

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
FACULDADE DE MATEMÁTICA

JAIRO SENA DO AMARAL

**UMA HISTÓRIA DO TEOREMA DE PITÁGORAS: DEMONSTRAÇÕES  
E CURIOSIDADES**

Belém - Pará  
2023

JAIRO SENA DO AMARAL

**UMA HISTÓRIA DO TEOREMA DE PITÁGORAS: DEMONSTRAÇÕES  
E CURIOSIDADES**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Faculdade de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará como requisito básico para a obtenção do grau de Licenciado (a) Jairo Sena do Amaral.

Orientador (a) prof(a) Dr João Cláudio Brandemberg Quaresma.

Belém – Pará  
2023

JAIRO SENA DO AMARAL

**UMA HISTÓRIA DO TEOREMA DE PITÁGORAS: DEMONSTRAÇÕES  
E CURIOSIDADES**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Faculdade de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará como requisito básico para a obtenção do grau de Licenciado(a) Jairo Sena do Amaral.

Orientador(a) prof (a) Dr João Cláudio Brandemberg Quaresma

Data da apresentação: às 11 horas dia 12/12/2023

---

Prof(a) Orientador - Dr João Cláudio Brandemberg Quaresma

---

Prof(a) membro da banca - Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa

---

Prof(a) membro da banca - Prof. Dr. João Carlos Alves dos Santos

Belém – Pará

2023

## DEDICATÓRIA

Com muita felicidade, dedico este trabalho aos meus amados pais, Dario Amaral e Ana Sena, e, acima de tudo, à minha mãe, Ana, cujo zelo incondicional sempre almejou o meu bem-estar, e cuja fé e confiança em meu potencial, reconhecendo o alcance do que eu poderia realizar e conquistar. Através de inúmeros sacrifícios e paciência, ela nutriu o anseio incessante de ver-me prosperar, permanecendo sempre ao meu lado, inspirando-me e evoluindo comigo desde o princípio até o desfecho desta jornada.

É com profunda gratidão que dedico a eles este trabalho, pois cada ensinamento, cada gesto de apoio e cada palavra de incentivo proveram os fundamentos sólidos para o meu crescimento intelectual e pessoal. O seu amor incondicional foi o alicerce sobre o qual ergui meus sonhos e objetivos, e é com humildade que reconheço a imensidão do seu impacto em minha vida.

Que este trabalho seja uma pequena homenagem ao legado eterno de dedicação e carinho de meus pais, especialmente a minha mãe, cuja presença e devoção incansável tornaram-se uma luz constante em meu caminho, impulsionando-me a alcançar horizontes mais altos e a trilhar com bravura cada passo desta jornada chamada vida.

## AGRADECIMENTOS

Com imensa gratidão, dirijo meus primeiros agradecimentos aos meus queridos pais, Ana Sena e Dario Amaral, pela confiança e infinita paciência que dedicaram a mim ao longo de toda esta jornada até o momento presente. Não posso deixar de exaltar o apoio inestimável do meu primo, Lucas Amaral, que tem me auxiliado e ensinado com maestria todas as disciplinas exatas, desde o ensino médio até a graduação, destacando, sobretudo, a preciosidade da Matemática.

Ao meu orientador, João Cláudio Brandemberg Quaresma, que generosamente aceitou guiar-me nessa trajetória, devo a possibilidade concreta de realizar este trabalho. E é com profunda gratidão que também menciono todos os meus amigos e colegas, cuja contribuição direta e indireta foi fundamental ao longo da minha trajetória acadêmica.

Por último, porém de modo algum menos significativo, dedico especial reconhecimento a uma amiga extraordinária e valorosa, cujo encontro se deu na UFPA. Seu apoio incansável em laboratórios e apresentações foi um motivador incalculável, e sua crença inabalável em meu potencial foi uma ajuda inestimável, seja através de palavras inspiradoras ou do estudo conjunto. Sem dúvida, ela é minha melhor amiga Bryane Arihadne.

A todos que fazem parte desta minha jornada, manifesto minha profunda gratidão. Cada um de vocês contribuiu para o meu êxito e crescimento, e é com o coração repleto de alegria que expresso o quão afortunado sou por contar com o apoio e incentivo de pessoas tão especiais.

## RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso realiza uma revisão teórica abrangente sobre o teorema de Pitágoras, explorando diversas demonstrações dessa importante equação matemática. Além disso, busca-se destacar a relevância desse teorema em áreas como matemática, física e engenharia, evidenciando sua aplicabilidade em diferentes contextos. Outro objetivo desta pesquisa é apresentar a história e as origens do teorema de Pitágoras. Isso inclui não apenas a análise do conhecimento disponível sobre o filósofo Pitágoras, mas também a investigação de evidências do uso desse teorema por civilizações que existiram antes mesmo do período em que Pitágoras viveu. Ao abordar esses aspectos em profundidade, esperamos contribuir para uma compreensão mais detalhada do teorema de Pitágoras, seus fundamentos e suas implicações em diversas áreas do conhecimento. Ao fazer isso, buscamos enriquecer o estudo desse teorema clássico e promover uma apreciação mais ampla de sua importância histórica e contemporânea.

**PALAVRAS-CHAVE:** Triângulo retângulo, Teorema de Pitágoras, Demonstração matemática, História da matemática.

## **ABSTRACT**

This undergraduate thesis conducts a comprehensive theoretical review on the Pythagorean theorem, exploring various demonstrations of this essential mathematical equation. Furthermore, it aims to emphasize the significance of this theorem in fields such as mathematics, physics, and engineering, showcasing its applicability in different contexts. Another objective of this research is to present the history and origins of the Pythagorean theorem. This includes not only an analysis of the available knowledge about the philosopher Pythagoras but also an investigation into evidence of the use of this theorem by civilizations that existed even before the period in which Pythagoras lived. By delving into these aspects in depth, we hope to contribute to a more comprehensive and detailed understanding of the Pythagorean theorem, its foundations, and its implications in various areas of knowledge. In doing so, we seek to enrich the study of this classical theorem and foster a broader appreciation of its historical and contemporary significance.

Keyword: Right triangle, Pythagorean theorem, Mathematical proof, History of mathematics.

## LISTA DE FIGURAS

Figuras	Imagens	Pag
1	Figura 2.1. Euclides	20
2	Figura 2.2 Proposição I-47 de Euclides, sobre o teorema de Pitágoras	21
3	Figura 2.3 Semelhança de triângulos	21
4	Figura 2.4 Elisha Scott Loomis entusiasta do teorema de Pitágoras	22
5	Figura 2.5 Bhaskaracharya matemático indiano	23
6	Figura 2.6 Teorema de Pitágoras por Bhaskara	24
7	Figura 2.7 Possível demonstração de Bhaskara	24
8	Figura 2.8 Leonardo da Vinci (1452-1519)	25
9	Figura 2.9 Demonstração do teorema <i>apresentada pôr</i> da Vinci	26
10	Figura 2.10 O presidente	27
11	Figura 2.11 Demonstração do presidente Garfield	27
12	Figura 2.12 Albert Einstein	28
13	Figura 2.13 Demonstração Einstein	28
14	Figura 2.14 Pappus de Alexandria	30
15	Figura 2.15 Demonstração Pappus	30
16	Figura 2.16 Henry Perigal	32
17	Figura 2.17 Demonstração feita por Perigal	32
18	Figura 2.18 Demonstração feita por Perigal	33
19	Figura 2.19 George Pólya	34
20	Figura: 2.20 Demonstração de George Pólya	35
21	Figura 2.21 Triângulo Retângulo no Geogebra	36
22	Figura 2.22 Triângulo Retângulo no Geogebra	36
23	Figura 2.23 Triângulo Retângulo no Geogebra	37
24	Figura 2.24 Triângulo Retângulo no Geogebra	37
25	Figura 2.25 Verificação por Perigal no Geogebra animada	38
26	Figura 2.26 Verificação geométrica no Geogebra	39
27	Figura 2.27 Verificação Lúdica 1	40
28	Figura 2.28 Verificação lúdica 2	41
29	Figura 2.29 Verificação lúdica com Origami	41
30	Figura 2.30 Verificação lúdica 3	41
31	Figura 2.31 Verificação lúdica 4	42
32	Figura 2.32 Verificação lúdica com moedas de 1 real	42
33	Figura 2.33 Verificação lúdica com uso do Tangram e origamis	42
34	Figura 2.34 Verificação lúdica utilizando Tangram	43
35	Figura 2.35 Verificação lúdica no papel quadriculado	43
36	Figura 2.36 Verificação lúdica com Dominó	43
37	Figura 2.37 Verificação lúdica em 3D	44
38	Figura 2.38 Teorema de Pitágoras pelo mundo	44
39	Figura 2.39 Pitágoras na cultura Japonesa	46
40	Figura 2.40 árvores Pitagórica	46
41	Figura 2.41 ângulos retos invisíveis	47
42	Figura 2.42 truque que dispensa o teorema	48
43	Figura 2.43 Construções de residências	49
44	Figura 2.44 Esquadro	50
45	Figura 2.45 Ternos Pitagóricos	50
46	Figura 2.46 Horizonte	51
47	Figura 2.47 Raio da terra	51
48	Figura 3.1 Distância entre dois pontos que possuem o mesmo valor do eixo ordenado	55
49	Figura 3.2 Aplicação do teorema de Pitágoras para o cálculo da distância de dois pontos	56
50	Figura 3.3 Aplicação do teorema de Pitágoras para o cálculo da distância de dois pontos quaisquer	56
51	Figura 3.4 Aplicação do teorema de Pitágoras para o cálculo do módulo de um número complexo qualquer	57
52	Figura 3.5 Potência de um ponto qualquer	58
53	Figura 3.6 Potência de um ponto qualquer com uma reta tangente a circunferencia	58

54	Figura 3.7 Potência de um ponto qualquer com duas retas tangente a circunferência	59
55	Figura 3.8 Potência de um ponto interior circunferência	59
56	Figura 3.9 Triângulo retângulo qualquer	60
57	Figura 3.10 Triângulo retângulo feito por dois raios de circunferência	60
58	Figura: 3.11 Criação de dois triângulos retângulo a partir do segmento que liga duas extremidades de uma circunferência	61
59	Figura: 3.12 Diagonal do quadrado	62
60	Figura: 3.13 Altura do triângulo	63
61	Figura: 3.14 altura da pirâmide	63
62	Figura: 3.15 Cone	64
63	Figura: 3.16 Paralelepípedo	64
64	Figura 3.17 Representação da soma vetorial de duas forças perpendiculares	65
65	Figura 3.18 Representação Fasorial da potência ativa, reativa e aparente	66
66	Figura 4.1 o lendário criador dos termos "Filosofia"	70
67	Figura 4.2 Símbolo da Escola Pitágoras	72
68	Figura 4.3 possível demonstração feita por Pitágoras	73
69	Figura 4.4 Dutta (2002) cultura matemática indiana	76
70	Figura 4.5 Diagonal no quadrado	77
71	Figura 4.6 Diagonal do retângulo	77
72	Figura 4.7 Possível demonstração indiana	78
73	Figura 4.8 Possível demonstração indiana	79
74	Figura 4.9 Possível demonstração indiana	79
75	Figura 4.10 Atador de corda	80
76	Figura 4.11 Construir um quadrado igual à diferença de dois quadrados dados	81
77	Figuras 4.12 "Gou go"	83
78	Figura 4.13 Representação do Gou Gu.	84
79	Figura 4.14 representações Gou go	85
80	Figura 4.15 Situação problema envolvendo o Gou go	86
81	Figura 4.16 Dicionário egípcio	87
82	Figura 4.17 atadores de cordas	89
83	Figura 4.18 trindades Egípcia	90
84	Figura 4.19 sistemas de numeração adotava o sistema hexadecimal	92
85	Figura 4.20 Números Babilônicos	93
86	Figura 4.21 Dicionário cuneiforme acadiano	94
87	4.22 BM 85196 Problemas práticos	95
88	4.23 Representação no word Problema prático da BM 85196	95
89	Figura 4.24 Representação YBC 7289	97
90	Figura 4.25 YBC 7289	98
91	Figura 4.26 YBC 7289 frente e verso	99
92	Figura 4.27 YBC 7289 Imagem aperfeiçoada	99
93	Figura 4.28 Plimton 322	100
94	Figura 4.29 Inspiração para o personagem Indiana Jones	101
95	Figura 4.30 O grande Colecionador	101
96	Figura 4.31 O Estudioso	102
97	Figura 4.32 Desvendando a Plimpton 322	103
98	Figura 4.33 Arqueólogo Religioso	105
99	Figura 4.34 Estudando a SI427	105
100	Figura 4.35 As linhas realçando o terreno demarcado na SI427	107
101	Figura 4.36 As triplas Pitagóricas na "planta" Babilônica	108
102	Figura 4.37 O Decodificador da SI427	109
103	Figura 4.38 Planta moderna da SI427	110
104	Figura 4.39 IM 67118	110

## SUMÁRIO

<b>1. Introdução</b> .....	<b>12</b>
1.2 Objetivos .....	16
1.3 Organização do trabalho .....	16
<b>2. Fundamentação Teórica</b> .....	<b>17</b>
2.1 O que nos diz Teorema de Pitágoras? .....	17
2.2 Ideias e demonstrações de outros grandes matemáticos sobre o Teorema de Pitágoras. ....	19
2.3 Teorema de Pitágoras e a tecnologia.....	35
2.4 Mostrações e verificações .....	40
2.5 Outras demonstrações ao redor do mundo .....	44
2.6 Curiosidades .....	45
2.7 Conclusão do Capítulo. ....	52
<b>3. Aplicações do Teorema do Pitágoras específicas da Matemática</b> .....	<b>54</b>
3.1 Aplicação do teorema de Pitágoras na geometria analítica.....	54
3.2 Utilizando o Teorema de Pitágoras nos Números Complexos .....	57
3.3 Aplicação do teorema de Pitágoras Geometria Plana .....	57
3.4 Aplicação do teorema de Pitágoras Geometria Espacial .....	63
3.5 Aplicações do Teorema de Pitágoras em outras áreas como Física e Engenharia Elétrica. ....	65
3.5.1 Potência Elétrica .....	66
3.5.2 Potência Aparente – S (VA) .....	67
3.5.3 Potência Ativa – P (W) .....	67
3.5.4 Potência Reativa – Q (VAR) .....	67
3.6 Conclusão do Capítulo. ....	67
<b>4. Origens do Teorema de Pitágoras</b> .....	<b>68</b>
4.1 História e contribuições de Pitágoras .....	69
4.2. Evidências do uso do teorema que leva o nome de Pitágoras, anteriores ao mesmo. ....	74
4.2.1. Uso dos ternos Pitagóricos pelos Indianos.....	74
4.2.2 Curiosidades da Matemática Indianas: .....	82
4.2.3 Uso dos ternos Pitagóricos na China. ....	82
4.2.4 Curiosidades sobre o teorema de Pitágoras na china.....	86
4.2.5 Descobertas egípcias. ....	87

4.2.6 Curiosidades sobre o triângulo Egípcio: .....	89
4.2.7 Descobertas Babilônicas. ....	90
4.2.7.1 Um pouco sobre as civilizações da Mesopotâmia. ....	90
4.2.7.2 Rocha de Behistun .....	93
4.2.7.3 BM 85196 .....	94
4.2.7.4 YBC 7289 .....	97
4.2.7.5 Plimton 322.....	100
4.2.7.6 SI 427 .....	104
4.2.7.7 IM 67118.....	110
4.3. Conclusão do Capítulo .....	113
<b>5. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>114</b>
<b>6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>115</b>

## 1. Introdução

O homem primitivo não tinha a necessidade de contar, pois tudo que precisava retirava da natureza. Conforme ele foi evoluindo, a necessidade de contar e de resolver problemas foi se tornando mais presente em sua vida. Então ele por se diferenciar dos outros animais por sua capacidade de linguagem, o que foi essencial para que surgisse o pensamento matemático abstrato, desenvolveu uma linguagem que possibilitasse representar ou resolver determinadas situações vividas por ele.

Com o avanço da civilização humana e a transição para uma vida mais sedentária, o homem passou a estabelecer residência em regiões específicas, dando início à prática da agricultura, criação de animais e construção de abrigos e fortificações. Nesse contexto, surgiu a necessidade de representar quantidades, seja para contabilizar o número de animais ou colheitas, seja para realizar trocas comerciais. Assim, o homem começou a utilizar diferentes recursos para enumerar e registrar essas quantidades. Pedras pequenas, nós em cordas e entalhes em ossos ou em madeiras que se tornaram meios de correspondência, permitindo a contagem e o registro das informações necessárias para sua subsistência e atividades diárias.

Há milênios, em todas as partes do mundo, seres humanos se dedicam ao estudo, aprendizado e aplicação da matemática, embora o ensino formal dessa disciplina seja uma prática relativamente recente em muitos países e para uma parcela significativa de suas populações. Por mais de quatro milênios, indivíduos têm explorado as complexidades dos números, formas, padrões e relações matemáticas, ampliando assim o conhecimento humano. Essa busca pelo entendimento matemático tem transcendido fronteiras culturais e geográficas, enriquecendo nossa compreensão do mundo ao nosso redor e impulsionando o progresso em diversas áreas do conhecimento.

Ao longo de sua existência, a matemática foi impulsionada por uma série de eventos marcantes e por figuras notáveis que continuam sendo referências até os dias atuais. Entre eles, destaca-se Pitágoras, cuja história está misturada em lendas e aclamações. Pitágoras era tanto profeta quanto místico, nascido em Samos por volta de 570 a.C. - 571 a.C. e falecido em Metapontum entre 496 a.C. – 497 a.C. No entanto, a clareza sobre a existência desse personagem tão

importante no mundo da matemática é prejudicada em parte pela perda de documentos daquela época. Embora tenham sido escritas várias biografias sobre Pitágoras na antiguidade, infelizmente, muitas delas se perderam ao longo do tempo.

Pitágoras, renomado pensador grego, deixou um legado duradouro ao estabelecer uma escola de pensamento que levava seu nome, a pitagórica. Além disso, ele é amplamente reconhecido por seu trabalho no desenvolvimento do Teorema que relaciona os lados de um triângulo retângulo, conhecido mundialmente como o Teorema de Pitágoras. Embora seja importante mencionar que esse teorema já era conhecido pelos babilônios, cerca de mil anos antes, na época de Hamurabi, é atribuída a Pitágoras a primeira demonstração documentada desse teorema. Assim, sua contribuição na divulgação e formalização do Teorema de Pitágoras é considerada um marco na história da matemática.

Ainda sobre a origem do teorema de Pitágoras, é importante verificar que no contexto do povo indiano, entre 1500 a.C. e 500 a.C., encontramos menções às chamadas "triplos pitagóricas" sendo utilizadas na construção de altares. Essa referência está presente no documento histórico chamado Sulbasutras, que também indica que esse povo possuía conhecimentos matemáticos relacionados ao quadrado da soma de dois números.

Além dos indianos, os chineses também demonstraram conhecimentos relacionados ao teorema de Pitágoras em seus estudos. Um livro chinês do século III chamado Zhoubi Suanjing coletou 246 obras com problemas matemáticos, e em uma delas é possível observar o uso implícito do teorema de Pitágoras para a estimação de distâncias inacessíveis, como a distância entre a Terra e o Sol.

No antigo Egito (3000 a.C.), há evidências de que os agrimensores já conheciam o triângulo retângulo e utilizavam medidas dos lados 3, 4 e 5, bem como os triângulos com lados 5, 12, 13 e 20, 21 e 29. Além disso, era comum naquela época amarrar 13 nós equidistantes em uma corda, criando 12 intervalos de igual comprimento. Em seguida, conectavam o primeiro nó ao

décimo terceiro e marcavam o quarto e oitavo nós com estacas, construindo assim um triângulo retângulo com lados 3, 4 e 5.

Essas evidências apontam para a existência de conhecimentos relacionados ao teorema de Pitágoras em diferentes civilizações antigas, demonstrando a universalidade e a importância desse resultado matemático ao longo da história.

Dentre os teoremas matemáticos, o Teorema de Pitágoras se destaca como um dos mais significativos na história dessa disciplina, sendo amplamente reconhecido por estudiosos ao redor do mundo. Sua importância se estende tanto para a geometria teórica, onde desempenha um papel fundamental, quanto para a resolução de problemas práticos relacionados a medidas.

Ao aplicar o Teorema de Pitágoras, inúmeras descobertas importantes são alcançadas. Ele oferece uma base sólida para a compreensão e solução de problemas geométricos complexos, permitindo calcular relações entre os lados de um triângulo retângulo. Além disso, esse teorema encontra aplicações práticas em diversas áreas, como arquitetura, engenharia, astronomia e física, fornecendo ferramentas essenciais para a medição de distâncias, o cálculo de áreas e o entendimento de padrões relacionados a formas geométricas.

Dentro da matemática, o teorema de Pitágoras encontra aplicação em várias áreas, especialmente na geometria. Um exemplo disso é o cálculo da potência de um ponto, que envolve o produto de todas as distâncias entre um ponto genérico e uma reta que passa por ele, juntamente com uma circunferência específica.

Outra aplicação do teorema de Pitágoras na matemática está relacionada à geometria analítica, onde é utilizado para encontrar o módulo de um vetor genérico. Nesse caso, as componentes do vetor em um espaço bidimensional formam um triângulo retângulo juntamente com o vetor em si, o que permite aplicar o teorema de Pitágoras para calcular a norma desse vetor.

Além disso, no campo da física e engenharia, o teorema de Pitágoras também encontra aplicação no cálculo da potência aparente de elementos e

equipamentos elétricos, como motores, transformadores e geradores de energia. A potência aparente é obtida somando-se fasor e a potência ativa ou útil com a potência reativa, que representa a energia necessária para criar campos elétricos e magnéticos nos mencionados dispositivos.

Essas são apenas algumas das várias aplicações do teorema de Pitágoras, demonstrando a sua relevância em diferentes campos da matemática, física e engenharia.

Assim, o Teorema de Pitágoras continua a ser uma referência fundamental e uma poderosa ferramenta de resolução de problemas, permitindo avanços significativos tanto na teoria matemática quanto na aplicação prática. Sua influência na matemática e em áreas correlatas permanece notável até os dias de hoje.

Além disso, o Teorema de Pitágoras oferece uma oportunidade valiosa para estabelecer conexões entre conceitos matemáticos e o mundo real. Por meio de exemplos práticos e contextualizados, os alunos podem visualizar como esse teorema é fundamental para calcular distâncias, determinar áreas e solucionar problemas reais de medidas em diversas áreas do conhecimento.

Portanto, ao explorar o Teorema de Pitágoras nas aulas de matemática do ensino fundamental, os educadores proporcionam aos estudantes uma base sólida de compreensão matemática, estimulam sua curiosidade e fomentam a aplicação prática de conceitos geométricos em suas vidas cotidianas.

Assim, é essencial que cada professor de matemática esteja familiarizado com pelo menos algumas demonstrações do teorema, a fim de escolher aquelas mais apropriadas para suas aulas. Essa abordagem garante uma compreensão aprofundada do teorema e promove a participação ativa dos alunos, criando um ambiente propício para a construção do conhecimento matemático.

## 1.2 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo realizar uma revisão teórica acerca do teorema de Pitágoras, além de apresentar diferentes demonstrações do mesmo. Teve-se também como objetivo apresentar a relevância desse assunto em diferentes áreas como a própria matemática, física e também engenharia. Por fim objetiva-se também apresentar a história e origens do referido teorema, não só do que se sabe do filósofo Pitágoras, como também evidências do uso do teorema em civilizações existentes anteriores a vida de Pitágoras.

## 1.3 Organização do trabalho

Este trabalho está dividido em cinco capítulos.

O capítulo 1 apresenta o tema a ser explorado neste trabalho, assim como define os objetivos cumpridos ao longo do mesmo.

O Capítulo 2 traz a fundamentação teórica do teorema de Pitágoras, assim como diferentes demonstrações encontradas na literatura e curiosidades acerca do tema.

O Capítulo 3 expõe diferentes aplicações do teorema de Pitágoras em diferentes áreas de conhecimento, como matemática, física e engenharia, como forma de verificação da relevância do referido teorema.

O capítulo 4 faz uma revisão histórica das origens do teorema de Pitágoras, sobre o qual se narra a história e descobertas, também se aborda sobre evidências do uso do referido teorema por outros povos antigos anteriores a Pitágoras, os quais são os indianos, babilônicos, chineses e egípcios.

O Capítulo 5 traz as considerações finais e ponderações acerca da história da matemática referente ao teorema de Pitágoras.

## 2. Fundamentação Teórica

O presente capítulo tem por objetivo apresentar a descrição teórica e as formulações matemáticas necessárias para a construção do teorema de Pitágoras, bem como algumas demonstrações existentes na literatura, tais como as demonstrações realizadas por, Euclides, Elisha Scott Loomis, Bhaskara, Leonardo da Vinci, James Garfield, Albert Einstein, Pappus, Henry Perigal e George Pólya, além disso são apresentadas curiosidades e demonstrações caseiras relacionadas ao teorema de Pitágoras.

O teorema de Pitágoras estabelece que dado um triângulo retângulo, o maior lado desse chamado Hipotenusa (“a”), enquanto os demais lados são chamados de cateto (“b” e “c”), dessa forma tem-se que a formulação matemática do referido teorema determina que o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos, (ou seja  $a^2 = b^2 + c^2$ ) para qualquer triângulo retângulo.

Houveram muitos matemáticos que se interessaram em demonstrar o teorema, neste capítulo utilizou-se dos seguintes teóricos, Euclides, Elisha Scott Loomis, Bhaskara, Leonardo da Vinci e George Pólya. Cada um deles fundamentou sua demonstração a partir de algum princípio matemático. Euclides utilizou princípios da geometria, assim como Leonardo da Vinci, Bhaskara e George Pólya, já Elisha Scott Loomis, o qual desenvolveu 370 demonstrações, definiu suas demonstrações a partir de dois princípios algébrico e geométrico.

### 2.1 O que nos diz Teorema de Pitágoras?

O Teorema de Pitágoras é um teorema matemático nomeado após Pitágoras, um matemático grego que viveu por volta de 500 a.C e o demonstrou.

Pitágoras é geralmente creditado por apresentar o teorema e fornecer as primeiras provas, embora evidências sugiram que o teorema na verdade é anterior à existência de Pitágoras e que ele pode simplesmente tê-lo popularizado. Sinceramente quem quer que seja a grande mente por trás do

desenvolvimento do teorema que leva o nome de Pitágoras sem dúvida ficaria envaidecido em saber que sua fórmula é ensinada em aulas de geometria em todo o mundo e é usado diariamente para grande maioria de trabalhos de matemática do ensino médio até cálculos complexos de engenharia para naves espaciais entre outras aplicações que posteriormente serão mencionadas com maior aprofundamento.

De acordo com o teorema de Pitágoras, se os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo são quadrados, a soma dos quadrados é igual ao comprimento do quadrado da hipotenusa.

Este teorema é frequentemente expresso como uma fórmula simples:  $a^2 + b^2 = c^2$ , onde  $a$  e  $b$  representam os lados de um triângulo retângulo, enquanto  $c$  representa a hipotenusa.

Em um exemplo simples de como esse teorema pode ser usado, pode-se perguntar quanto tempo levaria para cortar um terreno retangular, em vez de contornar as bordas, contando com o princípio de que um retângulo pode ser dividido em dois simples. Triângulos retângulos. Ele poderia medir dois lados adjacentes, determinar seus quadrados, somar os quadrados e encontrar a raiz quadrada da soma para determinar o comprimento da diagonal do lote.

Como outros teoremas matemáticos, o teorema de Pitágoras depende de provas. Cada prova é projetada para produzir mais evidências de apoio para mostrar que o teorema está correto, para demonstrar várias aplicações, para mostrar maneiras pelas quais o teorema de Pitágoras não pode ser aplicado e para tentar refutar o teorema para mostrar, em vez disso, que a lógica por traz dele vale.

Como o teorema de Pitágoras é um dos mais antigos teoremas matemáticos em uso hoje, também é um dos mais comprovados, com centenas de provas de matemáticos ao longo da história, somando-se ao corpo de evidências que mostram que o teorema é válido.

Algumas formas especiais podem ser descritas usando o teorema de Pitágoras. Um triplo pitagórico é um triângulo retângulo no qual todos os comprimentos laterais e hipotenusas são inteiros.

O menor triplo pitagórico é um triângulo onde  $a = 3$ ,  $b = 4$  e  $c = 5$ . Usando o teorema de Pitágoras, as pessoas podem ver que  $9 + 16 = 25$ . Os quadrados no teorema também podem ser literais; se usássemos cada comprimento de um triângulo retângulo como lado de um quadrado, os quadrados dos lados teriam a mesma área que o quadrado formado pelo comprimento da hipotenusa.

Este teorema pode ser usado para encontrar o comprimento de qualquer segmento desconhecido em um triângulo retângulo, então a fórmula é útil para pessoas que desejam encontrar a distância entre dois pontos. Por exemplo, se sabemos que um lado de um triângulo retângulo é igual a três e a hipotenusa é igual a cinco, sabemos que o outro lado tem comprimento de quatro, contando o familiar triplo pitagórico discutido acima.

## **2.2 Ideias e demonstrações de outros grandes matemáticos sobre o Teorema de Pitágoras.**

Entre as inúmeras possíveis provas conhecidas que cobrem um período de aproximadamente 2500 anos de história tendo a matemática como protagonista, serão destacados aqui grandes estudiosos que se fascinaram pela beleza do triângulo retângulo.

Euclides (c. 330 aC - 260 aC) nasceu na Síria e estudou em Atenas. Ele foi um dos primeiros geômetras e é amplamente considerado um dos matemáticos mais importantes da Grécia clássica e, na verdade, de toda a época. Pouco se sabe sobre sua vida. Ele é conhecido por ter sido chamado para ensinar matemática na escola fundada por Ptolomeu Soter (306 aC - 283 aC) em Alexandria, conhecida como "Museu". Lá ele ganhou grande reputação por seu excelente ensino de geometria e álgebra, e conseguiu atrair um grande número de discípulos para suas aulas. É dito que ele tinha um grande poder e habilidades, e algumas lendas o descrevem como um velho gentil e genial

Figura 2.1. Euclides



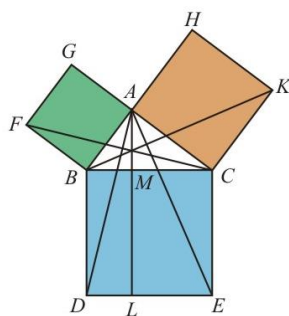
Fonte: <https://clube.spm.pt/news/1146>

Existe uma história que um dia o rei perguntou-lhe se havia uma maneira mais fácil de aprender geometria, e Euclides respondeu: "Não existem estradas reais para se chegar à geometria", como mencionado na imagem anterior.

A maior obra conhecida de Euclides, Elementos, com 13 volumes, que constitui um dos mais notáveis livros didáticos de matemática de todos os tempos. Foi adotado como um livro primordial por gregos e romanos no decorrer da Idade Média e no Renascimento. Os Elementos foram considerados o livro por excelência para o estudo da geometria. Euclides é justamente chamado de "o pai da geometria". Na obra, ele reuniu em um sistema coerente e compreensível tudo o que se sabia sobre matemática em sua época. Todos os fragmentos surgiram da necessidade prática de usar aritmética, geometria plana, teoria das proporções e geometria sólida.

Voltando ao assunto após essa breve menção a Euclides, a proposição 47 do Livro I dos Elementos de Euclides mencionado anteriormente trata da demonstração do Teorema da Hipotenusa, em um triângulo retângulo, o quadrado sobre o lado oposto ao ângulo reto é igual à soma dos quadrados sobre os lados que forma o ângulo reto. A proposição 47 conhecida como moinho de vento, porque a ilustração correspondente à demonstração de Euclides assemelha-se a um "moinho de vento" ou também foi chamada de "cadeira da noiva", como mostra a imagem a seguir.

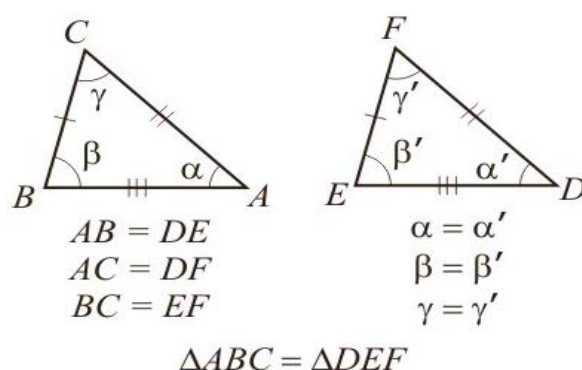
Figura 2.2 Proposição I-47 de Euclides, sobre o teorema de Pitágoras



Fonte: <https://www.livrariadorufino.com.br/embasamento-em-geometria-plana>

O princípio consiste em estabelecer a igualdade entre o retângulo BDLM e o quadrado ABFG. O triângulo ABD e BCF são iguais, pois os dois triângulos têm dois lados iguais com ângulos iguais e estes são a metade do retângulo BDLM. Esta igualdade entre triângulos já havia sido previamente estabelecida na proposição I-47 que diz se dois triângulos têm dois lados iguais a dois, respectivamente, e se o ângulo contido por estes dois lados for igual, então eles também têm suas bases iguais. Consequentemente os triângulos serão iguais e os ângulos restantes também serão.

Figura 2.3 Semelhança de triângulos



Fonte: <https://www.ime.unicamp.br/~apmat/5-demonstracoes-do-teorema-de-pitagoras/>

A igualdade dos triângulos se dá pelo fato de que eles se deduzem um do outro por uma rotação de  $90^\circ$ . Mas de que modo Euclides justifica que o retângulo BDLM seja o duplo do triângulo ABD?

Euclides utilizou-se de outra proposição já estabelecida num teorema mais geral, onde combina triângulos e paralelogramos.

Elisha Scott Loomis, (18/09/1852 a 11/12/1940) professor de matemática em Cleveland, Ohio, é apaixonada pelo teorema de Pitágoras. Por 20 anos, de 1907 a 1927, ele coletou provas do teorema, reunindo-as em um livro que chamou de "A Proposição Pitagórica". A primeira edição em 1927 continha 230 manifestações. Na segunda edição, publicada em 1940, esse número foi aumentado para 370 enunciados. Após a morte do autor, o livro foi republicado em 1968 e 1972 pelo Conselho Nacional de Professores de Matemática do país.

Figura 2.4 Elisha Scott Loomis Entusiasta do teorema de Pitágoras



Fonte: <https://mathlair.allfunandgames.ca/pythprop.php>

O professor Loomis classifica essencialmente as provas do teorema de Pitágoras em dois tipos: provas "algébricas" (baseadas em relações métricas de triângulos retângulos) e provas "geométricas" (baseadas em comparações de superfícies).

Figura 2.5 Bhaskaracharya matemático indiano

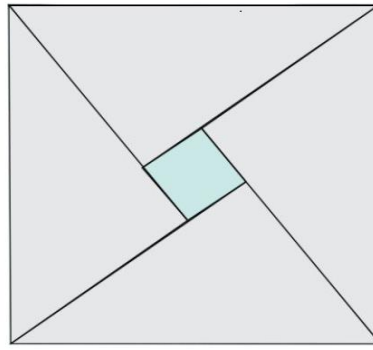


Fonte: <https://podcasters.spotify.com/pod/show/gisely-vitu00f3ria/episodes/Biografia-de-Bhaskara-e16tkun>

Conforme Boyer (1974), Bhaskara nasceu na cidade de Vijayapura na Índia (1114 - 1185) foi um dos proeminentes matemáticos da Índia, astrônomo e professor indiano. Ele é conhecido por criar a fórmula matemática aplicada à equação quadrática, embora esse fato seja contestado pois O costume de nomear a fórmula para resolver equações de segundo grau de Bhaskara é aparentemente brasileiro (o nome Bhaskara para esta fórmula não pode ser encontrado na literatura internacional).

No entanto, problemas envolvendo equações quadráticas apareceram na escrita babilônica há cerca de quatro mil anos. Esses textos possuem uma receita (escrita em prosa, sem símbolos). Os babilônios, na antiguidade, possuíam uma sólida compreensão de álgebra e eram capazes de solucionar problemas usando abordagens semelhantes às técnicas modernas, incluindo o método de completar quadrados. Além disso, até o final do século 16, as fórmulas não eram usadas para encontrar as raízes das equações quadráticas, simplesmente porque os coeficientes das equações não eram representados por letras.

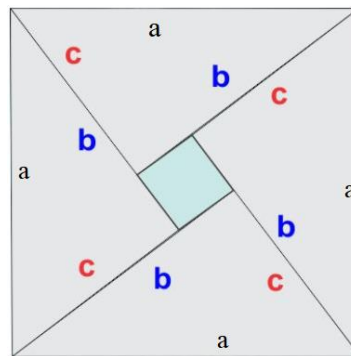
Figura 2.6 Teorema de Pitágoras por Bhaskara



Fonte: <http://www.osfantasticosnumerosprimos.com.br/011-estudos-341-demonstracao-quadrupla-teorema-pitagoras.html>

Segundo relatos, ele apenas desenhou o modelo acima e disse: Contemple! Veja! Ou seja, deixe o observador verificar por cálculo que é uma prova do teorema de Pitágoras, usando 4 triângulos retângulos para formar um quadrado.

Figura 2.7 Possível demonstração de Bhaskara



Fonte: <http://www.osfantasticosnumerosprimos.com.br/011-estudos-341-demonstracao-quadrupla-teorema-pitagoras.html>

Área do quadrado maior:  $a^2$

Área dos 4 triângulos retângulos:  $4 \cdot \frac{bc}{2}$

Área do quadrado menor:  $(b-c)^2$

Fazendo a igualdade de áreas temos:

$$a^2 = \frac{4 \cdot bc}{2} + (b-c)^2$$

$$\text{De onde: } a^2 = 2bc + b^2 - 2bc + c^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Como podemos encontrar uma visualização com objetos geométricos em:

<https://youtu.be/x1PQZySvX3o>

Leonardo da Vinci (15 de abril de 1452 a 2 de maio de 1519) Anchiano, uma pequena aldeia toscana perto de Vinci e Florença, Itália. Aos 17 anos, estudou arte no ateliê do mestre Andrea del Verrocchio, onde modelava suas pinturas em terracota. Ele trabalhou para figuras importantes como Lorenzo de' Medici, governador de Florença. Em 1480 pintou sua primeira obra, a Virgem dos Cravos.

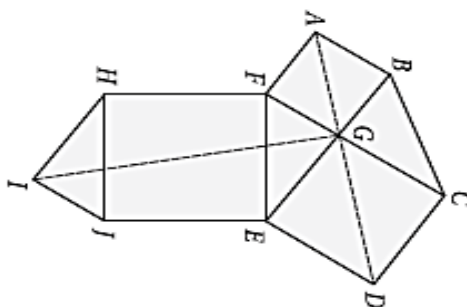
Figura 2.8 Leonardo da Vinci (1452-1519)



Fonte: <https://www.todamateria.com.br/vida-e-obra-de-leonardo-da-vinci/>

Em 1503 ele usou a técnica Sfumato para criar sua maior obra, a Mona Lisa. Este método permite ao artista criar gradações suaves e representar a textura da pele humana.

Figura 2.9 Demonstração do teorema *apresentada pôr da Vinci*



<https://www.rpm.org.br/cdrpm/2/5.htm>

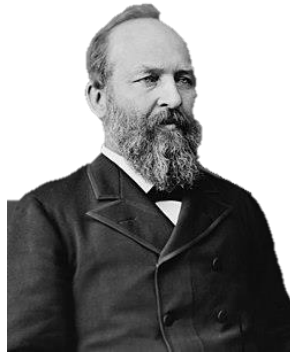
Os quadriláteros ABCD, DEFA, GFHI e GEJI são congruentes. Logo, os hexágonos ABCDEF e GEJIHF têm a mesma área. Daí resulta que a área do quadrado FEJH é a soma das áreas dos quadrados ABGF e CDEG (LIMA, 1998, p. 55). Da Vinci se baseou no princípio de comparação de áreas. Ele fez uso de uma forma mais complexa e de difícil visualização. Utilizou as áreas dos quadriláteros formados a partir de uma figura desenhada anteriormente para comprovar suas equivalências e assim comprovar a relação existente entre os lados dos triângulos retângulos (LIMA, 2006).

Como podemos encontrar uma visualização com objetos geométricos em:

[https://youtu.be/P0y\\_Ci5jzZ0](https://youtu.be/P0y_Ci5jzZ0)

James Abram Garfield 19 de novembro 1831 – Washington, D.C. a 19 de setembro de 1881 foi um norte-americano multifacetado, atuando como advogado, professor e político. Ele desempenhou o papel de 20º Presidente dos Estados Unidos de março de 1881 até seu trágico assassinato em setembro do mesmo ano. Garfield foi alvejado por um assassino apenas quatro meses após assumir a presidência, e infelizmente, faleceu dois meses depois desse atentado. Destaca-se que ele é o único membro da Câmara dos Representantes que, estando ainda em exercício, foi eleito para a presidência.

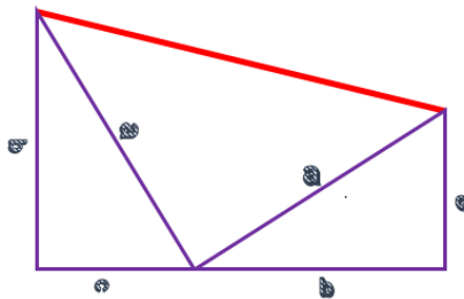
Figura 2.10 O presidente



[https://pt.wikipedia.org/wiki/James\\_A.\\_Garfield](https://pt.wikipedia.org/wiki/James_A._Garfield)

Garfield teve uma origem humilde, nascendo em uma cabana de toras, e cresceu enfrentando a pobreza no Nordeste de Ohio. Depois de se graduar no Williams College, ele estudou direito e se tornou advogado, ingressando no Partido Republicano em 1857. Sua trajetória política incluiu o serviço como membro do senado estadual em Ohio de 1859 a 1861.

Figura 2.11 Demonstração do presidente Garfield



Fonte: Produzido pelo autor

$$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ - 90^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\frac{(b+c)(b+c)}{2} = \frac{a \cdot a}{2} + \frac{2bc}{2}$$

$$b^2 + bc + bc + c^2 = a^2 + 2bc$$

$$b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc$$

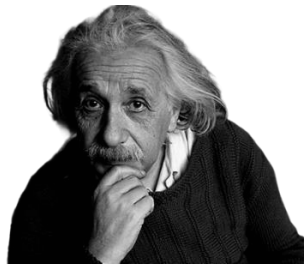
$$b^2 + c^2 = a^2.$$

Como podemos encontrar uma visualização com objetos geométricos em:

<https://youtu.be/tJgDpNYihNM>

Albert Einstein (1879 - 1955) foi um renomado físico alemão, nascido na cidade de Ulm em 1879. Em sua juventude, ele mudou-se para a Suíça, onde, em 1900, concluiu sua formação em Matemática e Física, posteriormente tornando-se professor na Escola Politécnica de Zurique.

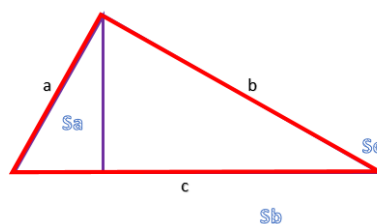
Figura 2.12 Albert Einstein



Fonte: adaptado <https://oglobo.globo.com/epoca/guilherme-amado/a-vida-de-einstein-com-um-pingo-de-literatura-1-24923193>

Einstein destacou-se como uma das mentes mais brilhantes da ciência, deixando um legado notável que inclui a explicação do efeito fotoelétrico e a formulação das teorias da relatividade espacial geral e restrita. Além disso, suas contribuições para a Física Estatística foram significativas, notadamente por meio de sua explicação para o movimento browniano.

Figura 2.13 Demonstração Einstein



Fonte: Produzido pelo autor

Dentro do triângulo inicial, com lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , traçamos uma altura, criando dois novos triângulos retângulos. O triângulo à esquerda tem uma hipotenusa de comprimento  $a$ , e sua área é denotada por  $S_a$ . O triângulo à direita tem uma hipotenusa de comprimento  $b$ , e sua área é representada por  $S_b$ . O triângulo original, com hipotenusa  $c$ , possui uma área  $S_c$ .

A semelhança desses três triângulos ocorre de seus ângulos idênticos. No plano euclidiano, a área de qualquer figura geométrica é proporcional ao quadrado de sua dimensão linear. Portanto, podemos expressar isso da seguinte maneira:

$$S_a = k \cdot a^2$$

$$S_b = k \cdot b^2$$

$$S_c = k \cdot c^2,$$

onde  $k$  é uma constante presente nas três equações, visto que os triângulos, por serem semelhantes, representam a mesma figura geométrica.

Além disso, é evidente que

$$S_c = S_a + S_b,$$

Substituindo aqui as equações anteriores,

$$c^2 = b^2 + a^2.$$

Como podemos encontrar uma visualização com objetos geométricos em:

<https://youtu.be/LLad8zKkpGg>

Pappus de Alexandria por volta de (290 - 350) destaca-se como um dos últimos grandes matemáticos gregos da antiguidade. Embora informações sobre sua vida sejam escassas, sabe-se que foi um pesquisador influente e autor de vários textos que exploravam a ciência na antiga civilização grega.

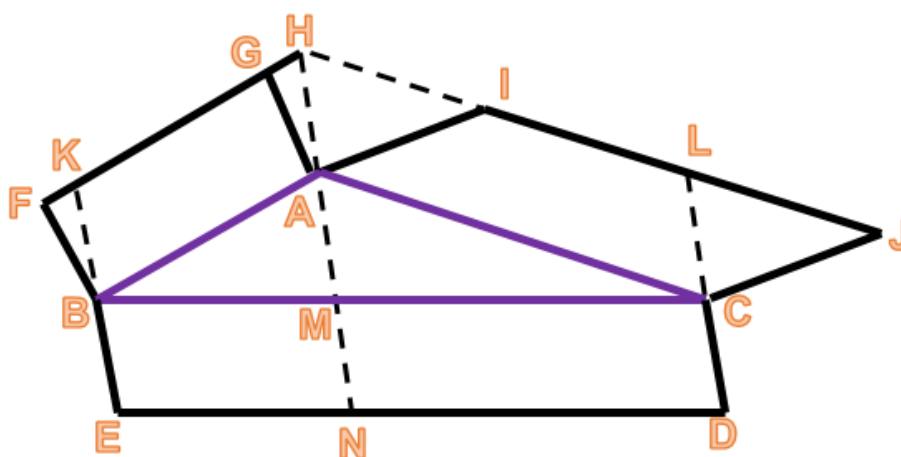
Figura 2.14 Pappus de Alexandria



Fonte: <https://npconti18.wixsite.com/mysite-1/biography>

Pappus não costumava reivindicar ideias originais, preferindo concentrar-se no trabalho de seus predecessores. Uma de suas obras mais renomadas, "Synagoge" (340 d.C.), também conhecida como "Coleção Matemática", consiste em oito livros. Nessa coleção, encontramos relatos, novas demonstrações e tópicos suplementares para diversas proposições de matemáticos como Arquimedes, Euclides, Apolônio e Ptolomeu.

Figura 2.15 Demonstração Pappus



Fonte: Produzido pelo autor

Considerando um triângulo retângulo, estamos lidando com um triângulo arbitrário ABC. Ao invés de utilizar quadrados sobre os lados, consideramos paralelogramos, sendo dois deles quaisquer. A única exigência é que o terceiro

paralelogramo atenda à condição de CD ser paralelo a HA e ter o mesmo comprimento.

O teorema de Pappus estabelece que a área do paralelogramo BCDE é equivalente à soma das áreas de ABFG e AIJC. A demonstração desse teorema baseia-se na simples observação de que dois paralelogramos com bases e alturas de mesmo comprimento possuem a mesma área.

Assim, de um lado, AHKB tem a mesma área que ABFG e, do outro lado, a mesma área que BMNE. Isso implica que as áreas de BMNE e ABFG são iguais. Analogamente, as áreas de CDNM e CAIJ também são iguais. Portanto, a área de BCDE é a soma das áreas de ABFG e CAIJ.

É interessante notar que o teorema de Pitágoras é um caso particular do teorema de Pappus. Basta considerar o triângulo ABC como retângulo e três quadrados em vez dos três paralelogramos.

Henry Perigal, Jr. (1 de abril de 1801 - 6 de junho de 1898) foi um corretor da bolsa britânico e amante da matemática. Ele ficou conhecido por sua demonstração do teorema de Pitágoras usando o método de dissecação, além de manter uma crença pouco convencional de que a lua não gira.

No seu livro "Geometric Dissections and Transpositions" (Londres: Bell & Sons, 1891), Perigal apresentou uma demonstração do teorema de Pitágoras utilizando o conceito de dissecar dois quadrados menores para formar um quadrado maior. A dissecação de cinco peças que ele descobriu pode ser visualizada sobrepondo um azulejo quadrado regular, cujo prototile é o quadrado maior, com um azulejo pitagórico gerado pelos dois quadrados menores, Perigal escolheu a mesma representação da dissecação para imprimir em seus cartões de visita e também a incluída em sua lápide.

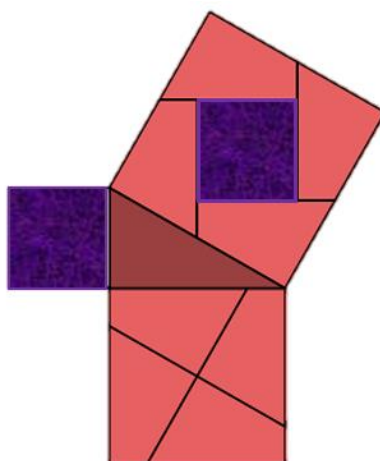
Figura 2.16 Henry Perigal



Fonte: [fermatlibrary/status/1526265434504413186](https://fermatlibrary/status/1526265434504413186)

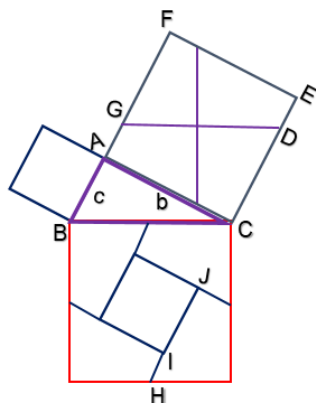
Perigal realiza duas retas cortando o quadrado construído sobre o maior cateto. Uma dessas retas é paralela à hipotenusa do triângulo, e a outra é perpendicular a ela, dividindo o quadrado em quatro partes congruentes. Essas quatro partes, juntamente com o quadrado construído sobre o menor cateto, ocupam completamente o quadrado construído sobre a hipotenusa.

Figura 2.17 Demonstração feita por Perigal



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 2.18 Demonstração feita por Perigal



Fonte: Produzido pelo autor

Como podemos encontrar uma visualização com objetos geométricos em:

<https://youtu.be/CkJw3zxTPec>

Considerando  $AC = b$  e  $AB = c$  como os lados dos quadrados construídos sobre os catetos, e denotando  $AG = DE = x$ , sendo  $BCDG$  um paralelogramo, temos  $BG = CD$ , ou seja,  $c + x = b - x$ , o que implica  $c = b - 2x$ . Além disso, com  $HI = DE$  e  $HJ = GF = CD$ , obtemos  $IJ - HJ - HI = b - x - x - b - 2x = c$ .

Suponhamos que  $x - r$ ,  $x$  e  $x + r$  representem os lados de um triângulo retângulo, onde  $r > 0$ , e  $x + r$  é a hipotenusa. Assim,  $(x + r)^2 = x^2 + (x - r)^2$ . Ao desenvolver e simplificar, encontramos  $x = 4r$ , o que implica que os lados medem  $3r$ ,  $4r$  e  $5r$ .

Observando as equivalências em relação à desigualdade  $b + c < a + h$ , percebemos que a desigualdade é verdadeira:  $b + c < a + h \Leftrightarrow (b + c)^2 < (a + h)^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 + 2bc < a^2 + h^2 + 2ah \Leftrightarrow 2bc < h^2 + 2ah \Leftrightarrow 0 < h^2$ .

Considerando os raios dos círculos inscritos nos triângulos  $AHB$ ,  $AHC$  e  $ABC$  como  $R_1$ ,  $R_2$  e  $r$ , respectivamente, e notando que esses três triângulos são semelhantes, portanto  $\frac{r_1}{c} = \frac{r_2}{b} = \frac{r}{a}$  elevando ao quadrado e multiplicado por  $\pi$  temos  $\frac{\pi r_1^2}{c^2} = \frac{\pi r_2^2}{b^2} = \frac{\pi r^2}{a^2}$ . Como  $b^2 + c^2 = a^2$ , concluímos que  $\pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi r^2$ .

George Pólya, nascido em Budapeste Hungria, em 13 de dezembro de 1887 a 7 de setembro de 1985, destacou-se como um matemático brilhante, deixando contribuições essenciais em diferentes campos, tais como Análise, Combinatória e Probabilidade. Um dos seus livros mais famosos, publicado em 1945, intitulado "How to Solve it" e conhecido em português como "A Arte de Resolver Problemas", é uma obra dedicada à investigação e descoberta matemática. Pólya presenteou-nos com uma prova notável e uma generalização do Teorema de Pitágoras: se as figuras construídas com base nos lados de um triângulo retângulo, independentemente da sua forma geométrica, forem semelhantes, então a relação pitagórica das áreas é confirmada, isto é, a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos.

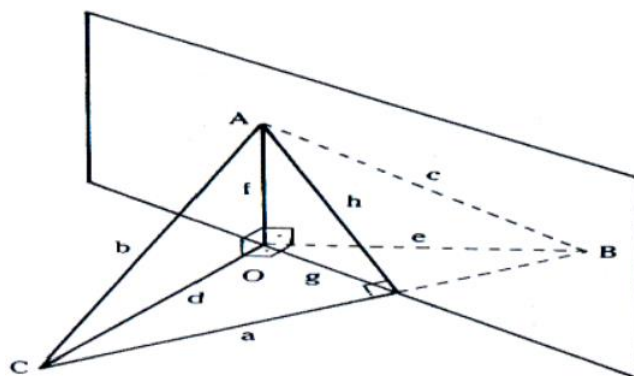
Figura 2.19 George Pólya



Fonte: [http://clubes.obmep.org.br/blog/b\\_bgpolya/](http://clubes.obmep.org.br/blog/b_bgpolya/)

Lima (2006) argumenta que, em sua opinião, a demonstração mais perspicaz do Teorema de Pitágoras não está incluída entre as 370 apresentadas pelo Professor Loomis. Esta abordagem pode ser encontrada no livro "Induction an Analogy in Mathematics", escrito pelo matemático húngaro George Polya. Nessa demonstração, considera-se um tetraedro OABC, com O como o vértice do ângulo reto (ver Figura 2.20). Portanto, as faces OAB, BOC e COA formam triângulos retângulos. Define-se D como a área da face triangular ABC:  $D = a \frac{h}{2}$  ou  $4D^2 = a^2 h^2$ :

Figura: 2.20 Demonstração de George Pólya



Fonte: Barbosa, 1993

Cortando o tetraedro com o plano que passa pela altura e pelo vértice O. O resultado dessa interseção é um triângulo retângulo, onde a hipotenusa mede  $h$ , e os catetos são representados por  $f$  e  $g$ . Portanto,  $h^2 = g^2 + f^2$ .

Portanto:  $4D^2 = a^2 g^2 + a^2 f^2 = 4A^2 + a^2 f^2$ , onde  $A$  é a área da face BOC oposta ao vértice A do tetraedro. Mas  $a^2 = d^2 + e^2$  no triângulo BOC; então temos:

$$4D^2 = 4A^2 + (d^2 + e^2)f^2 = 4A^2 + d^2 f^2 + e^2 f^2 .$$

Porém  $B = \frac{df}{2}$  e  $C = \frac{ef}{2}$  são as áreas dos triângulos COA e AOB

respectivamente opostos aos vértices B e C. Segue que  $4D^2 = 4A^2 + 4B^2 + 4C^2$  ou  $D^2 = A^2 + B^2 + C^2$  (BARBOSA, 1993, p. 42).

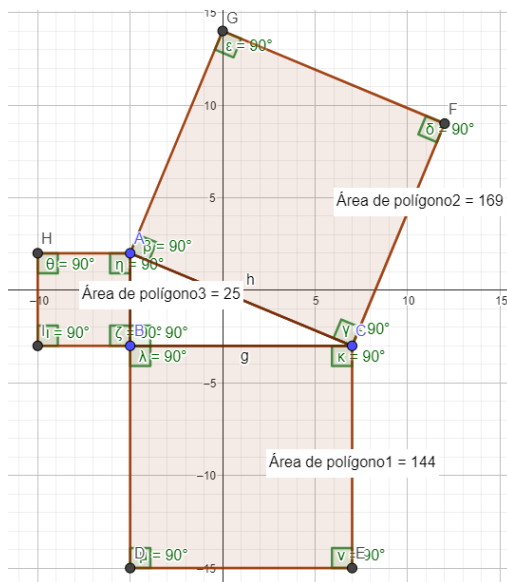
### 2.3 Teorema de Pitágoras e a tecnologia.

Utilizando abordagens mais contemporâneas, o Teorema de Pitágoras pode ser demonstrado com o auxílio da tecnologia, o que permite elucidá-lo de maneira atrativa e inovadora em comparação ao tradicional quadro negro frequentemente utilizado nas escolas. Esta parte do trabalho apresenta algumas verificações feitas com o uso do Geogebra, buscando uma forma mais eficiente de demonstrar o referido teorema.

Abaixo, serão encontrados links para ilustrações das figuras. Essas ilustrações foram criadas com o auxílio do Geogebra, e servirão para facilitar a

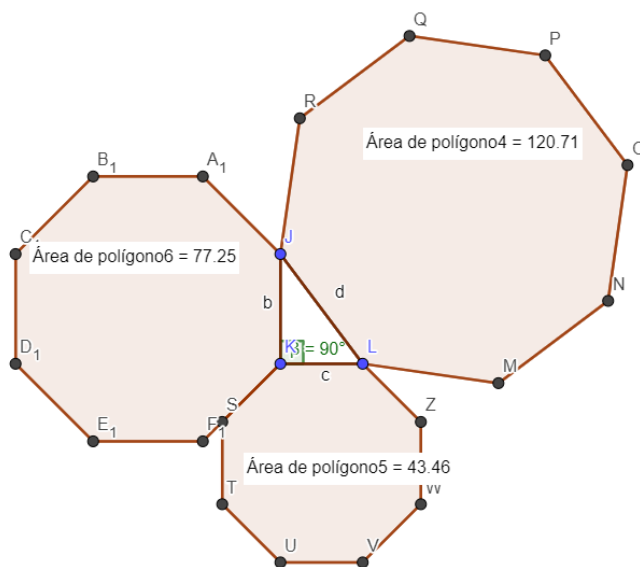
compreensão da manipulação das figuras envolvendo triângulos retângulos. Ambas em links e QR codes.

Figura 2.21 Triângulo Retângulo no Geogebra



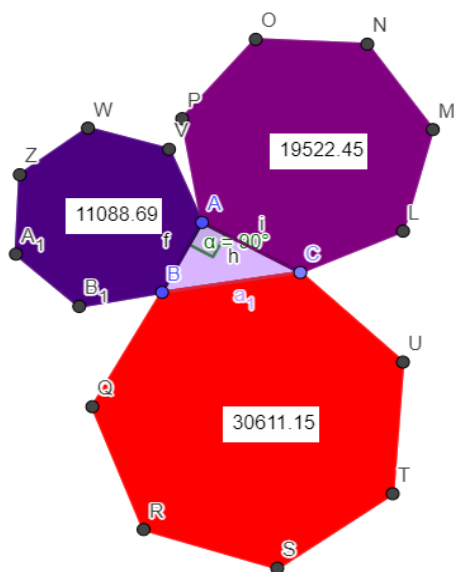
Fonte: Produzido pelo autor

Figura 2.22 Triângulo Retângulo no Geogebra



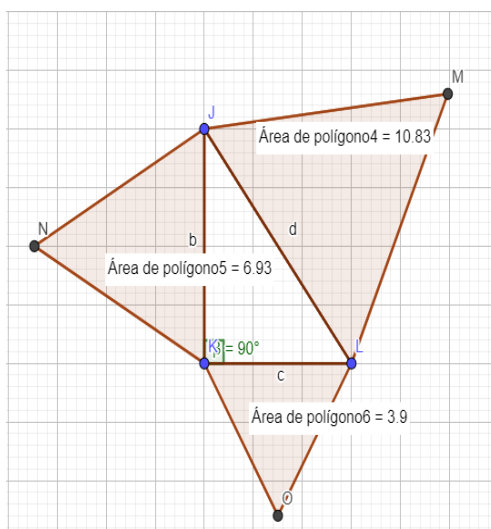
Fonte: Produzido pelo autor

Figura 2.23 Triângulo Retângulo no Geogebra



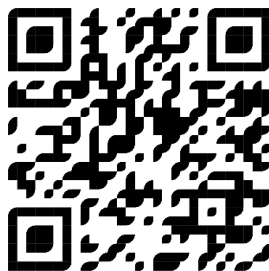
Fonte: Produzido pelo autor

Figura 2.24 Triângulo Retângulo no Geogebra



Fonte: Produzido pelo autor

<https://www.geogebra.org/calculator/xsavjm3k>



<https://www.geogebra.org/calculator/pn5vwfux>

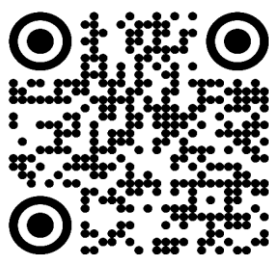
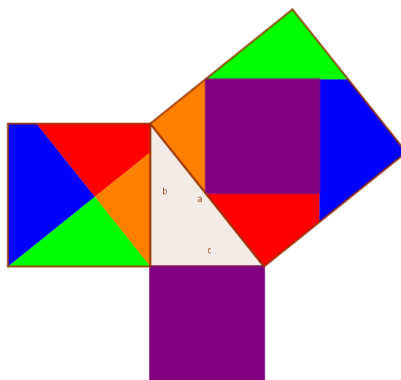
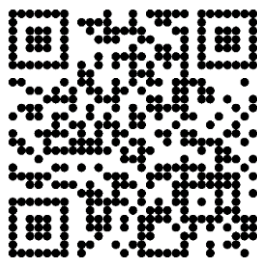


Figura 2.25 Verificação por Perigal no Geogebra animada



Fonte: Produzido pelo autor

<https://www.geogebra.org/classic/zx3dmxz5>



<https://www.geogebra.org/classic/wyywrdm>

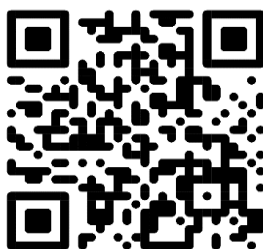
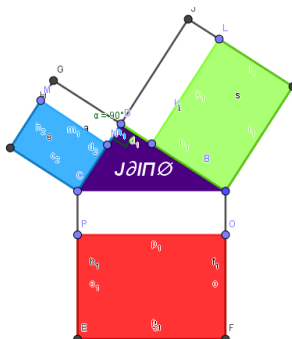
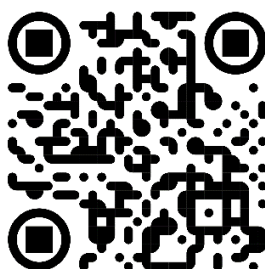


Figura 2.26 Verificação geométrica no Geogebra



Fonte: Produzido pelo autor

<https://www.geogebra.org/classic/gwdpg3cm>



## 2.4 Mostrações e verificações

As imagens revelam manipulações caseiras do teorema de Pitágoras, explorando materiais como moedas, papel, dominó, impressão 3d e elaboradas estruturas em madeira. Essas representações visuais oferecem uma forma satisfatória e lúdica de comprovar o teorema, indo além da fórmula padrão  $a^2 = b^2 + c^2$ , comumente ensinada nas escolas. Cada imagem proporciona uma abordagem única para a compreensão do teorema, permitindo que os observadores visualizem claramente as relações entre os lados dos triângulos retângulos e a validação do teorema de Pitágoras. Essas manipulações caseiras estimulam a criatividade e a apreciação da beleza matemática inerente ao teorema de Pitágoras, tornando o aprendizado mais envolvente e interativo. Elas possuem link os quais após serem acessados levaram a vídeos caseiros.

Figura 2.27 Verificação Lúdica 1



Fonte: Produzido pelo autor

<https://www.youtube.com/shorts/HRajppa8dGM>

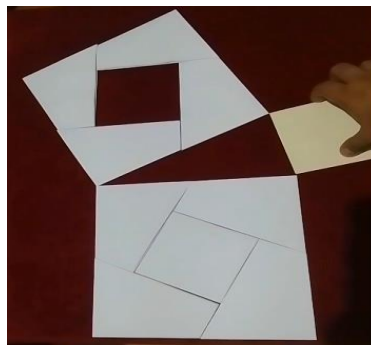
Figura 2.28 Verificação Lúdica 2



Fonte: Produzido pelo autor

<https://youtube.com/shorts/PRsijCo2ysM>

Figura 2.29 Verificação Lúdica com Origami



Fonte: Produzido pelo autor

<https://youtu.be/z6zFFDO7j3Y>

Figura 2.30 Verificação Lúdica 3



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 2.31 Verificação lúdica 4



Fonte: Produzido pelo autor

<https://www.youtube.com/watch?v=O9UYA6KsoBM&feature=youtu.be>

Figura 2.32 Verificação lúdica com moedas de 1 real



Fonte: Produzido pelo autor

[https://youtu.be/Yi\\_OnK31k0](https://youtu.be/Yi_OnK31k0)

Figura 2.33 Verificação lúdica com uso do Tangram e origamis



Fonte: Produzido pelo autor

<https://youtube.com/shorts/RX4ejDTwiQU?feature=share>

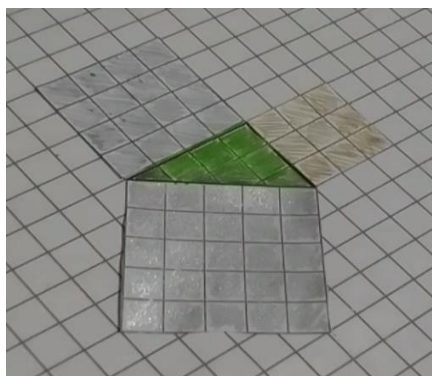
Figura 2.34 Verificação lúdica utilizando Tangram



Fonte: Produzido pelo autor

<https://youtube.com/shorts/f2X47t60EVk?feature=share>

Figura 2.35 Verificação lúdica no papel quadriculado



Fonte: Produzido pelo autor

<https://youtube.com/shorts/dYQbH1sByzA>

Figura 2.36 Verificação lúdica com Dominó



Fonte: Produzido pelo autor

<https://www.youtube.com/watch?v=EEAGu6ow8fQ>

Figura 2.37 Verificação lúdica em 3D



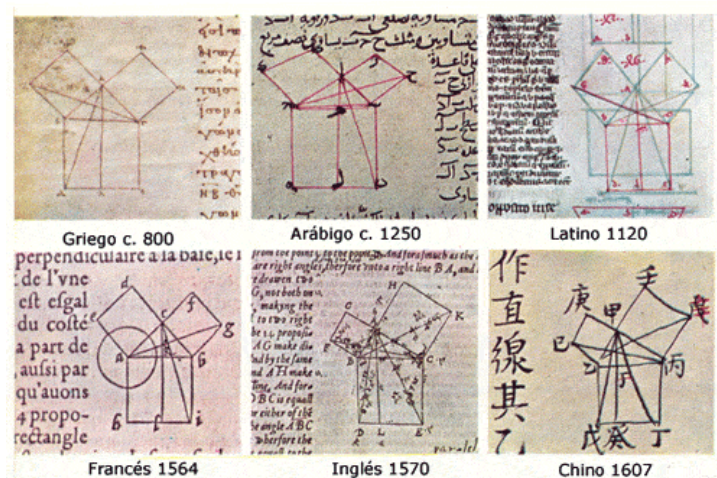
Fonte: Produzido por TAVARES 3D PRINT.

[https://www.youtube.com/watch?v=c2\\_vONn2Nns](https://www.youtube.com/watch?v=c2_vONn2Nns)

## 2.5 Outras demonstrações ao redor do mundo

As demonstrações do teorema de Pitágoras que se encontram ao longo da história, estão representadas na figura 2.38, onde pode-se observar nos documentos de demonstração a linguagem (língua) do país grego, árabe, latim, francês, inglês e mandarim.

Figura 2.38 Teorema de Pitágoras pelo mundo



Fonte:

<https://i.pinimg.com/originals/a6/c7/92/a6c79271e4627113b94be2ff8b6d50fc.gif>

## 2.6 Curiosidades

No passado, a palavra "hipotenusa" era utilizada para se referir às cordas do instrumento musical conhecido como lira. Essas cordas, ao serem tocadas, produziam diferentes sons e, curiosamente, formavam triângulos retângulos em conjunto com os lados do instrumento.

**HIPOTENUSA** – o lado mais longo de um triângulo retângulo se chama assim devido ao Grego hypotenousa, “o que se estende debaixo (do ângulo reto)”, já que esse é sempre o lado oposto a tal ângulo. O nome se forma de hypo, “debaixo”, mais teinein, “esticar, alongar”.

**CATETO** – os outros dois lados do triângulo retângulo têm esse nome do Grego káthetos, “descido, abaixado de maneira reta”, de kathíenai, “fazer descer, empurrar”, de kata, “para baixo”, mais híenai, “enviar, mandar”. Isso tudo porque eles “caem” no ângulo reto, se os projetarmos para o centro da figura.

### O sangaku

O Sangaku é uma expressão artística matemática tradicional do Japão, surgida durante o período Edo, que compreende os séculos XVII e XIX. A palavra "Sangaku" significa "tábuas matemáticas" em japonês, referindo-se às placas de madeira em que os problemas matemáticos eram inscritos e exibidos em santuários e templos.

Essas placas de madeira eram frequentemente doadas por estudiosos, professores e estudantes, como uma forma de agradecimento aos deuses por seu sucesso acadêmico. Os problemas matemáticos do Sangaku englobavam uma ampla gama de assuntos, como geometria, álgebra, trigonometria e cálculo.

Existem sangaku que são notavelmente simples e podem ser resolvidos aplicando o teorema de Pitágoras ou usando propriedades de triângulos semelhantes, como:

Figura 2.39 Pitágoras na cultura Japonesa



Fonte: Produzido pelo autor

Relacionar a distância dos pontos de tangência da reta com os círculos e os seus raios.

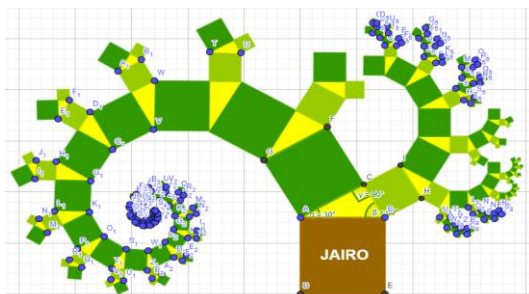
A construção auxiliar sugerida pela figura da direita e a aplicação do teorema de Pitágoras levam-nos à conclusão:

$$\overline{AB}^2 = 4r_1r_2$$

### Árvore Pitagórica

O fractal conhecido como 'Árvore Pitagórica' é criado por meio da aplicação da interpretação geométrica do Teorema de Pitágoras. Através das etapas a seguir, você poderá aprender a construir este interessante fractal.

Figura 2.40 Árvore Pitagórica



Fonte: Produzido pelo autor

<https://www.geogebra.org/m/rngnkfkz>

## Ângulos retos no cotidiano

Ao examinarmos o ambiente ao nosso redor, é perceptível a abundância de ângulos retos. Podemos observá-los nas estruturas de edifícios, nas superfícies das janelas, nos designs dos móveis, nos postes que sustentam a energia elétrica, na configuração predominante dos livros, nos revestimentos dos pisos, nos campos de futebol e nas quadras poliesportivas.

Figura 2.41 ângulos retos invisíveis



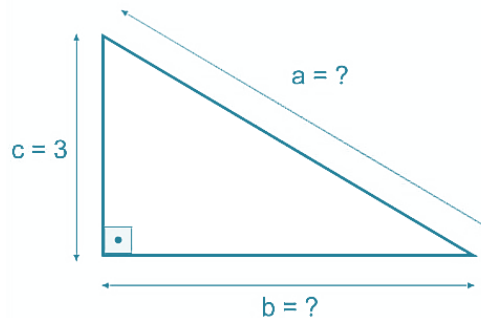
Fonte: Imenes 2008

Calculando lados de triângulo retângulo sem o Teorema de Pitágoras

Como calcular lados de triângulo retângulo sem utilizar o Teorema de Pitágoras?

Com esse procedimento, podemos calcular a hipotenusa e o lado mais longo de certos triângulos retângulos que fazem parte de um conjunto de comprimentos conhecido como terno pitagórico primitivo de ordem triangular, sem a necessidade de utilizar o Teorema de Pitágoras.

Figura 2.42 truque que dispensa o teorema



Fonte: Ternos Pitagóricos e Sequências Numéricas

Triângulo retângulo cujo cateto menor possui o comprimento de 3 unidades.

Passos:

1º Achar as medidas do cateto maior e da hipotenusa.

**a)** Eleve ao quadrado o lado "c"

$$3^2 = 9$$

**b)** Some 1 unidade ao quadrado

$$9 + 1 = 10$$

**c)** Divida o resultado por 2

$$10 : 2 = 5$$

**d)** 5 é a medida da hipotenusa

2º Calcular o cateto maior do triângulo retângulo - lado "b"

**a)** Eleve ao quadrado o lado "c"

$$3^2 = 9$$

**b)** Subtraia 1 unidade do quadrado

$$9 - 1 = 8$$

**c)** Divida o resultado por 2

$$8 : 2 = 4$$

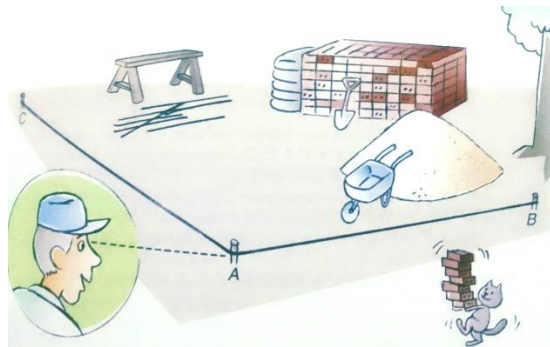
**d)** 4 é a medida do cateto maior

As paredes devem, normalmente, formar ângulos retos. Na linguagem dos construtores, elas devem "estar no esquadro". Como serão marcados esses ângulos retos?

Como marcar com precisão cantos retos cujos lados devem ter vários metros de comprimento.

(Inicialmente, eles esticam um fio entre duas estacas A e B, cravadas no chão. Depois, esticam um fio da estaca A até a estaca C, que não é cravada no chão. Um ajudante fica segurando-a até o mestre-de-obras dizer onde deve ser cravada. O mestre escolhe esse local "a olho", baseado em sua sensibilidade e experiência.

Figura 2.43 Construções de residências



Fonte: Imenes 2008

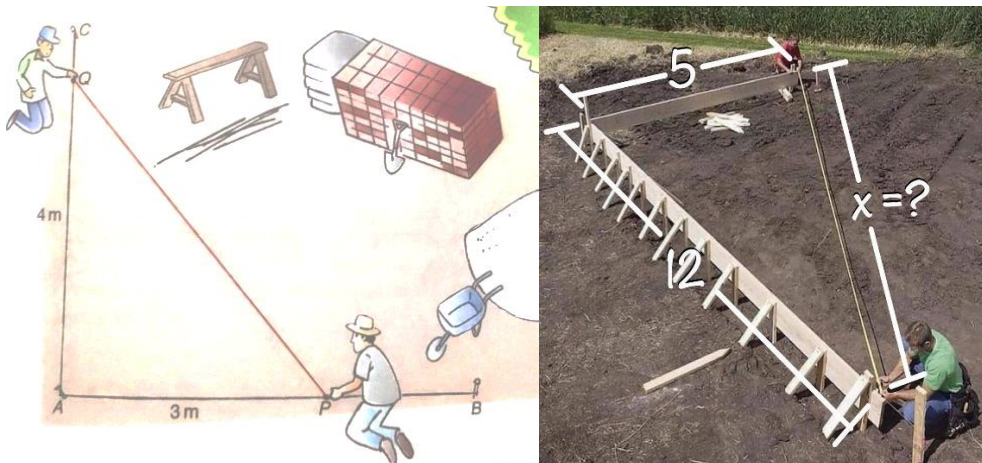
A posição do fio AC precisa ser conferida, pois o mestre não pode levantar paredes "fora do esquadro", quer dizer, formando ângulos agudos ou obtusos. É aqui que entra o teorema de Pitágoras.) Para ter certeza de que os fios AB e AC formam um ângulo reto, o mestre e o ajudante fazem.

Sobre o fio AB, marcam P a 3 m de A;

Sobre o fio AC, marcam Q a 4 m de A;

Finalmente, medem a distância PQ.

Figura 2.44 Esquadro

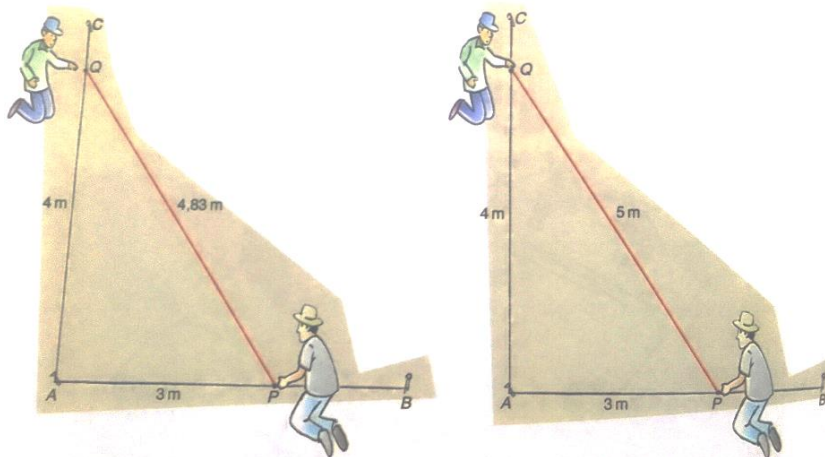


Fonte: Imenes 2008 e @antoniokaiq

Para o ângulo ser reto, a distância PQ deve medir exatamente 5 m.

É curioso! Muitos mestres-de-obras não puderam frequentar colégios e, por isso, não sabem que o que estão usando tem a ver com o teorema de Pitágoras, mas usam esses conhecimentos empírico.

Figura 2.45 Ternos Pitagóricos



Fonte: Imenes 2008

O raio da Terra foi calculado de diversas maneiras até que fossem obtidos resultados confiáveis. O teorema de Pitágoras, surpreendentemente, nos dá uma maneira de calcular o raio da Terra.

Olhando o mar, ao longe o horizonte, isto é, o lugar em que mar e céu parecem se encontrar. É nessa altura que os barcos que vão mar adentro desaparecem de a vista. Deixando de vê-los devido à curvatura da Terra.

Figura 2.46 Horizonte

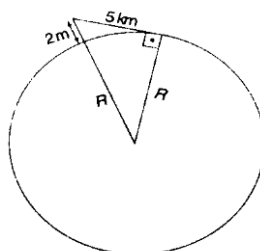


Fonte: Imenes 2008

Da praia observasse o horizonte. Supondo que seja observado a 2 m de altura. Qual será a distância entre o ponto em que se observa e o horizonte?) Como obter essa distância? Um jeito seria pedir a ajuda de um amigo. Ele sairia da praia num barco a motor de velocidade conhecida, numa rota perpendicular à linha da praia.

Aí, bastaria marcar o tempo que ele leva para desaparecer no horizonte. Mas como distância já foi medida muitas vezes por entusiastas no assunto é de conhecimento o valor aproximado de 5 km. Com essa informação e o teorema de Pitágoras, A linha de visão que parte do observador tangencia a superfície terrestre. A linha do horizonte, nesta representação, corresponde, portanto, a um ponto de tangência. Este indica o limite em que se deixa de ver o mar.

Figura 2.47 Raio da terra



Fonte: Imenes 2008

Um dos catetos desse triângulo imaginário é o raio da Terra, com extremo no ponto de tangência. Outro cateto é a linha de visão. E a hipotenusa é a distância do observador ao centro da Terra, isto é, ela corresponde ao raio da Terra mais a altura de seus olhos. Observando as medidas, em quilômetros, dos lados desse triângulo;

Hipotenusa  $R + 0,002$  km ( $0,002$  km = 2 m).

Cateto maior R.

Cateto menor 5 km.

$$(R + 0,002)^2 = R^2 + 5^2$$

$$R^2 + 0,004 \cdot R + 0,000004 = R^2 + 25$$

Subtraindo  $R^2$  nos dois lados da equação.

$$0,004 \cdot R + 0,000004 = 25$$

$$0,004 \cdot R = 25 - 0,000004 = 24,999996$$

$$R = \frac{24,999996}{0,004} = 6249,99$$

De acordo com esse processo, o raio da Terra é quase 6 250 km. É um resultado razoavelmente aproximado. Métodos atuais, bem mais precisos chegaram a um valor de 6 375 km.

## 2.7 Conclusão do Capítulo.

Neste capítulo apresentou a descrição teórica e matemática do teorema de Pitágoras, além de curiosidades e também discorreu-se diferentes demonstrações relacionadas ao referido teorema, cujos estudiosos matemáticos utilizados foram, Euclides, Elisha Scott Loomis, Bhaskara, Leonardo da Vinci, James Garfield, Albert Einstein, Pappus, Henry Perigal e George Pólya, os quais utilizaram diferentes metodologias para suas demonstrações.

No próximo capítulo serão apresentadas diversas aplicações do teorema de Pitágoras, dentro das seguintes áreas, matemática, física e engenharia, com

o objetivo de discorrer acerca da relevância do referido teorema nas mais diversas áreas do conhecimento.

### **3. Aplicações do Teorema do Pitágoras específicas da Matemática.**

O presente capítulo tem como objetivo trazer aplicações do teorema de Pitágoras, como forma de mostrar a relevância desse teorema. Dessa forma foram escolhidas as seguintes áreas do conhecimento, Matemática, Física e Engenharia, para mostrar a aplicabilidade do teorema de Pitágoras.

Na matemática o teorema de Pitágoras é utilizado dentre tantas aplicações, na área geometria, para o cálculo da potência de um ponto, tal conceito consiste no produto de todas as distâncias de um ponto genérico a uma reta que passe por tal ponto e por uma circunferência dada.

Ainda na matemática, aplica-se o teorema de Pitágoras, no campo da geometria analítica para que seja encontrado o módulo de um vetor genérico, uma vez que as componentes do vetor em  $R^2$  formam junto com o vetor propriamente dito, a figura de um triângulo retângulo, o que indica um método de solucionar a norma de tal vetor pelo teorema de Pitágoras.

Na geometria espacial pode-se calcular a diagonal de um poliedro a partir da aplicação do teorema de Pitágoras, utilizando-se do mesmo método e possível calcular o apótema e a geratriz de um poliedro.

Outra aplicação do teorema de Pitágoras, no campo da física e engenharia pode ser encontrada no cálculo da potência aparente de elementos e equipamentos elétricos, tais como motores, transformadores e geradores de energia. Uma vez que a potência aparente corresponde a soma fasorial da potência ativa ou útil e a potência reativa, a qual corresponde a potência necessária para criação de campos elétricos e magnéticos nos aparelhos mencionados.

#### **3.1 Aplicação do teorema de Pitágoras na geometria analítica**

Uma das aplicações do teorema de Pitágoras pode ser verificada na mensuração do comprimento de um vetor genérico. Conforme pode ser verificado abaixo.

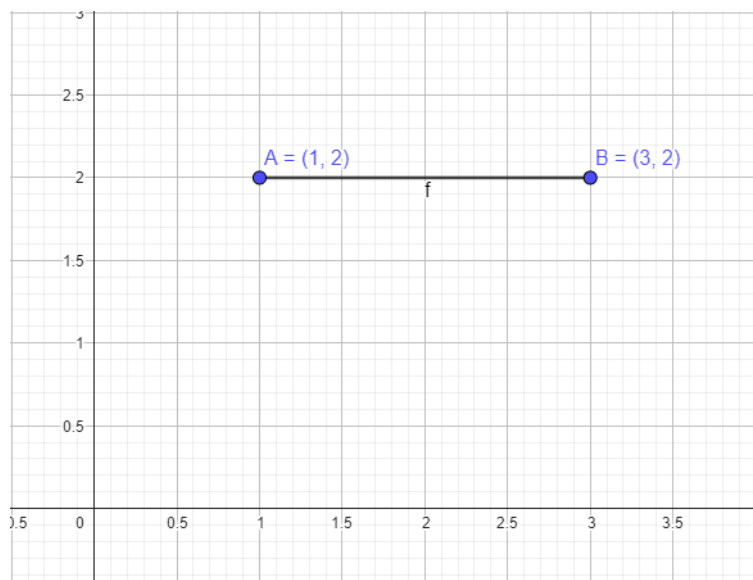
A distância entre dois pontos é o comprimento do segmento de reta que os conecta. Podemos usar a geometria analítica para calcular essa medida. Distância entre dois pontos em um plano.

No plano, um ponto é totalmente identificado pelo conhecimento do par ordenado  $(x, y)$  associado a ele. Para saber a distância entre dois pontos, primeiro os representamos no plano cartesiano, depois calculamos essa distância

### Exemplos:

1) Qual a distância entre o ponto A  $(1,2)$  e o ponto B  $(3,2)$ ?

Figura 3.1 Distância entre dois pontos que possuem o mesmo valor do eixo ordenado

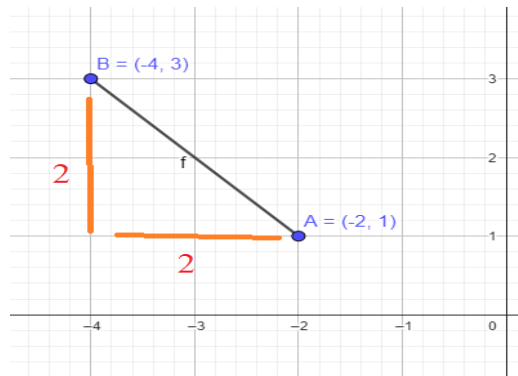


Fonte: Produzido pelo autor

$$d(A, B) = 3 - 1 = 2$$

2) Qual a distância entre o ponto A  $(-2, 1)$  e o ponto B  $(-4, 3)$ ?

Figura 3.2 Aplicação do teorema de Pitágoras para o cálculo da distância de dois pontos.



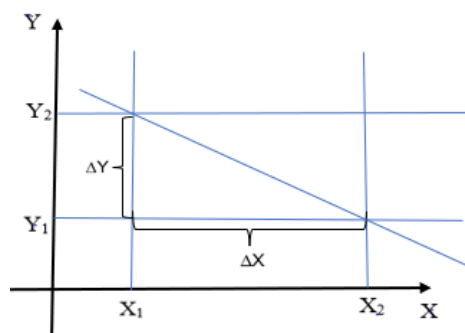
Fonte: Produzido pelo autor

Observemos que a distância entre os pontos A e B é igual à hipotenusa do triângulo retângulo de lados 2 e 2. Portanto, usaremos o teorema de Pitágoras para calcular a distância entre pontos dados.

$[d(A, B)]^2 = 2^2 + 2^2 = \sqrt{8}$  Fórmula da distância entre dois pontos em um plano  
Para encontrar a fórmula da distância, podemos generalizar os cálculos feitos no Exemplo 2. Para quaisquer dois pontos, digamos A  $(x_1, y_1)$  e B  $(x_2, y_2)$ , temos:

A  $(X_1, Y_1)$  e B  $(X_2, Y_2)$

Figura 3.3 Aplicação do teorema de Pitágoras para o cálculo da distância de dois pontos quaisquer



Fonte: Produzido pelo autor

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

### 3.2 Utilizando o Teorema de Pitágoras nos Números Complexos

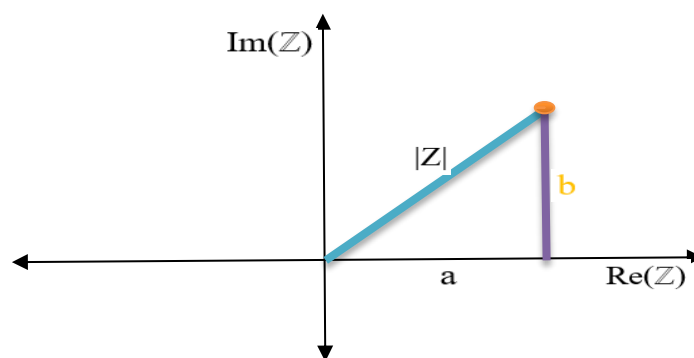
Na apresentação de um número complexo, seja  $P(a,b)$ , o número complexo  $z = a + bi$ , conhecido como módulo de  $z$ , é indicado por  $|z|$ , a distância de  $P$  à origem. A ideia por trás do módulo é que números reais, mas números reais, são representados como pontos em uma reta numérica, não como pontos em um plano.

Assim, para saber o módulo de um número complexo, calcula-se a distância entre a origem e o ponto  $P$  (dPO). Ao calcular a distância entre dois pontos em um plano complexo, a mesma fórmula é usada para a distância entre dois pontos em um plano retangular, então usamos o teorema de Pitágoras:

$$|Z|^2 = a^2 + b^2$$

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Figura 3.4 Aplicação do teorema de Pitágoras para o cálculo do módulo de um número complexo qualquer



Fonte: Produzido pelo autor

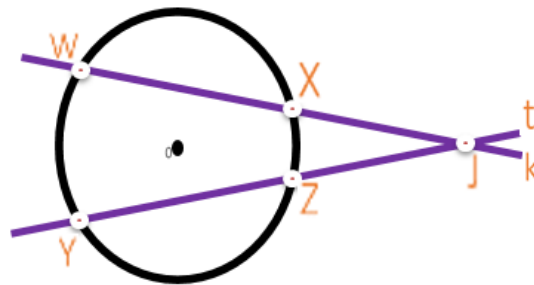
### 3.3 Aplicação do teorema de Pitágoras Geometria Plana

### Potência de um ponto

Na Geometria Plana a potência de um ponto J é definida como o produto de todas as suas distâncias aos pontos gerados na intersecção de uma reta que passe por J e por uma circunferência dada. Podendo ser mostrado das seguintes maneiras:

O ponto J é exterior à circunferência

Figura 3.5 Potência de um ponto qualquer



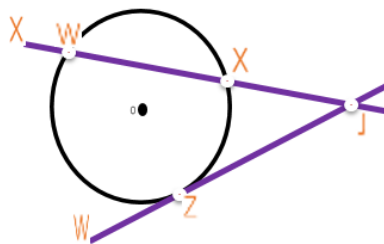
Fonte: Produzido pelo autor

O ponto J é a intersecção das retas t e k e está localizado no exterior da circunferência. Assim:

$$JW \cdot JX = JZ \cdot JY$$

Podendo ocorrer de uma das retas ou as duas podendo ser tangentes à circunferência.

Figura 3.6 Potência de um ponto qualquer com uma reta tangente a circunferencia

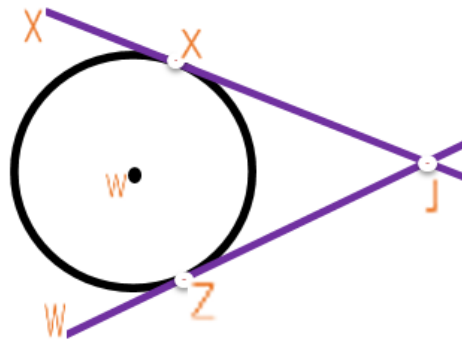


Fonte: Produzido pelo autor

$$JW \cdot JX = JZ^2$$

Nas duas retas tangentes à circunferência:

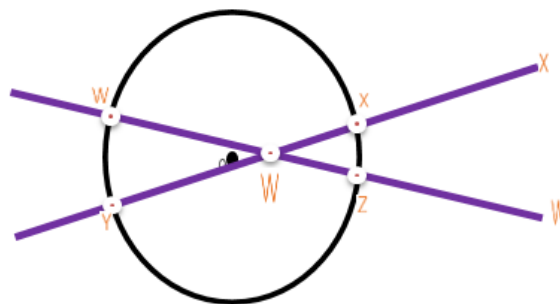
Figura 3.7 Potência de um ponto qualquer com duas retas tangente a circunferência



Fonte: Produzido pelo autor

O ponto J é interior à circunferência

Figura 3.8 Potência de um ponto interior circunferência



Fonte: Produzido pelo autor

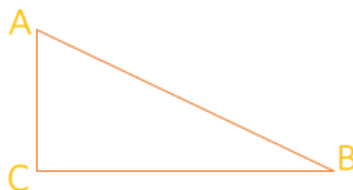
O ponto J é a intersecção das retas t e k e está localizada no interior da circunferência.

$$WJ \cdot JX = ZJ \cdot YJ$$

Utilizando o Teorema de Pitágoras o qual é tema do trabalho.

Considerar um triângulo retângulo ABC:

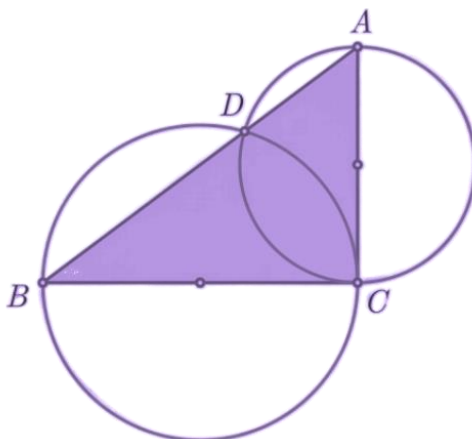
Figura 3.9 Triângulo retângulo qualquer



Fonte: Produzido pelo autor

Duas circunferências de diâmetros iguais aos catetos, cujos centros encontram-se sobre os pontos médios desses catetos:

Figura 3.10 Triângulo retângulo feito por dois raios de circunferência

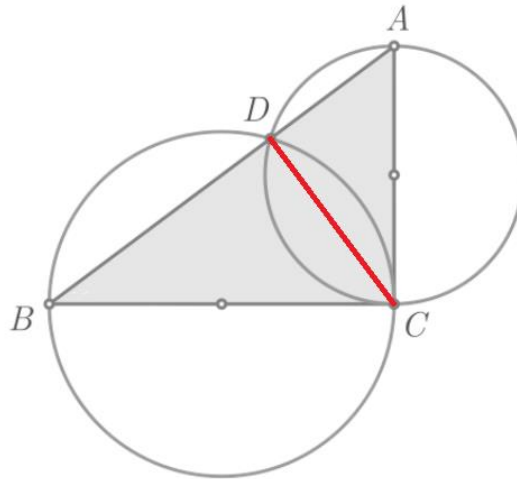


Fonte: adaptado de <https://www.obaricentrodamente.com/2020/12/prova-do-teorema-de-pitagoras-utilizando-a-potencia-de-um-ponto.html?m=1>

O ponto D é a intersecção das circunferências sobre a hipotenusa e é o pé da perpendicular baixada de C.

Como o segmento  $CD$  é perpendicular a  $AD$ , logo divide o triângulo  $ABC$  em outros dois triângulos retângulos:  $ACD$  e  $BCD$ .

Figura: 3.11 Criação de dois triângulos retângulo a partir do segmento que liga duas extremidades de uma circunferência



Fonte: adaptado de <https://www.obaricentrodamente.com/2020/12/prova-do-teorema-de-pitagoras-utilizando-a-potencia-de-um-ponto.html?m=1>

$AC$  é tangente à circunferência  $BDC$ , será utilizada a propriedade da potência de um ponto.

$$AC^2 = AB \cdot AD$$

Como mostrado acima,  $BC$  é tangente à circunferência  $ADC$ , temos:

$$BC^2 = BD \cdot AB$$

Somando as equações

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + BD \cdot AB$$

$$AC^2 + BC^2 = AB(AD + BD)$$

como  $AD + BD = AB$

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

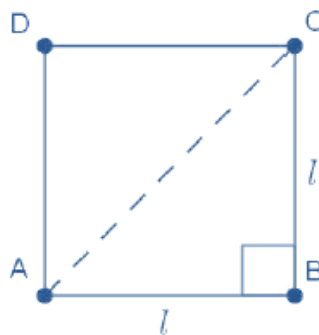
### A diagonal de um quadrado

É um conceito importante na geometria. Um quadrado é uma figura geométrica que possui quatro lados de igual comprimento e quatro ângulos retos. Calcular a diagonal de um quadrado ou retângulo pode ser uma tarefa útil que encontra aplicação em diversas situações do dia a dia.

#### Exemplo

As diagonais de um quadrado de lado com medida igual a  $l$  medem  $l\sqrt{2}$

Figura: 3.12 Diagonal do quadrado



Fonte: Adaptada Oliveira 2007

Se ABCD é um quadrado de lado com medida  $l$  e com diagonais  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$ , então o triângulo ABC é retângulo em  $\hat{B}$  e isósceles  $\overline{AB} = \overline{BC} = l$ .

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = l^2 + l^2$$

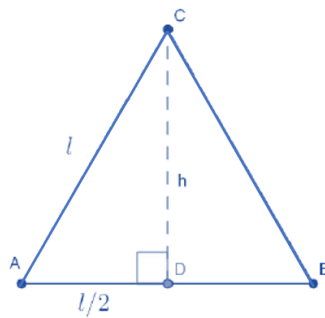
$$\overline{AC} = \sqrt{2l^2}$$

### A altura de um triângulo equilátero

Caracterizado por ter todos os seus lados com o mesmo comprimento e todos os ângulos internos medindo 60 graus.

As alturas de um triângulo equilátero de lado com medida  $l$  medem  $\frac{l\sqrt{3}}{2}$

Figura: 3.13 Altura do triângulo



Fonte: Adaptada Oliveira 2007

No triângulo ADC

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

Então:

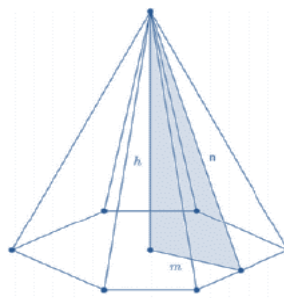
$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \Rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

### 3.4 Aplicação do teorema de Pitágoras Geometria Espacial

#### Relação entre altura, apótema da base e apótema de pirâmides regulares

As relações entre os elementos de uma pirâmide regular verificam-se de modo direto do Teorema de Pitágoras

Figura: 3.14 altura da pirâmide



Fonte: Adaptada Oliveira 2007

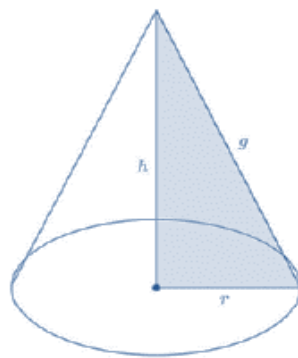
Em uma pirâmide regular o quadrado da medida  $n$  do apótema é igual a soma dos quadrados das medidas  $h$  da altura e  $m$  apótema da base.

$$n^2 = h^2 + m^2$$

### Relação entre altura, geratriz e raio do cone reto

As Relação entre altura, geratriz e raio do cone reto verificam-se de modo direto do Teorema de Pitágoras.

Figura: 3.15 Cone



Fonte: Adaptada Oliveira 2007

Em um cone reto o quadrado da medida  $g$  da geratriz é igual à soma dos quadrados das medidas  $r$  do raio e  $h$  da altura.

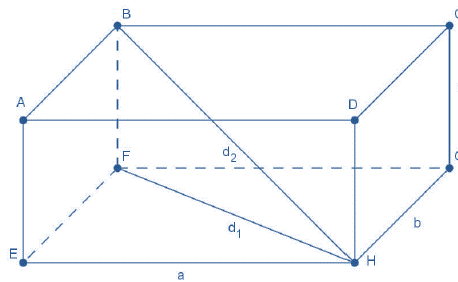
$$g^2 = r^2 + h^2$$

### Diagonal de um bloco retangular

O paralelepípedo retângulo é um poliedro formado por 6 retângulos.

A medida  $d$  da diagonal de um bloco retangular cujas arestas medem  $a$ ,  $b$ ,  $c$  é igual.

Figura: 3.16 Paralelepípedo



Fonte: Oliveira 2007

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

### 3.5 Aplicações do Teorema de Pitágoras em outras áreas como Física e Engenharia Elétrica.

Saindo brevemente da matemática e entrando em outros campos de conhecimento que também utilizam o objeto de estudo deste trabalho aplicando e demonstrando sua respectiva importância.

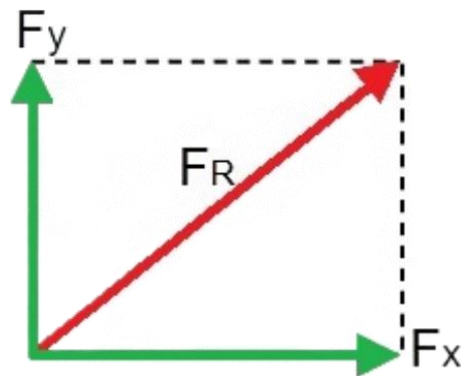
A **força resultante** são todas as forças que atuam em um corpo, tanto em intensidade quanto em direção e sentido. A soma das forças aplicadas ao corpo, e seu estado, estar parado ou em movimento, é efeito da força resultante.

Em um corpo onde atuam as forças:  $\vec{F}_4$ ,  $\vec{F}_5$  e  $\vec{F}_6$ , a resultante das forças é igual a:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_4 + \vec{F}_5 + \vec{F}_6$$

Na soma de vetores perpendiculares encontramos também o teorema denominado por Pitágoras, que é utilizado para encontrar seu módulo quando duas forças perpendiculares atuarem em um corpo.

Figura 3.17 Representação da soma vetorial de duas forças perpendiculares



Fonte: Produzido pelo autor

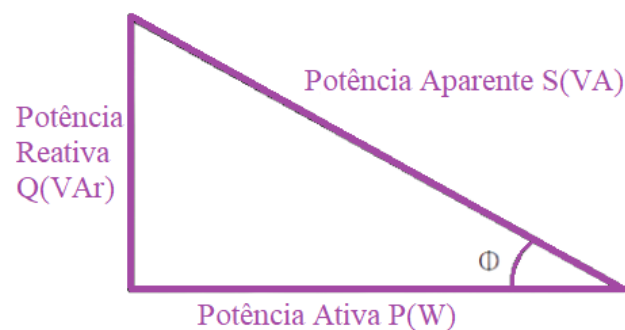
$$F_R = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2}$$

### 3.5.1 Potência Elétrica

Quantidade energia elétrica que é convertida em outra energia durante um período de tempo.

Fórmula utilizada na potência aparente  $P = i \times v$ , entretanto para encontrar as fórmulas das potências, é necessário utilizar o Triângulo das Potências que é relacionado a três potências existentes e usando um teorema de Pitagórico.

Figura 3.18 Representação Fasorial da potência ativa, reativa e aparente



Fonte: Produzido pelo autor

### 3.5.2 Potência Aparente – S (VA)

É a potência que o equipamento retira da rede elétrica para ele poder funcionar. Ainda do triângulo, pode-se retirar a fórmula.

$$s = \sqrt{(P^2 + Q^2)} \text{ Resolvendo}$$

$$P_s = V \times I \text{ (VA)}$$

### 3.5.3 Potência Ativa – P (W)

E a potência que o equipamento utiliza para funcionar é a potência ativa.

$$P_p = V \times I \times \cos(\Phi) \text{ (W)}$$

### 3.5.4 Potência Reativa – Q (VAr)

É a potência que é gasta pelo equipamento, mas não produz trabalho.

Do triângulo das potências, tem-se

$$P_Q = I \times V \times \sin(\Phi) \text{ (VAr)}$$

## 3.6 Conclusão do Capítulo.

Consideramos que este capítulo teve como objetivo demonstrar a importância do teorema de Pitágoras ao explorar suas diversas aplicações. Dessa forma foram selecionadas três áreas do conhecimento, a saber: Matemática, Física e Engenharia, nas quais mostrou-se que o teorema de Pitágoras encontra ampla aplicabilidade.

No próximo capítulo, exploraremos as raízes do teorema de Pitágoras por meio de diferentes registros históricos. Será apresentada a origem clássica do teorema, atribuída a Pitágoras. No entanto, também serão discutidos outros possíveis precursores desse teorema em regiões como Índia, China, Babilônia e Egito, onde os documentos históricos anteriores a Pitágoras revelaram descobertas semelhantes às do filósofo grego.

## 4. Origens do Teorema de Pitágoras

Como discutido no capítulo anterior, a aplicabilidade do teorema de Pitágoras remete à importância de um estudo que possa abordar suas origens históricas, a fim de melhor localizar e compreender aspectos e características que indiquem o desenvolvimento desse conceito matemático (teorema) como uma ferramenta teórica e prática na resolução de "problemas" enfrentados pela humanidade.

No presente capítulo será abordado as origens do teorema de Pitágoras, com base em diferentes registros históricos. Dessa forma será apresentada a origem clássica do teorema a partir de Pitágoras. Entretanto serão exibidos outros possíveis primórdios do referido teorema nas seguintes localidades Índia, China e Babilônia, cujos documentos históricos são anteriores a Pitágoras e mostram descobertas semelhantes às do filósofo grego.

Pitágoras foi um matemático que viveu entre os anos 570 a 495 a.C, ao longo de sua vida ele fez viagem das seguintes regiões Síria, Arábia, Caldeia, Pérsia, Índia e Egito, nas quais, o filósofo fez importantes descobertas, ao retornar para a Grécia, Pitágoras teve uma tentativa frustrada em estabelecer uma escola na região, mas o governador da região não permitiu tal fato. Então o matemático foi para o sul da Itália, onde enfim foi fundada uma escola Pitagórica, a qual durante seu funcionamento reuniu muitos seguidores, também no mesmo período foi formulado o teorema que se atribuíra Pitágoras.

Acerca de uma possível origem do teorema de Pitágoras, cita-se registros do povo Indiano no período entre os anos 1500 a.C. – 500 a.C, nessa época o referido povo utilizava das triplas Pitagóricas para construção de altares, conforme descrito no documento histórico chamado Sulbasutras, o qual também indica que esse povo fazia uso de outra identidade matemática relacionada ao quadrado da soma de dois números.

Além dos Indianos, outro povo que em seus estudos apresentou conhecimentos relacionados ao teorema de Pitágoras, foram os chineses, tendo como base um livro chinês do século III denominado Zhoubi Suanjing, o qual coletou 246 obras com problemas, em uma dessas obras observa-se um uso

implícito do teorema de Pitágoras para a estimação de distâncias que não podem ser alcançadas, como a distância da terra ao sol.

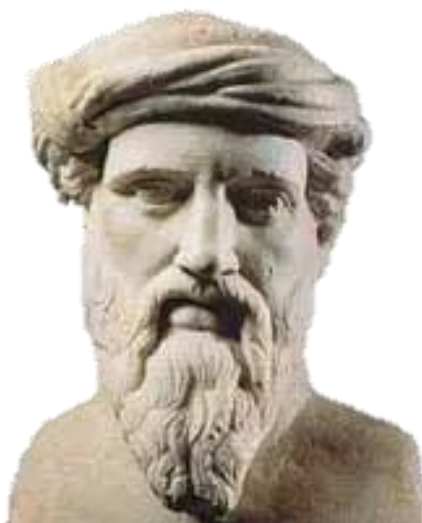
No Egito antigo (3000 a.c) existem evidências de agrimensores já conheciam o triângulo retângulo e usavam as medidas de lado 3,4 e 5, além disso utilizavam os triângulos de lado 5,12,13 e 20,21 e 29. Sabe-se também que nessa época costumava-se amarrar 13 nós equidistantes em uma corda, criando 12 intervalos e igual comprimento, em seguida conectava-se o primeiro nó com o decimo terceiro e marcava-se o quarto e oitavo nó com estacas e assim construía-se um triângulo retângulo, com ladas 3,4 e 5.

A Mesopotâmia, considerada berço da civilização abriga muitos importantes tabletes de matemáticos, feitas de barro. Dentre esses, destacasse aqueles encontrados na Babilônia, cujos registros arqueólogos indicam que tal povo era capaz de calcular o valor de uma diagonal de um quadrado. Além disso outros tabletes babilônicos continham registros de ternos Pitagóricos e também a utilização de cálculos com triângulo retângulo para delimitação de terrenos.

#### **4.1 História e contribuições de Pitágoras**

Segundo Gebran (2004), Pitágoras, conhecido como Pitágoras de Samos, nasceu por volta de 570 aC na ilha de Samos, no mar Egeu, matemático e filósofo grego. Autor do "Teorema de Pitágoras": "Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos". Escreveu nas áreas de filosofia, música, ética, geografia e medicina. Ele não deixou obras escritas, e tudo o que se sabe sobre ele vem dos escritos de seus discípulos.

Figura 4.1 o lendário criador dos termos “Filosofia”



Fonte: <http://www.ghtc.usp.br/server/Sites-HF/Conrado/pitagor.jpg>

Uma expressão muito divulgada e muitas vezes remetida a Pitágoras é a seguinte frase “O ser capaz mora perto da necessidade. ” Muito embora, dessa afirmação pouco se possa comprovar

Filho de um rico comerciante, sua vida e pensamentos são uma mistura de lenda e história real. A lenda começa antes mesmo de Pitágoras nascer, por volta de 580, 575 aC. A sacerdotisa do deus Apolo disse a sua mãe: "Você terá um filho de grande beleza e extraordinária sabedoria, que será um dos homens mais sábios que já existiram". Lenda ou não, a sabedoria do jovem Pitágoras impressionou tanto os professores das melhores escolas de Samos que eles não conseguiram responder às perguntas do jovem. Aos 16 anos, Pitágoras foi enviado a Mileto para estudar com Tales, o maior sábio de sua época. Logo que, Tales percebeu que não tinha mais nada para ensinar ao jovem e começou a trabalhar como professor em descobertas geométricas e matemáticas.

Já adulto, em busca de novos conhecimentos, Pitágoras passou a incorporar ideias da ciência e da religião de outras nações. Ele viajou para a Síria, Arábia, Caldeia, Pérsia, Índia e Egito, onde se estabeleceu e passou mais de 20 anos.

Em matemática, Pitágoras parece ter aprendido mais enquanto viajava pelo Egito. Ele aprendeu muito sobre números e números de civilizações

anteriores ao Declínio no Oriente Médio. Strathern 1988 em seu livro fala um pouco mais sobre isso:

Naquela época, viajar para o leste era visto como uma forma de ampliar seus horizontes, não os desvanecer. O Egito era considerado mais culto que a Grécia, e provavelmente devia ser ainda (embora não por muito mais tempo). Diz Aristóteles: “No Egito tiveram início as ciências matemáticas, pois lá a nação dos sacerdotes gozava de tempo livre”. Anteriormente, os gregos estavam muito ocupados lutando entre si para se preocupar com as complexidades dos cálculos abstratos. (Strathern, 1998, pág. 17).

Cerca de 530 a. C., Pitágoras volta a Samos com a intenção de abrir uma escola, mas encontra a ilha governada pelo ditador Polícrates, que não quer saber da escola nem do templo. Pitágoras foi expulso da Grécia para Crotona, no sul da Itália, onde se dedicou a ensinar os filhos da nobreza.

Segundo Strathern (1998), em Crotona se definia como filósofo e posteriormente como professor de matemática, o que atraiu um número muito grande de seguidores que inicialmente reconheceram suas qualidades. Pereira (2002) menciona resumidamente sobre sua chegada em Crotona:

Crotona estava "madura" para aceitar Pitágoras, já que havia sido derrotada pelos lócrios e seu povo aspirava a governar Síbaris. Ele estava em total miséria devido à situação em que se encontrava após a derrota nas lutas internas e, tanto, mental e fisicamente, esperava por dias melhores. A cidade era frágil, vulnerável às ideias defendidas por Pitágoras que poderiam iluminar os crotoniatas com seu brilhante evangelho. Crotona tinha ouvido falar que Pitágoras vivia uma vida simples e possuía poderes mágicos, e mais tarde acreditou-se que Pitágoras foi capaz de unir as várias facções da nobreza dominante para destruir a cidade vizinha de Síbaris. (Pereira, 2002, p. 49).

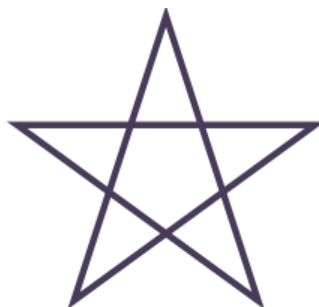
Segundo a perspectiva de Strathern (1998), Pitágoras pode ser considerado o pioneiro na matemática, filosofia e na prática da metempsicose. No entanto, isso não se deve ao fato de ter sido a primeira pessoa a usar números, mas sim por buscar uma explicação racional para o mundo ou acreditar que sua alma havia habitado uma planta, um faraó ou algo semelhante em uma

vida anterior. O que o destacou foi ter sido o primeiro a inventar ou utilizar as palavras "matemático", "filósofo" e "metempsicose" nos sentidos aceitos atualmente, aplicando-as a si mesmo. Além disso, ele também criou a palavra "cosmos", que empregou para designar o mundo. Em grego, "Kosmo" significa "ordem", e Pitágoras utilizou esse termo devido à "harmonia perfeita e organização" que via no mundo.

Fundada em Crotona, os pitagóricos eram politicamente conservadores e mantinham um código de conduta muito rígido, uma irmandade unida por ritos e rituais secretos para eles, mesmo após a morte de Pitágoras e após o fim da escola, seus discípulos nunca violaram as regras. Todas as proibições estabelecidas por Pitágoras em seu ambiente escolar eram rigorosamente respeitadas. É uma escola com caráter dual, além dos estudos de matemática, astronomia e música, também se dedica a questões espirituais. (Boyer, 1996).

Os pitagóricos costumavam atribuir todas as suas descobertas ao fundador, por isso é difícil hoje saber se foi realmente Pitágoras quem fez essas descobertas ou algum outro membro de seus seguidores que faziam parte da referida escola. (EVES, 1997).

Figura 4.2 Símbolo da Escola Pitágoras



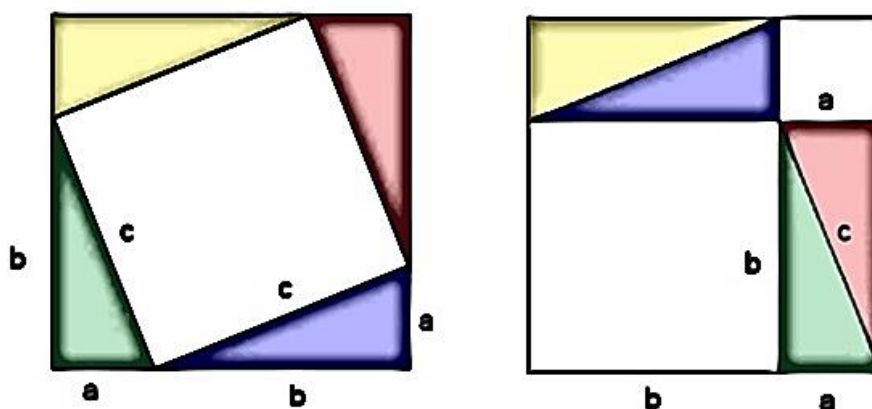
Fonte: adaptada [https://pt.wikipedia.org/wiki/Escola\\_pitagórica](https://pt.wikipedia.org/wiki/Escola_pitagórica)

Como mencionado anteriormente o que se refere a Pitágoras é um completo mistério pois o mesmo não deixou qualquer registro é isso recai sobre sua demonstração do teorema que foi batizado com seu nome, a preponderância

dos historiadores crê que possa ter sido uma demonstração do tipo “geométrica”, baseada na comparação de áreas. (Lima, 2006, p.53)

Em acordo com Eves (2008) embora este fato não seja certo, a prova atribuída a Pitágoras é uma simples prova de decomposição, conforme segue.

Figura 4.3 Possível demonstração feita por Pitágoras



Fonte: adaptado <https://youtu.be/XTngmQvq5Lo>

Como podemos encontrar uma visualização com objetos geométricos em: <https://youtu.be/XR-X7aNn0oY>

Do quadrado de lado  $a + b$ , retire 4 triângulos iguais ao dado, como mostra a figura à esquerda (figura 4.3), para obter um quadrado de lado  $c$ . Mas se a mesma operação for executada conforme mostrado à direita (figura 4.3), dois quadrados com comprimentos laterais  $a$  e  $b$  serão deixados. Portanto, a área do quadrado de lado  $c$  é a soma das áreas dos quadrados de lado  $a$  e  $b$ .

Segundo Eves (2004), após a morte de seu fundador a escola levantou inimigos e o grupo se dispersou, mas suas ideias e ensinamentos transcenderam os tempos. Existem opiniões divergentes sobre a sua morte, uns dizem que um grupo de descontentes com o seu prestígio, atacou e queimou a escola onde lecionava, e o matou, e outros dizem que foi exilado e morreu velho.

Segundo Boyer (2012), Pitágoras era uma figura ainda um tanto obscura com uma história duvidosa, em parte devido a documentos perdidos, biografia sobre ele e ao fato de a escola pitagórica ser secreta e restrita.

Ele é tido até os dias de hoje como sendo o principal responsável pela criação da palavra matemática. Sendo também atribuído a ele a concepção de que essa ciência se baseava em um sistema de pensamento com provas dedutivas.

Como não temos acesso aos documentos originais daquela época, todas as informações que possuímos sobre Pitágoras são baseadas em referências de outros escritores que viveram séculos depois. Por causa disso, Pitágoras é uma figura pouco conhecida na história da Matemática e, para tornar as coisas ainda mais complicadas, sua escola era tanto secreta quanto comunitária, o que significa que todo o conhecimento e descobertas eram compartilhados por todos. Portanto, não temos certeza se foi o próprio Pitágoras quem descobriu o teorema que leva seu nome, pois era comum naquela época dar todo o crédito ao mestre. Lima. (2006.a, p. 62).

## **4.2. Evidências do uso do teorema que leva o nome de Pitágoras, anteriores ao mesmo.**

Por um longo período, a tradição matemática no mundo ocidental creditou a Pitágoras a descoberta deste teorema. No entanto, pesquisas históricas mais recentes revelaram que os babilônios já tinham conhecimento desse teorema por volta de 1500 a.C., muito antes de Pitágoras. Além disso, os chineses também tinham conhecimento desse teorema, talvez por volta de 1100 a.C., e os hindus provavelmente por volta de 500 a.C.

### **4.2.1. Uso dos ternos Pitagóricos pelos Indianos.**

Os SulbaSutras

Por volta de 800 a.C., foi escrito o Baudhayana Sulbasutra, seguido pelo Mãnava Sulbasutra em torno de 750 a.C., o Apastamba Sulbasutra aproximadamente em 600 a.C., e o Katyayana Sulbasutra por volta de 200 a.C.

Em 1875, G. Thibaut realizou a tradução de uma grande parte dos Sulbasutras, revelando o notável conhecimento matemático dos sacerdotes hindus. Thibaut traduziu o Baudhayana Sulbasutra nas obras "The Pandit", volume 9 (1874), volume 10 (1875), e no volume 1 da nova série (1876/77). Além disso, traduziu o Katyayana Sulbasutra no volume 4 da nova série de "The Pandit" (1882). Por sua vez, o Apastamba Sulbasutra foi traduzido por Bürk no "Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gessellschaft", volume 56 (1902).

Os sulbasutras contêm regras para a construção de altares que deveriam ter medidas precisas para que sacrifícios fossem bem-sucedido. Eles mostram que os sacerdotes Indianos não tinham poucos conhecimentos de matemática, eles conheciam triplas pitagóricas do teorema que levaria o nome de Pitágoras.

Os autores dos Sulbasutras foram os Sulbakaras, dos quais pouco se sabe, exceto que eles não eram apenas escribas, mas também sacerdotes artesãos, que executavam várias tarefas, incluindo construir o vedi (altar do sacrifício), manter o agni (fogo sagrado) e instruir os fiéis na escolha correta do sacrifício e altar.

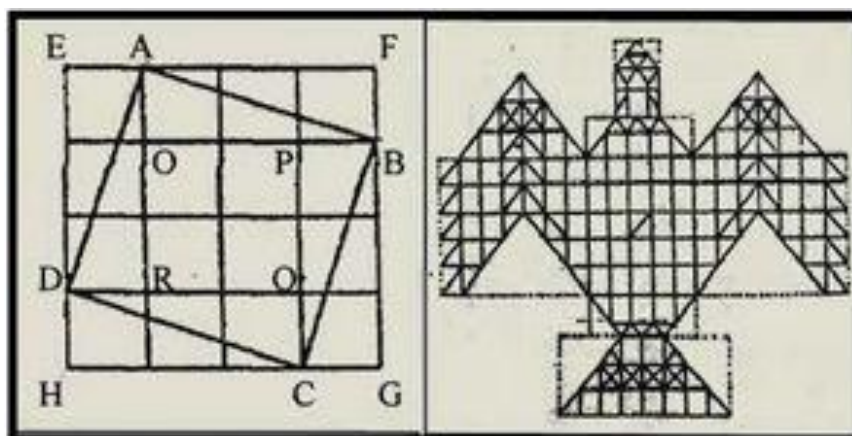
O Sulbasutra de Baudhayana, o mais antigo, tem três capítulos e contém a formulação geral do teorema de Pitágoras, o procedimento para obtenção aproximada de  $\sqrt{2}$  e várias construções geométricas.

Segundo Dutta (2002, p.5), no antigo texto Sulbasutras encontramos aplicações do teorema de Pitágoras. Como se tratam de obras de utilidade, não há demonstrações, apenas afirmações. Algumas dessas construções envolvem aplicação de princípios derivados de identidades matemáticas que são conhecidas atualmente como.

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab, a^2 - b^2 = (a + b)(a - B) = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a - b}{2}\right)^2$$

Na figura abaixo dois exemplos discutidos por Dutta (2002) que demonstram aplicações práticas de resultados elementares da Geometria Plana.

Figura 4.4 Dutta (2002) cultura matemática indiana



Fonte: Dutta (2000).

Para Amma e Katz, essas são as abordagens mais plausíveis para a descoberta do teorema. Em relação à sua origem na Índia, Thibaut, segundo Amma, sugere que os indianos talvez tenham desenhado quadrados sobre os lados e diagonais de um retângulo, dividindo-os em unidades quadradas e encontrando a relação por meio da contagem das unidades.

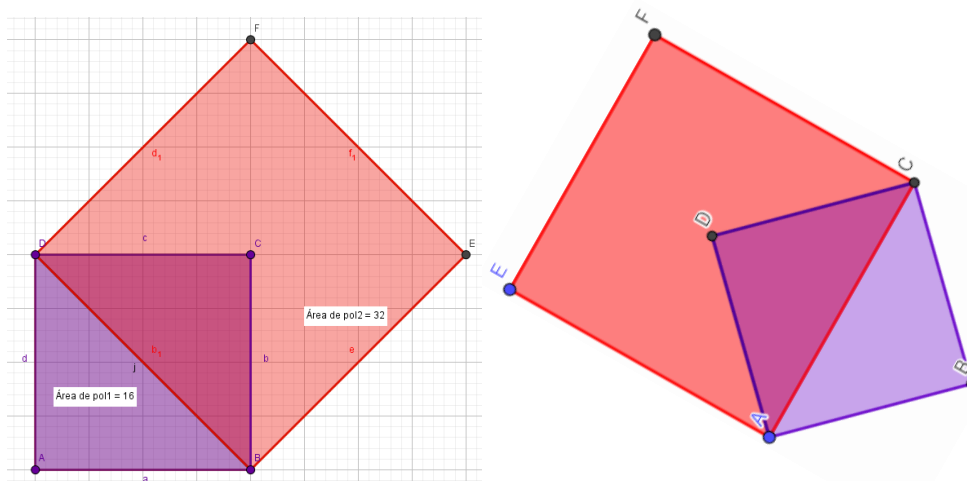
Nos textos antigos dos Sulbasutras, podemos identificar 15 construções que se baseiam no teorema de Pitágoras. Essas construções incluem métodos como a duplicação de quadrados, a formação de quadrados cujas áreas são iguais à soma de duas outras áreas dadas e a criação de ângulos retos.

Bürk e Datta, também segundo Amma, levantam a hipótese de que a descoberta do caso geral pode estar associada ao problema de construir quadrados com área superior à de um quadrado específico, um desafio presente em diversas construções de altares da era védica.

É muito possível que o teorema de Pitágoras fosse conhecido na Índia bem antes do período dos Sulbasutras. Seu enunciado é encontrado nos Sulbasutras de Baudhayana e Katyayana. A estrutura do enunciado em duas partes, inicialmente aplicado a quadrados e posteriormente a retângulos quaisquer, possivelmente sugere duas fases na sua descoberta.

Quando uma corda é esticada ao longo da diagonal de um quadrado, ela cria uma área que é igual ao dobro da área do quadrado original.

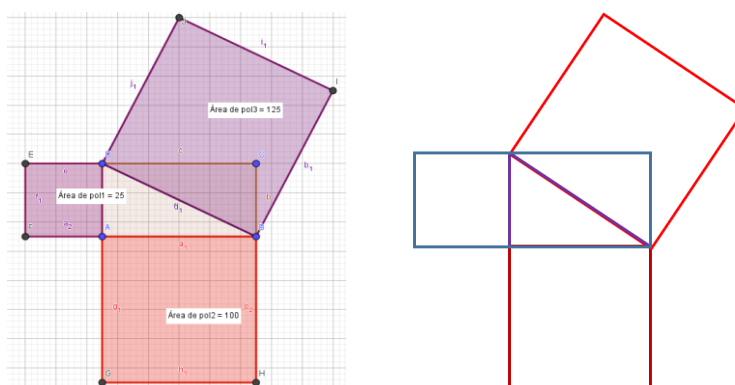
Figura 4.5 Diagonal no quadrado



Fonte: Produzido pelo autor

Na segunda versão, atribuída a Katyayana, quando uma corda é estendida ao longo da diagonal de um retângulo, ela gera uma área que é equivalente à soma das áreas formadas pelos lados horizontal e vertical do retângulo.

Figura 4.6 Diagonal no retângulo

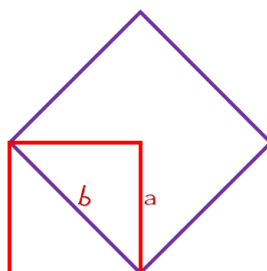


Fonte: Produzido pelo autor

Gaspar (2015) sugere que a descoberta do Teorema de Pitágoras pelos hindus pode ter ocorrido em duas etapas possíveis. A primeira explicação

envolve a observação de que o quadrado maior, construído sobre a diagonal do quadrado menor, pode ser dividido em quatro triângulos isósceles. Cada um desses triângulos possui uma área igual à metade da área do quadrado menor.

Figura 4.7 Possível demonstração indiana



Fonte: Produzido pelo autor

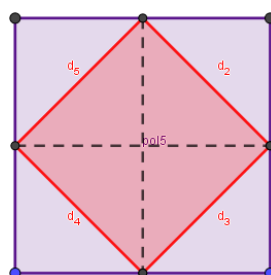
$$b^2 = 4 \left( \frac{a^2}{2} \right) = 2a^2$$

Imagine um quadrado com uma área de 4 purushas, onde uma purusha é uma unidade de medida equivalente à altura de um homem em pé com os braços erguidos. Agora, esse quadrado é formado pela união de quatro quadrados menores, cada um com um lado de tamanho igual a uma purusha.

Quando traçamos as diagonais desse quadrado maior ( $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  e  $d_4$ ), elas criam um novo quadrado no centro. Esse quadrado central é dividido em quatro triângulos, cada um com uma área de meia purusha.

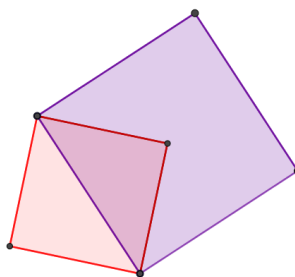
Para o Teorema de Pitágoras ocorre quando percebemos que a área desse quadrado central é igual ao dobro da área de um dos quadrados menores. Esse entendimento, conforme apontado por Gaspar (2015), leva à compreensão do teorema.

Figura 4.8 Possível demonstração indiana



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 4.9 Possível demonstração indiana



Fonte: Produzido pelo autor

Uma terceira possível explicação envolve a construção de um altar chamado paitrkyvedi, que começa com um quadrado de dois purushas de lado. Nesse caso, as quinas do Vedi coincidem com os pontos médios dos lados do quadrado. O diagrama dessa construção é semelhante ao mostrado na figura 4.8 e 4.9, com a diferença de que agora a construção começa com um quadrado de 2 purushas de lado.

Essas três explicações possíveis podem estar relacionadas com a descoberta do Teorema de Pitágoras pelos indianos, conforme discutido nos estudos de Gaspar (2015).

Suponha que as extremidades de uma corda de comprimento oito unidades sejam amarradas em duas estacas fincadas no solo nos pontos A e B, que estão separados por uma distância de quatro unidades. Uma terceira marca é feita a três unidades de uma das extremidades da corda, digamos no ponto B.

A corda é então erguida a partir desse ponto e esticada até que a marca toque o solo em um ponto C, formando, assim, o ângulo reto ABC.

#### 4.10 Atador de cordas



Fonte: Produzido pelo autor

Outra comprovação de que o ângulo ABC é reto em B surge como uma consequência direta da recíproca do teorema de Pitágoras:

Se em um triângulo ABC temos  $AB^2 + BC^2 = AC^2$ , então o triângulo ABC é um triângulo retângulo em B.

Logo após a declaração do teorema de Pitágoras no Baudayana Sulbasutra, o sutra subsequente instrui a:

Construir um retângulo com o lado do quadrado como a largura e a diagonal como o comprimento.

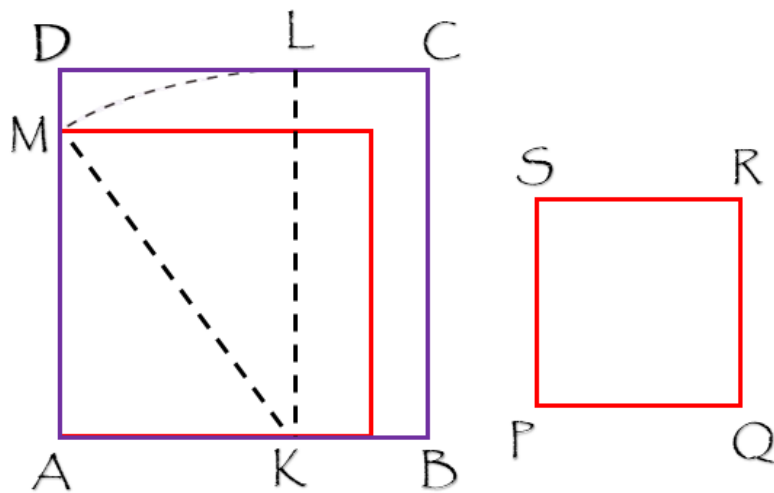
A diagonal desse retângulo é o lado de um quadrado cuja área é três vezes a área do quadrado. Essa constatação é um desdobramento direto do teorema de Pitágoras e nos traz à mente a construção geométrica encontrada em alguns textos de geometria, semelhante a  $\sqrt{n}$ . Para um valor inteiro positivo  $n$ , um problema de construção adicional, presente no Apastamba Sulbasutra, solicita a seguinte tarefa:

Criar um quadrado equivalente à diferença de dois quadrados dados.

O método de construção pode ser explicado da seguinte forma:

- Considerando ABCD e PQRS como os quadrados de lados  $a$  e  $b$ , com  $a > b$ .
- Marcar um ponto  $K$  ao longo de  $AB$  de modo que  $AK = b$ .
- Construir uma perpendicular a  $AB$  a partir de  $K$ .
- Essa perpendicular cruza o lado  $DC$  em  $L$ .
- O círculo com centro em  $K$  e raio  $KL$  intercepta  $AD$  em  $M$ .
- O quadrado com lado  $AM$  possui uma área igual à diferença entre as áreas dos quadrados com lados  $a$  e  $b$ .

Figura 4.11 Construir um quadrado igual à diferença de dois quadrados dados



Fonte: Produzido pelo autor

De fato, pelo teorema de Pitágoras,

$$AM^2 + AK^2 = KM^2 = KL^2$$

$$AM^2 = KL^2 - AK^2 = a^2 - b^2.$$

Mas  $AM^2$  é a área do quadrado de lado  $AM$  e, sendo assim, o quadrado de lado  $AM$  tem área igual à diferença das áreas dos quadrados de lados  $a$  e  $b$ .

Entre essas e outras que pertencem as 15 construções que se baseiam no teorema de Pitágoras nos textos antigos dos Sulbasutras.

## 4.2.2 Curiosidades da Matemática Indianas:

Devido à frequente utilização do teorema de Pitágoras, os Sulbasutras apresentam diversos exemplos de ternas pitagóricas.

O uso do cordão não apenas para medir, mas também para traçar linhas perpendiculares, por meio de ternas de cordas cujos comprimentos formam ternas pitagóricas

Apastamba Sulbasutra encontramos as ternas pitagóricas (15, 36, 39) e (3, 4, 5), (5, 12, 13), (12, 15, 37);

Baudahayana Sulbasutra a terna (7, 24, 25);

Mãnava Sulbasutra, (72, 96, 120), (40, 96, 104), chamado de "Triângulo indiano",

## 4.2.3 Uso dos ternos Pitagóricos na China.

Embora não haja evidências de que Pitágoras tenha viajado para o Oriente, vale ressaltar que existe um antigo documento.

### Zhoubi suanjing

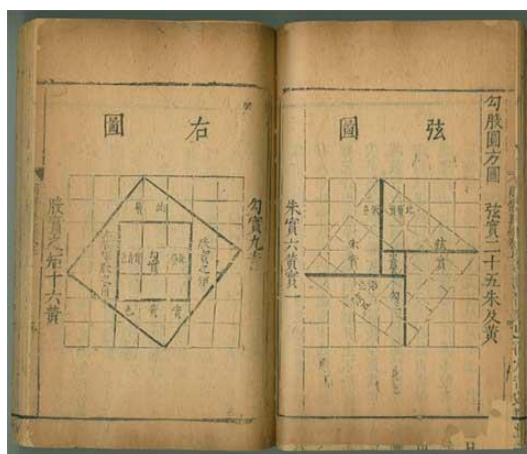
|A Aritmética Clássica do Gnomon e os Caminhos Circulares do Paraíso|

O *Zhoubi Suanjing*, *Chou Pei Suan Jing*, ou ainda Chou Pei Suan Ching, (周髀算經/周髀算经), é o mais antigo trabalho matemático chinês que se tem registro. De acordo com Boyer (1974), ele foi escrito por vários estudiosos e recebeu atualizações ao longo do tempo. “Zhou” referindo-se à antiga dinastia Zhou (周) (1046 - 256 aC) mas a compilação e adição de material continuou na Dinastia Han (202 aC - 220 dC) e “Bi” significa coxa e de acordo com o livro refere-se ao gnômon de um relógio de sol. O estudo é uma coleção anônima de 246 problemas encontrados pelo duque de Zhou e seu astrônomo e matemático, Shang Gao 24 estão relacionados a triângulos retângulos. Entre eles o "Gou Gu" (勾股定理, *gōugǔ dìnglǐ*). Cada pergunta declarou sua resposta numérica e algoritmo aritmético correspondente. O Zhoubi suanjing contém uma das

primeiras provas registradas do que seria a ser o teorema de Pitágoras. China: Duas páginas do Zhoubi suanjing (Relógio de Sol de Astronomia e Cálculo da Dinastia Zhou), ilustrando o Teorema de Gougu ou "figura da hipotenusa", que fornece uma prova sem palavras do teorema de Pitágoras. Datada da Dinastia Zhou.

Na verdade, este é um livro inteiro sobre cosmologia, com deduções que se baseiam mais no cálculo do que no misticismo, embora em alguns trechos se veja uma mistura de misticismo, astronomia e medição. Seu conteúdo está relacionado com calendário e com problemas que envolvam calcular sombras. Os autores já utilizavam numeração decimal e conheciam a soma, subtração, multiplicação, divisão de frações e extrair a raiz quadrada de qualquer número. Eles conheciam o Teorema de Pitágoras para os triângulos (3, 4, 5) e (6, 8, 10)

Figura 4.12 "Gou go"

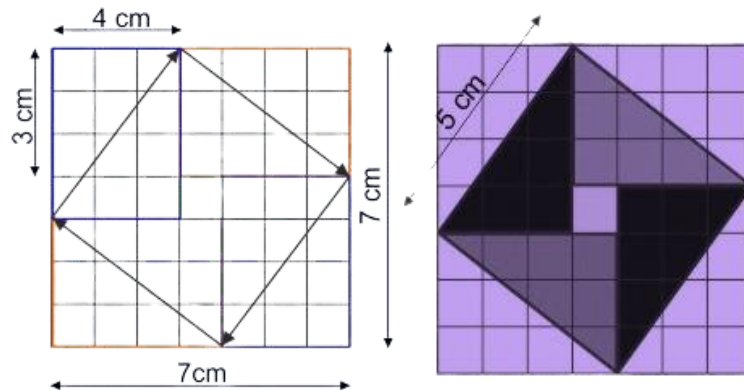


Fonte: <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasures-zhoubi-suanjing>

Na (figura 4.12) o diagrama à direita dessas páginas costuma ser chamado de "diagrama de hipotenusa" e ilustra a prova do teorema de Gougo (ou de Pitágoras) no caso 3 - 4 - 5.

O diagrama à esquerda (figura 4.10) mostra como o lado 3 se encaixa em um quadrado de lado 5.

Figura 4.13 Representações Gou go



Fonte: <https://profes.com.br/marcosrendak/blog/teorema-de-pitagoras>

Para criar um Triângulo Retângulo 3-4-5 de Gou-gu, o processo segue estas etapas:

- Comece desenhando um quadrado quadriculado com 7 cm de lado.
- Desenhe 4 retângulos, cada um com uma base de 4 cm e altura de 3 cm, posicionando um par na vertical e outro na horizontal.
- Trace a diagonal em cada um desses retângulos.
- Por fim, você terá um quadrado com lado de 5 cm inscrito no quadrado maior de 7 cm.

No centro do quadrado inscrito, será formado um quadrado menor com um lado de 1 cm.

Os cálculos para determinar as propriedades do quadrado inscrito no quadrado maior e as medidas dos catetos do triângulo retângulo foram realizados da seguinte forma:

**Para a área do quadrado inscrito:**

- Área do quadrado maior:  $7^2 = 49 \text{ cm}^2$

- Área total dos triângulos formados dentro do quadrado maior: 4 triângulos x área de cada triângulo = 24 cm<sup>2</sup>
- Área do quadrado inscrito = Área do quadrado maior - Área dos triângulos = 49 cm<sup>2</sup> - 24 cm<sup>2</sup> = 25 cm<sup>2</sup>

**Para o lado do quadrado inscrito (hipotenusa do triângulo retângulo):**

- A área dos triângulos é de 24 cm<sup>2</sup>, somada à área do quadrado central de 1 cm<sup>2</sup>, totalizando 25 cm<sup>2</sup>.
- A raiz quadrada de 25 cm<sup>2</sup> é 5 cm. Logo, o lado do quadrado inscrito é 5 cm, que também é a medida da hipotenusa do triângulo retângulo.

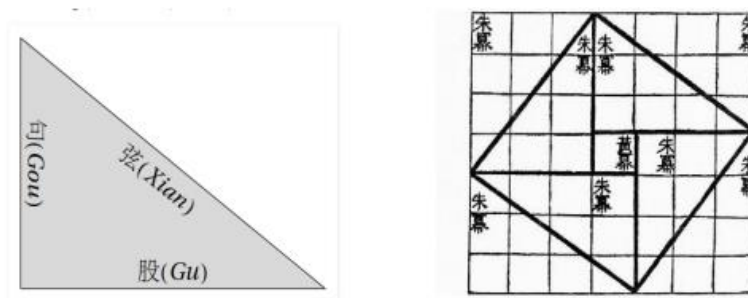
**Para o cateto menor:**

- O quadrado do lado é 5 cm, e ao subtrairmos a área do quadrado central de 1 cm<sup>2</sup>, obtivemos 24 cm<sup>2</sup>.
- Dividindo 24 cm<sup>2</sup> pela metade do dobro do cateto maior (8), encontramos que o cateto menor é de 3 cm.

**Para o cateto maior:**

- Similarmente, o quadrado do lado é 5 cm, e ao subtrairmos a área do quadrado central de 1 cm<sup>2</sup>, também obtemos 24 cm<sup>2</sup>.
- Dividindo 24 cm<sup>2</sup> pela metade do dobro do cateto menor (6), determinamos que o cateto maior é de 4 cm.

Figura 4.14 Representação do Gou Gu.



Fonte: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Chou\\_Pei\\_Suan\\_Ching](https://pt.wikipedia.org/wiki/Chou_Pei_Suan_Ching)

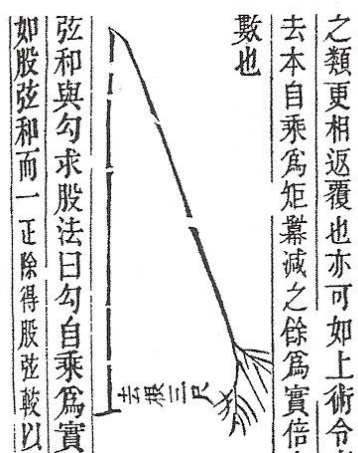
As palavras gou e gu significam literalmente o menor e o maior cateto de um triângulo retângulo. Horng, W. S. p. 259

Embora este seja um livro dedicado à astronomia, ele contém várias seções matemáticas. Nesse caso, o gnómo é um bastão usado para projetar sombras quando o sol está brilhando e pode ser ajustado para estimar distâncias que não podem ser alcançadas. Por exemplo, o Zhoubi suanjing inclui estimativas da distância ao sol. [...] Ele contém um uso implícito do teorema de Pitágoras, conhecido na China como por Regra Gou-gu. O argumento geométrico que precisa ser categorizado hoje foi descoberto no mesmo trabalho mais como um argumento lógico. (Santos, Neto, Silva, 2008b, Seção 8).

#### 4.2.4 Curiosidades sobre o teorema de Pitágoras na china.

No Chui-Suang, o mais famoso problema, do bambu quebrado: "Um bambu com dez pés de altura quebrou de forma que sua extremidade superior está apoiada no chão a três pés de distância da base. É solicitado calcular a altura em que ocorreu a quebra". Esse problema combina o Teorema de Pitágoras com a resolução de equações quadráticas, pois a solução envolve resolver a equação:  $x^2 + 32 = (10 - x)^2$ .

Figura 4.15 Situação problema envolvendo o Gougu



Fonte: <https://www.acasinhadamatematica.pt/?p=6050>

#### 4.2.5 Descobertas egípcias.

O Antigo Egito (3000 a.C.) ocupava grande parte do vale do Nilo e a sua economia baseava-se na agricultura, pelo que se justificava a construção de canais, diques e espigueiros. Para isso, é necessária mão de obra, “arquitetos/engenheiros”, ou seja, uma grande quantidade de matemática. Estes usavam o papiro como instrumento de escrita. Em 1799, Thomas Young e Jean François Champollion conseguiram decifrar a escrita com a ajuda de uma pedra muito especial, a pedra de Roseta.

Figura 4.16 Dicionário egípcio



Fonte [https://pt.wikipedia.org/wiki/Pedra\\_de\\_Roseta](https://pt.wikipedia.org/wiki/Pedra_de_Roseta)

A Pedra de Roseta é um fragmento de um granodiorito erguido no Egito ptolomaico, cujo texto foi decisivo para a compreensão moderna dos hieróglifos egípcios e deu origem a um novo campo de conhecimento - a egiptologia. Muitas vezes descrito como "A rocha mais famosa do mundo"

E provável que os primeiros a acumular Conhecimentos práticos da Geometria tenham sido os *estiradores de corda*, que eram assim chamados, devido aos instrumentos de medida com cordas entrelaçadas utilizados para marcar ângulos retos. (HERÓDOTO, século V a.C, EVES 1997)

Apesar de seu grande valor matemático, os famosos papiros de Rhind e de Moscou não fazem menção ao Teorema de Pitágoras ou às ternas

pitagóricas. No entanto, os antigos egípcios tinham conhecimento e utilizavam um fato interessante: o triângulo com lados medindo 3, 4 e 5 (ou proporcionais a esses números), conhecido como "Triângulo Egípcio", é um triângulo retângulo. Eles empregavam esse triângulo como uma espécie de "esquadro de carpinteiro", traçando linhas perpendiculares umas às outras.

Essa prática era comum entre os agrimensores oficiais, que a utilizavam para restabelecer as fronteiras das terras após os deslocamentos periódicos causados pelas enchentes do Rio Nilo. Embora o Teorema de Pitágoras não tenha sido mencionado explicitamente nesses papiros renomados, os egípcios aproveitaram esse conhecimento geométrico para suas necessidades práticas. No Egito, a terra precisava ser redividida após cada enchente do Nilo.

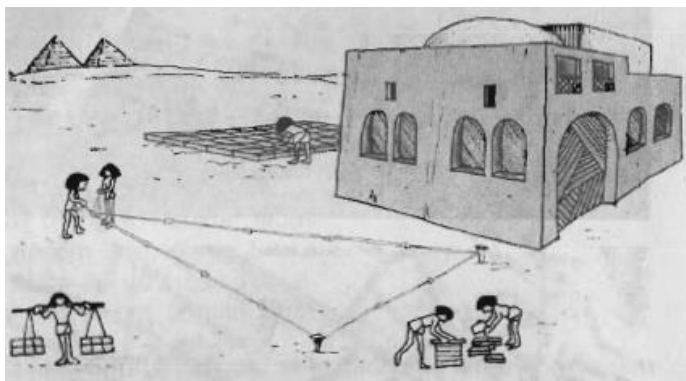
Segundo Boyer (1974), para lidar com essa situação, os faraós passaram Nomeação de funcionários, agrimensores, cuja tarefa é avaliar os danos causados pelas inundações, levantar o terreno e determinar os limites da propriedade, restabelecendo os limites entre diferentes propriedades, redefinir os limites de suas áreas de plantio. Existia a necessidade de redesenhar as fronteiras, os agrimensores tinham apenas informações parciais, pois a fronteira poderia ter sido completamente destruída. Esses agrimensores finalmente aprenderam como determinar a área de terra dividindo-os em retângulos e triângulos conforme eles cruzavam a superfície de áreas irregulares usando o método de triangulação, (dividindo um campo em partes o triângulo menor cujas áreas se somam para igualar a área total).

Segundo Eves (2004), agrimensores do antigo Egito, desde a época dos faraós, utilizavam cordas divididas em 12 partes iguais por 11 nós para construir triângulos para medir ângulos retos. Como não há evidências documentais de que os egípcios conheçam o teorema de Pitágoras, podemos dizer que os egípcios já conheciam o triângulo retângulo e usavam suas medidas. Ainda segundo Eves (2004), os egípcios da época sabiam não só que os triângulos 3, 4, 5 eram retângulos, mas também os triângulos 5, 12, 13 e 20, 21, 29.

Quando os egípcios precisavam obter ângulos retos para auxiliar na construção de suas pirâmides, eles usaram a relação  $3^2 + 4^2 = 5^2$ ; assumindo

que a base era um quadrado. Para isso, explicou Bigode (2013), amarraram 13 nós equidistantes em uma corda, criando 12 intervalos de igual comprimento. Eles então amarraram o primeiro nó com o décimo terceiro nó e marcaram o quarto e o oitavo nós com estacas, formando assim um triângulo retângulo com lados 3, 4, 5

Figura 4.17 Atador de cordas



Fonte: Imenes 2008

Em outras palavras, isso significa que eles tinham conhecimento de pelo menos um conjunto de números que hoje chamamos de "pitagóricos", embora naquela época eles não fossem conhecidos por esse nome específico. Apesar de não haver nenhum documento que comprove isso, o que realmente importa é que essas situações provavelmente foram vivenciadas por Pitágoras durante suas viagens. (CASTRO, 2013, p.12).

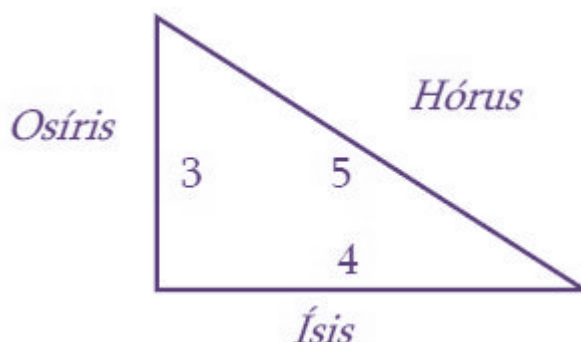
#### 4.2.6 Curiosidades sobre o triângulo Egípcio:

Os agrimensores egípcios utilizando na (figura 4.15) o triângulo Egípcio. Foi graças a essa prática que surgiu a profissão de "arpedonaptas" [arpedonáptes] a palavra não é egípcia, mas grega. Significa "atador de cordas". Esse fato em particular despertou o interesse do renomado historiador Heródoto, que escreveu o seguinte:

"[...] A partir dessa prática, foi como o conhecimento da Geometria chegou ao Egito primeiro e depois foi transmitido para a Grécia".

No Egito Antigo, o Triângulo Egípcio, também chamado de Triângulo de Ísis, era considerado sagrado, pois cada um de seus lados estava associado a uma divindade. O número três simbolizava Ausar (*Osíris*) sendo reconhecido como a origem, o número quatro representava Auset (*Ísis*) e o número cinco era atribuídas a Heru (*Hórus*). Essa significância religiosa do triângulo é relatada por Plutarco em seu livro "Sobre Ísis e Osíris", no capítulo VIII, parágrafo 4.

Figura 4.18 trindades Egípcia



Fonte: Adaptada <https://milesmithrae.medium.com/plutarco-e-os-mistérios-de-ísis-e-osíris-rodriigo-peñaloza-15-iii-2016-701496e33c80>

O resultado perfeito. Três é o primeiro número ímpar perfeito; quatro é um quadrado cujo lado é o número par dois, porém, de certa forma, o cinco é como seu pai e de outra forma, sua mãe, pois é feito de dois e três. O cinco faz de si mesmo um quadrado. (GADALLA, 2001, p. 29-30).

## 4.2.7 Descobertas Babilônicas.

### 4.2.7.1 Um pouco sobre as civilizações da Mesopotâmia.

Considerada como leito da civilização, a Mesopotâmia abrange uma mescla de povos que habitaram nos vales dos rios Tigres e Eufrates, no que hoje se tornaria território do Iraque e áreas próximas da Síria, Turquia e Irã, durante um período aproximado do ano 3500 a.C. até o início da era do cristianismo. Entre os domínios mesopotâmicos, aquele com maior destaque para o estudo deste trabalho será cidade de Babilônia, em que o auge ocorreu entre 1800 a.C.

e 1500 a.C., destacando-se o reino de Hamurabi, que conquistou todas as áreas próximas de 1728 a.C até 1686 a.C.

A grande seca da maior parte da Mesopotâmia, bem como a escassez de qualquer material de escrita natural, levou à criação de um meio de escrita duradouro, as tábuas de argila. Milhares delas foram descobertas em escavações nos últimos 150 anos, e um grande número dessas tábuas contém problemas e soluções matemáticas.

Henry Rawlinson (1810-1895) foi o primeiro a traduzir a escrita cuneiforme, comparando-as com inscrições persas babilônicas do rei Dario I, da Pérsia, que estavam em uma rocha em Behistun (atual Irã), que incluía três versões do mesmo texto, escrito em três línguas e alfabetos diferentes: persa antigo, elamita e babilônico, sendo 414 linhas em persa antigo, 593 linhas em elamita e 112 linhas em babilônico, descrevendo uma vitória militar.

Centenas das tábuas que contêm problemas matemáticos e soluções foram copiadas, traduzidas e explicadas. Elas são praticamente indestrutíveis, geralmente retangulares, mas ocasionalmente redondas. Em geral, cabem na palma da mão e têm cerca de uma polegada de espessura, embora algumas sejam tão pequenas quanto um selo postal e outras tão grandes quanto um volume de uma enciclopédia.

Os mesopotâmios usavam tabuletas de argila para apoiar sua escrita, que eram marcadas e depois cozidas ou secas ao sol para aumentar sua durabilidade. Estas eram geralmente de forma retangular, Entre as centenas de milhares de tabletas encontrados há alguns milhares de tabletas matemáticas (GONÇALVES, 2012, p. 323).

Katz (2008) diz que somos afortunados por estes tabletas serem quase indestrutíveis já que é nossa única fonte sobre a matemática da Mesopotâmia. Os babilônios desenvolveram um vasto conhecimento de cálculo e medição, que era particularmente aplicável aos problemas econômicos e comerciais: câmbio, taxas simples e de juros, tributação e problemas de distribuição da colheita. Um grande número de tabuletas matemáticas babilônicas que sobreviveram até hoje sendo numéricas, como de multiplicação e divisão.

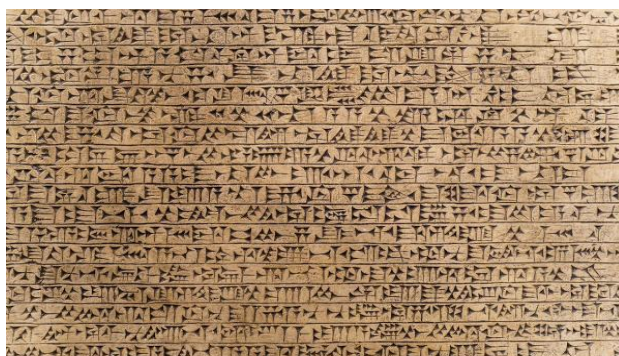
Outro grupo importante de tabuletas babilônicas continha problemas matemáticos. A maioria deles, escritos resumidamente, pareciam

destinados a serem usados nas escolas, provavelmente com explicação de um professor. Em geral, o objetivo era relacionado aos aspectos quantitativos de objetos ou atividades cotidianas: escalas e dimensões, áreas do terreno, quantidade de material na edificação, etc. A natureza desses problemas ilustra a natureza algorítmica e aritmética da matemática babilônica, em contraste com a natureza geométrica da matemática grega, onde figuras e provas desempenhavam um papel central.

A grande maioria das tábuas descobertas datam da época de Hamurabi, embora haja uma pequena coleção que pertence a um período mais recente da civilização mesopotâmica, nos séculos em torno de 1000 a.C. e 300 a.C. Essas tábuas são a única fonte de conhecimento da matemática mesopotâmica, podendo mencionar rapidamente as: A tábula Susa, BM 85194, BM 96454, YBC 7289 e YBC 7302, na tábula Smith e na Yale YBC 7289, e as que viram a possuir mais relevância para este trabalho, a segui por tratar o assunto abordado no mesmo.

Sistema Sexagesimal 2000 a.C. a necessidade repentina de uma arte esotérica para brincar com cálculos. A “Matemática babilônica”, é a consequência da invenção de um novo sistema de notações numéricas, o sistema sexagesimal babilônico, que foi o primeiro sistema do mundo para representação de números com valor posicional (Damerow, 1995).

Figura 4.19 Sistema de numeração adotava o sistema hexadecimal



Fonte: <https://mundoeducacao.uol.com.br/historiageral/civilizacao-mesopotamica.htm>

O sistema numérico babilônico foi o sistema numérico usado pelos escribas babilônicos. Eles usavam apenas dois tipos de símbolos para representar todos os números: o cravo e a asna.

Figura 4.20 Números Babilônicos



Fonte: adaptado de <https://mundoeducacao.uol.com.br/historiageral/civilizacao-mesopotamica.htm>

Esse sistema de numeração adotava o sistema hexadecimal. Isso significa que os conjuntos de símbolos foram associados a 60 potências específicas na ordem em que foram escritos.

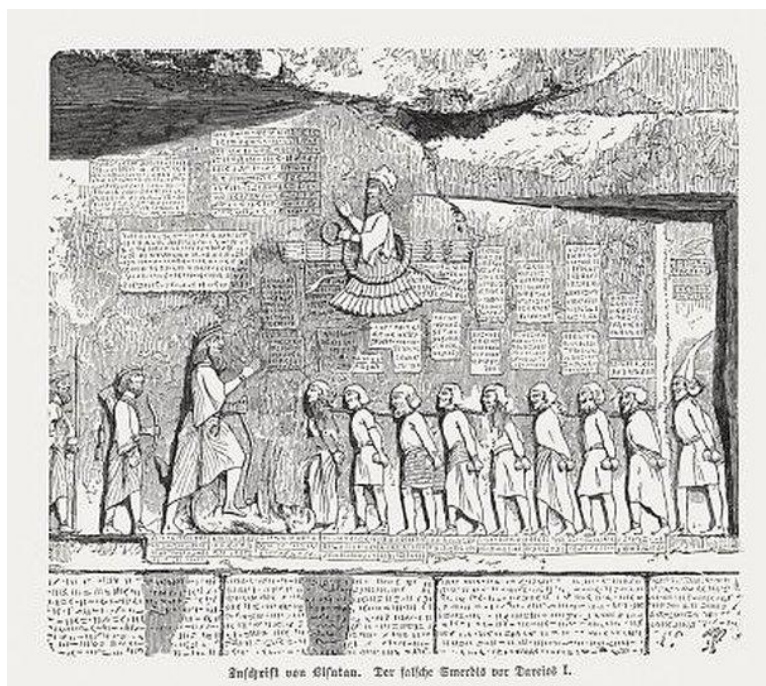
Aqui será mostrado o percurso de algumas das tabuletas até o presente momento, com o conhecimento adquirido sobre as possíveis utilizações e mistérios que envolvem essas relíquias matemáticas do passado. Elas contam a história da matemática presente no cotidiano do povo babilônico, desde onde e quem as encontrou até os seus decifradores, BM 85196 YBC 7289, Plimton 322, SI 427 e IM 67118.

#### 4.2.7.2 Rocha de Behistun

Assim como a Pedra Roseta desempenhou um papel fundamental na decifração dos hieróglifos egípcios, uma inscrição monumental localizada no antigo território persa, no Irã, conhecida como rocha de Behistun teve um impacto significativo no entendimento do cuneiforme acadiano. O acadiano, um idioma semítico falado na Mesopotâmia, possuía dois dialetos principais, o assírio e o babilônio, que eram utilizados para registrar os triunfos militares e as

narrativas religiosas dos poderosos impérios da Assíria e Babilônia. Registros históricos datados por volta de 500 a.C. mencionam que essa inscrição era conhecida como Baga-Stana, que pode ser traduzido como "O Santuário Divino" ou "a Casa de Deus").

Figura 4.21 Dicionário cuneiforme acadiano



Fonte: <https://www.megacurioso.com.br/artes-cultura/125104-inscricao-de-behistun-a-pedra-de-roseta-da-escrita-cuneiforme.htm>

#### 4.2.7.3 BM 85196

De acordo com Boyer (1974), a placa de argila babilônica BM 85196 é um antigo texto que contém problemas matemáticos escritos em cuneiforme, utilizando um sistema de base sexagesimal. O problema apresentado é o seguinte: uma escada de comprimento de  $0;30$  unidade está encostada em uma parede. Qual será a medida que a parte inferior da escada se afastará da parede se a parte superior escorregar para baixo por uma distância de  $0;6$  unidades?

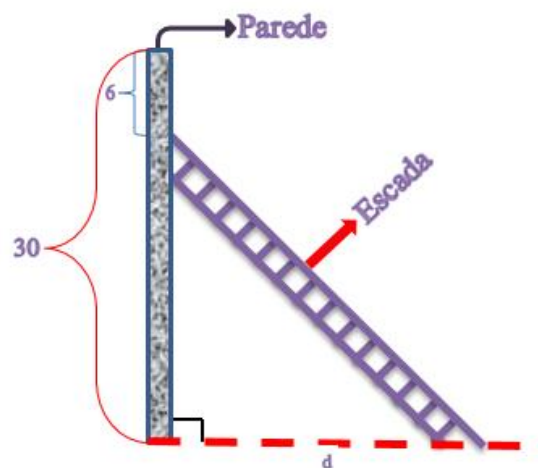
Figura 4.22 BM 85196 Problemas práticos



Fonte: <https://sawerc.hypotheses.org/seminars/readingtcuneif19-20>

Os babilônios forneceram as seguintes instruções para resolver o problema no sistema de base sessenta: a) multiplicar  $0;30$  por  $0;30$ , que resulta em  $0;15$ , b) subtrair  $0;6$  de  $0;30$ , o que dá  $0;24$ , c) multiplicar  $0;24$  por  $0;24$ , resultando em  $0;9,36$ , d) subtrair  $0;9,36$  de  $0;15$ , o que resulta em  $0;5,24$ , e) calcular a raiz quadrada de  $0;5,24$ , que é igual a  $0;18$ . A resposta dos babilônios foi  $0;18$ , que podemos interpretar como 18 unidades.

Figura 4.23 Representação no word do problema da BM 85196



Fonte: Produzido pelo autor

Resposta da BM 85196 pelo sistema sexagesimal.

$$(0; 30)^2 = x^2 + (0; 24)^2$$

$$\frac{30}{60} \times \frac{30}{60} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0; 15$$

$$(0; 24)(0; 24) = \frac{24}{60} \times \frac{24}{60} = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

Como 25 não é divisível por 60 então se utiliza a base  $60^2$

$$3600 = 36.100 = 36.4.25$$

Após isso, é necessário decompor 3600 até achar o 25 como múltiplo de 3600.

Então, multiplica-se 36.4, tanto no numerador quanto no denominador.

$$\frac{4}{25} \times \frac{36.4}{36.4} = \frac{576}{60^2}$$

$$0; 9,36 = \frac{576}{60} = 9 \text{ sobram } 36$$

$$0; 15 - 0; 9,36 = x^2$$

$$\frac{15}{60} - \left( \frac{9}{60} + \frac{36}{60^2} \right)$$

$$\frac{15}{60} - \frac{9}{60} - \frac{36}{60^2} = \frac{6}{60} - \frac{36}{60^2}$$

m.m.c

$$\frac{360 - 36}{60^2} = \frac{324}{60^2}$$

$$0; 5,24 = \frac{324}{60} \text{ 5 sobram } 24$$

$$x^2 = 0; 5,24$$

$$\frac{324}{60^2} \times \frac{18}{60} \times \frac{18}{60} = 0; 18$$

Ao abordar esse problema com o uso do Teorema de Pitágoras, podemos representar o comprimento da escada como "c" = 30, a altura da parede como "p" = 30 - 6 (devido ao deslizamento), e a distância inferior afastada como "d".

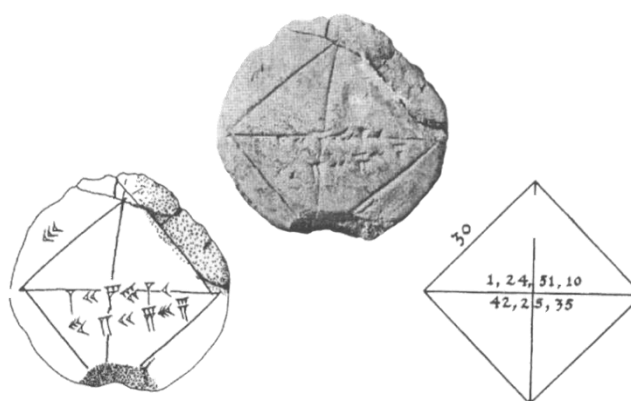
Assim, podemos estabelecer a equação  $c^2 = p^2 + d^2$ , que é equivalente a  $30^2 = (30 - 6)^2 + d^2$ . Ao organizar os dados e aplicar o Teorema de Pitágoras, podemos calcular que o valor de "d" é igual a 18. Esse resultado coincide com a resposta fornecida pelos matemáticos babilônicos, que também chegaram à conclusão de 18 usando seu próprio método de cálculo.

#### 4.2.7.4 YBC 7289

YBC 7289 é uma antiga placa de argila babilônica (cerca de 1800–1600 aC) da Yale Babylonian Collection que a adquiriu em 1909, doada pelo espólio John Pierpont Morgan, comprador e colecionador de tabletes babilônicos (SILVA NETO; SOUSA; CUNHA, 2022)., que possuía várias tabuletas babilônicas; suas doações se tornaram a Coleção Babilônica de Yale ou YBC.

Possivelmente feito por aprendizes de escriba, mostra uma atividade escolar, tem formato circular e mede no mínimo 8 cm e no máximo 12 cm. Um lado, que se pensa estar na frente, é um problema encontrado, a diagonal do quadrado e o verso representam um triângulo retângulo, mas por causa da parte desgastada, não é muito visível. Informações e o triângulo retângulo é assumido que tenha dimensões 3 x 4 e diagonal 5. (FOWLER; ROBSON, 1998).

Figura 4.24 Representação YBC 7289



Fonte: [https://www.researchgate.net/figure/Figura-9-Tablete-YBC-7289-e-sua-traducao\\_fig7\\_351661897](https://www.researchgate.net/figure/Figura-9-Tablete-YBC-7289-e-sua-traducao_fig7_351661897)



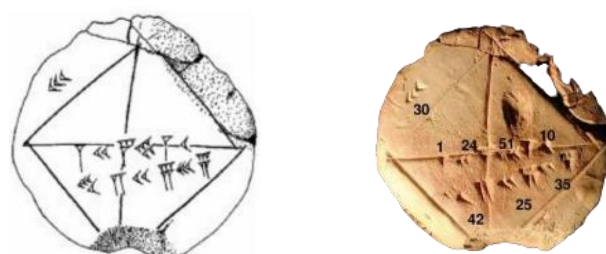
Como desejado encontrar a  $\sqrt{2}$ , então  $k = 2$ . Escolhendo  $a = 3/2$ , obterá uma aproximação inicial  $a' = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12}$ . Em números sexagesimais, os quais eram usados pelos babilônios, essa fração equivale a 1,25:  $\frac{17}{12} = \frac{85}{60} = \frac{(60 + 25)}{60} = 1 + \frac{25}{60} = 1,25$ . Fazendo mais uma aproximação. Partindo agora do valor da primeira  $a' = \frac{17}{12} = 1,25$ , e fazemos  $1,25/2 + 1/1,25$ , que é a soma de 0,42;30 com o inverso de 1,25. No entanto, esse número não possuindo inverso com representação finita em base 60, e, portanto, uma aproximação desse valor era representada em um tablete como 0,42;21;10. Calculando, assim,  $a'' = 0,42;30 + 0,42;21;10 = 1,24;51;10$ , o valor aproximado da raiz de 2 encontrado sobre a diagonal do quadrado desenhado no tablete YBC 7289 em escrita cuneiforme (ROQUE, 2012 p. 47).

Figura 4.26 YBC 7289 frente e verso



FONTE: YBC 7289 (ubc.ca, 2022)

Figura 4.27 YBC 7289 Imagem aperfeiçoada



FONTE: YBC 7289 (ubc.ca, 2022) Roque (2012)

Traduzindo o estilo sexagesimal babilônico, em diagonal temos a inscrição 1; 24; 51; 10, que em decimal corresponde a  $1 + 24/60^1 + 51/60^2 + 10/60^3 = 1 + 24/60 + 51/3600 + 10/216000$  que equivale a 1,41421296, sendo uma aproximação expressiva para a  $\sqrt{2}$ . É uma aproximação com nove casas decimais para a  $\sqrt{2}$ .

#### 4.2.7.5 Plimton 322

O nome faz referência a G. A. Plimton da Universidade de Columbia, catalogada pelo número de 322.

Figura 4.28 Plimton 322



Fonte: <https://impa.br/noticias/na-folha-de-s-paulo-marcelo-viana-fala-da-plimpton-322/>

#### Edgar James Banks

Admirador de antiguidades e arqueólogo errante empreendedor como cônsul americano em Bagdá em 1898, ele adquiriu centenas de tabuletas cuneiformes do Império Otomano e as revendeu em lotes para museus, bibliotecas e universidades, entretanto a relevância e contribuição de Banks neste trabalho se dá por ser conhecido como a pessoa que vendeu a antiga tabuinha cuneiforme matemática Plimpton 322, que provavelmente foi escavada no que hoje é o sul do Iraque, e vendida para o colecionador George Arthur Plimpton.

Figura 4.29 Inspiração para o personagem Indiana Jones



Fonte: [https://en.wikipedia.org/wiki/Edgar\\_James\\_Banks](https://en.wikipedia.org/wiki/Edgar_James_Banks)

### George Arthur Plimpton

Colecionador de livros e manuscritos históricos raros e vastos compostos em mais ou menos 16 mil itens, com foco na história da educação. Pouco antes de sua morte em 1936, Plimpton entre os diversos itens doados para a Biblioteca Butler da Universidade de Columbia, neles estavam 317 manuscritos medievais renascentistas que tornaram a coleção de Columbia naquela área uma das mais significativas do país. Uma de suas doações será de suma importância ao estudo a Plimpton 322.

Figura 4.30 O grande Colecionador



Fonte: [https://en.wikipedia.org/wiki/George\\_Arthur\\_Plimpton](https://en.wikipedia.org/wiki/George_Arthur_Plimpton)

Plimpton 322, uma placa de argila desenterrada de escavações na Mesopotâmia e datada de 1800 aC, é um dos mais famosos documentos matemáticos antigos. Possui uma tabela de 15 linhas e colunas de números (em notação sexagesimal babilônica) que formam os tripos pitagóricos, ou seja, triângulos de inteiros  $a$ ,  $b$  e  $c$  (por exemplo,  $a=3$ ,  $b=4$  e  $c=5$ ), de modo que  $a^2 + b^2 = c^2$ . Em 2017, Mansfield especulou que outro artefato notável do mesmo período, Plimpton 322, era uma mesa trigonométrica único.

Concluimos que Plimpton 322 estuda retângulos com lados regulares. Isso parece estar relacionado à medição prática, conforme sugerido por de Solla Price (1964) e, mais especificamente, Mansfield e Wildberger (2017), mas a extensão exata permanece desconhecida. Isso pode ser devido a uma necessidade prática específica ou a um interesse puramente teórico em geometria. Embora a resposta seja mais provável em algum lugar entre esses dois extremos. De qualquer forma, Plimpton 322 não tem nada a ver com o estudo moderno da trigonometria, que os astrônomos gregos desenvolveram para medir os céus. Em vez disso, esse estudo "prototrigonométrico" de retângulos parece originar-se dos problemas que os agrimensores da Mesopotâmia encontraram ao medir a paisagem.

Figura 4.31 O Estudioso

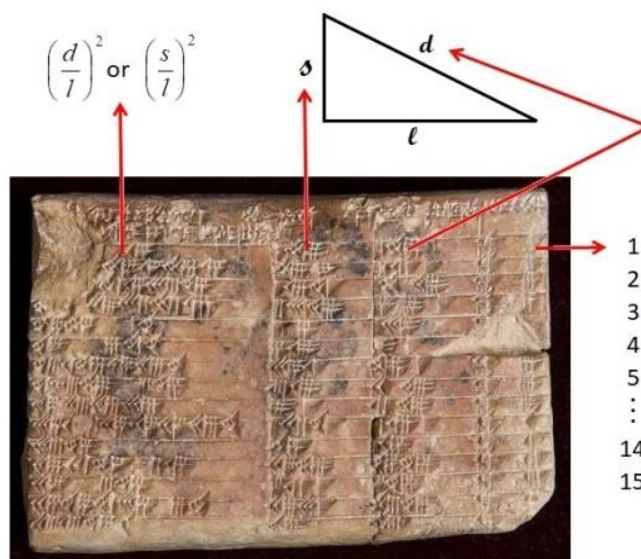


Fonte: [https://news-unsw-edu-au/en/australian-mathematician-reveals-oldest-applied-geometry?\\_x\\_tr\\_sl=en&\\_x\\_tr\\_tl=pt&\\_x\\_tr\\_hl=pt-BR&\\_x\\_tr\\_pto=sc](https://news-unsw-edu-au/en/australian-mathematician-reveals-oldest-applied-geometry?_x_tr_sl=en&_x_tr_tl=pt&_x_tr_hl=pt-BR&_x_tr_pto=sc)

Inicialmente tábuas, pertenciam a Edgar James Banks, o qual encontrou o artefato, a partir de escavações na Mesopotâmia. Em um determinado momento

Banks resolveu vender a relíquia para o colecionador George Arthur Plimpton, o qual, por fim, doou a tábua para o museu

Figura 4.32 Desvendando a Plimpton 322



Fonte: <https://allmathconsidered.wordpress.com/tag/plimpton-322/>

Os ternos pitagóricos primitivos  $(a, b, c)$  são dados por  $a = 2uv$ ,  $b = u^2 - v^2$  e  $c = u^2 + v^2$ , onde  $u$  e  $v$  são primos entre si, um é par, o outro é ímpar e  $u > v$ ” (EVES, 2004, p. 64).

Tabela 4.1 Desvendando os mistérios da Plimpton

$a = 2uv$	$b = u^2 - v^2$		$c = u^2 + v^2$	
sendo, $u$ e $v$ primos entre si, $u > v$ e sendo um par e outro ímpar.				
$u$	$v$	Cateto a	Cateto b	Hipotenusa c
2	1	4	3	5
9	4	72	65	97
12	5	120	119	169
14	5	140	171	221
15	8	240	161	289
20	9	360	319	481
25	12	600	481	769
32	15	960	799	1249
48	25	2400	1679	2929
50	27	2700	1771	3229
54	25	2700	2291	3541
75	32	4800	4601	6649
81	40	6480	4961	8161
125	54	13500	12709	18541

FONTE: adaptado de Katz (2009)

Os pesquisadores descobriram que essa tabula continha ternos pitagóricos, ou seja, lados de um triângulo retângulo. Como o que restou é apenas um pedaço de um tablete, que deveria fazer parte de um conjunto de tabletas, não se sabe como esses números foram encontrados. Mas uma pista de que os babilônicos conheciam uma forma de encontrar esses números está em um tablete guardado no Museu Britânico (...) não há nenhuma demonstração, naturalmente, pois isso ainda estava longe de ser uma preocupação na época. Somente com os gregos é que se iniciaria a Matemática demonstrativa. Os babilônios conheciam receitas que davam certo e com ela resolviam inúmeros problemas Fernandes (2013, p. 25, 26).

#### 4.2.7.6 SI 427

Uma placa única escavada por Jean-Vincent Scheil e depois revelada ao mundo pelo professor Daniel Mansfield.

## Jean-Vincent Scheil

Nascido em 10 de junho de 1858, Koenigsmacker - falecido em 21 de setembro de 1940, Paris, é um religioso e arqueólogo francês que ganhou fama mundial. De 1900 a 1902, quando participou das escavações da Babilônia. Foi durante esta missão, em dezembro de 1901 em Susa, no Irã, que ele participou da descoberta do famoso Código de Hamurabi sendo esse o primeiro código de leis da História e teve sua origem na Mesopotâmia enquanto era governada por Hamurabi, entre 1792 e 1750 a.C. Esse código tinha como base a lei de Talião, que punia o criminoso de forma semelhante ao crime cometido. Hamurabi criou um código de leis para ordenar as relações sociais dos mesopotâmicos. Eram 281 preceitos, que foram escritos em uma pedra de diorito que atualmente está em exposição no museu do Louvre, em Paris.

Figura 4.33 Arqueólogo Religioso



Fonte: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Jean-Vincent\\_Scheil](https://pt.wikipedia.org/wiki/Jean-Vincent_Scheil)

Figura 4.34 Estudando a SI427



Fonte: [https://news-unsw-edu-au/en/australian-mathematician-reveals-oldest-applied-geometry?\\_x\\_tr\\_sl=en&\\_x\\_tr\\_tl=pt&\\_x\\_tr\\_hl=pt-BR&\\_x\\_tr\\_pto=sc](https://news-unsw-edu-au/en/australian-mathematician-reveals-oldest-applied-geometry?_x_tr_sl=en&_x_tr_tl=pt&_x_tr_hl=pt-BR&_x_tr_pto=sc)

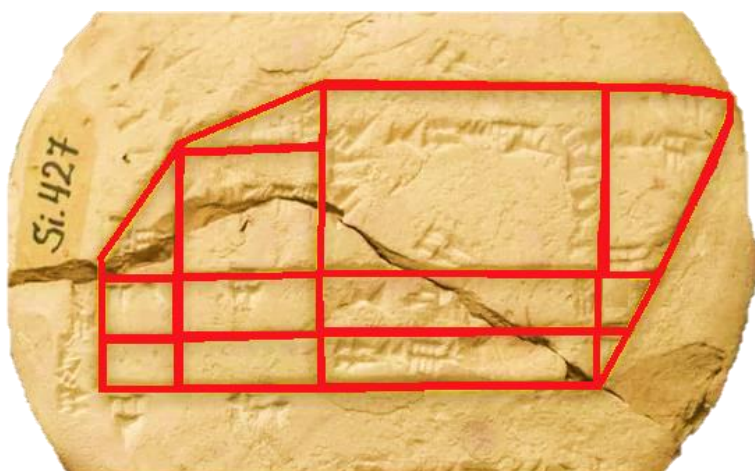
O matemático australiano revelou ao mundo os primeiros exemplos de geometria sendo usados. É um pedaço de argila de 3.700 anos com padrões geométricos embutidos em relevo usando medições e cálculos. E saiu da Babilônia muito antes de Pitágoras. O matemático Daniel Mansfield não foi o responsável por descobrir a peça, mas por revelá-la à humanidade. Como Diretor de Pesquisa da Universidade de Nova Gales do Sul (Austrália), ele descobriu a Si. 427 (como foi chamada esta obra) no museu arqueológico de Istambul. Esta relíquia estava lá há mais de um século, mas ninguém sabia para que servia. Foi originalmente descoberto durante uma expedição arqueológica francesa em 1894.

Segundo Mansfield (2021) Si.427, data do período da Antiga Babilônia (OB) - 1900 a 1600 aC", diz o pesquisador principal, Dr. Daniel Mansfield, da Escola de Matemática e Estatística da UNSW Science.

Mansfield (2021). É o único exemplo conhecido de um documento cadastral do período da antiga Babilônia, que é um plano usado pelos agrimensores para definir os limites de uma terra que provavelmente possa ter sido adquirida por um indivíduo chamado Sîn-bêl-apli. Nesse caso, ele nos conta detalhes legais e geométricos sobre um campo que foi dividido depois que parte dele foi vendido. Mansfield (2021)

Este é um objeto significativo porque o agrimensor usou o que agora é conhecido como "triplos pitagóricos" usaram uma variedade de diferentes, tanto como retângulos quanto triângulos retângulos, para construir ângulos retos precisos. Mansfield (2021).

Figura 4.35 As linhas realçando o terreno demarcado na SI427

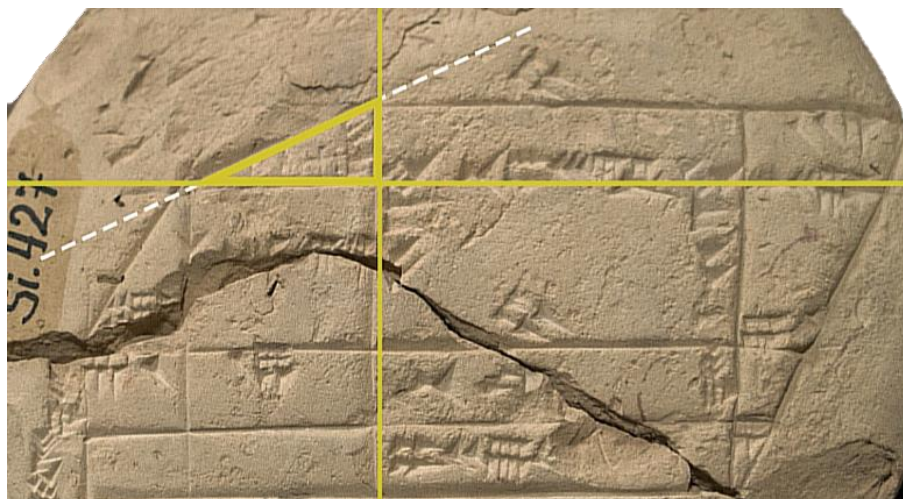


Fonte: adaptada <https://www.megacurioso.com.br/ciencia/121048-babilonios-ja-usavam-geometria-mil-anos-antes-de-pitagoras.htm>

Mansfield (2021) A descoberta e a análise do tablet têm implicações importantes para a história da matemática”, diz o Dr. Mansfield. “Por exemplo, isso foi mais de mil anos antes do nascimento de Pitágoras.

“Você não inventa acidentalmente a trigonometria, normalmente está fazendo algo prático”, disse ao jornal inglês *The Guardian* Daniel Mansfield, professor da Universidade de New South Wales, na Austrália, e co-autor do estudo junto do matemático Norman Wildberger. Para ele, Si.427 trata sobre um terreno que estava sendo vendido. “É muito parecido com o que faríamos hoje. Uma pessoa tenta descobrir onde estão seus limites de terras e manda um agrimensor a campo. Mas, ao em vez de usar um equipamento de GPS, os babilônios usaram a equação de Pitágoras”. Wildberger (2021).

Figura 4.36 As triplas Pitagóricas na “planta” Babilônica



Fonte: <https://mathvoices.ams.org/mathmedia/tonys-take-august-2021/>

Uma maneira simples de criar um ângulo reto preciso é construir um retângulo com lados medindo 3 e 4 unidades, com uma diagonal de 5 unidades. Esses números especiais formam um conjunto chamado de "triplo pitagórico" 3, 4 e 5, resultando em ângulos retos matematicamente perfeitos. Isso tinha grande importância para os topógrafos antigos e ainda é relevante nos dias de hoje.

No entanto, trabalhar com números maiores que 5 no sistema numérico babilônico de base 60 era um desafio. Isso levantou uma questão particularmente intrigante, já que o sistema numérico exclusivo da Babilônia limitava o uso de certas formas pitagóricas.

O autor argumenta que os gregos possivelmente exploraram a trigonometria principalmente com objetivos astronômicos. No entanto, é importante notar que muito antes disso, os babilônios já haviam desenvolvido sua própria trigonometria, a qual eles aplicaram para resolver questões relacionadas à terra e suas delimitações.

Daniel Francis Mansfield

Este educador premiado é apaixonado pela matemática babilônica e seu interesse nessa área do conhecimento o destaca entre seus colegas. Além de

sua notável carreira, ele encontra prazer em compartilhar seu conhecimento por meio do ensino e também dedica seu tempo livre para resolver antigos mistérios matemáticos como um hobby. Sua busca constante por conhecimento e desafios reflete sua dedicação ao aprimoramento contínuo e à descoberta intelectual, tornando-se uma verdadeira inspiração para seus alunos e colegas. Sua paixão pela matemática babilônica e entusiasmo pelo ensino são características marcantes de sua personalidade notável, revelando como o amor pelo aprendizado pode enriquecer a vida de todos ao seu redor.

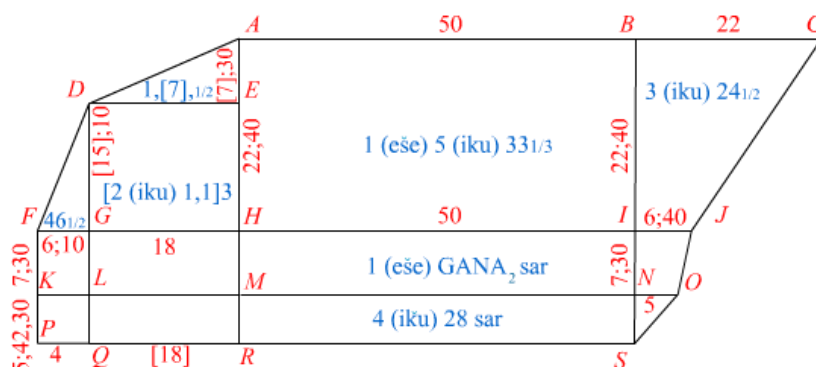
Figura 4.37 O Decodificador da SI427



Fonte: [https://news-unsw-edu-au/en/australian-mathematician-reveals-oldest-applied-geometry?\\_x\\_tr\\_sl=en&\\_x\\_tr\\_tl=pt&\\_x\\_tr\\_hl=pt-BR&\\_x\\_tr\\_pto=sc](https://news-unsw-edu-au/en/australian-mathematician-reveals-oldest-applied-geometry?_x_tr_sl=en&_x_tr_tl=pt&_x_tr_hl=pt-BR&_x_tr_pto=sc)

O pesquisador teve acesso à placa graças a registros feitos nas escavações. Discutindo com outros estudiosos da área, ministérios e museus do governo turco, ele encontrou uma foto da Si.427 em 2018. Mesmo depois de encontrar o artefato, demorou meses para perceber sua importância, então com estudos profundos foi possível descobrir parcialmente o conteúdo da tábua.

Figura 4.38 Planta moderna da SI427



<https://mathvoices.ams.org/mathmedia/tonys-take-august-2021/>

Mansfield notou a presença de dois ou talvez três triângulos pitagóricos (triângulos retângulos com lados inteiros) no diagrama, incluindo o triângulo ADE com lados 7;30 e 18 (triângulo retângulo 3, 4 e 5) e o retângulo GHML, o qual sua diagonal forma um triângulo retângulo  $7.5^2 + 18^2 = 19.5^2$ . Ele argumenta que medir triângulos pitagóricos no terreno (uma prática ainda em uso hoje) era uma forma de garantir ângulos retos e cálculos precisos de área.

#### 4.2.7.7 IM 67118

Trata-se de uma placa de argila descoberta na Antiga Babilônia e atualmente parte da coleção do Museu Nacional do Iraque. Ela apresenta a resolução de um problema de geometria plana relacionado a um retângulo com determinada área e diagonal.

Figura 4.39 IM 67118



Fonte: <https://interestingengineering.com/culture/ancient-babylonian-tablet-pythagorean-theorem>

No texto, a validade da solução é confirmada usando o Teorema de Pitágoras. O anverso da placa contém 19 linhas de escrita, enquanto o verso apresenta seis. No verso, há um diagrama que ilustra o retângulo em questão e uma de suas diagonais. Ao longo desta diagonal, é registrado o seu comprimento em notação sexagesimal, e a área do retângulo é indicada na região triangular abaixo da diagonal.

Na linguagem matemática moderna, o problema apresentado na placa é o seguinte: dado um retângulo com uma área  $A = 0,75$  e uma diagonal  $c = 1,25$ , quais são os comprimentos  $a$  e  $b$  dos lados do retângulo?

A resolução pode ser interpretada como ocorrendo em duas fases: inicialmente, a quantidade  $\sqrt{c^2 - 2A}$  é calculado como 0,25 por cálculos. Pois esta medida pode ser demonstrada a partir das seguintes manipulações algébricas.

$$\begin{aligned} c^2 - 2A &\rightarrow c^2 - 2ab = (b - a)^2 \\ &\rightarrow (b - a)^2 = b^2 - 2ab + a^2 \\ a^2 + b^2 &= c^2 \\ ab &= A \\ &\rightarrow c^2 - 2A \end{aligned}$$

No passo seguinte, utiliza-se o método comprovadamente eficaz da Antiga Babilônia de completar o quadrado técnica essa que pode ser encontrada no tablete YBC 6967 para resolver o que equivale ao sistema de equações  $b - a = 0,25$  e  $ab = 0,75$ . Do ponto de vista geométrico, isso representa o problema de calcular os comprimentos dos lados de um retângulo, em que a área  $A$  e a diferença de comprimento dos lados  $b - a$ , são conhecidos. Esse problema era recorrente na prática matemática da Antiga Babilônia.

A confirmação de que  $b = 1$  e  $a = 0,75$  está correta é feita ao calcular as áreas dos quadrados com os comprimentos laterais correspondentes, somando essas áreas e, em seguida, obtendo o comprimento lateral do quadrado a partir da área resultante, ou seja, encontrando a raiz quadrada desse valor. Esse procedimento representa uma aplicação prática do teorema de Pitágoras,  $c =$

$\sqrt{a^2 + b^2}$  e o resultado está de acordo com o valor fornecido,  $c = 1,25$ . Que a área também está correta é verificado calculando o produto,  $ab$ .

O mesmo problema feito com técnicas matemáticas modernas:

Quadrado da diferença  $(b - a)^2$

Sendo “b” e “a” a base e a altura do retângulo dado no problema e  $C^2 - 2A$  o completar quadrados babilônico descrito no tablete YBC 6967

$\sqrt{c^2 - 2A} = (b - a)$  Substituindo os valores da Diagonal e Área do retângulo

$$\sqrt{(1,25)^2 - 2(0,75)} = (b - a)$$

$$\sqrt{1,5625 - 1,5} = (b - a)$$

$$\sqrt{0,0625} = (b - a)$$

$$0,25 = (b - a)$$

$$0,25 = b - a \quad \text{Diferença de dimensões}$$

$$a \cdot b = 0,75$$

Sistema de equações

$$-a = 0,25 - b$$

$$a = b - 0,25$$

Substituindo “a” em  $a \cdot b = 0,75$

$$(b - 0,25) \cdot b = 0,75$$

$$b^2 - 0,25b = 0,75$$

$$b^2 - 0,25b - 0,75$$

$$b = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$b = \frac{-(-0,25) \pm \sqrt{(-0,25)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-0,75)}}{2 \cdot 1}$$

$$b = \frac{-(-0,25) \pm \sqrt{3,0625}}{2 \cdot 1}$$

$$b = \frac{0,25 \mp 1,75}{2,1} = x' = 1 \text{ e } x'' = -1,5$$

Finalmente substituindo a raiz positiva em "b"  $a = b - 0,25$

$$a = 1 - 0,25$$

$$a = 0,75$$

Bruce Ratner, um renomado matemático, deduziu isso de sua análise das inscrições traduzidas do sistema numérico base 60 dos babilônios.

De acordo com Ratner a conclusão é inescapável. Os babilônios conheciam a relação entre o comprimento da diagonal de um quadrado e seu lado:  $d = \text{raiz quadrada de } 2$ .

Usa os princípios do teorema de Pitágoras para calcular o comprimento de uma diagonal dentro de um retângulo.

### 4.3. Conclusão do Capítulo

Este capítulo buscou, adentrar nas origens do teorema de Pitágoras através da análise de diversos registros históricos. Foi explorada a origem clássica desse teorema, atribuída ao renomado Pitágoras. Contudo, também se examinou outros possíveis antecessores desse teorema em regiões como Índia, China, Babilônia e Egito, onde documentos históricos anteriores a Pitágoras revelaram descobertas similares às do filósofo grego.

No próximo capítulo e últimos deste trabalho serão apresentadas as considerações finais desta monografia, dessa forma serão indicados possíveis impactos no ensino da história da matemática, como contribuição científica deste estudo especializado. Além disso sugerir-se-ão outras possibilidades de pesquisas de maneira a dar continuidade ao assunto trabalhado nesta monografia.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho buscou resgatar a história por trás do teorema que leva o nome do filósofo matemático grego, Pitágoras. Sua ampla história remonta aos primórdios na Babilônia, China e Índia, onde era utilizado de forma indireta para solucionar problemas diversos. A matemática desse período servia para mensurar e delimitar territórios, realizar cálculos de adoração, entre outros. Fazendo um paralelo, é possível dizer que enquanto os gregos utilizavam o teorema como forma de mensurar o céu, os babilônios o utilizavam para medir o chão.

Infelizmente, não é possível determinar com plena exatidão a quem pertence a honra de tê-lo criado. As escritas cuneiformes eram difíceis de talhar em tabletes, que foram os primeiros artefatos onde o teorema foi encontrado. Na escola pitagórica, tudo o que os membros faziam era atribuído a Pitágoras. No entanto, é impossível afirmar com certeza quem o patenteou.

Apesar disso, o fato é que esse teorema já foi muito usado para dividir e mensurar terrenos, determinar o raio da terra, entre outros. Hoje em dia, com os avanços tecnológicos, esse tipo de cálculo é mais utilizado em situações-problema, que são frequentemente abordadas no ensino fundamental. Embora possam parecer sem importância e redundantes, essas questões contam a história deste teorema, uma parte da grande e vasta história da matemática que perdura até os dias atuais.

Ele é utilizado não apenas na matemática, mas também em diversas áreas exatas e até mesmo no cotidiano, especialmente em construções, onde os trabalhadores se utilizam do conhecimento que foi usado no Egito. A maioria sequer sabe a história ou mesmo o que são as tríades pitagóricas, apenas possuem um conhecimento automático, sem saber como ou por que funciona. Isso comprova sua magnitude e importância, sustentando sua relevância ao longo dos séculos.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMMA, S. T. A. Geometry in Ancient and Medieval India 1a. ed. Índia: Motilal Banarsidass, 1979. 280 p.

BARBOSA, R. M. Descobrimos padrões pitagóricos: geométricos e numéricos. São Paulo: Atual, 1993. 93p.

BIGODE, A. J. L. Matemática, 8º ano. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2013.

BOYER, Carl. B. História da Matemática. São Paulo. Edgard Blücher, Ltda., 1974.

BRANDEMBERG, João. Métodos históricos. Sua importância ao ensino de matemática. Editora livraria da física, 1ª edição, 2019.

DAMEROW, Peter. Prehistory and Cognitive Development. Invited Lecture at the TwentyFifth Annual Symposium of the Jean Piaget Society. Berkeley, June 3, 1995.

DUTTA, A. K. Mathematics in Ancient India. Resonance, v.1, n.1, p.1-16, apr. 2002.

DUTTA, A. K. The Bhāvanā in Mathematics. The Bhāvanā Journal, p.13-19, jan. 2017.

EVES, H. Introdução à história da matemática. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004. 843p.

EVES, H. Introdução à história da matemática, tradução: Hygino H. Domingues. Campinas. Ed. da UNICAMP, 2008

FRIBERG, J. Methods and Traditions of Babylonian Mathematics. Historia Mathematica, v. 8, p. 277-318, 1981.

GASPAR, M. T. J. O teorema de Pitágoras na antiguidade: Um olhar sobre a história da matemática indiana. RPM, v. 87, 2015.

GEBRAN, Guinés. Pitágoras. 2º edição. Ed. Lítero-Técnica, 2004.

GONÇALVES, Carlos Henrique Barbosa. Notas sobre a Recepção da Matemática Mesopotâmica na Historiografia. Educ. Matem. Pesq. São Paulo, v.14 n.3, 2012.

IMENES, Luiz Márcio. Vivendo Matemática Descobrimos o teorema de Pitágoras. São Paulo, 14ª edição, editora Scipione, 2008

KATZ, Victor J. A history of mathematics: an introduction. 3 ed. New York: Pearson Education, 2009, 976 p.

LAKATOS, E. M; MARCONI, M. de A. Fundamentos de metodologia científica. 5ed. São Paulo: Atlas, 2013.

LIMA, E. L. (2006). Meu Professor de Matemática e outras histórias. Coleção do Professor de Matemática. SBM: Rio de Janeiro.

LOPES, Maria da Penha. Geometria e Educação Matemática, In: Encontro Mineiro de Educação Matemática, Belo Horizonte, 2003, Minas Gerais. Anais. Minas Gerais, 2003.

LOOMIS. Elisha Scott. The Pythagorean Proposition, de. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/0B9uh0VymSVrpU0dHLXBVYjFGSm8/edit>. Acesso, 12 de jun.2015.

OLIVEIRA, Ana Maria. Nova biblioteca da escola em casa, São Paulo, 1ª edição, editora DCL, 2007

RIBEIRO, Vanessa Vânia Silva Marinho. Revisitando o Teorema de Pitágoras. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Viçosa, Minas Gerais, 2013.

SANTOS, Carlos Pereira dos; PEDRO NETO, João; SILVA, Jorge Nuno. 10 Livros, 10 Regiões, 10 Jogos para aprender e divertir-se: China – Xiang-Qi. 2008b.

Seidenberg, 1978. The origin of mathematics. Archive for the history of Exact Sciences, vol 18.

SILVA, Ricardo José da. Ternos Pitagóricos e Sequências Numéricas. São Paulo, edição digital, 2017

VIEIRA, Sebá. Desvendando os Segredos do Triângulo Retângulo. Descobrindo Curiosidades Até Hoje não Conhecidas. Rio de Janeiro: Gramma 2018.