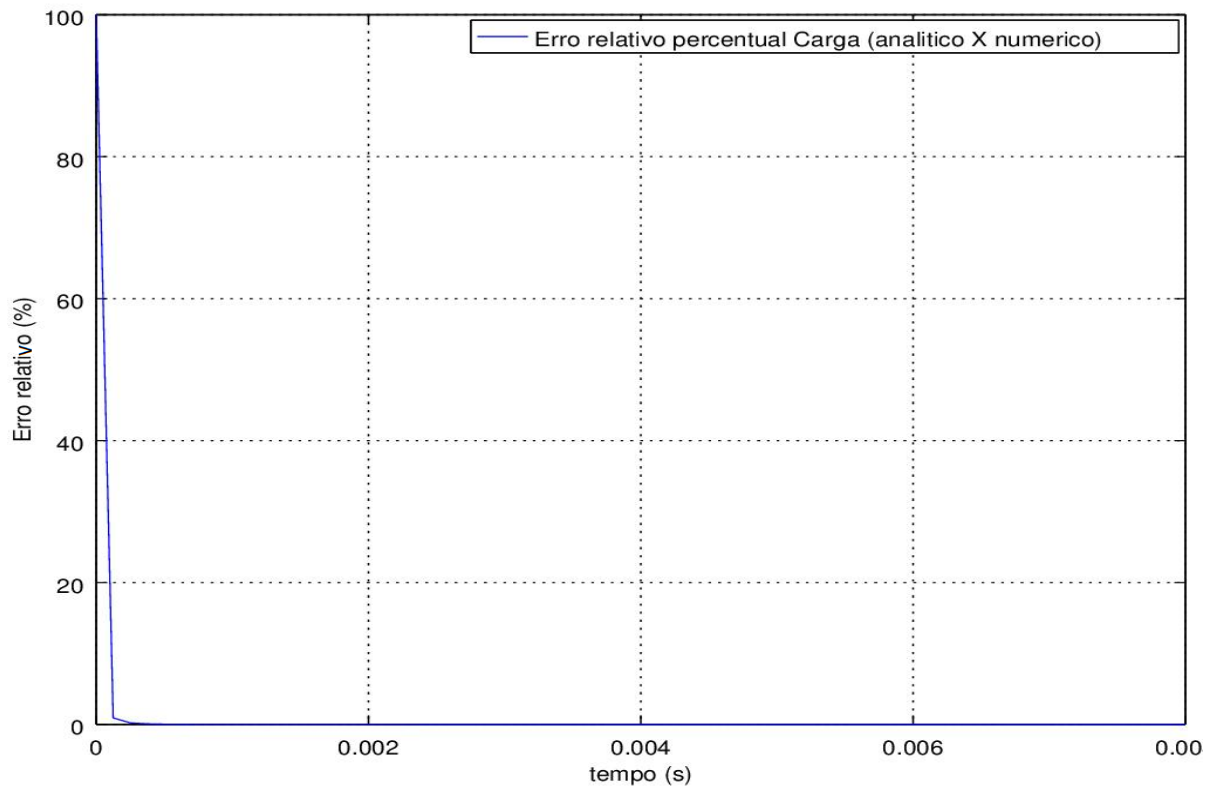
Fonte: Autoria Própria, 2018.

Figura 7 - Representação gráfica dos resultados analítico e numérico da corrente no circuito RLC.



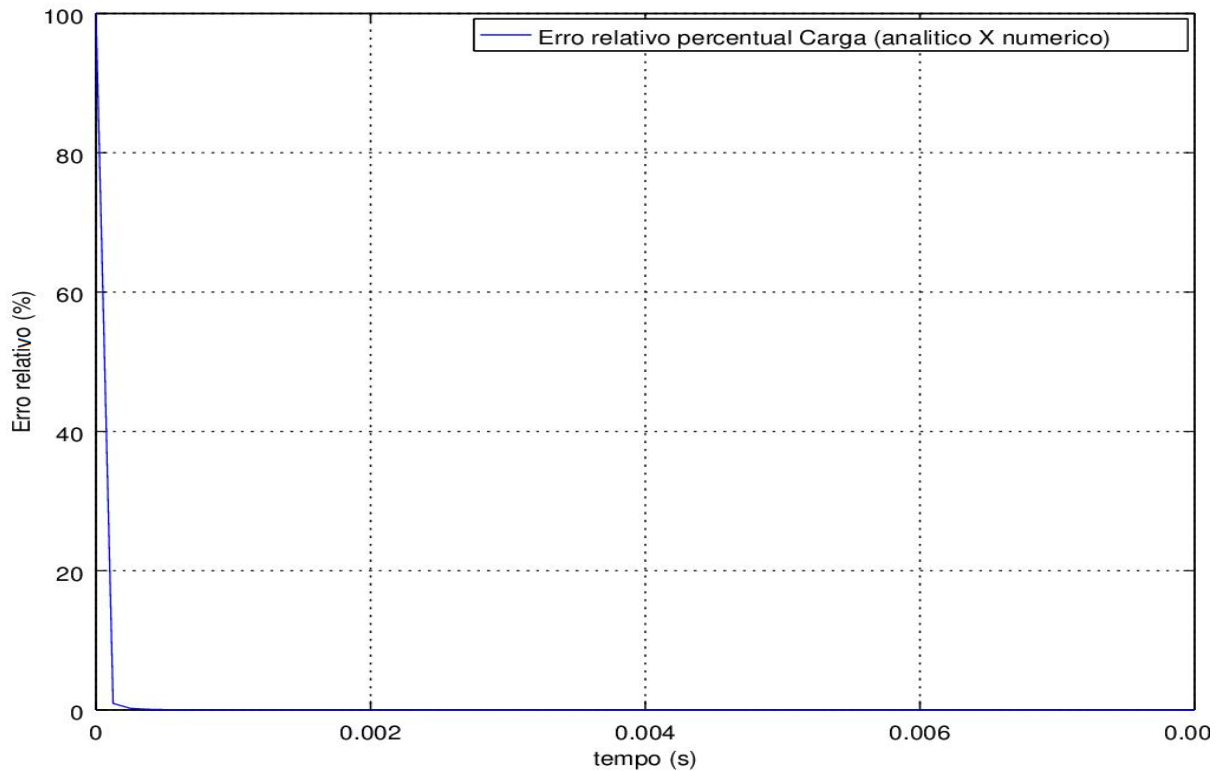
Fonte: Autoria Própria, 2018.

Figura 8 - Representação gráfica do erro relativo obtido por meio da aproximação numérica da carga do circuito RLC.



Fonte: Autoria Própria, 2018.

Figura 9 - Representação gráfica do erro relativo obtido por meio da aproximação numérica da corrente do circuito RLC.



Fonte: Autorial Própria, 2018.

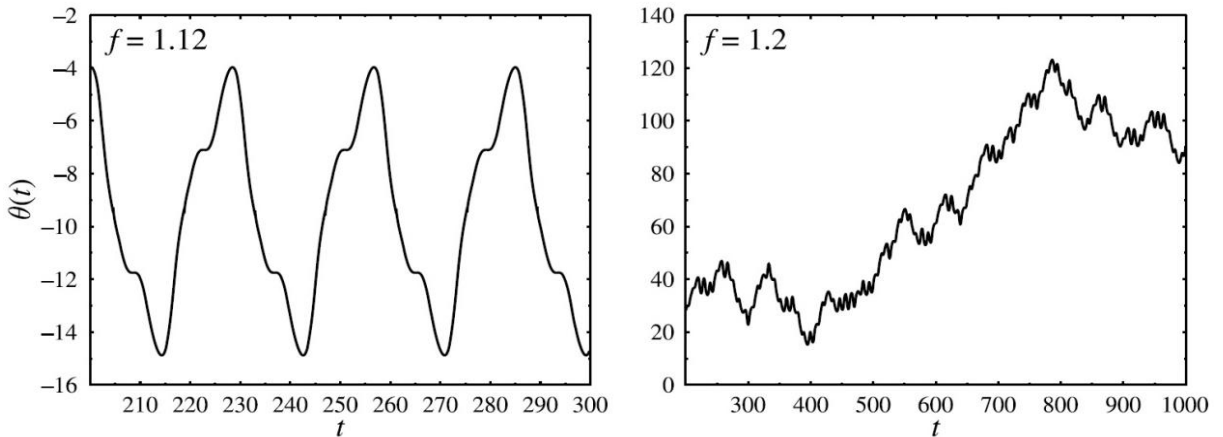
Novamente, as soluções numérica e analítica estão de acordo entre si, e mostram a concordância entre os métodos, como também podemos observar nas Figuras 8 e 9, as quais mostram o erro percentual relativo como valores ínfimos no intervalo de tempo analisado.

4.1.3 Pêndulo Amortecido Forçado

Salienta-se que este sistema não possui solução analítica. Para efeito de implementação numérica (RK4), também através do software Octave, considerou-se o exemplo 27.4 da referência [19] onde as soluções do mesmo são visualizadas na Figura 10. Este exemplo utiliza $\omega_0 = 1$, o que obtemos utilizando $l = g$, $\omega = 2/3$, $\gamma = 1/4$ e varia-se a amplitude B da força externa para analisar o comportamento do pêndulo. A equação de movimento (169) se torna, então:

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{1}{2}\dot{\theta}(t) + \text{sen}\theta = B\cos\frac{2}{3}t, \quad (199)$$

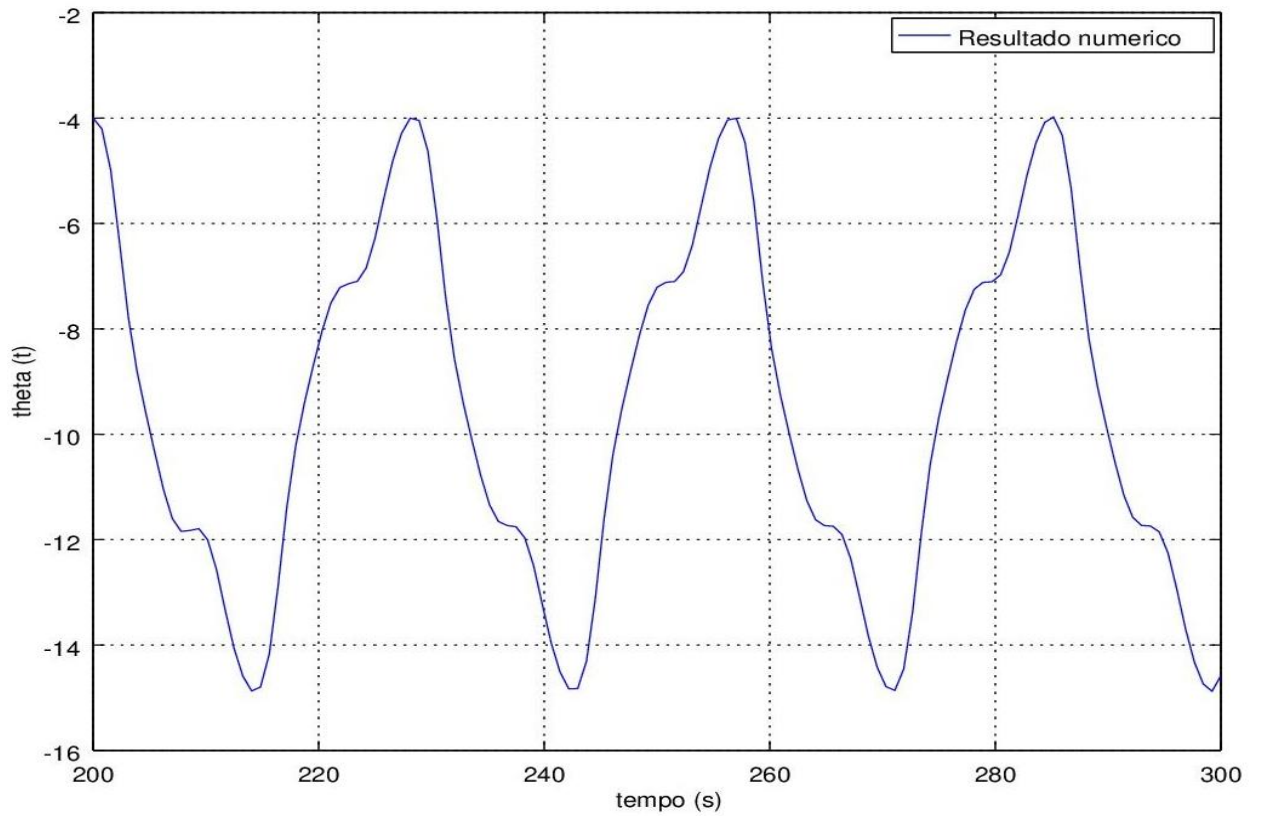
Figura 10 - Representação gráfica da solução numérica do sistema pêndulo amortecido e forçado para os valores 1.12 e 1.2 de $B = f$.



Fonte: Adaptado Greiner, 2010.

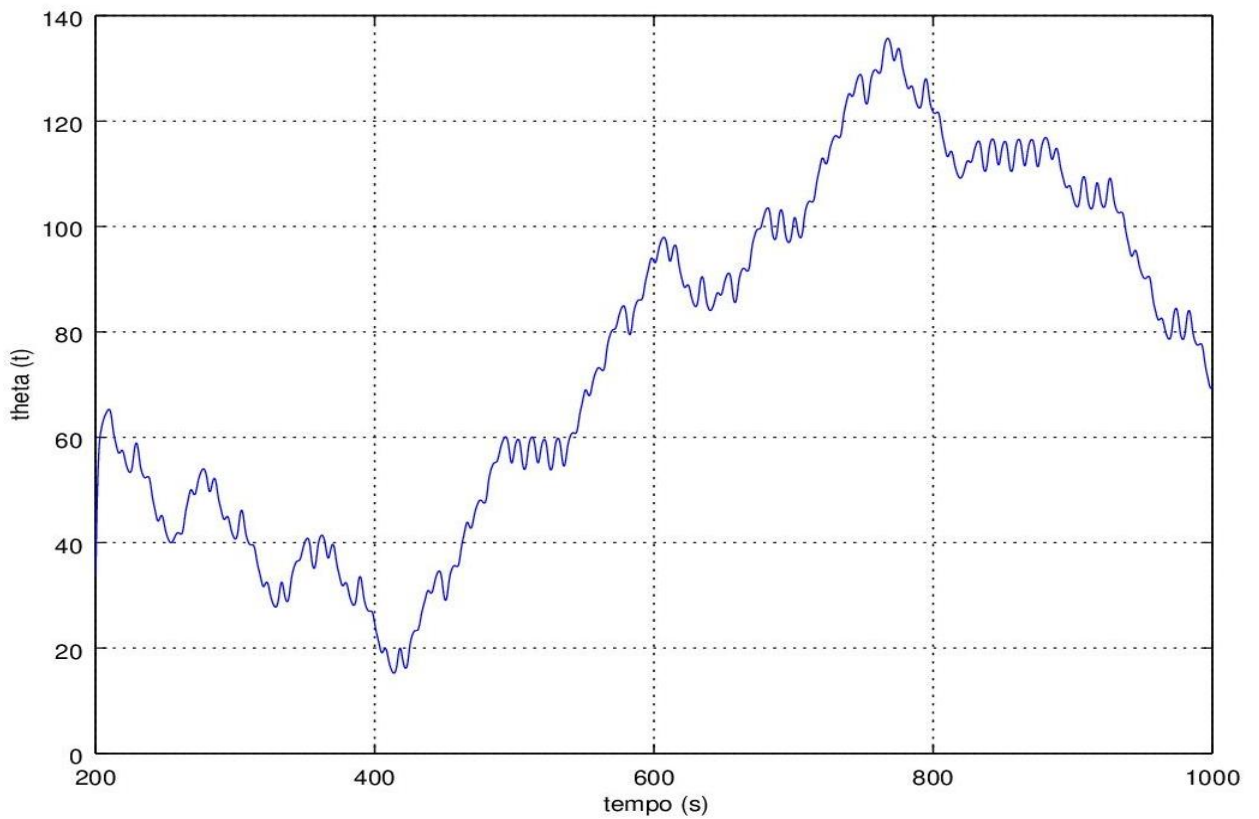
O gráfico da esquerda (ver, Figura 10) foi retirado da referência [19] com $B = 1,12$ para um tempo entre 200 e 300 unidades de tempo. Em relação da direita (ver, Figura 10), utilizou $B = 1,2$ e o tempo de 200 a 1000. Com estes parâmetros e 64 passos na primeira e 2048 na segunda, obtemos as Figuras 11 e 12 abaixo para efeito de comparação como os gráficos da Figura 10, utilizando as condições $\theta(200) = -4$ e $\dot{\theta}(200) = 0$, as quais não são, necessariamente, as mesmas utilizadas em [19], pois esta referência não fornece as condições iniciais explicitamente:

Figura 11 - Representação gráfica do resultado numérico do pêndulo amortecido e forçado para $B = 1, 12$.



Fonte: Autoria Própria, 2018.

Figura 12 - Representação gráfica do resultado numérico do pêndulo amortecido e forçado para $B = 1, 2$.



Fonte: Autoria Própria, 2018.

O gráfico a direita na Figura 10 e o da Figura 12, apresentam uma característica inerente deste sistema, o caos, sendo distintas por este motivo, já que a referência [19] não informa as condições iniciais exatas utilizadas, foram feitos bastantes testes até chegar a Figura 12. O caos em um sistema quer dizer, basicamente, que condições iniciais levemente distintas levam a soluções bastante diferentes, o que impossibilita a previsão exata do comportamento do sistema. Isto ocorre porque quaisquer medições feitas na prática para determinar estas condições iniciais tem um erro intrínseco e, portanto, várias medições levam a soluções muito distintas. Este fenômeno é bastante interessante, mas foge aos objetivos deste trabalho e, por este motivo, não será tratado detalhadamente.

Considerações Finais

Este trabalho busca mostrar a eficiência do método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem. Para isso, ele foi comparado com os métodos analíticos dos coeficientes constantes e coeficientes indeterminados, no que diz respeito à solução de três sistemas oscilatórios, quais sejam, massa-mola, circuito RLC em série e pêndulo amortecido e forçado. Ainda como informação, destaca-se a comparação dos resultados obtidos no presente trabalho (pêndulo amortecido e forçado) com resultados pré-existent na literatura.

Como mostrado no decorrer do trabalho, o método de Runge-Kutta pôde resolver satisfatoriamente os problemas propostos. Isto mostra a sua importância e a eficácia no tratamento numérico das equações diferenciais ordinárias que permeiam boa parte da física, além da matemática, engenharia e outras áreas afins. Desta forma, os resultados obtidos indicaram que o RK4 caracteriza-se como uma atraente alternativa em situações problemas que necessitam de solução, principalmente em condições onde métodos analíticos não contemplam, tal fato foi comprovado de forma qualitativa.

Como perspectivas, indica-se a construção e análise de aparatos experimentais para a coleta de dados para que se possa fazer uma comparação envolvendo técnicas analíticas, numéricas e experimentais, esperando-se compreender melhor as oscilações abordadas neste trabalho, em particular o circuito RLC, o qual se mostra mais simples de ser construído na prática, bem como encontrar as limitações da teoria e as possíveis correções necessárias para uma descrição mais realística destes fenômenos físicos.

Referencias Bibliográficas

- [1] SIMÕES, Carla A. E. et al. **Equações Diferenciais na Física**. Dissertação (Dissertação em matemática) – Universidade de Évora. Évora, p. 176. 2014.
- [2] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 6^a. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- [3] ZILL, D. G.; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais**. 3^a. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, v. I, 2001.
- [4] STEWART, J. **Cálculo**. 5^a. ed. São Paulo: Thomson Learning, v. II, 2007.
- [5] ZILL, D. G. **Equações Diferenciais Com Aplicações em Modelagem**. 1^a. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.
- [6] BARROSO, L. C. **Cálculo Numérico Com Aplicações**. 2^a. ed. São Paulo: Harbra, 1987.
- [7] VILLATE, J. E. **Introdução aos sistemas dinâmicos: uma abordagem prática com Maxima**. 1^a. ed. Porto: Copyright, 2007.
- [8] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Numerical Analysis**. 2^a. ed. Boston: Ninth Edition, 2010.
- [9] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física 3: eletromagnetismo**. 8^a. ed. Campinas: LTC, v. III, 2009.
- [10] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física 2: gravitação, ondas e termodinâmica**. 8^a. ed. Campinas: LTC, v. II, 2009.
- [11] NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica 2: fluidos, oscilações e ondas, calor**. 3^a. ed. São Paulo: Edgard Blucher LTDA, v. II, 2002.
- [12] SEARS, W. et al. **Física II: termodinâmica e ondas**. 12^a. ed. São Paula: Pearson, v. II, 2008.
- [13] TIPLER, P. A.; MOSCA, G. **Física para cientistas e engenheiros: mecânica, oscilações e ondas, termodinâmica**. 6^a. ed. Rio de Janeiro: LTC, v. I, 2009.

- [14] STEWART, J. **Cálculo**. 5^a. ed. São Paulo: Thomson, v. I, 2006.
- [15] WATARI, K. **Mecânica Clássica**. 2^a. ed. São Paulo: Livraria da Física, v. I, 2003.
- [16] SEARS, F. W. et al. **Física III: eletromagnetismo**. 12^a. ed. São Paulo: Pearson, v. III, 2008.
- [17] NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica 3: eletromagnetismo**. 1^a. ed. São Paulo: Edgard Blucher LTDA, v. III, 2002.
- [18] WATARI, K. **Mecânica Clássica**. 2^a. ed. São Paulo: Livraria da Física, v. II, 2003.
- [19] GREINER, Walter. **Classical Mechanics: Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics**. 2^aed. New York: Springer, 2010. 580 p.
- [20] Wolfram MathWorld. **Euler Formula**. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/EulerFormula.html>>. Acesso em: 10 jan. 2018.
- [21] Dorf, R. C.; SVOBODA, J. A. **Introdução aos circuitos Elétricos**. 8^a. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

Apêndices

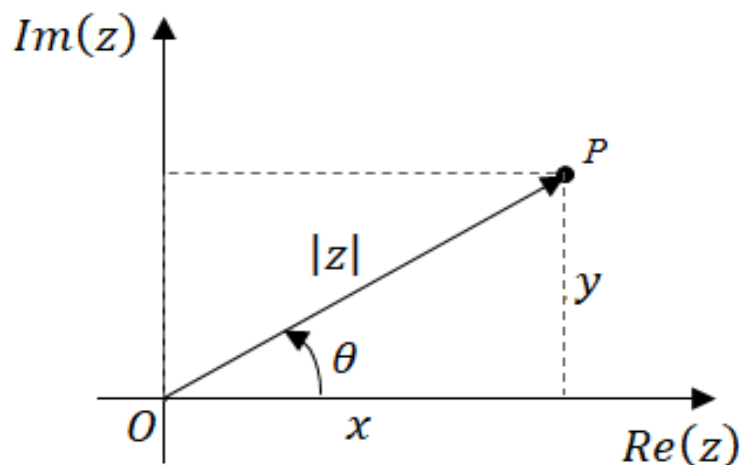
Apêndice A – Números Complexos

Os números complexos z são descritos pela expressão [4]:

$$z = x + yi, \quad (A1)$$

onde “ x ” e “ y ” são números reais e $i^2 = -1$, visto que, a letra i é denominada de unidade imaginária [4]. Representando o número complexo no plano cartesiano ou diagrama de Argand, (ver, Figura 13).

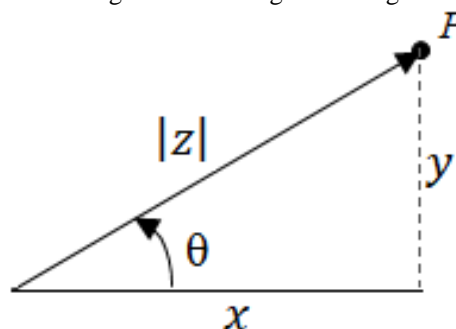
Figura 13 - Plano Cartesiano Complexo.



Fonte: Autoria Própria, 2018.

O seguimento de reta OP é chamado de módulo do número complexo. O eixo horizontal positivo entre o seguimento OP , no sentido anti-horário, forma um arco chamado de argumento z . É usual interpretar o número complexo $x + iy$ como o vetor do plano (x, y) e, nesse sentido, falamos sobre o plano complexo. O eixo horizontal é chamado de eixo real \mathbb{R} e o eixo vertical recebe o nome do eixo imaginário i [4].

Figura 14 - Triângulo Retângulo



Fonte: Autoria Própria, 2018.

Pelo triângulo retângulo da Figura 14, temos a seguinte relação trigonométrica [4]:

$$\sin \theta = \frac{y}{|z|}, \quad (A2)$$

$$\cos \theta = \frac{x}{|z|}, \quad (A3)$$

$$\theta = \operatorname{agr}(z), \quad (A4)$$

podemos verificar, também, pelo teorema de Pitágoras que:

$$|z| \cdot |z| = |z|^2 = x^2 + y^2, \quad (A5)$$

ou, também

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (A6)$$

Apêndice B – Equação de Euler

Uma das relações matemáticas mais úteis na resolução de problemas envolvendo funções trigonométricas, exponenciais e imaginárias, obtida por Euler no século XVIII em 1741 e publicada 1748, é a chamada equação de Euler [4]. Ela é dada por:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta, \quad (B1)$$

esta relação pode ser obtida observando as expansões em série de Taylor das três funções presentes nela [4]. Temos:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} + \dots \quad (B2)$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots, \quad (B3)$$

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots, \quad (B4)$$

daí podemos abstrair a equação (B1). Desta relação podemos obter tanto identidades trigonométricas, quanto as definições para números imaginários. Uma identidade interessante, ainda que sem uma interpretação ou aplicação direta, é obtida quando $\theta = \pi$ [20]. Neste caso,

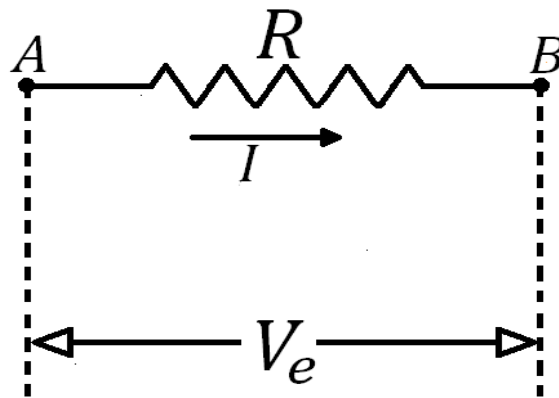
$$e^{i\pi} + 1 = 0. \quad (B5)$$

Dentre as curiosidades desta equação, está a presença dos elementos nulos da adição e da multiplicação, o número de Euler, que surge em vários casos na natureza, o número π fundamental na trigonometria e o número imaginário, que emergiu como solução para o problema de tomar raízes de números negativos, levando a novos campos e descobertas em várias áreas do conhecimento.

Apêndice C – Componentes Elétricos do Circuito RLC

Resistor: É um elemento de circuito elétrico, que transforma energia elétrica em térmica dada pelo efeito joule e se opõe a passagem da corrente elétrica e obedece a lei de Ohm, quando atravessado por uma corrente I [17]. Logo, surge uma diferença de potencial V entre seus terminais A e B, que é proporcional à própria corrente [9]. Um resistor em um circuito elétrico pode ser identificado, como o que está representado na Figura 15.

Figura 15 - Diagrama de um Resistor



Fonte: Autoria Própria, 2018.

A resistência (R) é dada pela razão entre a tensão (V) aplicada no circuito e a corrente (I) que percorre o resistor, assim temos [17, 9];

$$R = \frac{V}{I}, \quad (C1)$$

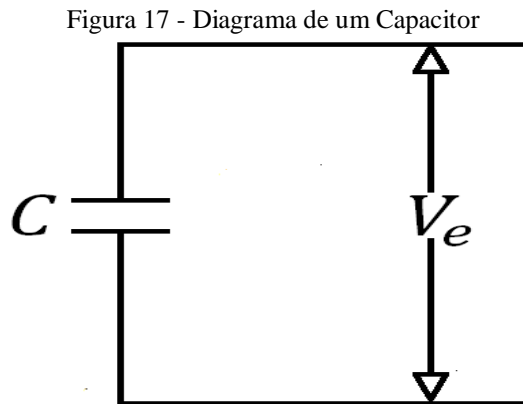
no sistema internacional de unidade (SI) a medida da resistência é o ohm (Ω). A imagem de um resistor está representada na Figura 16.

Figura 16 - Resistores



Fonte: Autoria Própria, 2018.

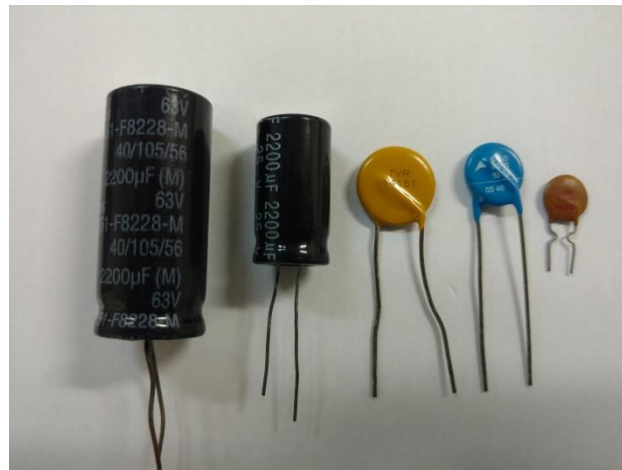
Capacitor: É um componente elétrico capaz de armazenar carga elétrica em sua estrutura e, conseqüentemente, energia potencial elétrica, através de um campo eletrostático chamado de capacitância (C) [17, 21]. Os capacitores são identificados pelo símbolo como está representado na Figura 17.



Fonte: Autoria Própria, 2018.

Ao serem eletrizados, os capacitores armazenam cargas elétricas de mesmo valor, mas de sinais contrários. Existem vários formatos de capacitores, esféricos, cilindros ou planos, Figura 18.

Figura 18 - Capacitores



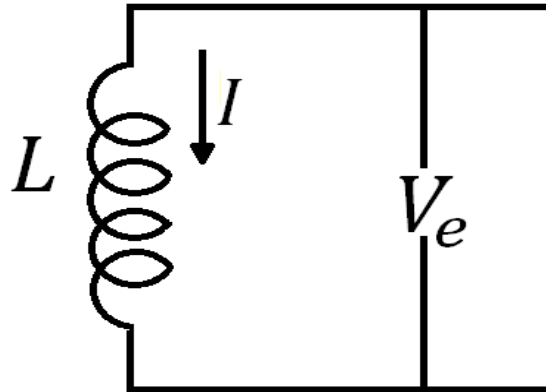
Fonte: Autoria Própria, 2018.

A carga (Q) armazenada no capacitor é proporcional a diferença de potencial (V) entre seus terminais [17]. Logo, a capacitância (C) de um capacitor é dada pela razão entre a carga e a tensão, e pelo SI a capacitância é dada em farad (F), como segue:

$$C = \frac{Q}{V}, \quad (C2)$$

Indutor: Consiste em um dispositivo idealizado de resistência zero com capacidade de armazenar energia eletromagnética em seu interior, através de um campo magnético criado por uma corrente elétrica. Ao contrário dos capacitores que armazenam energia elétrica através de um campo elétrico criado por cargas de sinais opostos [17, 21]. O símbolo de um indutor está representado na Figura 19.

Figura 19 - Diagrama de um Indutor



Fonte: Autoria Própria, 2018.

Os indutores são geralmente constituídos por uma bobina de um material condutor [9], assim como mostra a Figura 20, onde fios de cobre são enrolados em um material chamado núcleo, que pode ser ferro, ferrite, toroidal, laminado e até mesmo o ar.

Figura 20 - Indutores



Fonte: Autoria Própria, 2018.

A indutância (L) de um indutor é medida no SI em Henry (H), dada pela equação [21, 9]:

$$L = \frac{V}{\dot{Q}}, \quad (C3)$$

onde \dot{Q} em relação a t é igual a I , que é a corrente que atravessa o circuito elétrico [17]. Desta forma, substituindo \dot{Q} por I na equação C3, temos:

$$L = \frac{V}{I}, \quad (C4)$$

Apêndice D – Coordenadas Polares

As coordenadas polares são um sistema de coordenada bidimensional em que cada ponto no plano é determinado por uma distância e um ângulo em relação a um ponto fixo de referência. As mesmas estão relacionadas às coordenadas cartesianas x_1 e x_2 pelas transformações [18], ou seja:

$$x_1 = \rho \cos \varphi, \quad (D1)$$

e

$$x_2 = \rho \operatorname{sen} \varphi, \quad (D2)$$

A coordenada em ρ tem o domínio definido por $0 \leq \rho < \infty$ enquanto o de φ é $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ para poder localizar todos os pontos no plano considerado. Para obter as coordenadas polares ρ e φ faz-se as transformações inversas, ou seja:

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad (D3)$$

e

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}. \quad (D4)$$

Apêndice E – Algoritmo método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4)

Para aproximar a solução do problema de valor inicial.

$$y' = f(t, y), a \leq t \leq b, y(a) = \alpha,$$

em $(N + 1)$ números igualmente espaçados no intervalo $[a, b]$, utiliza-se o algoritmo [8]:

INPUT pontos finais a, b ; número inteiro N ; condição inicial α .

OUTPUT aproximação σ para y no $(N + 1)$ valores de t .

Step 1 Set $h = (b - a)/N$;

$t = a$;

$\sigma = \alpha$;

OUTPUT (t, σ) .

Step 2 For $i = 1, 2, \dots, N$ do Steps 3–5.

Step 3 Set $K_1 = hf(t, \sigma)$;

$K_2 = hf(t + h/2, \sigma + K_1/2)$;

$K_3 = hf(t + h/2, \sigma + K_2/2)$;

$K_4 = hf(t + h, \sigma + K_3)$.

Step 4 Set $\sigma = \sigma + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6$; (Compute σ_i .)

$t = a + ih$. (Compute t_i .)

Step 5 OUTPUT (t, σ) .

Step 6 STOP

Apêndice F – Tabelas

As Tabelas 2, 3, 4 e 5 mostram os dados e os resultados para os cálculos dos três sistemas discutidos. Estão incluídos o tempo, os resultados numérico e analítico e o erro percentual relativo entre estes valores.

Tabela 2- Dados do sistema massa-mola

Tempo(s)	$x(t)$ Numérico	$x(t)$ Analítico	Erro%
0.000	0.8000000000000000	0.8000000000000000	0.0000000000000000
0.3125000000000000	0.790254254990631	0.79025422705317760	0.000035352488344
0.6250000000000000	0.761254594836077	0.76125435843853784	0.0000310536861418
0.9375000000000000	0.713707588580354	0.71370695949359553	0.0000881435650999
1.2500000000000000	0.648771684277296	0.64877049560417444	0.0001832193556355
1.5625000000000000	0.568028996171398	0.56802710685286373	0.0003326106292277
1.8750000000000000	0.473446757679655	0.47344406007398199	0.0005697834022009
2.1875000000000000	0.367329391264289	0.36732581751384330	0.0009729102271854
2.5000000000000000	0.252262362977019	0.25225788991621495	0.0017732094744466
2.8125000000000000	0.131049189615098	0.13104384202066668	0.0040807674354381
3.1250000000000000	6.643133260138649E-003	0.00663698529908670	0.0926318316961314
3.4375000000000000	-0.117924752591918	-0.11793157780193403	-0.0057874321222915
3.7500000000000000	-0.239619472211177	-0.23962680495165933	-0.0030600668751646
4.0625000000000000	-0.355476032848619	-0.35548366101880613	-0.0021458567646293
4.3750000000000000	-0.462671684370077	-0.46267935946946681	-0.0016588376448466
4.6875000000000000	-0.558594693249490	-0.55860213795870073	-0.0013327391187535
5.0000000000000000	-0.640907975299466	-0.64091489243754696	-0.0010792600020073
5.3125000000000000	-0.707606036780235	-0.70761211936655966	-0.0008595932938604
5.6250000000000000	-0.757063836564288	-0.75706877867115641	-0.0006527949649549
5.9375000000000000	-0.788076378871279	-0.78807988692061004	-0.0004451387973791
6.2500000000000000	-0.799888071930086	-0.79988987606534934	-0.0002255479556973
6.5625000000000000	-0.792211137270097	-0.79221100242360143	-0.0000170215378369
6.8750000000000000	-0.765232621116415	-0.76523035739286605	-0.0002958224967261
7.1875000000000000	-0.719609837064330	-0.71960530907421383	-0.0006292324499402
7.5000000000000000	-0.656454351070930	-0.65644748587164869	-0.0010458108880050
7.8125000000000000	-0.577304898958875	-0.57729569229703948	-0.0015947913622804
8.1250000000000000	-0.484089896277657	-0.48407841687166631	-0.0023713938879679
8.4375000000000000	-0.379080453941332	-0.37906684559807191	-0.0035899587152273
8.7500000000000000	-0.264835044380582	-0.26481952580230994	-0.0058600581754754
9.0625000000000000	-0.144137166375200	-0.14412002858066170	-0.0118913344016615
9.3750000000000000	-1.992752731430681E-002	-0.01990912866992172	-0.0924131070230413
9.6875000000000000	0.104767604790268	0.10478684585978355	0.0183621039050035
10.0000000000000000	0.226910133891482	0.22692974837058100	0.0086434146425584
10.3125000000000000	0.343524156660211	0.34354363637513041	0.0056702301707372
10.6250000000000000	0.451768467948255	0.45178727868608537	0.0041636271576957
10.9375000000000000	0.549005784424588	0.54902338040119691	0.0032049594310588
11.2500000000000000	0.632866999807666	0.63288283909659093	0.0025027205584388
11.5625000000000000	0.701308906168081	0.70132246666254572	0.0019335605387493
11.8750000000000000	0.752663974970055	0.75267477042200381	0.0014342784391148
12.1875000000000000	0.785680984978599	0.78568858064312552	0.0009667525675827
12.5000000000000000	0.799555507168126	0.79955953457959961	0.0005037037643192
12.8125000000000000	0.793949503894414	0.79394967431237407	0.0000214645796315
13.1250000000000000	0.768999564814189	0.76899568090251846	0.0005050628718670
13.4375000000000000	0.725313578893077	0.72530554423475524	0.0011077618785133
13.7500000000000000	0.663955923588095	0.66394374968903347	0.0018335738633277
14.0625000000000000	0.586421532060576	0.58640534255848364	0.0027608039895634

14.3750000000000	0.494599470253140	0.49457950211948720	0.0040373961248334
14.6875000000000	0.390726911247837	0.39070351285096827	0.0059887858949550
15.0000000000000	0.277334628284924	0.27730825426802069	0.0095107219123081
15.3125000000000	0.157185334462444	0.15715653747913350	0.0183237578101627
15.6250000000000	3.320637142136028E-002	0.03317579086179524	0.0921773340458678
15.9375000000000	-9.158161299692447E-002	-0.09161326506821882	-0.0345496596707726
16.2500000000000	-0.214138260408721	-0.21417021579755305	-0.0149205568631711
16.5625000000000	-0.331477577762778	-0.33150903078905003	-0.0094878339202980
16.8750000000000	-0.440740688632772	-0.44077081642081883	-0.0068352501854562
17.1875000000000	-0.539265487401472	-0.53929347130653049	-0.0051889938498127
17.5000000000000	-0.624651499269399	-0.62467654688459939	-0.0040096935486547
17.8125000000000	-0.694818365827345	-0.69483973298481216	-0.0030751202691530
18.1250000000000	-0.748056531240393	-0.74807354340477317	-0.0022741299341754
18.4375000000000	-0.783068894117189	-0.78308096657086468	-0.0015416609764495
18.7500000000000	-0.799002410252187	-0.79900906648901127	-0.0008330614887169
19.0625000000000	-0.795468876267682	-0.79546976404602177	-0.0001116042846450
19.3750000000000	-0.772554387781180	-0.77254929233689495	-0.0006595623522805
19.6875000000000	-0.730817241659807	-0.73080609564440868	-0.0015251672727884
20.0000000000000	-0.671274333473957	-0.67125722326116199	-0.0025489800633980

Fonte: Autoria própria, 2018.

Tabela 3 - Dados da carga no circuito RLC em Série

Tempo(s)	Carga Numérico(C)	Carga Analítico(C)	Erro Relativo%
0.000000000000000	0.000000000000000	8.83067834988086e-10	1.00000000000000e+02
1.25000059371814E-004	9.334839724609902E-008	9.42324274023615e-08	9.38137943202699e-01
2.500000118743628E-004	3.717010113876066E-007	3.72585510429174e-07	2.37394911183940e-01
3.750000178115442E-004	8.323275106819960E-007	8.33211990355891e-07	1.06153017975364e-01
5.000000237487257E-004	1.472248480073748E-006	1.47313245799720e-06	6.00066829462681e-02
6.250000296859071E-004	2.288243141115787E-006	2.28912614144604e-06	3.85736860134821e-02
7.500000356230885E-004	3.276857350726764E-006	3.27773890481299e-06	2.68951893921395e-02
8.750000415602699E-004	4.434411862901796E-006	4.43529150991818e-06	1.98329019505308e-02
1.00000047497451E-003	5.757010837283260E-006	5.75788812484232e-06	1.52362730924006e-02
1.12500053434633E-003	7.240550578314961E-006	7.24142506306085e-06	1.20761416196140e-02
1.25000059371814E-003	8.880728488547121E-006	8.88159973672782e-06	9.80958618405208e-03
1.37500065308996E-003	1.067305221953131E-005	1.06739198075493e-05	8.12811069966608e-03
1.50000071246177E-003	1.261284900364339E-005	1.26137125185841e-05	6.84584288257894e-03
1.62500077183358E-003	1.469527515009863E-005	1.46961341902362e-05	5.84534767096892e-03
1.75000083120540E-003	1.691532568837607E-005	1.69161798636562e-05	5.04945730665435e-03
1.87500089057721E-003	1.926784414224889E-005	1.92686930747474e-05	4.40576065629615e-03
2.00000094994903E-003	2.174753241762351E-005	2.17483757419812e-05	3.87764294544216e-03
2.125000100932084E-003	2.434896078742199E-005	2.43497981512552e-05	3.43889435128627e-03
2.250000106869265E-003	2.706657795680011E-005	2.70674090210858e-05	3.07035034306673e-03
2.375000112806447E-003	2.989472119207599E-005	2.98955456315127e-05	2.75773336575039e-03
2.500000118743628E-003	3.282762649685224E-005	3.28284440001948e-05	2.49022872517351e-03
2.625000124680810E-003	3.585943881894584E-005	3.58602490893147e-05	2.25952242234146e-03
2.750000130617991E-003	3.898422227189646E-005	3.89850250270617e-05	2.05913723200408e-03
2.875000136555173E-003	4.219597035500208E-005	4.21967653276412e-05	1.88396582748164e-03
3.000000142492354E-003	4.548861615603317E-005	4.54894030939628e-05	1.72993681182363e-03
3.125000148429535E-003	4.885604252099997E-005	4.88568211873820e-05	1.59377209384471e-03
3.250000154366717E-003	5.229209217559292E-005	5.22928623491144e-05	1.47280811735525e-03
3.375000160303898E-003	5.579057778318226E-005	5.57913392582090e-05	1.36486242646686e-03
3.500000166241080E-003	5.934529192454906E-005	5.93460445112541e-05	1.26813288275059e-03
3.625000172178261E-003	6.295001698482580E-005	6.29507605092913e-05	1.18112070360625e-03
3.750000178115442E-003	6.659853493344882E-005	6.65992692377427e-05	1.10257109762246e-03
3.875000184052624E-003	7.028463698326767E-005	7.02853619254949e-05	1.03142703887980e-03
4.000000189989805E-003	7.400213311531609E-005	7.40028485696446e-05	9.66792957777635e-04
4.125000195926987E-003	7.774486145612531E-005	7.77455673127869e-05	9.07905988757981e-04

4.250000201864168E-003	8.150669749485259E-005	8.15073936601193e-05	8.54113026341614e-04
4.375000207801349E-003	8.528156312790463E-005	8.52822495240405e-05	8.04852287211168e-04
4.500000213738531E-003	8.906343551915608E-005	8.90641120843456e-05	7.59638392680360e-04
4.625000219675712E-003	9.284635576429807E-005	9.28470224525502e-05	7.18050223388918e-04
4.750000225612894E-003	9.662443734829753E-005	9.66250941293272e-05	6.79720972735076e-04
4.875000231550075E-003	1.003918743854067E-004	1.00392521244494e-04	6.44329954912639e-04
5.000000237487257E-003	1.041429496316308E-004	1.04143586569455e-04	6.11595822262317e-04
5.125000243424438E-003	1.078720422600403E-004	1.07872669292499e-04	5.81270921276948e-04
5.250000249361619E-003	1.115736353898024E-004	1.11574252547801e-04	5.53136574312645e-04
5.375000255298801E-003	1.152423233603014E-004	1.15242930689528e-04	5.26999116187997e-04
5.500000261235982E-003	1.188728187422210E-004	1.18873416302899e-04	5.02686551999404e-04
5.625000267173164E-003	1.224599590779708E-004	1.22460546944593e-04	4.80045726201933e-04
5.750000273110345E-003	1.259987133443541E-004	1.25999291605397e-04	4.58939916149683e-04
5.875000279047526E-003	1.294841881308941E-004	1.29484756888517e-04	4.39246778159098e-04
6.000000284984708E-003	1.329116335277574E-004	1.32912192897479e-04	4.20856589035614e-04
6.125000290921889E-003	1.362764487177416E-004	1.36276998828104e-04	4.03670734901912e-04
6.250000296859071E-003	1.395741872673209E-004	1.39574728259538e-04	3.87600408773320e-04
6.375000302796252E-003	1.428005621122733E-004	1.42801094139861e-04	3.72565484057183e-04
6.500000308733433E-003	1.459514502339432E-004	1.45951973462336e-04	3.58493537851591e-04
6.625000314670615E-003	1.490228970227215E-004	1.49023411628879e-04	3.45319001731479e-04
6.750000320607796E-003	1.520111203258544E-004	1.52011626497848e-04	3.32982420689728e-04
6.875000326544978E-003	1.549125141772177E-004	1.54913012113812e-04	3.21429805978980e-04
7.000000332482159E-003	1.577236522072168E-004	1.57724142117435e-04	3.10612067297714e-04
7.125000338419341E-003	1.604412907314912E-004	1.60441772834173e-04	3.00484514416209e-04
7.250000344356522E-003	1.630623715176185E-004	1.63062846040966e-04	2.91006417962943e-04
7.375000350293703E-003	1.655840242295222E-004	1.65584491410637e-04	2.82140622358281e-04
7.500000356230885E-003	1.680035685497919E-004	1.68004028634205e-04	2.73853202977953e-04
7.625000362168066E-003	1.703185159806214E-004	1.70318969221818e-04	2.66113163280412e-04
7.750000368105248E-003	1.725265713245620E-004	1.72527017983494e-04	2.58892164793127e-04
7.875000374042429E-003	1.746256338467679E-004	1.74626074191365e-04	2.52164288276654e-04
8.000000379979610E-003	1.766137981208871E-004	1.76614232425563e-04	2.45905819935751e-04

Fonte: Autoria própria, 2018.

Tabela 4 - Dados da corrente no Circuito RLC em Série

Tempo(s)	Corrente Numérico(A)	Corrente Analítico(A)	Erro Relativo%
0.000000000000000	0.000000000000000	4.09900451246719e-09	1.00000000000000e+02
1.250000059371814E-004	1.490275818381057E-003	1.49028211469986e-03	4.22491737911204e-04
2.500000118743628E-004	2.959725319750502E-003	2.95973377459289e-03	2.85662259969167e-04
3.750000178115442E-004	4.406325732947251E-003	4.40633630459921e-03	2.39919316790404e-04
5.000000237487257E-004	5.828114888950286E-003	5.82812753287900e-03	2.16946671823159e-04
6.250000296859071E-004	7.223193514477191E-003	7.22320818343865e-03	2.03080972947892e-04
7.500000356230885E-004	8.589727399440916E-003	8.58974404359044e-03	1.93767700597011e-04
8.750000415602699E-004	9.925949436466623E-003	9.92596800347206e-03	1.87054858849362e-04
1.000000047497451E-003	1.123016153089140E-002	1.12301819660488e-02	1.81966396258811e-04
1.125000053434633E-003	1.250073637989031E-002	1.25007586262419e-02	1.77960012398292e-04
1.250000059371814E-003	1.373611911959230E-002	1.37361431180464e-02	1.74710280086073e-04
1.375000065308996E-003	1.493482883926854E-002	1.49348545287214e-02	1.72010064377878e-04
1.500000071246177E-003	1.609545996189358E-002	1.60954872793528e-02	1.69721231708077e-04
1.625000077183358E-003	1.721668349059588E-002	1.72167123713052e-02	1.67748108517764e-04
1.750000083120540E-003	1.829724812072831E-002	1.82972784982936e-02	1.66022314773913e-04
1.875000089057721E-003	1.933598121750159E-002	1.93360130240177e-02	1.64493663018453e-04
2.000000094994903E-003	2.033178965933254E-002	2.03318228255110e-02	1.63124471391796e-04
2.125000100932084E-003	2.128366054726616E-002	2.12836950025636e-02	1.61885882139899e-04
2.250000106869265E-003	2.219066178103362E-002	2.21906974537799e-02	1.60755408043780e-04
2.375000112806447E-003	2.305194250250845E-002	2.30519793200355e-02	1.59715253002290e-04
2.500000118743628E-003	2.386673340751973E-002	2.38667712962903e-02	1.58751136098024e-04
2.625000124680810E-003	2.463434692717341E-002	2.46343858129090e-02	1.57851451551144e-04

2.750000130617991E-003	2.535417728002124E-002	2.53542170878300e-02	1.57006657214747e-04
2.875000136555173E-003	2.602570039660071E-002	2.60257410511043e-02	1.56208822470222e-04
3.000000142492354E-003	2.664847371804845E-002	2.66485151435087e-02	1.55451288718413e-04
3.125000148429535E-003	2.722213587066432E-002	2.72221779911077e-02	1.54728410759168e-04
3.250000154366717E-003	2.774640621847211E-002	2.77464489578140e-02	1.54035357791726e-04
3.375000160303898E-003	2.822108429598729E-002	2.82211275781543e-02	1.53367957737466e-04
3.500000166241080E-003	2.864604912356044E-002	2.86460928726111e-02	1.52722574885493e-04
3.625000172178261E-003	2.902125840781818E-002	2.90213025480619e-02	1.52096011681429e-04
3.750000178115442E-003	2.934674762987008E-002	2.93467920859843e-02	1.51485430235128e-04
3.875000184052624E-003	2.962262902409158E-002	2.96226737212368e-02	1.50888287838387e-04
4.000000189989805E-003	2.984909045042758E-002	2.98491353143597e-02	1.50302283930559e-04
4.125000195926987E-003	3.002639416329035E-002	3.00264391204712e-02	1.49725315953326e-04
4.250000201864168E-003	3.015487548024754E-002	3.01549204579524e-02	1.49155442046220e-04
4.375000207801349E-003	3.023494135381219E-002	3.02349862802350e-02	1.48590849030509e-04
4.500000213738531E-003	3.026706884975576E-002	3.02671136541110e-02	1.48029824473930e-04
4.625000219675712E-003	3.025180353546789E-002	3.02518481480899e-02	1.47470732177561e-04
4.750000225612894E-003	3.018975778198258E-002	3.01898021344216e-02	1.46911989839723e-04
4.875000231550075E-003	3.008160898337936E-002	3.00816530084947e-02	1.46352048395787e-04
5.000000237487257E-003	2.992809769735042E-002	2.99281413293999e-02	1.45789372676028e-04
5.125000243424438E-003	2.973002571079988E-002	2.97300688855261e-02	1.45222422496849e-04
5.250000249361619E-003	2.948825403440974E-002	2.94882966891229e-02	1.44649633812005e-04
5.375000255298801E-003	2.920370083016850E-002	2.92037429038256e-02	1.44069399610265e-04
5.500000261235982E-003	2.887733927591292E-002	2.88773807091931e-02	1.43480049707172e-04
5.625000267173164E-003	2.851019537098064E-002	2.85102361063574e-02	1.42879829425657e-04
5.750000273110345E-003	2.810334568711233E-002	2.81033856689211e-02	1.42266875684155e-04
5.875000279047526E-003	2.765791506877512E-002	2.76579542432778e-02	1.41639191041226e-04
6.000000284984708E-003	2.717507428710623E-002	2.71751126025512e-02	1.40994613530292e-04
6.125000290921889E-003	2.665603765169522E-002	2.66560750583739e-02	1.40330782524822e-04
6.250000296859071E-003	2.610206058443656E-002	2.61020970347357e-02	1.39645098637188e-04
6.375000302796252E-003	2.551443715969046E-002	2.55144726081403e-02	1.38934676127621e-04
6.500000308733433E-003	2.489449761498951E-002	2.48945320183084e-02	1.38196286765414e-04
6.625000314670615E-003	2.424360583652183E-002	2.42436391536561e-02	1.37426291547834e-04
6.750000320607796E-003	2.356315682360816E-002	2.35631890157685e-02	1.36620558147256e-04
6.875000326544978E-003	2.285457413637022E-002	2.28546051670639e-02	1.35774358908160e-04
7.000000332482159E-003	2.211930733076192E-002	2.21193371658205e-02	1.34882245330841e-04
7.125000338419341E-003	2.135882938510279E-002	2.13588579927065e-02	1.33937889820810e-04
7.250000344356522E-003	2.057463412221447E-002	2.05746614729117e-02	1.32933887042348e-04
7.375000350293703E-003	1.976823363121743E-002	1.97682596979410e-02	1.31861498791662e-04
7.500000356230885E-003	1.894115569299482E-002	1.89411804510735e-02	1.30710326072130e-04
7.625000362168066E-003	1.809494121327515E-002	1.80949646404421e-02	1.29467879034769e-04
7.750000368105248E-003	1.723114166722443E-002	1.72311637436207e-02	1.28119009267291e-04
7.875000374042429E-003	1.635131655937227E-002	1.63513372675472e-02	1.26645146003793e-04
8.000000379979610E-003	1.545703090262513E-002	1.54570502275327e-02	1.25023256484618e-04

Fonte: Autoria própria, 2018.

Tabela 5– Dados (até $t = 300$) do Pêndulo Amortecido e Forçado

Tempo(s)	Numérico para $B = 1,12$	Numérico para $B = 1,2$
200.000000000000	-4.00000000000000	-4.00000000000000
200.781250000000	-4.20716105313883	-4.20688583227879
201.562500000000	-4.98630347797363	-4.99965042519516
202.343750000000	-6.35955587584233	-6.40747689924218
203.125000000000	-7.77888092885716	-7.86953291891006
203.906250000000	-8.81454555104850	-8.97472179999278
204.687500000000	-9.60738118531778	-9.91408530917617
205.468750000000	-10.3453287125110	-10.8958148224414
206.250000000000	-11.0534808317310	-11.8276781729144
207.031250000000	-11.6008781290619	-12.3384759376658

207.812500000000	-11.8426068588304	-12.2421629265052
208.593750000000	-11.8250499865264	-11.7959158392159
209.375000000000	-11.7900075792593	-11.4495265855733
210.156250000000	-12.0004787752331	-11.5417377493858
210.937500000000	-12.5641407507469	-12.1986994246428
211.718750000000	-13.3379100087137	-13.2251660331144
212.500000000000	-14.0613260975629	-14.2080609730908
213.281250000000	-14.5895810407415	-14.9632278432532
214.062500000000	-14.8696368649854	-15.5460291885269
214.843750000000	-14.7952940245189	-15.9925652485884
215.625000000000	-14.1676255837257	-16.2567645182896
216.406250000000	-12.8742117433676	-16.2558449680202
217.187500000000	-11.3645871817416	-15.9259330704842
217.968750000000	-10.2186992808311	-15.2203693444538
218.750000000000	-9.39729082299578	-14.0912699449692
219.531250000000	-8.68902765729892	-12.7578574525140
220.312500000000	-8.03248938334567	-11.9343579911074
221.093750000000	-7.50514385881388	-12.0659490859118
221.875000000000	-7.21594968966221	-12.9264604367066
222.656250000000	-7.14275992357048	-13.8978339656037
223.437500000000	-7.09571912023679	-14.5045844702585
224.218750000000	-6.84308298041246	-14.5898529401922
225.000000000000	-6.27869043532028	-14.0257195438963
225.781250000000	-5.52540529878615	-12.7658904535552
226.562500000000	-4.81843175426338	-11.2876608435631
227.343750000000	-4.29269014929947	-10.1326054186690
228.125000000000	-4.00083492496362	-9.22897412095186
228.906250000000	-4.04648183389313	-8.35297743923506
229.687500000000	-4.62611662441287	-7.48669312567732
230.468750000000	-5.87294943195815	-6.86808948310996
231.250000000000	-7.38411823478613	-6.73042968402522
232.031250000000	-8.55781588789826	-6.97604061579894
232.812500000000	-9.39502301026073	-7.24499770251733
233.593750000000	-10.1129800075419	-7.18708835100429
234.375000000000	-10.7855364647727	-6.63340820977759
235.156250000000	-11.3394916419719	-5.71467722165953
235.937500000000	-11.6536798838366	-4.78837636117988
236.718750000000	-11.7311421616541	-4.06078300566838
237.500000000000	-11.7546918739714	-3.52189857220880
238.281250000000	-11.9658661488218	-3.16541138079407
239.062500000000	-12.4940209065226	-3.07232928081935
239.843750000000	-13.2392461227365	-3.39315919465148
240.625000000000	-13.9627437739988	-4.32876863401916
241.406250000000	-14.5117308338555	-5.95665260836743
242.187500000000	-14.8305871489745	-7.59478369707122
242.968750000000	-14.8248085091017	-8.46558087636256
243.750000000000	-14.3053965781144	-8.51469919316555
244.531250000000	-13.1160839594858	-7.74129712195472
245.312500000000	-11.5991540487156	-6.22415850407348
246.093750000000	-10.3842228637581	-4.66377485056339
246.875000000000	-9.52587797440220	-3.59975946696254
247.656250000000	-8.80202390548648	-2.89408613602136
248.437500000000	-8.12320828629757	-2.40270976962556
249.218750000000	-7.55146830861420	-2.12081810516221
250.000000000000	-7.21137521403584	-2.06253115188271

250.781250000000	-7.11760097978864	-2.16471910903865
251.562500000000	-7.10086744658773	-2.26998915201015
252.343750000000	-6.91726323933499	-2.15148309789827
253.125000000000	-6.41957879348388	-1.53839449058612
253.906250000000	-5.68514062548626	-0.28287002446190
254.687500000000	-4.95025252965350	1.20773967512559
255.468750000000	-4.38142530423449	2.39555606417172
256.250000000000	-4.03775423971033	3.35012360974723
257.031250000000	-4.00564372867090	4.32436481785044
257.812500000000	-4.46623596449083	5.32803247354544
258.593750000000	-5.59460591531617	6.02064861057548
259.375000000000	-7.11150305402180	6.09051260338456
260.156250000000	-8.36875650793738	5.67428335187707
260.937500000000	-9.25098867677019	5.21709723655640
261.718750000000	-9.98173582579501	5.11874694120530
262.500000000000	-10.6663480333647	5.58356636810262
263.281250000000	-11.2548093707544	6.54296411100089
264.062500000000	-11.6208175879865	7.60322342609663
264.843750000000	-11.7325803399609	8.45420891149299
265.625000000000	-11.7446985727832	9.10518937194410
266.406250000000	-11.9019435411382	9.62754715379989
267.187500000000	-12.3681771702811	10.0119755035522
267.968750000000	-13.0893108776510	10.1920469240617
268.750000000000	-13.8340672412250	10.1128712221436
269.531250000000	-14.4224014290908	9.77902448921495
270.312500000000	-14.7901956506205	9.23382927762586
271.093750000000	-14.8585138623044	8.51697628925414
271.875000000000	-14.4547566116501	7.70617008315513
272.656250000000	-13.3897104688388	7.03108338341484
273.437500000000	-11.8797696137425	6.76906433461414
274.218750000000	-10.5809541065297	6.92823246409487
275.000000000000	-9.67259226036497	7.20983248926682
275.781250000000	-8.93413453201386	7.25163563050708
276.562500000000	-8.24435971093259	6.82775675338715
277.343750000000	-7.64050182613988	5.97714630400269
278.125000000000	-7.24880350951715	5.02415973571005
278.906250000000	-7.11733973274188	4.24098797792164
279.687500000000	-7.10731443300042	3.65435176143674
280.468750000000	-6.97475979054156	3.24062534246288
281.250000000000	-6.54052894853137	3.05609462527359
282.031250000000	-5.83514618010793	3.23332091521861
282.812500000000	-5.08227651079126	3.95885826199836
283.593750000000	-4.47488726997974	5.40074865732969
284.375000000000	-4.08361783895282	7.14356990499664
285.156250000000	-3.98068657501290	8.27788326751407
285.937500000000	-4.32965450873182	8.56020425001399
286.718750000000	-5.32971623486150	8.02659437739931
287.500000000000	-6.82563565411718	6.67671597060308
288.281250000000	-8.16447224493721	5.04993394593981
289.062500000000	-9.10120895759763	3.84900178880313
289.843750000000	-9.84819909314368	3.06643040893310
290.625000000000	-10.5423511406002	2.51782447919296
291.406250000000	-11.1599570951199	2.17028199659267
292.187500000000	-11.5768078522742	2.04578981557811
292.968750000000	-11.7297210086323	2.10850191385642

293.750000000000	-11.7405988353134	2.22450529021666
294.531250000000	-11.8507318142734	2.18196035731431
295.312500000000	-12.2529705305244	1.71628867510444
296.093750000000	-12.9403205810880	0.617716424101087
296.875000000000	-13.6992993256380	-0.86019909524053
297.656250000000	-14.3250992613822	-2.12484136048545
298.437500000000	-14.7391875235275	-3.10254800080572
299.218750000000	-14.8751926206648	-4.05558671752185
300.000000000000	-14.5789084433743	-5.07770021032211

Fonte: Aatoria própria, 2018.

Esta tabela apresenta os valores obtidos para o pêndulo amortecido e forçado até de 200 a 300 segundos. Como o tempo foi utilizado até 1000 segundos, esta tabela foi construída apenas parcialmente, a fim evitar que ela fique excessivamente extensa.