



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

THAYNÁ CRISTINA RENDEIRO TAVARES NUNES

Mecânica Celeste: Um estudo acerca do Problema da Força
Central.

Belém
2022



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

THAYNÁ CRISTINA RENDEIRO TAVARES NUNES

**Mecânica Celeste: Um estudo acerca do Problema da Força
Central.**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
para obtenção do grau de licenciatura em
matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcel Vinhas Bertolini

**Belém
2022**

Tavares, Thayná

Mecânica Celeste: Um estudo acerca do Problema da Força Central./ THAYNÁ CRISTINA RENDEIRO TAVARES NUNES. – Belém, 2022.

43 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Marcel Vinhas Bertolini

Monografia – UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA, 2022.

1. Mecânica Celeste. 2. Leis de Kepler. 3. Cálculo. 4. Geometria Analítica. I.
Título.

THAYNÁ CRISTINA RENDEIRO TAVARES NUNES

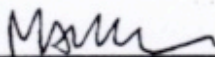
**Mecânica Celeste: Um estudo acerca do Problema da
Força Central.**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
para obtenção do grau de licenciatura em
matemática.

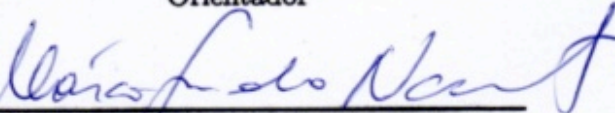
Data da Apresentação: 15 de Dezembro de 2022

Conceito: **EXCELENTE**

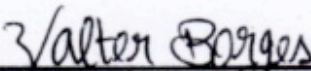
Banca Examinadora



Prof. Dr. Marcel Vinhas Bertolini
Faculdade de Matemática - UFPA
Orientador



Prof. Dr. Márcio Nascimento
Faculdade de Matemática - UFPA
Membro da Banca



Prof. Dr. Valter Borges
Faculdade de Matemática - UFPA
Membro da Banca

Belém
2022

*Este trabalho é dedicado às pessoas que me apoiaram e motivaram,
quando nem eu mesma podia fazer.*

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, gostaria de agradecer à Deus e à minha família que me permitiu estar aqui hoje, pela educação e pelo apoio dado – em especial à minha avó Adelia Rendeiro Tavares, que definitivamente é uma mãe pra mim, a qual criou a todos, ensinando o que era certo ou errado e dando oportunidades de chegarem nos seus objetivos; à minha mãe Rita Caroline Rendeiro Tavares, que é um exemplo de altruísmo; e à minha namorada Rafaela da Silva Ribeiro, pelo companheirismo, paciência e, principalmente, por apoiar e acreditar em mim, mesmo quando eu hesito em acreditar.

Em segundo lugar, gostaria de agradecer aos meus amigos pessoais, em específico, Gabriel Souto e Bruna Llopis os quais sempre estão ao meu lado, independente do momento, apoiando e alegrando os dias difíceis. Além disso, aos amigos que fiz durante a graduação, os quais passaram por esse momento específico da minha vida e caminharam ao meu lado – em especial, Ana Carrilho, Everton Silva, João Ventura, Marcélia Carvalho, José Leandro Castro, Vinicius Lima dos Santos e Isabelle Costa.

Por fim, meus agradecimentos à Universidade Federal do Pará, à reitoria que ao longo da graduação me permitiu experienciar a iniciação científica e ser monitora por meio das bolsas de incentivo, sendo de grande importância na minha formação. Ademais, agradeço ao ICEN, à Faculdade de Matemática – corpo docente, técnicos e funcionários – pelo conhecimento e suporte dados. Em excepcional, ao meu orientador Prof. Dr. Marcel Vinhas Bertolini que desde o 2º ano de graduação aceitou me orientar e me guiou durante todo restante percurso, agradeço por me ensinar os primeiros passos da pesquisa, agradeço por aceitar os projetos em que trabalhamos e agradeço por ter sido tão admirável, tornando-se um exemplo para mim.

Agradecer é sempre uma tarefa dificilmente fácil pois acredito que todos os momentos da minha vida me trouxeram a quem sou hoje, o que torna difícil lembrar de todos mas é possível agradecer. De certo modo, isso significa que todas as pessoas que, de alguma maneira, passaram por essa caminhada deixaram algo de aprendizado. Assim, mesmo que seu nome não esteja citado aqui, de verdade, obrigada.

*"A ciência é o grande antídoto
do veneno do entusiasmo
e da superstição".
(Adam Smith)*

RESUMO

O presente trabalho busca expor um estudo introdutório no que se refere a descrição do movimento de uma partícula que é atraída para um ponto fixo, desenvolvido dentro da Mecânica Celeste. Em busca do melhor progresso do trabalho, inicialmente são fixados conceitos de Cálculo e Geometria Analítica, seguidos da formulação do problema, enquanto uma Equação Diferencial Ordinária de Newton. Ademais, partindo da *Lei da Gravitação de Newton* são estabelecidas as *três leis de Kepler*, o que resulta também nas constantes geradas pela conservação da energia, pela conservação do momentum e a excentricidade. Além disso, com o desenvolvimento do trabalho verificar-se-ão as relações entre as constantes, expondo como seus valores determinam a órbita de uma partícula. Por fim, são introduzidas técnicas de determinação da posição na órbita da partícula em um instante do tempo, com base nos valores iniciais dos seus vetores posição e velocidade.

Palavras-chave: Mecânica Celeste; Leis de Kepler; Cálculo; Geometria Analítica;

ABSTRACT

The present work seeks to expose an introductory study regarding the description of the movement of a particle attracted to a fixed point, developed in Celestial Mechanics. Looking for the best progress of the work, initially concepts of Calculus and Analytic Geometry are fixed, followed by the formulation of the problema, as a Newton Ordinary Differential Equation. Moreover, starting from the *Newton's Gravitation Law*, there are established the three Kepler's Laws, resulting also in the constants generated by conservation of energy, conservation of momentum, and excentricity. Furthermore, with the development of the work, relations between the constants will be verified, exposing how its values determine the orbit of a particle. Finally, techniques are introduced for determining the position on the orbit of the particle in a given instant of time, based on the initial values of its position and velocity vectors.

Keywords: Celestial Mechanics, Kepler's Laws, Calculus, Analytic Geometry.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	PRELIMINARES	11
2.1	Cálculo	11
2.1.1	Derivação Implícita	11
2.1.2	Integração Imprópria	11
2.1.3	E.D.O: Teorema de Existência e Unicidade	13
2.2	Geometria Analítica	14
2.2.1	Produto Vetorial	14
2.2.1.1	Propriedades do Produto Vetorial	14
2.2.2	Cônicas	14
2.2.2.1	Parábola	14
2.2.2.1.1	Elementos de uma Parábola	15
2.2.2.2	Elipse	15
2.2.2.2.1	Elementos de uma Elipse	15
2.2.2.3	Hipérbole	16
2.2.2.3.1	Elementos de uma hipérbole	16
2.2.2.4	Definição Geral de Seção Cônica	17
2.3	Cálculo Vetorial	18
2.3.1	Funções vetoriais de uma variável	18
2.3.1.1	Limite, Derivada e Integral de Funções Vetoriais de uma variável . . .	18
2.3.2	Derivada de um versor qualquer	19
2.4	Notações	19
3	PROBLEMA DA FORÇA CENTRAL	20
3.1	Formulação do problema	20
3.1.1	Caso Especial: Lei da Gravitação de Newton	20
3.1.2	Segunda Lei de Kepler: Conservação do Momentum Angular	20
3.2	Conservação da Energia	23
3.3	Primeira Lei de Kepler: Lei do Inverso do Quadrado	23
4	POSIÇÃO NA ÓRBITA	28
4.1	Relação entre as constantes	28
4.1.1	Relação entre c e e	29
4.2	Caso 1: $h = 0$	32
4.3	Caso 2: $h \neq 0$	35
4.3.1	Caso 2.1: $h > 0$	38
4.3.2	Caso 2.2: $h < 0$	39
5	CONCLUSÃO	42
	REFERÊNCIAS	43

1 INTRODUÇÃO

Esta monografia tem como motivação inicial o estudo introdutório de tópicos de Mecânica Celeste, assim, dividida em três capítulos que dissertam acerca do problema da força central. Para tanto, utilizaremos como referência principal [5] e os capítulos 3 e 4 da monografia seguem a ordem do texto base. Além disso, evidencia-se o valor desta monografia na interdisciplinariedade, no trabalho em expor e detalhar cálculos acerca de órbitas newtonianas, estendendo-os além das órbitas elípticas – as quais são comumente vistas ao longo da educação básica na disciplina de Física – para as demais seções cônicas.

À luz disso, inicialmente, iremos expor certos conceitos matemáticos de Cálculo vistos em [2], Geometria Analítica vistos em [4] e [6] e um Teorema de Equações Diferenciais Ordinárias enunciado e demonstrado em [3] que serão utilizados ao longo do texto com finalidade de permitir desenvolver os cálculos necessários futuramente. Em seguida, iremos formular o Problema da Força Central e, desse modo, estabelecer o primeiro objetivo que é: descrever o movimento de uma partícula sendo atraída para um ponto fixo, isto é, determinar as funções, a geometria (como leitura auxiliar foram vistas as interpretações geométricas em [1]) e as constantes do movimento. Com finalidade de auxiliar na leitura dos casos, a classificação das órbitas conforme as constantes é, sendo consequência de (4.2), como na tabela abaixo:

Órbita	Momentum Angular (c)	Energia (h)	Excentricidade (e)
Circular	$c \neq 0$	$h = -\frac{\mu^2}{2c}$	$e = 0$
Retilínea	$c = 0$	–	$e = 1$
Elíptica	$c \neq 0$	$h < 0$	$0 < e < 1$
Parabólica	$c \neq 0$	$h = 0$	$e = 1$
Hiperbólica	$c \neq 0$	$h > 0$	$e > 1$

Por fim, ao descrever o movimento, no último capítulo teremos como objetivo entender como os "elementos" determinados anteriormente se relacionam e, com isso, será possível indicar como os valores de uma $\mathbf{r}(t)$ podem ser calculados indiretamente por um método numérico, dado um tempo t e vetores posição e velocidade iniciais.

Por fim, de modo pessoal, o interesse nesse estudo deu-se por meio da curiosidade em assuntos que envolvam corpos celestes e astronomia. Assim, a expectativa para este trabalho de conclusão é o conhecimento de como a matemática age sobre esses tópicos. Além disso, ao longo da graduação, o maior foco de interesse esteve na matemática pura (tal pensamento não mudou) mas é formidável o modo em como podemos encontra-la em todo lugar sendo aplicada e, dado o trabalho e seu contexto, em locais que sequer pisamos, apenas observamos.

2 PRELIMINARES

Dando início aos tópicos de matemática, este capítulo será responsável por definir as ferramentas que utilizaremos ao longo do texto, sendo as mesmas básicas para a compreensão do que será desenvolvido. Entretanto, os pontos aqui citados serão expostos de maneira resumida, dado que o propósito do trabalho são as aplicações dos mesmos.

Outro ponto relevante sobre esta seção é que as *notações aqui* utilizadas não serão as padrões ao longo do texto. Contudo, encerraremos o capítulo fixando as notações que serão utilizados no seguinte.

2.1 Cálculo

2.1.1 Derivação Implícita

Definição 2.1.1. Seja $z = f(x, y)$ uma função. A função se diz *definida ou dada implicitamente* pela equação $g(x, y, z) = 0$ se, $\forall (x, y) \in D_f$, $g(x, y, f(x, y)) = 0$.

Uma função $y = g(x)$ é *definida implicitamente* pela equação $f(x, y) = 0$ se, para algum $D_g \subseteq \mathbb{R}$, e $\forall x \in D_g$,

$$f(x, g(x)) = 0.$$

Admitindo que f e g sejam diferenciáveis, vamos deduzir uma fórmula para o cálculo de $g'(x)$ em todo $x \in D_g$, para os quais $\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0$. Então, derivando em relação a x os dois membros da equação anterior, obtemos,

$$\frac{d}{dx}[f(x, g(x))] = 0$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) g'(x) = 0$$

e, portanto,

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}, \quad y = g(x).$$

desde que $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$.

2.1.2 Integração Imprópria

Definição 2.1.2. Seja f um função real integrável em $[a, t]$, para todo $t > a$. Definimos

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$$

desde que o limite exista e seja finito. Tal limite denomina-se *integral imprópria* de f estendida ao intervalo $[a, +\infty[$.

Observação 2.1.3. Se $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x)dx$ for $+\infty$ ou $-\infty$ continuaremos a nos referir a $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ como uma integral imprópria e escreveremos

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx = -\infty.$$

Se ocorrer um destes casos ou se o limite não existir, diremos que a integral imprópria é *divergente*. Se o limite for finito, diremos que a integral imprópria é *convergente*.

Exemplo 2.1.4. Seja $f_1(r) = \int_r^a f(x)dx$. Vamos definir *três* possíveis valores para a ,

- (i) $a = +\infty$ se a integral é convergente;
- (ii) se $\int_r^{+\infty} f(x)dx$ diverge, $a = 0$ com $\int_r^0 f(x)dx$ convergente;
- (iii) se as duas outras opções anteriores divergem, $a = 1$.

Vamos, então, verificar para $f(r) = \mu r^{-p}$ que:

$$\begin{aligned} p > 1 &\implies a = \infty \\ p < 1 &\implies a = 0 \\ p = 1 &\implies a = 1. \end{aligned}$$

De modo geral,

$$\begin{aligned} f_1(r) &= \int_r^a \mu x^{-p} dx \\ &= \mu \lim_{b \rightarrow a} \int_r^b \mu x^{-p} dx \\ &= \mu \lim_{b \rightarrow a} \left[-\frac{1}{(p-1)x^{(p-1)}} \right]_r^b \\ &= \mu \lim_{b \rightarrow a} \left[\frac{1}{(p-1)r^{(p-1)}} - \frac{1}{(p-1)b^{(p-1)}} \right]. \end{aligned}$$

Com isso, vamos o que ocorre em cada valor de p ,

1. $p > 1 \implies p - 1 > 0$, com isso veremos se para $a = \infty$ converge:

$$\begin{aligned} f_1(r) &= \mu \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(p-1)r^{(p-1)}} - \frac{1}{(p-1)b^{(p-1)}} \right] \\ &= \mu \left[\frac{1}{(p-1)r^{(p-1)}} \right] \quad \left(\text{pois } \frac{1}{(p-1)b^{(p-1)}} \rightarrow 0 \right). \end{aligned}$$

e é convergente.

2. $p < 1 \implies p - 1 < 0$, com isso vemos que para $a = \infty$, $f_1(r)$ diverge pois

$$\begin{aligned} f_1(r) &= \mu \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(p-1)r^{(p-1)}} - \frac{1}{(p-1)b^{(p-1)}} \right] \\ &= \mu \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(p-1)r^{(p-1)}} + \frac{b^{-(p-1)}}{(-p+1)} \right] \end{aligned}$$

que é divergente pois $b \rightarrow \infty$ e $-(p-1) = -p+1 > 0$. Agora, é fácil verificar que converge para $a = 0$ pois

$$\lim_{b \rightarrow 0} \left[\frac{b^{-(p-1)}}{(-p+1)} \right] = 0.$$

Então,

$$f_1(r) = \mu \left[\frac{1}{(p-1)r^{(p-1)}} \right].$$

que é convergente.

3. $p = 1 \implies p - 1 = 0$, observe que

$$\begin{aligned} f_1(r) &= \mu \lim_{b \rightarrow a} \left[\frac{1}{(p-1)r^{(p-1)}} - \frac{1}{(p-1)b^{(p-1)}} \right] \\ &= \mu \lim_{b \rightarrow a} \left[\frac{1}{(0)r^{(0)}} - \frac{1}{(0)b^{(0)}} \right] \end{aligned}$$

Logo, a) e b) são divergentes pois o limite não existe. Por convenção, $a = 1$.

2.1.3 E.D.O: Teorema de Existência e Unicidade

Teorema 2.1.5. Considere o *problema do valor inicial*

$$X' = F(X), \quad X(0) = X_0 \tag{2.1}$$

onde $X_0 \in \mathbb{R}^n$. Suponha que $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é C^1 . Então, *existe uma única* solução para esse problema do valor inicial. Mais precisamente, existem $a > 0$ e uma única solução

$$X : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dessa equação diferencial satisfazendo (2.1)

Demonstração. A prova do teorema está exposta nas páginas 385-386 do livro "Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos" HIRSCH, Morris W.; SMALE, Stephen; DEVANEY, Robert L, 2012. ■

2.2 Geometria Analítica

2.2.1 Produto Vetorial

Dados vetores $\mathbf{u} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$ (com $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ vetores unitários na direção dos eixos de coordenadas cartesianas x, y, z respectivamente), chama-se *produto vetorial*, e se representa $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, ao vetor

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (y_1z_2 - z_1y_2)\mathbf{i} - (x_1z_2 - z_1x_2)\mathbf{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\mathbf{k}.$$

2.2.1.1 Propriedades do Produto Vetorial

- a) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0$, $\forall \mathbf{u}$ e sendo 0 vetor nulo;
- b) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$;
- c) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$;
- d) $(m\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = m(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$;
- e) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$ se, e somente se, um dos vetores é nulo ou se $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são colineares (isto é, um é múltiplo do outro, recaindo no item a));
- f) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é ortogonal simultaneamente aos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$;
- g) $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2$.

2.2.2 Cônicas

2.2.2.1 Parábola

Definição 2.2.1. Consideremos uma reta r e um ponto $F \notin r$. *Parábola* é o lugar geométrico dos pontos do plano que são *equidistantes* de F e de r .

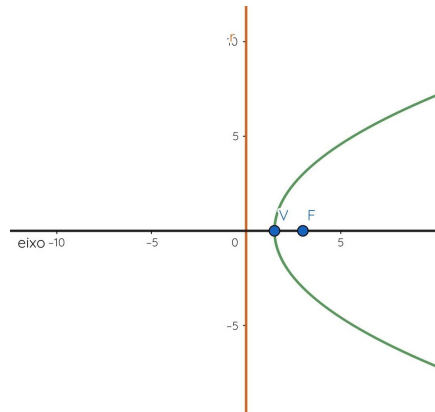


Figura 1 – Exemplo de Parábola

2.2.2.1.1 Elementos de uma Parábola

Dada a figura acima,

- Foco: é o ponto F ;
- Diretriz: é a reta r ;
- Eixo: é a reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz;
- Vértice: é o ponto V de interseção da parábola com o seu eixo.

Ademais, a equação de uma parábola de vértice na origem, com eixo da parábola sendo o eixo dos y ou com eixo da parábola sendo o eixo dos x , respectivamente:

$$x^2 = 2py \quad \text{ou} \quad y^2 = 2px.$$

onde p é a distância entre o foco e a diretriz.

2.2.2.2 Elipse

Definição 2.2.2. *Elipse* é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja *soma das distâncias* a dois pontos fixos desse plano é *constante*.

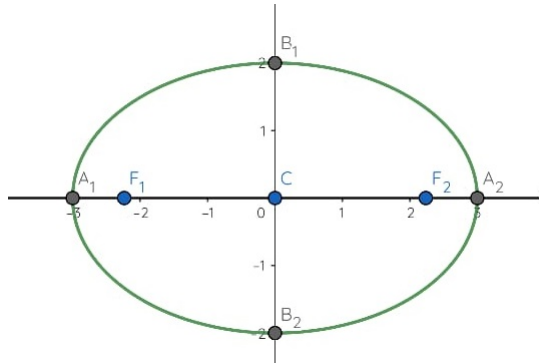


Figura 2 – Exemplo de Elipse

2.2.2.2.1 Elementos de uma Elipse

Dada a figura acima,

- Focos: são os pontos F_1 e F_2 ;
- Distância focal: é a distância $2c$ entre os focos;
- Centro: é o ponto médio C do segmento F_1F_2 ;

- Eixo maior: é o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$ (o segmento A_1A_2 contém os focos e os seus extremos)
- Eixo menor: é o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$ ($B_1B_2 \perp A_1A_2$ no seu ponto médio);
- Vértices: são os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 .

Ademais, a equação de uma elipse centrada na origem, com eixo da elipse sendo o eixo dos y ou com eixo da elipse sendo o eixo dos x , respectivamente:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

2.2.2.3 Hipérbole

Definição 2.2.3. *Hipérbole* é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja *diferença das distâncias*, em valor absoluto, a dois pontos fixos desse plano é *constante*.

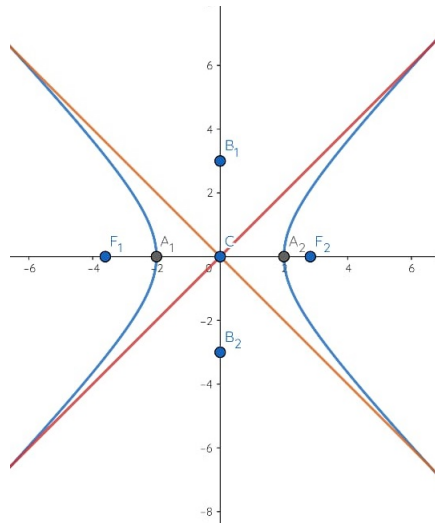


Figura 3 – Exemplo de Hipérbole

2.2.2.3.1 Elementos de uma hipérbole

Dada a figura acima,

- Focos: são os pontos F_1 e F_2 ;
- Distância focal: é a distância $2c$ entre os focos;
- Centro: é o ponto médio C do segmento F_1F_2
- Vértice: são os pontos A_1 e A_2 ;

- Eixo real: é o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$;
- Eixo imaginário: é o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$, onde b é dado por $c^2 = a^2 + b^2$.

Ademais, a equação de uma hipérbole centrada na origem, com eixo da hipérbole sendo o eixo dos y ou com eixo da hipérbole sendo o eixo dos x , respectivamente:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

2.2.2.4 Definição Geral de Seção Cônica

Definição 2.2.4. Seja r uma reta fixa e $F \notin r$. Seja P um ponto que se move no plano de r e F de tal maneira que a razão de sua distância a F para sua distância a r é sempre igual a uma constante positiva. Então, o lugar geométrico de P é denominado uma *seção cônica*.

Assim, a reta fixa r é denominada *diretriz*, o ponto fixo F é o *foco*. Sem qualquer perda de generalidade, podemos tomar o eixo Y como a diretriz e o ponto $F(p, 0)$, com $p \neq 0$, como o foco. Seja $P(x, y)$ qualquer ponto sobre o lugar geométrico. De P se traça o segmento retilíneo PA perpendicular ao eixo Y . Então, pela definição acima, o ponto P deve satisfazer a condição geométrica

$$\frac{d(P, F)}{d(P, A)} = e \implies d(P, F) = ed(P, A). \quad (2.2)$$

onde e é uma constante positiva e é denominada *excentricidade* da seção cônica. Quando $e = 1$ a definição acima é a parábola.

Por mais, expressando (2.2) analiticamente, elevando ao quadrado em ambos os lados e eliminando os denominadores, obtemos

$$(1 - e^2)x^2 - 2px + y^2 + p^2 = 0 \quad (2.3)$$

Dada essa equação para recair nas cônicas já citadas basta analisar o que ocorre com (2.3) nos possíveis valores de e , ou seja, se $0 < e < 1$ a equação é equivalente à $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (caso o eixo maior esteja sobre o eixo dos x no caso em que o eixo maior está sobre o eixo dos y , basta fazer as alterações que cabem); se $e > 1$ a equação é equivalente à $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (caso o eixo real esteja sobre o eixo dos x , no caso em que o eixo real está sobre o eixo dos y , basta fazer as devidas alterações).

2.3 Cálculo Vetorial

2.3.1 Funções vetoriais de uma variável

Definição 2.3.1. Uma *função vetorial de uma variável* é uma função da forma

$$\vec{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

onde $D \subseteq \mathbb{R}$ é o domínio de definição de $\vec{r}$ e t é um parâmetro – podendo ser interpretado como o tempo ou não.

Em coordenadas cartesianas, uma função vetorial assume a seguinte forma:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

onde $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

2.3.1.1 Limite, Derivada e Integral de Funções Vetoriais de uma variável

Definição 2.3.2. O limite, a derivação e a integração vetorial são definidas componente a componente no sistema de coordenadas cartesiano, isto é

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) &= \lim_{t \rightarrow a} x(t)\vec{i} + \lim_{t \rightarrow a} y(t)\vec{j} + \lim_{t \rightarrow a} z(t)\vec{k} \\ \frac{d\vec{r}(t)}{dt} &= \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\int_a^b \vec{r}(t)dt = \int_a^b x(t)dt\vec{i} + \int_a^b y(t)dt\vec{j} + \int_a^b z(t)dt\vec{k} \quad (2.5)$$

$$\int \vec{r}dt = \int x(t)dt\vec{i} + \int y(t)dt\vec{j} + \int z(t)dt\vec{k}. \quad (2.6)$$

Agora vamos enunciar as *propriedades* da derivação de funções vetoriais de uma variável:

- a) Se $\vec{r}(t)$ é um vetor constante, então $\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{0}$;
- b) $\frac{d}{dt}[\alpha\vec{r}_1(t) + \beta\vec{r}_2(t)] = \alpha\frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} + \beta\frac{d\vec{r}_2(t)}{dt}$;
- c) Se $f(t)$ é uma função real, então $\frac{d}{dt}[f(t)\vec{r}(t)] = f'(t)\vec{r}(t) + f(t)\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$;
- d) $\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)] = \vec{r}_1(t) \cdot \frac{d\vec{r}_2(t)}{dt} + \frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} \cdot \vec{r}_2(t)$;
- e) $\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)] = \vec{r}_1(t) \times \frac{d\vec{r}_2(t)}{dt} + \frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} \times \vec{r}_2(t)$.

2.3.2 Derivada de um versor qualquer

Vamos considerar $\mathbf{u}$ uma função vetorial diferenciável do tempo e u seu comprimento. Como $u^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ (propriedade de produto interno), temos $u = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$. Então, derivando em ambos lados da igualdade, segue

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{d}{dt} (\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}) \\ &= \frac{d}{dt} [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{\frac{1}{2}}] \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{dt} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2(\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}})}{\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}} \\ &= \frac{\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}}{u} \end{aligned}$$

Concluimos que $u\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{u}}{u} \right) &= \frac{\dot{\mathbf{u}}u - \mathbf{u}\dot{u}}{u^2} \\ &= \left[\frac{\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}})}{u} \right] \frac{1}{u^2} \\ &= \frac{(\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}}) \times \mathbf{u}}{u^3} \end{aligned}$$

pois, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$ (duplo produto vetorial).

2.4 Notações

Seguem as notações que padronizaremos utilizadas ao longo do trabalho:

- $\mathbf{v}$, Vetor;
- v , norma do vetor $\mathbf{v}$;
- $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, produto vetorial entre os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$;
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, produto escalar entre os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$;
- $\dot{\mathbf{v}}, \dot{v}$, derivada de $\mathbf{v}, v$ em relação ao tempo t ;
- $\mathbf{v}', v'$, derivada de $\mathbf{v}, v$ em relação ao tempo u .

3 PROBLEMA DA FORÇA CENTRAL

O presente capítulo em questão tem como objetivos formular o problema, definir e desenvolver as constantes *momentum angular* e *energia* e, dada a *Lei da Gravitação de Newton*, estabelecer duas das *leis de Kepler*, isto é, a *lei das órbitas* e a *lei das áreas*. Desse modo, também será discutido a "geometria" do nosso objeto de estudo a fim de compreender o contexto do que será visto no capítulo seguinte.

3.1 Formulação do problema

Seja uma função $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, que assumiremos como contínua nesse intervalo, e chamaremos de *Lei de Atração*. Com finalidade de descrever o movimento de uma partícula de massa m que é atraída, para um centro O fixo, por uma força $mf(r)$ que é proporcional à massa e depende unicamente da distância r entre a partícula e o centro O , indicaremos a posição da massa pelo vetor tridimensional $\mathbf{r}$ direcionado de O e consideremos – de acordo com a Segunda Lei de Newton – o movimento da partícula descrito pela equação

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mf(r)r^{-1}\mathbf{r},$$

onde $r^{-1}\mathbf{r}$ é o vetor unitário direcionado para a posição da partícula. Se $\mathbf{v}$ denota o vetor velocidade $\dot{\mathbf{r}}$, a equação que descreve o movimento é dada pelo par:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = -f(r)r^{-1}\mathbf{r} \quad (3.1)$$

Observe que o valor de m é irrelevante para as equações de movimento.

3.1.1 Caso Especial: Lei da Gravitação de Newton

O caso especial da *Lei da Gravitação de Newton* se dá quando a lei de atração f é dada por $f(r) = \mu r^{-2}$, onde $\mu > 0$ é uma constante que depende unicamente da unidade escolhida e da fonte particular da atração. Nesse caso, as equações (3.1) se tornam

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = -\mu r^{-3}\mathbf{r}. \quad (3.2)$$

3.1.2 Segunda Lei de Kepler: Conservação do Momentum Angular

Vamos assumir que (3.1) é satisfeita para algum intervalo de tempo pelo par de funções vetoriais $r(t)$ e $v(t)$ (escreveremos simplesmente $\mathbf{r}$ e $\mathbf{v}$). Podemos concluir da segunda equação do par de (3.1) que, sabendo das propriedades da seção (2.2.1.1),

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{r} \times (-f(r)r^{-1}\mathbf{r}) \\ &= -f(r)r^{-1}(\mathbf{r} \times \mathbf{r}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

onde esse 0 é o vetor nulo. Com isso, segue que a derivada do vetor $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ é:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) &= \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} \\ &= \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \times \mathbf{v} \\ &= 0. \end{aligned}$$

pela equação anterior e por $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$.

Por isso, como o tempo t está variando num intervalo,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c} \quad (3.3)$$

onde $\mathbf{c}$ é um vetor constante. O vetor $\mathbf{c}$ é chamado de *momento do momentum* e o comprimento c é o *momentum angular* da partícula. Contudo, daqui para frente iremos ignorar esses refinamentos e vamos nos referir à $\mathbf{c}$ ou c como o momentum angular.

A equação (3.3) é conhecida como a *conservação do momentum angular*. De acordo com (3.3), segue que $\mathbf{c} \cdot \mathbf{r} = 0$ pois,

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \cdot \mathbf{r} &= (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{r} \\ &= 0 \end{aligned}$$

devido $\mathbf{c}$ ser ortogonal a $\mathbf{r}$, por definição. Com isso, se $c \neq 0$, temos que $\mathbf{r}$ é sempre perpendicular ao vetor $\mathbf{c}$ e o *movimento ocorre no plano que passa pela origem e é perpendicular a $\mathbf{c}$* .

Agora, se $c = 0$, utilizando os resultados da Seção 2.3.2, fazendo $\mathbf{u} = \mathbf{r}$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) &= \frac{(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{r}}{r^3} \\ &= \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{r}}{r^3} \\ &= \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{r}}{r^3}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

sendo $\mathbf{c} = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) &= \frac{0 \times \mathbf{r}}{r^3} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $\frac{\mathbf{r}}{r}$ é um vetor constante. E, portanto, o movimento está contido numa *reta que passa pela origem*.

Retornemos ao caso em que $c \neq 0$, isto é, ao caso em que o movimento está ocorrendo num plano.

Vamos introduzir nesse plano um sistema de coordenadas polares com $\mathbf{r} = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$ e $\mathbf{c} = (0, 0, c)$. Com isso, vamos verificar que $c = r^2 \dot{\theta}$: Como $\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$, temos pela definição de produto vetorial e de $\mathbf{c} = (0, 0, c)$ que $c = r_x v_y - r_y v_x$, com $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = (\dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta}, \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta}, 0)$, sendo $\mathbf{r}$ e θ funções de t , as quais derivamos implicitamente (conforme (2.1.1)). Logo,

$$\begin{aligned} c &= (r \cos \theta)(\dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta}) - (r \sin \theta)(\dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta}) \\ &= r \dot{r} \cos \theta \sin \theta + r^2 \cos^2 \theta \dot{\theta} - r \dot{r} \sin \theta \cos \theta + r^2 \sin^2 \theta \dot{\theta} \\ &= r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \dot{\theta} \\ &= r^2 \dot{\theta}. \end{aligned}$$

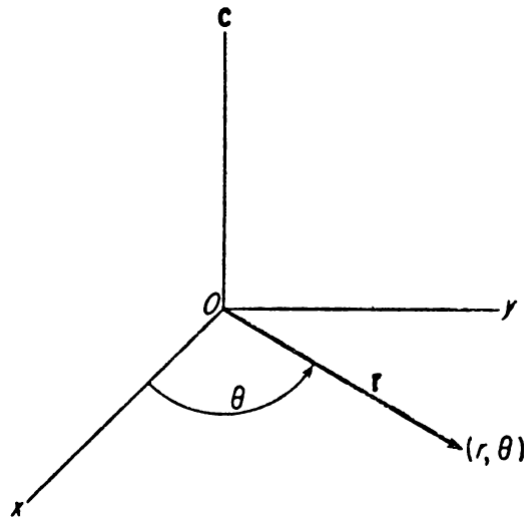


Figura 4 – Sistema de Coordenadas Polares

Dito isso, seja $A(t)$ a função que denota a *área varrida pelo vetor $\mathbf{r}$ num intervalo $[t_0, t]$* . Em coordenadas polares, temos $\Delta A = \frac{1}{2} r^2 \Delta \theta$ e obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \\ &= \frac{c}{2} \end{aligned}$$

Portanto, como c é constante, concluímos que **a partícula percorre áreas iguais em tempos iguais**. Esta é a **2ª Lei de Kepler**.

3.2 Conservação da Energia

Sabemos que $\dot{\mathbf{v}} = -f(r)r^{-1}\mathbf{r}$, então, fazendo o produto escalar com $\mathbf{v}$, temos

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} &= (-f(r)r^{-1}\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} \\ &= -f(r)r^{-1}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \quad (\text{propriedade de produto escalar}) \\ &= -f(r)r^{-1}r\dot{r} \quad (\text{vimos na seção anterior que } r\dot{r} = \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \\ &= -f(r)\frac{dr}{dt}.\end{aligned}$$

Assim, integrando com relação a t em ambos os lados, obtemos

$$\frac{1}{2}v^2 = f_1(r) + h \quad (3.5)$$

onde $f_1(r)$ é uma função cuja derivada é $-f(r)$ e h é uma constante. A função $f_1(r)$ é determinada convencionalmente da seguinte maneira:

$$f_1(r) = \int_r^a f(x)dx$$

Portanto, se $f(r)$ é da forma $f(r) = \mu r^{-p}$, como verificado em (2.1.4), temos se $p > 1$, então $a = \infty$; se $p < 1$, então $a = 0$; se $p = 1$ então $a = 1$. O caso mais importante é o de *Newton*, isto é,

$$f(r) = \mu r^{-2}, f_1(r) = \mu r^{-1}.$$

A função $mf_1(r)$ é conhecido como a *energia potencial* e é denotado pelo símbolo U . A quantidade $T = \frac{mv^2}{2}$ é chamado *energia cinética* e $h_1 = mh$ a *energia*. Multiplicando (3.5) por m , segue

$$T = U + h_1$$

Tal igualdade é conhecida como *princípio da conservação de energia*.

3.3 Primeira Lei de Kepler: Lei do Inverso do Quadrado

Vamos assumir que a partícula se move de acordo com a Lei de Gravitação de Newton, isto é,

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = -\mu r^{-3}\mathbf{r}$$

Com isso, vamos analisar outro vetor que permanece constante através do movimento, chamaremos de *eixo excêntrico* e denotaremos $\mathbf{e}$. Iniciaremos com (3.4) e multiplicaremos em ambos lados por $-\mu$,

$$\begin{aligned}(-\mu)\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) &= (-\mu)\frac{\mathbf{c} \times \mathbf{r}}{r^3} \\ &= \mathbf{c} \times (-\mu r^{-3}\mathbf{r}) \\ &= \mathbf{c} \times \dot{\mathbf{v}}\end{aligned}$$

Utilizando propriedade de anticomutativa de produto vetorial,

$$\mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{c}$$

Integrando em relação a t em ambos os lados,

$$\mu \left(\mathbf{e} + \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \mathbf{v} \times \mathbf{c} \quad (3.6)$$

pois por um lado temos

$$\begin{aligned} \int \left[\mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \right] dt &= \mu \int \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \right] dt \\ &= \mu \left(\mathbf{e} + \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (\text{pela definição de integral}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

sendo $\mathbf{e}$ a constante de integração. Por outro lado, como

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{c}}) &= \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{c} + \mathbf{v} \times \dot{\mathbf{c}} \\ &= \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{c} + \mathbf{v} \times \mathbf{0} \quad (\mathbf{c} \text{ é const.}) \\ &= \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{c} + \mathbf{0} \quad (\text{propriedade de prod. vetorial}) \\ &= \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{c} \end{aligned}$$

logo a integral a direita se verifica.

De $\mathbf{r} \cdot \mathbf{c} = 0$, segue que $\mathbf{e} \cdot \mathbf{c} = 0$ pois, da igualdade acima, temos: pelo lado direito obtemos um vetor perpendicular a $\mathbf{c}$ (devido à interpretação geométrica de um produto vetorial) e pelo lado esquerdo temos a soma do vetor $\mathbf{r}$ com o vetor $\mathbf{e}$. Desse modo, sendo $\mathbf{r}$ perpendicular a $\mathbf{c}$ é necessário que $\mathbf{e}$ também seja.

Com isso temos dois casos: se $c \neq 0$, os vetores $\mathbf{e}$ e $\mathbf{c}$ são perpendiculares e $\mathbf{e}$, portanto, está no plano do movimento; se $c = 0$ tem-se,

$$\begin{aligned} \mu \left(\mathbf{e} + \frac{\mathbf{r}}{r} \right) &= \mathbf{v} \times \mathbf{0} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

e, manipulando algebricamente, concluímos

$$\frac{\mathbf{r}}{r} = -\mathbf{e}$$

isto é, $\mathbf{e}$ está na reta do movimento. Nesse caso, o comprimento de $\mathbf{e}$ é *sempre* igual a 1, pois $\frac{\mathbf{r}}{r}$ é unitário.

Agora, devemos encontrar a interpretação do escalar e quando $c \neq 0$. Tome o produto escalar de ambos os lado de (3.7) com $\mathbf{r}$. Então,

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \cdot \left[\mu \left(\mathbf{e} + \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \right] &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{c} \\ \mu(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r} + r) &= \mathbf{r} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{c} \\ &= \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} \\ &= c^2\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{r} + r = \frac{c^2}{\mu}$$

Dado isso, temos novamente dois casos: se $e = 0$ então $r = \frac{c^2}{\mu}$, constante, pois se $e = 0$ o vetor $\mathbf{e}$ é nulo. Portanto, o movimento é *circular*. Além disso, vamos verificar que $r^2 v^2 = r^2 \dot{r}^2 + c^2$ e, com isso $v^2 = \dot{r}^2 + c^2 r^{-2}$, podemos reescrever a lei de conservação da energia como

$$r^2 \dot{r}^2 + c^2 = 2r^2[f_1(r) + h].$$

No que segue, usaremos a propriedade g) da Seção 2.2.1.1 com $\mathbf{u} = \mathbf{r}$ e $\mathbf{v}$ como definido no contexto. Substituindo, temos $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (\mathbf{r} \times \mathbf{v})^2 = r^2 v^2$. Sabemos que $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c}$ e $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, aplicando, obtemos,

$$\begin{aligned}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})^2 + \mathbf{c}^2 &= r^2 v^2 \\ r^2 \dot{r}^2 + c^2 &= r^2 v^2 \\ v^2 &= \dot{r}^2 + c^2 r^{-2}\end{aligned}$$

Como queríamos. Agora, tomando a lei de conservação da energia, temos:

$$\begin{aligned}T &= U + h_1 \\ \frac{mv^2}{2} &= mf_1(r) + mh \\ v^2 &= 2[f_1(r) + h] \\ \dot{r}^2 + c^2 r^{-2} &= 2[f_1(r) + h] \\ r^2 \dot{r}^2 + c^2 &= 2r^2[f_1(r) + h]\end{aligned}\tag{3.8}$$

Dada a verificação, temos que $r^2 \dot{r}^2 + c^2 = r^2 v^2$. Então, segue que $rv = c$ e $v = \frac{\mu}{c}$, pois $r = \frac{c^2}{\mu}$, constante, e ao derivar em relação a t obtemos $\dot{r} = 0$. Assim, $r^2 v^2 = c^2 \implies rv = c$ e substituindo r como dado obtemos a segunda parte. Ou seja, a partícula se move em

velocidade constante. Pela lei da conservação de energia,

$$\begin{aligned}
 \frac{v^2}{2} &= \frac{\mu}{r} + h \\
 h &= \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \\
 &= \frac{rv^2 - 2\mu}{2r} \\
 &= \frac{c^2 \frac{\mu}{c} - 2\mu}{2 \frac{c^2}{\mu}} \\
 &= \frac{(-\mu)\mu}{2c^2} \\
 &= \frac{-\mu^2}{2c^2}
 \end{aligned}$$

um número negativo. E, observe que,

$$\begin{aligned}
 T &= U + h_1 \\
 T &= U + m \left(\frac{-\mu^2}{2c^2} \right) \\
 T &= U - m \frac{v^2}{2} \\
 T &= U - T \\
 2T &= U,
 \end{aligned}$$

o que finaliza a análise sobre o caso.

Por outro lado, suponhamos que $e \neq 0$. No plano de movimento, como na 4, introduziremos o vetor $\mathbf{e}$ e obtemos a 5

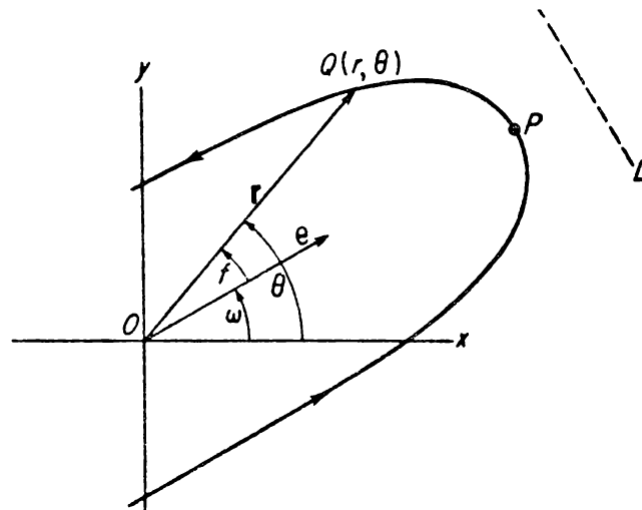


Figura 5 – Plano do movimento considerando $\mathbf{e}$

onde ω é o ângulo do eixo x para $\mathbf{e}$. Se (r, θ) representa a posição Q da partícula, o ângulo $\theta - \omega$ será denotado por f . A mesma posição Q pode ser representada como (r, f) se $\mathbf{e}$ é usado como o eixo de coordenadas. Assim, segue que $\mathbf{e} \cdot \mathbf{r} = er \cos f$ e sabemos que

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{r} + r = \frac{c^2}{\mu} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} er \cos f + r &= \frac{c^2}{\mu} \\ r(e \cos f + 1) &= \frac{c^2}{\mu} \\ r &= \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + e \cos f} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Considere na figura acima a reta pontilhada L , que está a uma distância $\frac{c^2}{\mu e}$ de O , perpendicular a $\mathbf{e}$ e do lado de O o qual $\mathbf{e}$ está direcionado. A equação (3.10) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} r &= \frac{c^2}{\mu} - er \cos f \\ &= e \left(\frac{c^2}{e\mu} - r \cos f \right) \end{aligned}$$

essa maneira de reescrever nos permite afirmar que a distância de Q para O é e vezes sua distância para L . Consequentemente, **a partícula se move em uma seção cônica de excentricidade e com um foco em O** (como visto em (2.2)). Essa é a **primeira lei de Kepler**.

Como (3.10) mostra, o valor de r é menor quando $f = 0$, desde que $e > 0$. Portanto, o vetor $\mathbf{e}$ tem comprimento igual a excentricidade da cônica e aponta para a posição P na qual a partícula está mais próxima do foco. Chamaremos o ponto P de *pericentro*, o ângulo f de *anomalia verdadeira*. Ademais, o eixo x é fixado pela convenção. Nesse caso, ω é o *argumento do pericentro*.

Retomando a geometria, a palavra *órbita* deve ser usada para descrever o conjunto de posições que a partícula ocupa sem nenhuma indicação de tempo particular. Segue então, da teoria de cônicas que se:

- i) $0 < e < 1$, a órbita é uma elipse;
- ii) $e = 1$, a órbita é uma parábola;
- iii) $e > 1$, a órbita é um ramo de uma hipérbole, convexa ao foco.

4 POSIÇÃO NA ÓRBITA

Neste capítulo vamos nos concentrar em classificar as diferentes órbitas, as quais já é de conhecimento serem seções cônicas, compreender o modo como as constantes, estudadas no capítulo anterior, interferem nessa classificação e estudar as técnicas utilizadas a fim de determinar a posição de uma partícula nas diferentes órbitas em um dado tempo t .

4.1 Relação entre as constantes

Considere as equações (3.2). Vamos assumir que f tem derivada contínua. Assim, cada uma das duas equações da lugar a três equações escalares, de modo que o par constitui um *sistema de ordem seis* da forma

$$\dot{z}_i = f_i(z_1, \dots, z_n), i = 1, \dots, n.$$

Observação 4.1.1. Seja $f_1(z_1, \dots, z_n), i = 1, \dots, n$. $f_1(z_1, \dots, z_n)$ representa n funções com 1° derivada parcial contínua em alguma região de um espaço n -dimensional, e seja $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ um ponto particular dessa região.

Então, o sistema de equações diferenciais $\dot{z}_i = f_i(z_1, \dots, z_n), i = 1, \dots, n$ terá uma única solução de $z_i(t)$ definida em uma vizinhança de $t = 0$ tal que $z_i(0) = \zeta_i, i = 1, \dots, n$.

essa observação refere-se ao Teorema de Existência e Unicidade exposto em (2.1.5). Especificamente, seja x, y, z as componentes de $\mathbf{r}$ no *sistema de coordenadas retangulares* e α, β, γ as componentes de $\mathbf{v}$. Segue que,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha \\ \dot{y} &= \beta \\ \dot{z} &= \gamma \\ \dot{\alpha} &= -f(r)r^{-1}x \\ \dot{\beta} &= -f(r)r^{-1}y \\ \dot{\gamma} &= -f(r)r^{-1}z,\end{aligned}$$

onde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Segue que existe uma única solução satisfazendo $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$ em $t = 0$, dados $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$. Na forma de vetor, isso nos diz que o sistema (3.2) tem uma única solução $(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t))$ assumindo os valores $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$ prescritos no tempo $t = 0$. Assim, os próximos passos serão baseados na existência e unicidade dessa solução, configurando uma aplicação palpável do Teorema de Existência e Unicidade.

No caso especial $f(r) = \mu r^{-2}$, nos descobrimos ao longo do texto que cada quantidade $\mathbf{c}, \mathbf{e}, \mathbf{h}$ permanece constante durante o movimento e é, portanto, determinada pelo

seu valor em $t = 0$:

$$\begin{aligned}\mathbf{c} &= \mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{e} &= \mu^{-1}(\mathbf{v}_0 \times \mathbf{c}) - r_0^{-1}\mathbf{r}_0 \\ h &= \frac{1}{2}v_0^2 - \mu r_0^{-1}.\end{aligned}$$

De $\mathbf{c}$, $\mathbf{e}$ e h constituem *sete* grandezas escalares. Segue então que existem relações entre essas grandezas.

4.1.1 Relação entre $\mathbf{c}$ e $\mathbf{e}$

Já vimos anteriormente que $\mathbf{c} \cdot \mathbf{e} = 0$ e, portanto, no máximo seis das sete quantidades escalares são independentes. Além disso, apresentaremos outra relação entre as sete que reduz para *cinco* o número de quantidades escalares independentes. Obteremos essa relação calculando a norma ao quadrado da igualdade (3.6), ou seja

$$\begin{aligned}\mu^2 \left(\mathbf{e} + \frac{\mathbf{r}}{r} \right)^2 &= (\mathbf{v} \times \mathbf{c})^2 \\ \mu^2 \left(e^2 + 2\mathbf{e} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{r^2}{r^2} \right) &= v^2 c^2 \quad \left(\mathbf{v} \times \mathbf{c} = vc \sin \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1 \right) \\ \mu^2 \left(e^2 + 2\mathbf{e} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} + 1 \right) &= v^2 c^2\end{aligned}\tag{4.1}$$

Ademais, segue de (3.5) e (3.9), aplicando os ajustes necessários

$$\begin{aligned}\mathbf{e} \cdot \mathbf{r} &= \frac{c^2}{\mu} - r \\ v^2 &= 2\frac{\mu}{r} + 2h.\end{aligned}$$

com isso, podemos substituir em (4.1),

$$\begin{aligned}\mu^2 \left(e^2 + \frac{2}{r} \left(\frac{c^2}{\mu} - r \right) + 1 \right) &= \left(2\frac{\mu}{r} + 2h \right) c^2 \\ \mu^2 \left(e^2 + \frac{2}{r} \frac{c^2}{\mu} - \frac{2}{r} r + 1 \right) &= 2\frac{\mu}{r} c^2 + 2hc^2 \quad \left(\text{distribuindo } \frac{2}{r}, c^2 \right) \\ \mu^2 e^2 + \frac{2}{r} \frac{c^2}{\mu} \mu^2 - 2\mu^2 + \mu^2 &= 2\frac{\mu}{r} c^2 + 2hc^2 \quad \left(\text{distribuindo } \mu^2 \right) \\ \mu^2 e^2 + \frac{2}{r} c^2 \mu - \mu^2 &= 2\frac{\mu}{r} c^2 + 2hc^2 \quad \left(\text{cancelando } \frac{2}{r} c^2 \mu \quad \text{e colocando em evidência } \mu^2 \right) \\ \mu^2 (e^2 - 1) &= 2hc^2.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Observe que essa igualdade entra em concordância com o fato de se $c = 0$, então $e = 1$ (movimento retilíneo) e, se $e = 0$, então $h = -\frac{\mu^2}{2c}$ (movimento circular). Além disso, por consequência, se $c \neq 0$, então $e < 1$, $e = 1$ ou $e > 1$, de acordo com a energia h sendo

negativa, zero ou positiva, respectivamente. Se $h \neq 0$ e $c \neq 0$ e a é o semi eixo maior da cônica, então

$$a = \frac{1}{2}\mu|h|^{-1}. \quad (4.3)$$

Vamos verificar a igualdade (4.3) abaixo:

Para tanto, vamos optar por mostrar outra igualdade que recai na que queremos.

Seja $0 < e < 1$ ou $e > 1$, o semi-eixo maior da correspondente cônica tem medida a dada pela fórmula

$$\mu a|e^2 - 1| = c^2. \quad (4.4)$$

Com isso, vamos separar com base nas possibilidades para e o que resulta em dois casos:

1. (Elipse, $0 < e < 1$) Considerando que a cônica formada é uma elipse. Temos, então, que definir os elementos necessários para a demonstração, isto é,

Seja Q o centro da elipse e O um foco e origem do plano. Sabemos da teoria das cônicas que $d(Q, O) = d$ (metade da distância focal), $d(Q, P) = a$ (semi-eixo maior) e $e = \frac{d}{a}$ (excêntricidade). Ademais, sabemos que

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + e \cos f}$$

sendo P o pericentro, então $f = 0$ e $\cos f = 1$. Com isso,

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + e}$$

Por outro lado, $r = OP = a - d$. Assim,

$$a - d = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + e}$$

sendo $e = \frac{d}{a}$, temos $d = ea$. Daí, substituindo

$$\begin{aligned} a - ea &= \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + e} \\ a(1 - e) &= \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + e} \\ a &= \frac{c^2}{\mu(1 - e^2)} \quad (\text{isolando } c^2) \\ c^2 &= \mu a(1 - e^2). \end{aligned}$$

2. (Hiperbole, $e > 1$) De modo análogo, porém no caso da hiperbole $r = d - a = ae - a = a(e - 1)$, temos

$$\begin{aligned} a(e - 1) &= \frac{c^2}{\mu(1 + e)} \\ c^2 &= \mu a(e - 1)(1 + e) \quad (\text{isolando } c^2) \\ &= \mu a[-(1 - e^2)]. \end{aligned}$$

Portanto, do caso elíptico e do caso hiperbólico concluímos que $\mu a|e^2 - 1| = c^2$.

Da verificação anterior e de (3.5) com $f_1(r) = \frac{\mu}{r}$, nos obtemos as seguintes fórmulas:

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right), \quad \text{se } h > 0; \quad (4.5)$$

$$v^2 = \frac{2\mu}{r}, \quad \text{se } h = 0; \quad (4.6)$$

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad \text{se } h < 0. \quad (4.7)$$

Convencionamos, por fim, se $c = 0$ que as fórmulas acima permanecem válidas desde que adotemos (4.4) como a definição de a .

Doravante, queremos localizar uma partícula em uma órbita em um tempo t_1 preescrito. Para tanto, vamos adotar o seguinte procedimento:

Devemos realizar uma mudança de variável do tempo t para um tempo "fictício" que denotaremos de u , sendo $t = t(u)$. Se essa mudança for feita adequadamente, é possível localizar a partícula para o valor u_1 de u dito inicialmente. Assim, para localizar a partícula no tempo t_1 real, é necessário resolver a equação $t_1 = t(u_1)$ para o correspondente valor u_1 .

Observação 4.1.2. A variável u é chamada pelos astrônomos de "*anomalia excêntrica*".

Dito isso, vamos começar com o resultado (3.8), isto é, sabemos que a lei de conservação da energia pode ser escrita como

$$r^2 \dot{r}^2 + c^2 = 2r^2[f_1(r) + h],$$

e vamos utilizar o caso de atração newtoniana $f_1(r) = \mu r^{-1}$. Então, fazendo as devidas substituições e simplificações, temos

$$r^2 \dot{r}^2 + c^2 = 2[\mu r + hr^2] \quad (4.8)$$

Suponhamos que u é escolhido de tal forma que $r\dot{u}$ é um constante k , logo

$$r\dot{u} = k \implies \dot{u} = \frac{k}{r} \implies \frac{du}{dt} = \frac{k}{r} \implies u = k \int_T^t \frac{d\tau}{r(\tau)}$$

Com isso, seja

$$u = k \int_T^t \frac{d\tau}{r(\tau)}, \quad (4.9)$$

onde k e T vão ser escolhidos futuramente. É notável que a mudança de variável envolve a ainda desconhecida função $r(t)$ mas isso vai cuidar de si mesmo. De $r = r(t)$ e $t = t(u)$ segue que

$$\dot{r} = \frac{dr}{du} \dot{u} = \frac{dr}{du} k r^{-1}.$$

Então, a equação (4.8) se torna

$$\begin{aligned}(rr'kr^{-1})^2 + c^2 &= 2[\mu r + hr^2] \\ (kr')^2 + c^2 &= 2[\mu r + hr^2],\end{aligned}\tag{4.10}$$

onde $(\cdot)$ denota a derivada em relação a u .

4.2 Caso 1: $h = 0$

Nessa seção, temos $h = 0$ e escolheremos $k^2 = \mu$, a equação (4.10) se torna

$$\begin{aligned}\mu(r')^2 + c^2 &= 2\mu r \\ (r')^2 + \frac{c^2}{\mu} &= 2r.\end{aligned}\tag{4.11}$$

Derivando em ambos os lados em relação a u , temos

$$\begin{aligned}\left[(r')^2 + \frac{c^2}{\mu}\right]' &= (2r)' \\ \implies 2r'r'' &= 2r' \\ \implies r'r'' &= r' .\end{aligned}$$

Portanto, de r' não poder "desaparecer" sobre um intervalo (ou teríamos que r é uma constante), isso segue que $r'' = 1$. Além disso, r é uma função quadrática em u que escreveremos na *forma de Vertex*

$$r = \frac{1}{2}(u - u_0)^2 + A,$$

lembrando que $r = r(u)$ e A é uma constante. Agora, substituindo r , na forma acima, em (4.11), temos por um lado

$$\begin{aligned}2r &= 2\left[\frac{1}{2}(u - u_0)^2 + A\right] \\ &= (u - u_0)^2 + 2A \\ (u - u_0)^2 + 2A &= (r')^2 + \frac{c^2}{\mu}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}r' &= \left[\frac{1}{2}(u - u_0)^2 + A\right]' \\ &= \frac{1}{2}(u - u_0) + 0 \\ &= u - u_0.\end{aligned}$$

Por fim,

$$(u - u_0)^2 + 2A = (u - u_0)^2 + \frac{c^2}{\mu}$$

o que resulta em $A = \frac{c^2}{2\mu}$. Além disso, uma vez que $u = k \int_T^t \frac{d\tau}{r(\tau)}$ não é especificado dentro de uma constante arbitrária, podemos escolher $u_0 = 0$. Então,

$$r = \frac{1}{2} \left(u^2 + \frac{c^2}{\mu} \right)$$

Dito isso, retornaremos a

$$u = k \int_T^t \frac{d\tau}{r(\tau)} \implies \frac{du}{dt} = \frac{k}{r} \implies r du = k dt.$$

Além disso, $u = 0$ quando $t = T$. Portanto,

$$\begin{aligned} k \int_T^t dt &= \int_0^u r du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^u \left(u^2 + \frac{c^2}{\mu} \right) du. \end{aligned}$$

sendo $k^2 = \mu$, segue que $k = \sqrt{\mu}$. Daí,

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu}(t - T) &= \frac{1}{2} \left[\frac{u^3}{3} + \frac{c^2 u}{\mu} \right] \\ &= \frac{1}{6} u^3 + \frac{c^2 u}{2\mu}. \end{aligned}$$

Em resumo, obtemos o seguinte par de equações:

$$\sqrt{\mu}(t - T) = \frac{1}{6} u^3 + \frac{c^2 u}{2\mu} \quad (4.12)$$

$$r = \frac{1}{2} \left(u^2 + \frac{c^2}{\mu} \right). \quad (4.13)$$

Observemos que, pela primeira equação do par, t é uma função estritamente crescente de u pois a derivada $t' > 0$ como segue isolando t em (4.12) e derivando:

$$\begin{aligned} t - T &= \frac{u^3}{6\sqrt{\mu}} + \frac{c^2 u}{2\mu\sqrt{\mu}} \\ t &= \frac{u^3}{6\sqrt{\mu}} + \frac{c^2 u}{2\mu\sqrt{\mu}} + T \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$t' = \frac{3u^2}{6\sqrt{\mu}} + \frac{c^2}{2\mu\sqrt{\mu}}. \quad (4.15)$$

isso significa que a equação pode ser resolvida exclusivamente para u em termos de t . Vamos chamar essa solução de $u(t)$. Daí, segue que

$$r = \frac{1}{2} \left[(u(t))^2 + \frac{c^2}{\mu} \right]$$

e, então, podemos verificar facilmente que r satisfaz, com $h = 0$,

$$\begin{aligned} r^2 \dot{r}^2 + c^2 &= 2[\mu r + h r^2] \\ (ru\dot{u})^2 + c^2 &= 2\mu r \quad (\text{pois } h = 0) \\ (ku)^2 + c^2 &= 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(u^2 + \frac{c^2}{\mu} \right) \right] \quad (k = r\dot{u} \text{ e a subst. } r) \\ \mu u^2 + c^2 &= \mu \left(u^2 + \frac{c^2}{\mu} \right) \quad (k^2 = \mu) \end{aligned}$$

aplicando as devidas simplificações verificamos o que queríamos.

Para a interpretação de T , vamos separar em dois casos $c \neq 0$ e $c = 0$:

Se $c \neq 0$ e $h = 0$, então $e = 1$ e obtemos uma órbita parabólica com (3.10) - lembrando que $e = 1$. O menor valor de r é $\frac{c^2}{2\mu}$ o qual obtemos quando $f = 0$. Mas isso é o valor de r quando $u = 0$ ou $t = T$. Portanto, T é o tempo o qual a partícula é mais próxima à origem, chamamos esse tempo de *passagem do pericentro*. Isso é possível ocorrer ou antes ou depois do tempo inicial $t = 0$, mas, desde que $f > 0$, is pode ocorrer apenas uma vez.

Se $c = 0$, o par de equação se tornam

$$6\sqrt{\mu}(t - T) = u^3; \quad r = \frac{1}{2}u^2. \quad (4.16)$$

Assim, o tempo $t = T$ corresponde a colisão com a origem. Se $T > 0$, então isso ocorre depois do tempo inicial; o movimento depois do tempo T não é mais governado pelas equações originais e apenas podemos falar sobre o movimento no intervalo de tempo $-\infty < t < T$. Por fim, se $T < 0$, então a partícula foi "emitida" da origem O no tempo $t = T$ e apenas podemos falar do movimento no intervalo $T < t < \infty$.

Para localizar a posição da partícula no tempo t , tome $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{v}_0$ e procederemos da seguinte maneira:

Pela equação (4.13), $\dot{r} = u\dot{u} = ukr^{-1}$. Com isso, $r\dot{r} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) = \sqrt{\mu}u$. Então o valor de u_0 em $t = 0$ é dado por

$$\sqrt{\mu}u = (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0)$$

Agora, seja $t = 0$, $u = u_0$ em (4.12), isso determinará T .

Daí, para achar r para um dado valor de t trabalhamos ao contrário. Isto é, resolveremos primeiro (4.12) para $u = u(t)$ e substituímos em (4.13).

Por fim, temos agora dois casos novamente. Se $c = 0$, então esse conhecimento de r determina a posição completamente desde que a reta $\mathbf{e}$ contenha o movimento conhecido. Por outro lado, se $c \neq 0$, segue de (3.10), com $e = 1$, que existem dois valores possível de f para cada valor de r (pois $\cos$ é uma função par). Devemos tomar f positivo se $t > T$ e

f negativo se $t < T$, equivalentemente, $f > 0$ se $u > 0$ e $f < 0$ se $u < 0$ (consequência de (4.14) e (4.15)).

As coordenadas (r, f) então localizam a partícula *completamente*.

4.3 Caso 2: $h \neq 0$

Seja $h \neq 0$. Temos as seguintes possibilidades para o movimento: ou $c = 0$ onde o movimento é linear ou $c \neq 0$ e, nesse caso ao se tratar do movimento em um plano, existem mais duas possibilidades

a) $h > 0$ hiperbólico;

b) $h < 0$ elíptico.

Com isso, vamos começar da equação

$$k^2(r')^2 + c^2 = 2(\mu r + hr^2) \quad (4.17)$$

onde $r' = \frac{dr}{du}$ e $u = k \int_T^t \frac{d\tau}{r(\tau)}$. Vamos escolher $k^2 = 2|h|$ ou, sabendo que $a = \frac{1}{2}\mu|h|^{-1}$, temos

$$a = \frac{\mu}{2|h|} \implies 2|h| = \frac{\mu}{a} \implies k^2 = \frac{\mu}{a}.$$

Retomando (4.17) e dividindo por k^2 , obtemos

$$\begin{aligned} (r')^2 + \frac{c^2}{k^2} &= \frac{2\mu r}{k^2} + \frac{2hr^2}{k^2} \\ (r')^2 + \frac{ac^2}{\mu} &= 2ar + \sigma(h)r^2, \quad \text{onde } \sigma(h) = \frac{2h}{k^2} \text{ e } k \text{ const.} \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde $\sigma(h) = 1$ se $h > 0$, $\sigma(h) = -1$ se $h < 0$, pois $k^2 = 2|h|$. Daí,

$$\sigma(h) = \frac{2h}{2|h|} \begin{cases} \sigma(h) = \frac{2h}{2h} = 1 \implies h > 0; \\ \sigma(h) = \frac{2h}{2(-h)} = -1 \implies h < 0. \end{cases}$$

Com isso, somando - em (4.18) - $\sigma(h)a^2$ em ambos os lados e $\frac{c^2}{\mu} = a(e^2 - 1)\sigma(h)$, pois (4.4) com $\sigma(h)$ determinando o sinal do módulo. Obtemos,

$$\begin{aligned} (r')^2 + \frac{ac^2}{\mu} &= 2ar + \sigma(h)r^2 \\ (r')^2 + \frac{ac^2}{\mu} + \sigma(h)a^2 &= 2ar + \sigma(h)r^2 + \sigma(h)a^2 \\ (r')^2 + a[a(e^2 - 1)\sigma(h)] + \sigma(h)a^2 &= \sigma(h) \left[\frac{2ar}{\sigma(h)} + r^2 + a^2 \right] \\ (r')^2 + a^2e^2\sigma(h) - a^2\sigma(h) + a^2\sigma(h) &= \sigma(h) \left[\frac{2ar\sigma^2(h)}{\sigma(h)} + \sigma^2(h)r^2 + a^2 \right] \quad (\sigma^2(h) = 1) \\ (r')^2 + a^2e^2\sigma(h) &= \sigma(h) [2ar\sigma(h) + \sigma^2(h)r^2 + a^2] \\ (r')^2 + a^2e^2\sigma(h) &= \sigma(h)[a + \sigma(h)r]^2. \end{aligned}$$

Agora, vamos definir uma nova função $\rho(u)$ por

$$ea\rho = a + \sigma(h)r \quad (4.19)$$

isso converte a equação precedente em

$$(\rho')^2 - \sigma(h)\rho^2 = -\sigma(h)$$

pois substituindo temos

$$(r')^2 + a^2 e^2 \sigma(h) = \sigma(h)[ea\rho]^2 \implies (r')^2 + a^2 e^2 \sigma(h) = \sigma(h)e^2 a^2 \rho^2.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{a + \sigma(h)r}{ea} \\ \rho' &= \frac{r'ea - (a + \sigma(h)r)(ea)'}{(ea)^2} \quad (\text{derivando em função de } u) \\ r' &= \rho'ea \quad (ea \text{ é const.}) \end{aligned}$$

Daí, basta substituir e por $(ea)^2$ em evidência da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (\rho'ea)^2 + a^2 e^2 \sigma(h) &= \sigma(h)[ea\rho]^2 \\ (\rho')^2 + \sigma(h) &= \sigma(h)\rho^2 \quad (\text{cancelando } e^2 a^2) \\ (\rho')^2 - \sigma(h)\rho^2 &= \sigma(h). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Agora, seja (4.20), é fácil verificar que - se descartarmos as soluções *singulares* $\rho = \pm 1$ - a equação é satisfeita por $\rho = \cosh(u + k_1)$ se $h > 0$ e $\rho = \cos(u + k_2)$ se $h < 0$. Para esta verificação basta substituir da seguinte maneira:

1. $h > 0$, $\rho = \cosh(u + k_1)$, $\rho' = \sinh(u + k_1)$ e $\sigma(h) = 1$:

$$\begin{aligned} [\sinh(u + k_1)]^2 - 1[\cosh(u + k_1)]^2 &= -1 \\ \sinh^2(u + k_1) - \cosh^2(u + k_1) &= -1. \end{aligned}$$

o que é verdade pois, pela relação fundamental da trigonometria hiperbólica, temos $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

2. $h < 0$, $\rho = \cos(u + k_2)$, $\rho' = -\sin(u + k_2)$ e $\sigma(h) = -1$:

$$\begin{aligned} [-\sin(u + k_2)]^2 - (-1)[\cos(u + k_2)]^2 &= -(-1) \\ \sin^2(u + k_2) + \cos^2(u + k_2) &= 1. \end{aligned}$$

o que é verdade pois, pela relação fundamental da trigonometria, temos $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

De acordo com (4.9), onde a escolha de T ainda não é especificada, somos livres para escolher k_1 e k_2 . E, iremos escolher da seguinte maneira, $k_1 = k_2 = 0$. Então, por (4.19), nos obtemos,

$$r = \begin{cases} a(e \cosh u - 1), & \text{se } h > 0 \\ a(1 - e \cos u), & \text{se } h < 0. \end{cases} \quad (4.21)$$

De acordo, também, com (4.9), temos $k dt = r du$. De $u = 0$ quando $t = T$, nos conseguimos integrar em ambos os lados para obter

$$k(t - T) = \int_0^u r du.$$

Substituindo os casos de r , obtemos - por fim - os seguintes pares paramétricos:

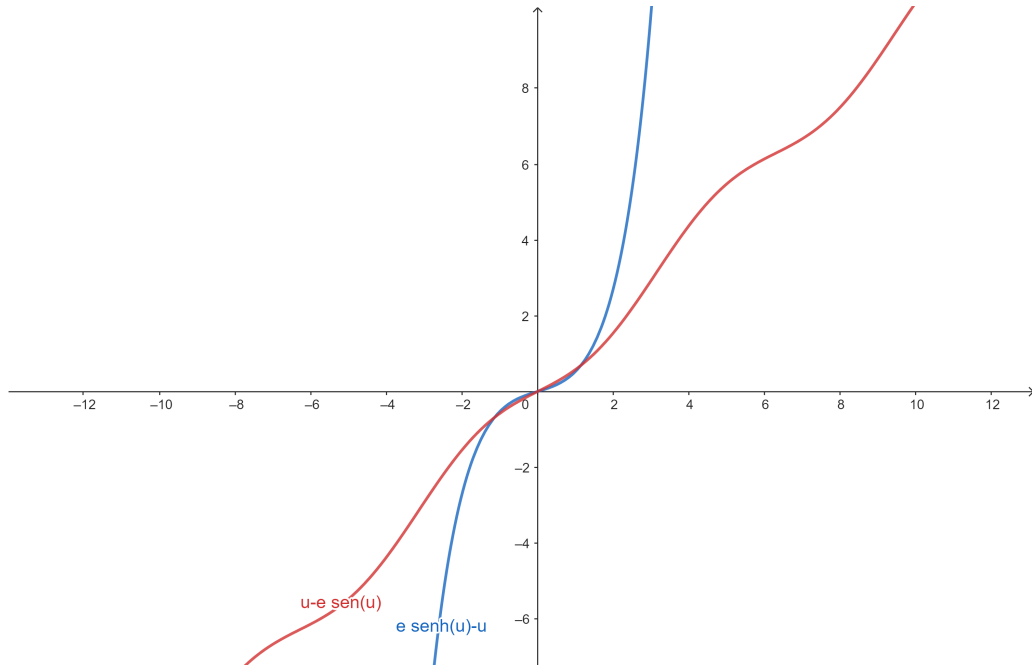


Figura 6 – Gráfico das funções de u ao lado direito das igualdades $n(t - T)$ em 1. e 2.

1. $h > 0$, $r = a(e \cosh u - 1)$ e $n(t - T) = e \sinh u - u$;
2. $h < 0$, $r = a(1 - e \cos u)$ e $n(t - T) = u - e \sin u$.

onde o coeficiente $n = \frac{k}{a}$ ou

$$n = \mu^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{3}{2}}$$

pois $k^2 = \frac{\mu}{a}$. Chamaremos n de "*movimento médio*". Observe que no caso do movimento elíptico $n = \frac{2\pi}{p}$, onde p é o período, então n é simplesmente a frequência. Para ratificar isso, basta verificar a **Terceira Lei de Kepler**, ou seja, vamos admitir que a área de uma elipse é $\pi a^2(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}$ e, seja $c \neq 0$, sabemos que a partícula varre a área numa taxa

de $\frac{c}{2}$. Combinando esses fatos, vamos verificar que, se $0 < e < 1$, o período p da partícula, isto é, o tempo que ela leva para varrer a área uma vez, é dada pela equação

$$p = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \right) a^{\frac{3}{2}}$$

A fim de detalhar e ratificar, sabemos que $\frac{dA}{dt} = \frac{c}{2} \implies dA = \frac{c}{2} dt$. Integrando em ambos os lados, temos

$$\begin{aligned} \int_0^A dA &= \frac{c}{2} \int_0^p dt \\ \pi a^2 (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} &= \frac{c}{2} p \\ p &= \frac{2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{c} \\ p^2 &= \frac{4\pi^2 a^4 (1 - e^2)}{c^2} \\ &= \frac{4\pi^2 a^4 (1 - e^2)}{\mu a |e^2 - 1|} \quad (\text{sabemos de (4.4)}) \\ &= \frac{4\pi^2 a^3 (1 - e^2)}{\mu (1 - e^2)} \quad (\text{segue do caso elíptico}) \\ \implies p &= \left(\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \right) a^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Como queríamos.

Por fim, observemos que se $u = 0$, então $t = T$ e $r = a|e^2 - 1|$. Segue da equação da órbita,

$$r = \frac{a|e^2 - 1|}{1 + e \cos f}, \quad (4.22)$$

que se $c \neq 0$, T é o tempo de passagem no pericentro. Por outro lado, se $c = 0$, então $e = 1$ e $r = 0$; logo, T é o tempo de colisão ou emissão da partícula da origem.

Desse ponto, iremos separar os casos $h > 0$ e $h < 0$.

4.3.1 Caso 2.1: $h > 0$

Nesse caso, lidaremos com um sistema de energia positiva, o que recai sobre uma órbita hiperbólica. Do que foi visto anteriormente, temos o seguinte par paramétrico:

$$r = a(e \cosh u - 1) \quad (4.23)$$

$$n(t - T) = e \sinh u - u \quad (4.24)$$

Nosso objetivo agora é determinar T para $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{v}_0$. Para isso,

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} &= r\dot{r} \\ &= rr'\dot{u} \\ &= rr'kr^{-1} \\ &= kr' = \sqrt{\mu a} e \sinh u,\end{aligned}$$

pois $k^2 = \frac{\mu}{a}$ e $r' = ae \sinh u$.

Daí, vemos que o valor u_0 e u em $t = 0$ é dado por

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) = \sqrt{\mu a} e \sinh u_0$$

Tomando $t = 0$ em (4.24)

$$-nT = e \sinh u_0 - u_0.$$

Se $c = 0$, T corresponde à colisão ou emissão. Por isso, de (4.24) é válido somente de $t < T$ no caso de colisão e $t > T$ em caso de emissão.

A fim de determinar a localização num tempo t , precisamos resolver (4.24) em u e, então, substituir em $r = a(e \cosh u - 1)$ para obter o correspondente valor de r . Se $c = 0$, o movimento é linear (pois $r = \frac{c^2}{1+e \cos f} = 0$) e se $c \neq 0$ existem dois valores possíveis de f que satisfazem (4.22). Devemos escolher $f > 0$ se $t > T$ e $f < 0$ se $t < T$.

A quantidade $l = n(t - T)$ é conhecida como *anomia média*. Se t é dado, l é determinado e o problema principal no cálculo anterior é a solução de $l = e \sinh u - u$. Falta, então, uma solução para a função $u = u(l)$ em alguma forma reconhecida e o problema a partir disso é resolvido de modo numérico pelo *Método de Newton* mas neste trabalho não iremos entrar nesse ponto.

4.3.2 Caso 2.2: $h < 0$

Seja $h < 0$. Segue, então, as seguintes equações paramétricas:

$$r = a(1 - e \cos u) \tag{4.25}$$

$$l = u - e \sin u \tag{4.26}$$

onde l é a anomia média $n(t - T)$.

A quantidade u tem um significado geométrico importante se $c \neq 0$. De fato, na maioria dos tratamentos do assunto, u é introduzido mais pela sua interpretação geométrica que analiticamente. Para descrever a geometria, consideremos a elipse da (7) que corresponde à órbita. O centro de atração é O , P é o pericentro, e C é o centro da

elipse. A seta indica a direção do movimento. Seja Q a posição da partícula quando a verdadeira anomalia é f . Projetando Q ao ponto S da circunferência para qual SQ é perpendicular a CP . Então o ângulo PCS é u .

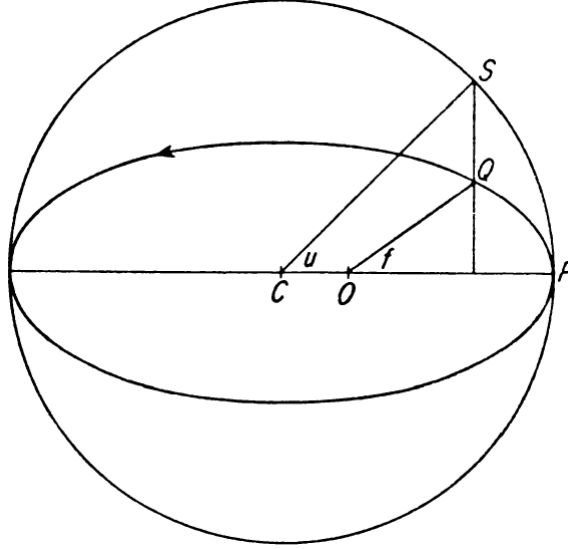


Figura 7 – u é o ângulo PCS

A afirmação sobre o ângulo $\hat{PCS} = u$ segue de (4.25) da seguinte maneira:

Chamaremos a princípio o ângulo PCS de α . Seja Q_s a interseção de SQ com CP . Observe, dito isso, que $Q_sO = CQ_s - CO$, então:

$$\begin{aligned} Q_sO &= CQ_s - CO \\ &= a \cos \alpha - d \\ &= a \cos \alpha - ae. \end{aligned} \tag{4.27}$$

onde $d = ea$ é a distância focal (OC). Por outro lado,

$$Q_sO = r \cos f \tag{4.28}$$

Igualando (4.27) e (4.28), temos

$$\begin{aligned} a \cos \alpha - ae &= r \cos f \\ a(\cos \alpha - e) &= r \cos f \\ r &= \frac{a(\cos \alpha - e)}{\cos f} \\ \cos f &= \frac{a(\cos \alpha - e)}{r}. \end{aligned}$$

Sabemos, também que $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f}$. Daí,

$$\begin{aligned}
r(1 + e \cos f) &= a(1 - e^2) \\
r \left[1 + e \left(\frac{a(\cos \alpha - e)}{r} \right) \right] &= a(1 - e^2) \\
r \left[1 + e \left(\frac{a \cos \alpha}{r} - \frac{ea}{r} \right) \right] &= a(1 - e^2) \\
r \left(1 + \frac{ea \cos \alpha}{r} - \frac{e^2 a}{r} \right) &= a(1 - e^2) \\
r + ea \cos \alpha - e^2 a &= a - e^2 a \\
r &= a - ea \cos \alpha \\
&= a(1 - e \cos \alpha).
\end{aligned}$$

Como (4.25), então $u = \alpha$, a menos de múltiplos de 2π .

Observe que como Q move-se ao redor da elipse, como indicado pela seta, u e f muda 2π toda vez Q passa através do pericentro. Como no caso anterior, devemos determinar T . Do fato da partícula passar por P periodicamente, T não é unicamente determinado por $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$. Contudo, devemos concordar em escolher da seguinte maneira, se $c \neq 0$:

Se $t = 0$ e $f_0 > 0$, isto é, se a partícula está sobre a metade superior da elipse, então T é o primeiro tempo antes $t = 0$ que a partícula passou por P . Por outro lado, se $f_0 < 0$, então T é o primeiro tempo depois de $t = 0$ que a partícula vai passar através do pericentro.

Analiticamente o cálculo segue,

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = r\dot{r} = rr'\dot{u} = rr'kr^{-1} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}r' = \sqrt{\mu a}e \sin u. \quad (4.29)$$

Disso segue que u_0 deve satisfazer,

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0 = \sqrt{\mu a}e \sin u_0.$$

Ademais, no intervalo $-\pi < u \leq \pi$ existe, no geral, exatamente dois valores de u_0 que satisfaz $r_0 = a(1 - e \cos u_0)$, sendo um o negativo do outro. Mas apenas um pode satisfazer a equação anterior. Basta então escolher esse valor para substituir em $-nT = u_0 - e \sin u_0$.

Além disso, se $c = 0$, usaremos o mesmo argumento para determinar o valor de T , mas a interpretação geométrica é alterada. De $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0 = r\dot{r}_0$, a escolha faz $T > 0$ se $\dot{r}_0 < 0$ e $T < 0$ se $\dot{r}_0 > 0$.

Daqui em diante, o procedimento é o mesmo do caso anterior onde recorreremos à métodos numéricos os quais não entraremos em detalhes.

5 CONCLUSÃO

À luz do que foi exposto ao longo desta monografia, vimos inicialmente no capítulo preliminar as ferramentas matemáticas que foram utilizadas no trabalho, sendo estas, tópicos de cálculo (de funções reais a valores reais e de cálculo vetorial), de geometria analítica e um teorema de E.D.O. Com isso, a partir da formulação do Problema da Força Central – isto é, descrever o movimento de uma partícula (independente de sua massa) que é atraída para um ponto fixo – e adotando o caso especial da Lei da Gravitação de Newton é possível estabelecer as três Leis de Kepler (Lei das Órbitas, Lei das Áreas e Lei dos Períodos).

Nesse sentido, vimos que o Momentum Angular é constante ao longo do movimento e, como consequência, obtemos a 2ª Lei de Kepler. Além disso, o Momentum Angular nos diz se o movimento está ocorrendo numa reta passando pela origem (se for nulo) ou através de um plano que passa pela origem (se não nulo), sendo esta origem o ponto fixo de atração. Por mais, foi visto que a energia do movimento é constante e é conservada durante o movimento. Por fim, determinamos a excentricidade, que é outra constante do movimento a qual, em conjunto com conhecimentos de Geometria Analítica, nos permite afirmar que a partícula se move em uma seção cônica, a qual pode ser ou uma circunferência (quando a excentricidade é nula), ou uma parábola ($e = 1$), ou uma elipse ($0 < e < 1$) ou uma hipérbole ($e > 1$).

Ademais, com base nas Leis de Kepler e nas constantes obtidas, no capítulo 4 vimos que o sistema de equações dados pelo caso Newtoniano possui solução e esta é única. Além disso, vimos as relações entre as constantes vistas no capítulo anterior e como estas determinam o movimento partindo de vetores posição e velocidade iniciais dados. Com base nessas informações, concentramos o trabalho em indicar como, dado t , os valores de uma $\mathbf{r}(t)$ podem ser calculados indiretamente por um método numérico, dado um tempo t , a posição da partícula nas possibilidades encontradas anteriormente.

A fim de dar continuidade, para trabalhos futuros, os próximos passos, em curto prazo, a serem dados seriam de calcular numericamente a posição e determinar um "caminho" da partícula. Por outro lado, em longo prazo, seria possível visar o Problema dos dois corpos e estender ao Problema dos n -corpos. Concluimos, então, que os objetivos propostos e a motivação inicial foram alcançados, visto que ao longo dos meses de trabalho foi possível estudar e conhecer mais sobre uma área aplicada, a qual me interessa.

REFERÊNCIAS

- [1] GEIGES, Hansjörg. **The geometry of celestial mechanics**. Cambridge University Press, 2016.
- [2] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo, vol. 2** . Grupo Gen-LTC, 2000.
- [3] HIRSCH, Morris W.; SMALE, Stephen; DEVANEY, Robert L. **Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos**. Academic press, 2012.
- [4] LEHMANN, Charles H. **Geometria analítica**. 1. imp. São Paulo: Globo, 2007.
- [5] POLLARD, Harry. **Celestial Mechanics**. American Mathematical Soc., 1976.
- [6] WINTERLE, Paulo; STEINBRUCH, Alfredo. **Geometria Analítica**. Makron Books, São Paulo, 2000.