UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ABAETETUBA
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LAURINDO RODRIGUES NEGRÃO

SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO: SAC × SPC

ABAETETUBA-PA
2025

LAURINDO RODRIGUES NEGRÃO

SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO: SAC × SPC

Trabalho de Conclusão de Curso, em formato de monografia, apresentado a Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia do Campus Universitário de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará como requisito obrigatório para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.
Orientadora: Profa. Dra. Laila Conceição Fontinele

ABAETETUBA-PA
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

N385 Negrão, Laurindo Rodrigues.
SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO: SAC × SPC / Laurindo Rodrigues Negrão. — 2025.
56 f. : il. color.

Orientador(a): Profª. Dra. Laila Conceição Fontinele
Trabalho de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Curso de Matemática, Abaetetuba, 2025.

1. Matemática Financeira. 2. Sistemas de Amortização. 3. SAC × SPC. I. Título.

CDD 510

LAURINDO RODRIGUES NEGRÃO

SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO: SAC × SPC

Trabalho de Conclusão de Curso orientado pela Profa. Dra. Laila Conceição Fontinele, apresentado ao curso de Licenciatura Plena em Matemática da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Campus Universitário de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará, como requisito obrigatório para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovado em 08/12/2025

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br
LAILA CONCEICAO FONTINELE
Data: 08/12/2025 16:46:57-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Laila Conceição Fontinele
Orientadora - FACET/Campus de Abaetetuba/UFPA

Documento assinado digitalmente
gov.br
GENIVALDO DOS PASSOS CORREA
Data: 09/12/2025 06:21:49-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Genivaldo dos Passos Corrêa
Membro – FACET/Campus de Abaetetuba/UFPA

Documento assinado digitalmente
gov.br
DALMI GAMA DOS SANTOS
Data: 08/12/2025 23:04:23-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Dalmi Gama dos Santos
Membro – FAMAT/Campus de Cametá/UFPA

AGRADECIMENTO

Agradeço, primeiramente, a Deus, pela sabedoria, força e por tonar tudo possível.

À minha família, em especial aos meus pais José Domingos Rodrigues Negrão e Verediana Ferreira Rodrigues, pelo apoio, incentivo e suporte ao longo de toda a minha trajetória. Sem vocês, esta conquista não seria possível.

À minha orientadora, Prof.ª Dra. Laila Conceição Fontinele, pela orientação, pela disponibilidade e contribuições fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço também aos professores, que ao longo da graduação compartilharam conhecimento, experiências e reflexões que contribuíram significativamente para minha formação, cada disciplina, orientação e diálogo foram essenciais para ampliar minha compreensão sobre a área e fortalecer meu percurso acadêmico.

Aos meus colegas de turma, pelo companheirismo, pela troca de ideias e pelo apoio mútuo, que tornaram esta jornada mais leve e enriquecedora.

Por fim, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho e para o meu crescimento acadêmico e pessoal.

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Juros Simples e compostos (a.a) 16

Gráfico 2 – Comportamento do financiamento no SAC – Simulação 1...................... 52

Gráfico 3 – Comportamento do financiamento no SAC – Simulação 1.......................54

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 - Tabela de taxa percentual e taxa unitária...12

Tabela 2 - Juros simples.. 14

Tabela 3 - Juros Compostos..15

Tabela 4 - SAC sem carência...36

Tabela 5 - SAC com carência, situação A... 37

Tabela 6 - SAC com carência, situação B... 37

Tabela 7 - SAC com carência, situação C... 38

Tabela 8 - SPC sem carência.. 46

Tabela 9 - SPC com carência, situação A... 46

Tabela 10 - SPC com carência, situação B... 47

Tabela 11 - Simulação no SAC... 51

Tabela 12 - Simulação no SPC... 53

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.. 09

1. MATEMÁTICA FINANCEIRA: CONCEITOS BÁSICOS........................... 11

1.1 Capital (c)... 11

1.2 Juros (J).. 11

1.3 Montante (M).. 11

1.4 Período (n).. 12

1.5 Taxas de Juros (i).. 12

1.5.1 Exemplo... 13

1.6 Regimes de capitalização.. 13

1.6.1 Regime de capitalização simples.. 13

1.6.2 Exemplo... 14

1.6.3 Regime de capitalização composta... 14

1.6.4 Exemplo... 15

1.6.5 Fórmulas utilizadas no regime de capitalização simples........................... 16

1.6.6 Exemplo... 17

1.6.7 Taxa proporcional e taxa equivalente.. 18

1.6.8 Exemplo... 19

1.7 Fórmulas utilizadas no regime de capitalização composta.............................. 19

1.7.1 Exemplo... 21

1.7.2 Taxas equivalentes no regime de capitalização composta.......................... 21

1.7.3 Exemplo... 21

1.8 Fluxos de caixa... 22

1.8.1 Modelo – padrão de fluxo de caixa... 23

1.8.2 Valor presente e fator de valor presente.. 24

1.8.3 Valor futuro e fator de valor futuro... 26

2. SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO... 30

2.1 Encargos Financeiros... 30

2.2 Amortização (A).. 30

2.3 Saldo devedor (SD).. 31

2.4 Prestação (PMT)... 31

2.5 Carência... 31

2.6 Sistema de Amortização Constante (SAC) e expressões utilizadas para cálculo.. 31
2.6.1 Exemplo (SAC)... 34
2.6.2 Período de Carência.. 36
2.7 Sistema de Prestação Constante (SPC) e expressões utilizadas para cálculo..39
2.7.1 Período de Carência.. 46
2.8 Uma aplicação habitacional.. 48
2.9 Perfil Socioeconômico do Contrariante... 49
2.9.1 Análise comparativa das simulações SAC e SPC.......................................54
CONCLUSÃO..55
REFERÊNCIAS.. 57

INTRODUÇÃO

A Matemática Financeira acompanha a trajetória da humanidade desde os seus primeiros registros de organização econômica e social. Conforme Silva et al. (2022), esse campo do conhecimento sempre esteve intimamente ligado ao comércio e às trocas entre os primeiros grupos humanos. Desde a prática do escambo (troca de bens sem a necessidade de ter uma moeda intermediando), até o desenvolvimento de sistemas de crédito e empréstimo, a necessidade de administrar bens e mercadorias estimulou o surgimento de métodos para calcular, planejar e controlar recursos. Ao longo do tempo, essas práticas influenciaram diretamente a consolidação do capitalismo e as revoluções industriais, tornando a Matemática Financeira uma ferramenta essencial para compreender e estruturar as relações econômicas. Silva (2022, p. 5) destaca a importância da matemática financeira; “[...] a relevância para o que diz respeito à percepção das relações econômicas e financeira contemporânea. Assim, entender e tomar posse dos significados e conceitos da Matemática é primordial.” Além disso, ela revela como a evolução das sociedades está interligada à capacidade de organizar e interpretar valores, demonstrando que os conceitos financeiros não são apenas técnicas abstratas, mas instrumentos que moldam comportamentos, decisões e políticas econômicas, atravessando séculos e continentes.

Ao longo da história, os conceitos fundamentais da Matemática Financeira foram sendo aperfeiçoados, acompanhando o desenvolvimento das operações comerciais e bancárias. Elementos como o capital, os juros e o montante tornaram-se bases para compreender o funcionamento do sistema econômico moderno. Dentro desse contexto, surgem os regimes de capitalização, que se dividem em simples e composto. O primeiro, mais limitado às operações de curto prazo, aplica juros apenas sobre o capital inicial; já o segundo, amplamente utilizado nas transações atuais, incide juros sobre juros, refletindo melhor a dinâmica real do mercado financeiro contemporâneo.

Entre os instrumentos mais relevantes para o estudo financeiro, destaca-se também o fluxo de caixa, que representa as movimentações de entrada e saída de valores ao longo do tempo, permitindo visualizar de forma organizada os pagamentos e recebimentos previstos. Essa ferramenta é essencial para compreender o comportamento de dívidas e investimentos e serve de base para a aplicação dos sistemas de amortização, que indicam como um empréstimo ou financiamento é quitado de maneira periódica.

Neste trabalho, são abordados os principais conceitos relacionados à Matemática Financeira, passando pelos regimes de capitalização e o fluxo de caixa, até chegar aos sistemas de amortização mais utilizados no Brasil; o Sistema de Amortização Constante (SAC) e o

Sistema Prestação Constante (SPC). Ambos são amplamente aplicados em financiamentos imobiliários, automotivos e bancários, apresentando diferenças significativas quanto à composição das parcelas, amortizações e juros.

O presente estudo tem como propósito analisar o comportamento da dívida sob dois sistemas de amortização; o Sistema de Amortização Constante (SAC) e o Sistema de Prestação Constante (SPC), buscando suas particularidades e implicações quanto a vantagem para o tomador. Para tanto, foram desenvolvidas aplicações práticas para facilitar a compreensão dos conceitos e fórmulas que caracterizam cada sistema. No primeiro momento, foi feito uma aplicação de um empréstimo de $R\$\ 80.000,00$ a ser pago em 10 prestações semestrais sucessivas à uma taxa de 30% ao ano, com o intuído de apresentar os conceitos e fórmulas especificas de cada sistema. O segundo momento consiste em uma aplicação de financiamento habitacional, mais precisamente em uma casa nova no valor de $R\$\ 150.000,00$, para a qual será utilizado o simulador on-line da Caixa Econômica Federal (CEF) na obtenção dos dados. Essa aplicação busca compreender o comportamento da dívida sob os dois sistemas de amortização, identificando qual deles se mostra mais vantajoso ao tomador ao longo do tempo. As análises serão conduzidas sem a inclusão de encargos adicionais, como seguros ou outros custos complementares, restringindo-se à dívida primária, composta essencialmente por juros.

Este estudo se caracteriza como uma pesquisa exploratória, pois, segundo Gil (2002, p. 42), esse tipo de pesquisa "tem como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses". O autor destaca que esse tipo de investigação apresenta planejamento flexível, permitindo a consideração de diferentes aspectos relacionados ao fenômeno estudado e, na maioria dos casos, inclui procedimentos como o levantamento bibliográfico.

Dessa forma, a metodologia adotada neste trabalho incorpora procedimentos típicos desse tipo de investigação, especialmente o levantamento bibliográfico, entendido como a consulta a materiais, principalmente livros e artigos científicos. Conforme discute Gil (2002), esse procedimento é fundamental para oferecer suporte teórico e fundamentar a compreensão inicial do problema, constituindo elemento essencial dentro das pesquisas de caráter exploratório.

O Trabalho foi estruturado em dois capítulos. O primeiro Capítulo apresenta os conceitos fundamentais da Matemática Financeira, o qual aborda os regimes de capitalização simples e composta, com suas fórmulas e aplicações práticas, fluxo de caixa e de sua importância para a análise financeira. O segundo Capítulo explora os sistemas de amortização, destacando as características e particularidades do SAC e do SPC, como também apresenta a aplicação prática dos conhecimentos teóricos, por meio de aplicações entre umas delas são utilizados dados obtidos junto à Caixa Econômica Federal. Por fim, são apresentadas as considerações finais, nas quais se reforça a importância da Matemática Financeira como instrumento de autonomia, planejamento e tomada de decisões conscientes no contexto econômico atual.

1. MATEMÁTICA FINANCEIRA: CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo, serão apresentados os conceitos fundamentais da Matemática Financeira, indispensáveis para a compreensão dos sistemas de amortização abordados ao longo deste trabalho. Inicialmente, serão definidos termos essenciais como capital, juros, taxa de juros e montante, elementos que estão presentes tanto no regime de capitalização simples quanto no composto com suas fórmulas e aplicações práticas, como também o fluxo de caixa.

O entendimento destes conceitos é essencial, pois eles constituem a base sobre a qual se estruturam os cálculos financeiros utilizados nos sistemas de amortização. Os conceitos principais deste capítulo foram retirados e adaptados da obra *Matemática Financeira* de Guerra e Taneja (2014) e da obra *Matemática Financeira e suas aplicações* de Assaf Neto (2012).

1.1 Capital ($\boldsymbol{C}$).

Capital é a quantia de dinheiro disponível para ser emprestada a quem dela necessite, sob a perspectiva do investidor. Já do ponto de vista do tomador, capital é a quantia ou importância necessária, que não está disponível no momento e que precisa ser obtida por meio de um empréstimo.

Embora o capital geralmente se reflita a dinheiro, também pode incluir outros ativos, como fábricas, equipamentos, imóveis, propriedade intelectual ou outros investimentos, qualquer coisa que possa gerar retorno financeiro.

1.2 Juros ($\boldsymbol{J}$).

Juros é o valor cobrado por quem empresta o dinheiro para quem precisa dele. Para quem empresta, é a remuneração pelo empréstimo; para quem toma, é o custo pelo “aluguel” desse dinheiro. Assim como qualquer produto tem um preço, o dinheiro também tem, quem pega emprestado deve devolver o valor emprestado junto com esse custo extra, chamado juros.

1.3 Montante ($\boldsymbol{M}$)

Tanto o investidor quanto o tomador de empréstimo sempre querem saber qual será o valor final ao término do período da operação financeira. Esse valor final é chamado de montante.

Podemos definir montante como valor final de um ativo ou operação financeira, composto pelo capital inicial e pelos juros acumulados no período em questão. É um conceito básico e muito importante da matemática financeira, utilizado para analisar como determinada quantia varia com o passar do tempo. É representada pela seguinte fórmula;

$$M = C + J \tag{1}$$

1.4 Período ($\boldsymbol{n}$)

O período é o tempo durante o qual o capital fica aplicado ou emprestado, ou seja, o intervalo em que o dinheiro permanece disponível para gerar juros.

De forma simples, quanto mais tempo o capital ficar emprestado ou investido, maior será o valor dos juros. Isso porque juros e tempo são diretamente proporcionais.

1.5 Taxa de juros ($\boldsymbol{i}$)

Toda operação financeira depende da taxa de juros, que sempre está associada a uma unidade de tempo, como ao mês, ao trimestre ou ao ano. Por exemplo, 9% ao ano, 0,75% ao mês ou 2,25% ao trimestre.

A taxa de juros pode ser expressa de duas formas:

- Percentual: 15,75% ao ano;
- Unitária: 0,1575 ao ano.

Para transformar a taxa percentual em unitária, divide-se o valor por 100. Para o contrário, multiplica-se a taxa unitária por 100.

A tabela a seguir apresenta taxas na forma percentual e unitária.

Tabela 1 - Tabela de taxa percentual e taxa unitária.

Taxa Percentual	Taxa Unitária
15%	0,15
150%	1,5
1,3%	0,013
28,64%	0,2864
0,045%	0,00045
3,5%	0,035
1256%	12,56

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

- A taxa de juros representa a relação entre o valor dos juros obtidos (ou pagos) ao final de um determinado período e o capital que foi inicialmente aplicado, ou seja:

$$i = \frac{Juros}{Capital} = \frac{J}{C} \tag{2}$$

Importante: Nas fórmulas de Matemática financeira, é fundamental que o prazo da operação período (n) e taxa de juros (i) estejam expressos na mesma unidade de tempo. Caso essas unidades não coincidam, torna-se necessário converter o prazo da operação para unidade da taxa de juro, ou vice-versa, garantindo a consistência dos cálculos e correta aplicação das fórmulas.

1.5.1 Exemplo:

Considere um empréstimo no valor de $R\$\ 4.000{,}00$ que é quitado com o pagamento de $R\$\ 4.520{,}00$ ao final de um ano. Qual é a taxa de juros aplicada nessa operação?

Resolução:

Sabemos que;

$$M = C + J$$

Logo:

$$Juros\ =\ Montante - Capital\ =\ 4.520{,}00 - 4.000{,}00\ =\ 520{,}00$$

A taxa de juros é:

$$i = \frac{J}{C} = \frac{520{,}00}{4.000{,}00} = 0{,}13\ ou\ 13\%$$

Portanto, a taxa de juros cobrada nesse empréstimo é de 13% ao ano.

1.6 Regimes de capitalização

Os regimes de capitalização constituem os critérios utilizados para determinar a formação dos juros e sua incorporação ao capital ao longo do tempo. A escolha do regime influencia diretamente o crescimento do valor investido ou financiado, sendo, portanto, essencial para a compreensão e análise de operações financeiras.

De modo geral, classificam-se dois principais regimes de capitalização: o regime de capitalização simples, (linear), e o regime de capitalização composta, ou (exponencial).

1.6.1 Regime de capitalização simples

No regime simples, os juros são calculados apenas sobre o capital principal (ou inicial) da operação, seja uma aplicação ou um empréstimo, mantendo-se constantes ao longo dos períodos, o qual se caracteriza por ser diretamente proporcional ao seu valor e ao tempo de aplicação (Guerra; Taneja, 2014). De forma semelhante, Arcanjo (2020, p.11) afirma que “os juros são calculados sempre em função do capital inicial empregado”.

1.6.2. Exemplo:

Considere um empréstimo de $R\$\ 3.000{,}00$, com prazo de 4 anos, à taxa de juros simples de 6% ao ano. Abaixo, apresentam-se os valores na tabela a seguir:

Tabela 2. Juros simples.

Ano	*Saldo devedor do início de cada ano ($)*	*Juros aplicado par cada ano ($).*	*Saldo devedor no final de cada ano (R$)*
1º ano	3.000,00	0,06 × 3.000,00 = 180,00	3.180,00
2º ano	3.180,00	0,06 × 3.000,00 = 180,00	3.360,00
3º ano	3.360,00	0,06 × 3.000,00 = 180,00	3.540,00
4º ano	3.540,00	0,06 × 3.000,00 = 180,00	3.720,00
5º ano	3.720,00	0,06 × 3.000,00 = 180,00	3.900,00
6º ano	3.900,00	0,06 × 3.000,00 = 180,00	4.080,00
7º ano	4.080,00	0,06 × 3.000,00 = 180,00	4.260,00
8º ano	4.260,00	0,06 × 3.000,00 = 180,00	4.440,00
9º ano	4.440,00	0,06 × 3.000,00 = 180,00	4.620,00
10º ano	4.620,00	0,06 × 3.000,00 = 180,00	4.800,00

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Observa-se que os juros incidem de forma constante sobre o capital inicial de $R\$\ 3.000{,}00$, resultando em um acréscimo fixo de $R\$\ 180{,}00$ ao final de cada ano. Isso porque, no regime de capitalização simples, os juros são sempre calculados sobre o valor inicial emprestado e não sobre o valor acumulado. O crescimento dos juros ao longo do tempo é caracterizado por um comportamento linear, que pode ser comparado a uma progressão aritmética (PA). Segundo Assaf Neto (2012, p. 3); "o regime de capitalização simples comporta-se como se fosse uma progressão aritmética (PA), crescendo os juros de forma linear ao longo do tempo".

1.6.3 Regime de capitalização composta

Já no regime composto, os juros incidem ao capital a cada período, formando um novo montante. Esse valor passa a gerar novos juros e novos montantes até o fim do período correspondente, ou então, "capitalização composta é aquela em que a taxa de juros incide sempre sobre o capital inicial, crescido do juro acumulado até o período anterior". (Guerra; Taneja, 2014, p. 24). Esse regime apresenta um comportamento semelhante ao de uma progressão geométrica (PG), uma vez que os juros são calculados com base no saldo acumulado no início de cada novo período e não apenas sobre o capital principal (Assaf Neto, 2012). Sendo assim, o crescimento é acumulativo ao longo do tempo, pois os juros são capitalizados, gerando novos acréscimos periodicamente sobre o saldo já existente.

Considerando o exemplo semelhante ao anterior, de forma que seja aplicado a juros compostos;

1.6.4. Exemplo:

Considere um empréstimo de $R\$\,3.000{,}00$, com prazo de 7 anos, à taxa de juros compostos de 6% ao ano. A seguir estão os resultados na tabela:

Tabela 3 - Juros Compostos.

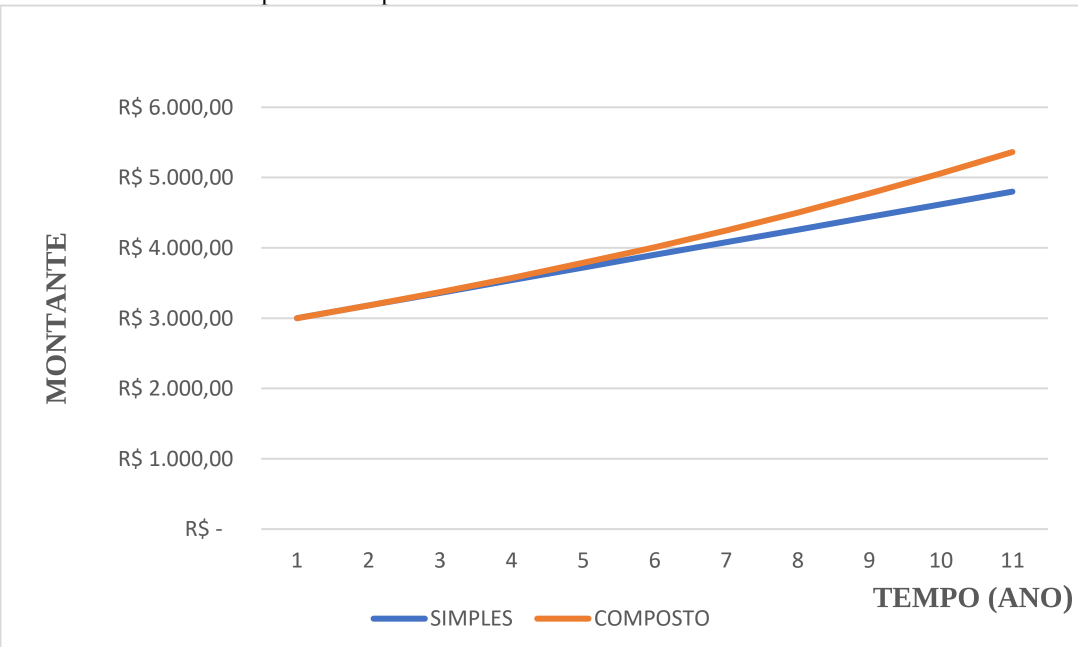
Ano	*Saldo devedor do início de cada ano ($)*	*Juros aplicado par cada ano ($).*	*Saldo devedor no final de cada ano ($)*
1º ano	3.000,00	0,06 × 3.000,00 = 180,00	3.180,00
2º ano	3.180,00	0,06 × 3.180,00 = 190,80	3.370,80
3º ano	3.370,80	0,06 × 3.370,80 = 202,25	3.573,05
4º ano	3.573,05	0,06 × 3.573,05 = 214,38	3.787,43
5º ano	3.780,43	0,06 × 3.780,43 = 226,83	4.007,26
6º ano	4.007,26	0,06 × 4.007,26 = 240,44	4.247,7
7º ano	4.247,7	0,06 × 4.247,7= 254,86	4.502,56
8º ano	4.502,56	0,06 × 4.502,56 = 270,15	4.772,71
9º ano	4.772,71	0,06 × 4.772,71 =286,36	5.059,07
10º ano	5.059,07	0,06 × 5.059,07 = 303,54	5.362,61

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

É possível observar que, na Tabela 3, o regime de capitalização composta, ou seja, os juros não são calculados apenas sobre o capital inicial de $R\$\,3.000{,}00$, mas sim sobre o novo montante acumulado no início de cada ano. Conforme explica Arcanjo (2020, p.18), “os juros gerados a cada período são incorporados ao principal para o cálculo dos juros do período seguinte”. Observa-se, portanto, que tanto os juros quanto o saldo devedor ao final de cada ano apresentam um crescimento exponencial ao longo do tempo, os quais se caracteriza por uma progressão geométrica (PG).

A seguir, apresenta-se um gráfico que ilustra o comportamento dos regimes de juros simples e composto ao longo do tempo, permitindo uma visualização clara das diferenças entre os dois modelos de capitalização, conforme analisado nas seções anteriores.

Gráfico1 – Juros Simples e Composto



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se que, enquanto no regime de juros simples o crescimento do montante ocorre de forma linear e constante, no regime de juros compostos o crescimento é exponencial, devido à capitalização dos juros a cada período. Essa diferença torna-se cada vez mais significativa conforme o tempo avança.

1.6.5 Fórmulas utilizadas no regime de capitalização simples.

No regime de capitalização simples, como já visto, os juros são calculados apenas sobre o capital principal. A seguir, serão apresentadas as principais fórmulas utilizadas neste tipo de capitalização. A fórmula que se utiliza para o cálculo dos juros simples em uma operação financeira se dá pela seguinte expressão:

$$J = C \times i \times n \tag{3}$$

Onde:

$J \quad = Valor\ dos\ juros;$

$C\ = Capital\ principal\ ou\ inicial\ (\ em\ R\$);$

$i = taxa\ de\ juros\ (\ em\ forma\ unitária);$

$n = periodo\ ou\ tempo\ da\ operação\ (prazo).$

Da expressão $J = C \times i \times n$, obtemos por dedução algébrica as seguintes:

$$C = \frac{J}{i \times n}, \qquad i = \frac{J}{C \times n} \quad \text{e} \quad n = \frac{J}{C \times i}$$

1.6.6 Exemplo:

Qual os juros correspondentes a um empréstimo de $R\$ \ 5.000{,}00$ pelo período de 12 meses a uma taxa de 1,5% ao mês.

Resolução:

$C = R\$ \ 5.000{,}00$

$n = 12 \ meses$

$i = 1{,}5\% \ a.m = 0{,}015 \ a.m$

$J = ?$

Aplicando a fórmula dos juros simples temos:

$$J = C \times i \times n$$
$$\rightarrow J = 5.000 \ \times 0{,}015 \ \times 12 \qquad (2)$$
$$\rightarrow J = 900{,}00$$

Portanto, os juros correspondentes ao empréstimo foi de $R\$ \ 900{,}00$.

Como vimos anteriormente o cálculo do montante se dá pela soma do capital mais os juros, ou seja, se encontramos os juros de um determinado capital facilmente pode-se encontrar o valor do montante. Deste modo:

Para calcular o montante de um empréstimo de $R\$ \ 5.500{,}00$ contratado à taxa de 3% ao mês pelo período de 2 anos.

Solução:

$C = R\$ \ 5.500{,}00$

$n = 2 \ anos \ (\ 24 \ meses)$

$i = 3\% \ a.m = 0{,}03 \ a.m$

Dessa forma, tem-se:

$$M = C + J$$

Sabendo que o cálculo dos juros é dado por $J = C \times i \times n$, e substituindo expressão na fórmula do montante, temos:

$$M = C + (C \times i \times n)$$
$$M = C \ (1 + i \times n)$$
$$M = 5.500(1 + 0{,}03 \times 24)$$
$$M = 9.460{,}00$$

Logo, o valor acumulado ao final do empréstimo foi de $R\$\ 9.460{,}00$.

É importante ser observado que o montante pode ser expresso:

$$M = C\ (1 + i \times n) \quad (4)$$

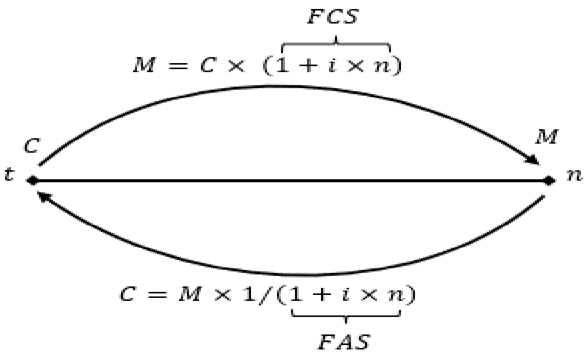
E, consequentemente temos:

$$C = \frac{M}{(1 + i \times n)} \quad (5)$$

A expressão $(\mathbf{1} + \boldsymbol{i}\ \times \boldsymbol{n})$ é denominada ***fator de capitalização*** *(ou de valor futuro - FCS)* no regime de juros simples. Ela representa o coeficiente que, multiplicado pelo capital inicial, permite determinar o montante, isto é, o valor acumulado em uma data futura.

De forma análoga, o inverso dessa expressão, isto é, $\frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1+i \times n})}$, recebe o nome de ***fator de atualização*** *(ou de valor presente - FAS).* Esse fator possibilita trazer para o momento atual um valor expresso em uma data futura, permitindo calcular o seu equivalente no presente.

Figura 01 - diagrama de fluxo de capital em juros simples,



Fonte: Adaptada, Assaf Neto (2012).

1.6.7 Taxa proporcional e taxa equivalente

Para compreender corretamente o significado dessas taxas, é necessário considerar que toda operação financeira envolve dois prazos distintos: (1) o prazo ao qual a taxa de juros está originalmente associada; e (2) o período em que ocorre a capitalização (ocorrência) dos juros. Em muitas situações práticas, esses dois prazos não coincidem. Quando isso acontece, a taxa de juros deve ser ajustada de acordo com o período de capitalização. Esse ajuste pode ser feito de duas formas: transformando a taxa para a unidade de tempo em que ocorre a capitalização, ou, de maneira inversa, expressando o período de capitalização na unidade de tempo da taxa de juros contratada.

No regime de juros simples, esse processo de adequação resulta na chamada ***taxa proporcional*** (também denominada taxa linear ou nominal). Ela é obtida pela divisão da taxa de juros pela quantidade de períodos de capitalização existentes dentro do prazo considerado.

O uso de taxas proporcionais é bastante comum em operações de curto ou curtíssimo prazo, como em cálculos de juros de mora, descontos bancários, créditos de curtíssimo prazo, apuração de encargos sobre o saldo devedor de conta corrente bancária etc. Já as ***taxas equivalentes*** são aquelas que, quando aplicadas a um mesmo capital, durante o mesmo intervalo de tempo, produzem exatamente o mesmo valor de juros.

Importante: no regime de juros simples, taxas proporcionais e taxas equivalentes coincidem, ou seja, são consideradas a mesma coisa.

1.6.8 Exemplo:

Calcule as taxas mensal e semestral proporcionais a uma taxa de 24% ao ano.

Resolução:

- Como um ano possui 12 meses, a taxa mensal proporcional é:

$$\frac{24\%}{12} = 2\%\ ao\ mês.$$

- Já a taxa semestral proporcional, sabendo que o ano tem dois semestres, temos:

$$\frac{24\%}{2} = 12\%\ ao\ semestre.$$

1.7 Fórmulas utilizadas no regime de capitalização composta

No regime de capitalização composta, o montante pode ser obtido a partir da soma do capital inicial com os juros acumulados ao longo do tempo. Assim como no regime simples, é possível obter o valor dos juros compostos a partir da diferença entre o montante e o capital inicial. Para compreender a fórmula geral dos juros compostos, é importante recordar que o cálculo do montante envolve aplicações sucessivas taxa de juros sobre o saldo atualizado a cada período.

Matematicamente, o montante é calculado pela expressão:

$$M = C(1 + i)^n \qquad (6)$$

Onde;

$M = montante\ ou\ valor\ futuro;$

$C = capital\ ou\ valor\ presente;$

$i = taxa\ de\ juros\ composto\ (por\ período\ de\ capitalização)\ ;$

$n = corresponte\ ao\ período\ de\ capitalização.$

Para que se tenha um entendimento melhor sobre a fórmula, é necessário compreender a forma de cálculo do montante nesse regime. Por exemplo, considerando um empréstimo de R$ 3.5000,00 contratado a uma taxa de 5% ao mês, no primeiro mês, o montante será:

$$M = 3.500 \times (1 + 0{,}05)^1$$
$$M = 3.675{,}00$$

No segundo mês, aplica-se novamente a taxa sobre o novo saldo:

$$M = 3.500 \times (1 + 0{,}05)^1 \times (1 + 0{,}05)^1$$
$$M = 3.500 \times (1 + 0{,}05)^2$$
$$M = 3.858{,}75$$

Esse procedimento se repete até o final do prazo definido no contrato. Dessa forma, se pode definir a fórmula geral do montante $M = C(1 + i)^n$. Logo, a fórmula geral para o juro composto é obtida substituindo-se o montante na expressão:

$$J = M - C:$$
$$J = C(1 + i)^n - C$$
$$\Rightarrow J = C.[(1 + i)^n - 1] \tag{7}$$

No entanto é importante observar que, no regime de capitalização composta, o valor presente (capital) não se refere, necessariamente, a um valor expresso no momento (data focal zero). O valor presente pode ser calculado em qualquer momento (data focal) anterior ao valor futuro (montante). Para evitar ambiguidades, adota-se a notação nas fórmulas de juros compostos o ***Capital ou valor presente por VP*** e o ***Montante ou valor futuro por VF***. Assim, as fórmulas do Montante, Capital e Juros acumulados vistas anteriormente podem ser reescritas da seguinte forma:

- Montante (valor futuro – *VF)*:

$$VF = VP \times (1 + i)^n$$

- Capital (valor presente – *VP)*

$$VP = \frac{VF}{(1 + i)^n}$$

- Juros compostos acumulados:

$$J = VF - VP$$
$$\Rightarrow \ J = VP \times [\ (1 + i)^n - 1]$$

Importante: o termo $\boldsymbol{(1 + i)^n}$ é denominado como fator de capitalização (ou de valor futuro), pois representa o efeito acumulativo da taxa de juros ao longo do tempo a juros compostos e

$\mathbf{1/(1+i)^n}$ é o fator de atualização (ou valor presente), pois permite trazer um valor futuro para seu equivalente no montante atual, a juros compostos.

1.7.1 Exemplo:

Determine os juros de um empréstimo de $R\$\ 3.500{,}00$, contratado à taxa de 3% ao mês, pelo prazo de 10 messes a juros compostos.

Solução: Temos os seguintes dados:

$VP = 3.500{,}00$

$n = 10\ messes$

$i = 0{,}03\ a.m$

Aplicando a fórmula dos juros composto:

$$J = VP \times [\ (1+i)^n - 1]$$

$$J = 3.500 \times [(1+0{,}03)^{10} - 1]$$

$$J = 3.500\times (1{,}343916 - 1)$$

$$J = 3.500 \times 0{,}343916$$

$$J = 1.203{,}706$$

O valor total de juros pagos ao final foi de R$ 1.203,71.

1.7.2 Taxas equivalentes no regime de capitalização composto

No regime de juros simples, como já mencionado anteriormente, as taxas equivalentes é a própria taxa proporcional. Isso ocorre porque a relação entre os prazos e as taxas mantém o mesmo montante final. Por exemplo, a taxa de 3% ao mês é proporcional e, portanto, equivalente à de 9% ao trimestre, pois ambas resultam no mesmo valor futuro para um mesmo capital aplicado em períodos diferentes.

A lógica das taxas equivalentes também se aplica ao regime de juros compostos, mas neste caso o cálculo difere, pois, a capitalização se dá de forma exponencial. A taxa equivalente composta corresponde à média geométrica das taxas, expressa pela seguinte fórmula:

$$i_q = \sqrt[q]{1+i} - 1 \tag{9}$$

Onde:

- i_q representa a taxa equivalente no período desejado;
- i é a taxa de referência no período conhecido;
- q o número de período de capitalização.

1.7.3 Exemplo:

A taxa equivalente composta mensal para uma taxa de 10,3826% ao semestre é:

Sabendo que:

- Taxa semestral i_{sem}= 10,3826% = 0,103826
- Um semestre = 6 meses ⇒ $q = 6$

$$i_q = \sqrt[q]{1+i} - 1$$

$$i_m = \sqrt[q]{1+i_{sem}} - 1$$

$$i_m = \sqrt[6]{1+0{,}103826} - 1$$

$$i_m = \sqrt[6]{1{,}103826} - 1 = 1{,}0166 - 1$$

$$= 0{,}0166 \; ou \; 1{,}66\% \; a.m$$

Na prática, isso significa que, para um mesmo capital e prazo de aplicação, não importa se os juros são calculados a 1,66% ao mês ou a 10,3826% ao semestre o resultado será o mesmo. Por exemplo, ao aplicar a um capital de $R\$ \; 100.000{,}00$ pôr dois anos.

- Para $i = 1{,}66\% \; e \; n = 24 \; meses$:

Aplicando a fórmula do regime de capitalização composta, temos:

$$VF = VP \times (1+i)^n$$

$$VF = 100.000 \times (1+0{,}0166)^{24}$$

$$VF = 100.000 \times (1{,}0166)^{24} = R\$ \; 148.457{,}63$$

- Para $i = 10{,}3826\% \; e \; n = 4 \; semestres$:

$$VF = 100.000 \times (1+0{,}103826)^4$$

$$VF = 100.000 \times (1{,}103826)^4 = R\$ \; 148.457{,}63$$

1.8 Fluxos de caixa

Nesta seção, será abordado o conceito de fluxo de caixa e suas diferentes aplicações no âmbito da Matemática Financeira. Para a construção deste tópico, será utilizada como referência principal a obra de Assaf Neto (2012), cujas definições e exemplos foram adaptados e reestruturados para atender ao objetivo deste trabalho.

O fluxo de caixa pode ser definido como uma sequência de pagamentos ou recebimentos estimados para ocorrer em determinado intervalo de tempo. Iremos estudar os Fluxos de Caixa em particular o modelo-padrão. É bastante comum na prática, ele está presente em diversas operações financeiras, como empréstimos, financiamentos, recebimentos de aluguéis, prestações de compras a prazo, investimentos empresariais e distribuição de dividendos. Esses fluxos podem assumir diferentes formas como:

a) Quanto ao período de ocorrência:

- *Postecipados (ou vencidos):* quando os termos (pagamentos ou recebimentos) são exigíveis no final de cada períodos. Nesse caso, o primeiro pagamento ocorre apenas ao final do primeiro período.
- *Antecipados*: os termos são exigíveis no início dos períodos, ou seja, o primeiro pagamento ocorre imediatamente na data focal 0 (zero).
- *Deferidos*: os termos passam a ser exigíveis apenas a parti de um período posterior, geralmente ao final do segundo ou terceiro período, caracterizando o que se denomina carência.

b) Quanto à periodicidade:

- *Periódicos*: quando todos os intervalos de tempo (período) são iguais entre si.
- *Não-periódicos*: os intervalos de tempo (período) não apresentam regularidade.

c) Quanto à duração:

- *Limitados (ou temporários):* quando há um número definido de termos, ou seja, o fluxo possui início e fim previamente estabelecidos.
- *Indefinidos (ou indeterminados)* quando não há prazo determinado para o término do fluxo, caracterizando duração ilimitada.

d) Quanto aos valores:

- *Constantes*: todos os termos possuem o mesmo valor
- *Variáveis*: os valores diferem entre si ao longo dos períodos.

Nos fluxos de caixa cada pagamento ou recebimento pode ser denominado prestações, representada pela sigla PMT (do inglês *Payment*), que significa pagamento ou recebimento.

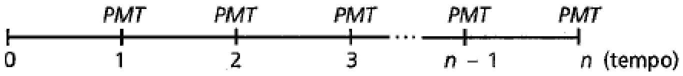
1.8.1 Modelo – padrão de fluxo de caixa

Conforme apresentado anteriormente, os fluxos de caixa podem assumir diferentes formas e classificações. Contudo existe um tipo especifico considerado como modelo-padrão ou fluxo uniforme, amplamente utilizado em aplicações prática da matemática financeira.

Esse modelo é caracterizado por uma sucessão de pagamentos ou recebimentos que apresentam, simultaneamente, as seguintes condições: postecipados (primeiro pagamento ou recebimento PMT ocorre em $n = 1$), limitado (prazo do fluxo é fixo, apresentando n períodos), constante (valores do pagamento ou recebimento são todos iguais PMT) e periódico (intervalos de tempo regulares, isto é, neste caso a diferença é 1).

Graficamente, o fluxo de caixa uniforme (padrão) é representado da seguinte forma:

Figura 02 - linha do tempo de pagamentos iguais

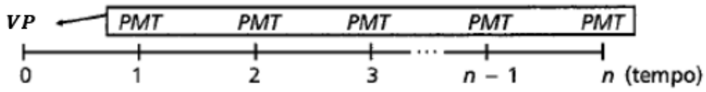


Fonte: Assaf Neto (2012).

1.8.2 Valor presente e fator de valor presente

O valor presente (VP) de um fluxo de caixa uniforme, para uma taxa periódica de juro (i), corresponde à soma dos valores presentes de cada pagamento (PMT). Considerando a data focal zero (0). A representação gráfica do fluxo padrão apresentado, tem-se:

Figura 03 - diagrama de fluxo de pagamentos de uma anuidade



Fonte: Adaptada, Assaf Neto (2012).

Logo:

$$VP = \frac{PMT}{(1+i)} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \frac{PMT}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{PMT}{(1+i)^{n-1}} + \frac{PMT}{(1+i)^n}.$$

Colocando PMT em evidência, temos;

$$VP = PMT \times \left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

$$VP = PMT \times [(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \cdots + (1+i)^{-n+1} + (1+i)^{-n}]$$

A expressão entre colchetes é denominada *Fator de Valor Presente* (FVP) e, em Matemática Financeira, é representada da seguinte forma:

$$FVP(i, n)$$

Com isso, a formulação geométrica do valor presente assume a expressão:

$$VP = PMT \times FVP(i, n)$$

Observe que FVP, conforme apresentado na formulação anterior entre colchetes, equipara-se à soma de uma progressão geométrica (PG) de n termo, sendo o primeiro termo (a_1), a razão (q) é igual a $(1+i)^{-1}$ e o $n - ésimo$ termo (a_n) é igual a $(1+i)^{-n}$.

A fórmula utilizada no cálculo da soma de uma progressão geométrica (PG) é dada por:

$$S_n = FVP(i, n) = \frac{a_1 - a_n \times q}{1-q}$$

Substituindo os termos da expressão de fator de valor presente na fórmula da soma de uma (PG), obtemos:

$$FVP(i,n) = \frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-n} \times (1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}}$$

Utilizando a dedução adotada por Mathias e gomes [1] multiplica-se o numerador e denominador por $(1+i)$, obtendo-se:

$$FVP(i,n) = \frac{[(1+i)^{-1} - (1+i)^{-n} \times (1+i)^{-1}] \times (1+i)}{[1-(1+i)^{-1}] \times (1+i)}$$

$$FVP(i,n) = \frac{(1+i)^{-1} \times (1+i) - (1+i)^{-n} \times (1+i)^{-1} \times (1+i)}{(1+i) - (1+i)^{-1} \times (1+i)}$$

$$FVP(i,n) = \frac{(1+i)^{-1+1} - (1+i)^{-n} \times (1+i)^{-1+1}}{(1+i) - (1+i)^{-1+1}}$$

$$FVP(i,n) = \frac{1-(1+i)^{-n}}{1+i-1}$$

$$FVP(i,n) = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Portanto, a expressão de $Fator\ de\ valor\ presente\ FVP(i,n)$ é dada por: $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$. Ainda sim esta expressão pode ser representada da seguinte maneira:

$$FVP(i,n) = \frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

$$FVP(i,n) = \frac{\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}}{i}$$

$$FVP(i,n) = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \qquad (20)$$

Logo, a fórmula do valor presente de um fluxo de caixa uniforme (constante) pode ser dado pelas seguintes expressões:

[1] MATHIAS, N. Franco; GOMES, J. Maria. *Matemática financeira*. 2.ed. São Paulo: Atlas, 1988. P.242.

$$VP = PMT \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{21}$$

Ou

$$VP = PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \tag{22}$$

$PV = Valor\ presente.$

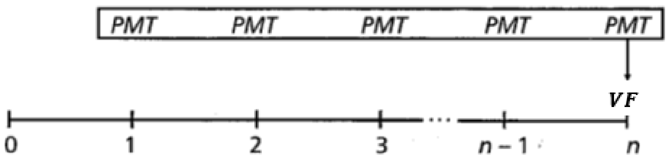
$PMT = Valor\ da\ prestação\ periódica, igual\ e\ sucessiva.$

$i = taxa\ de\ juros.$

$n =$ prazo.

1.8.3 Valor futuro e fator de valor futuro

O valor futuro, para uma determinada taxa de juros por período, corresponde à soma dos montantes de cada um dos termos da série de pagamentos ou recebimentos. Graficamente, tem-se a seguinte representação:



Fonte: Adaptada, Assaf Neto (2012)

O valor futuro, no modelo-padrão, ocorre simultaneamente ao último termo do fluxo de caixa. Ao capitalizar cada um dos valores que compõem a série, obtém-se a seguinte expressão:

$$VF = PMT + PMT \times (1+i) + PMT \times (1+i)^2 + PMT \times (1+i)^3 + \cdots + PMT \times (1+i)^{n-1}$$

Colocando-se PMT em evidencia, temos:

$$VF = PMT \times [1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \cdots + (1+i)^{n-1}]$$

Identicamente, a expressão entre colchetes é definida por *Fator de Valor Futuro* e representada por: $FVF(i,n)$, a formulação genérica do valor futuro de um fluxo de caixa uniforme é expressa da forma seguinte:

$$VF = PMT \times FVF(i,n)$$

Da mesma forma que no desenvolvimento da fórmula do valor presente, observa-se que a expressão do *Fator de Valor Futuro* (FVF) representa a soma dos termos de uma progressão geométrica, em que, pela mesma equação de cálculo da soma dos valores de uma PG, tem-se:

$$S_n = FVF(i,n) = \frac{a_1 - a_n \times q}{1-q}$$

Substituindo os termos da expressão de fator de valor presente na fórmula da soma de uma (PG), obtemos:

$$FVF(i,n) = \frac{1-(1+i)^{n-1} \times (1+i)}{1-(1+i)}$$

Utilizando os mesmos métodos dos quais foram desenvolvidos na obtenção do valor presente, neste caso multiplicaremos o numerador e o denominador por $(1+i)^{-1}$ obtemos:

$$FVF\ (i,n) = \frac{[1-(1+i)^{n-1} \times (1+i)] \times (1+i)^{-1}}{[1-(1+i)] \times (1+i)^{-1}}$$

$$\Rightarrow FVF\ (i,n) = \frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{n-1} \times (1+i) \times (1+i)^{-1}}{(1+i)^{-1} - (1+i) \times (1+i)^{-1}}$$

$$\Rightarrow FVF\ (i,n) = \frac{\frac{1}{(1+i)} - \frac{(1+i)^n}{(1+i)} \times (1+i)^{-1+1}}{\frac{1}{(1+i)} - 1}$$

$$\Rightarrow FVF\ (i,n) = \frac{\frac{1}{(1+i)} - \frac{(1+i)^n}{(1+i)}}{\frac{1}{(1+i)} - 1}$$

$$\Rightarrow FVF\ (i,n) = \frac{\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)}}{\frac{1-(1+i)}{(1+i)}}$$

$$\Rightarrow FVF\ (i,n) = \frac{1-(1+i)^n}{(1+i)} \times \frac{(1+i)}{1-(1+i)}$$

$$\Rightarrow FVF\ (i,n) = \frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)}$$

$$\Rightarrow FVF\ (i, n) = \frac{1 - (1+i)^n}{1 - 1 - i}$$

$$\Rightarrow FVF\ (i, n) = \frac{1 - (1+i)^n}{-i}$$

$$\Rightarrow FVF\ (i, n) = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (23)$$

Portanto, a expressão de $Fator\ de\ valor\ futuro\ FVF(i, n)$ é dada por: $\frac{(1+i)^n-1}{i}$.

Assim, pode-se elaborar a expressão de cálculo do valor futuro (montante) de um fluxo de caixa uniforme, ou seja**:**

$$VF = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \qquad (24)$$

ou

$$VF = PMT \times FVF(i, n)$$

$VF = Valor\ futuro.$

$PMT = Valor\ da\ prestação\ periódica, igual\ e\ sucessiva.$

$i = taxa\ de\ juros.$

$n =$ prazo.

2 SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

Os financiamentos, sejam eles voltados para a aquisição de bens, imóveis ou outras finalidades, exigem um método organizado de devolução do valor emprestado. Essa devolução, em regra, não ocorre de forma única, mas por meio de prestações periódicas. Segundo Guerra e Taneja (2014, p. 113), prestação é a "soma da amortização, acrescida dos juros e outros encargos financeiros pagos em um determinado período".

Os sistemas de amortização consistem em métodos criados para definir como essas prestações serão distribuídas ao longo do contrato. São formas de organizar o pagamento de financiamentos de longo prazo, permitindo que a dívida seja quitada em parcelas periódicas que incluem parte do principal e os encargos financeiros são restituídos ao credor do capital (Assaf Neto, 2012).

No Brasil, diferentes sistemas de amortização são empregados em operações de crédito e financiamento, cada um com suas particularidades e formas de distribuir o pagamento da dívida ao longo do tempo. Neste trabalho, o foco será a análise dos modelos mais utilizados: o Sistema de Amortização Constante (SAC) e o Sistema de Prestação Constante (SPC). É importante destacar que, para fins de cálculo e exemplificação, será considerado exclusivamente o regime de juros compostos, uma vez que ele reflete com maior fidelidade a prática do mercado financeiro e possibilita compreender o real comportamento das dívidas ao longo do tempo. Guerra e Taneja (2014) explicam que, nos sistemas de amortização, os juros incidem sempre sobre o saldo devedor, sendo calculados em regime de capitalização composta. Isso implica que eventual não pagamento em determinado período aumenta o saldo devedor e faz com que os juros subsequentes incidam sobre um montante maior, caracterizando, assim, juros sobre juros. Sendo assim, é importante destacar os principais termos empregados em operações de empréstimos e financiamentos os quais serão retirados e adaptados do livro *Matemática Financeira e suas aplicações* de Assaf Neto (2012).

2.1 Encargos Financeiros

Os encargos financeiros correspondem ao custo que o tomador assume em uma operação de crédito, representando, na prática, a remuneração do capital emprestado. Para o devedor, configuram-se como despesa; para o credor, como a contrapartida pelo empréstimo concedido

2.2 Amortização ($\boldsymbol{A}$)

A amortização corresponde ao pagamento do principal (capital emprestado), que é geralmente realizado por meio de parcelas periódicas (mensais, trimestrais etc.). Esse processo reduz gradualmente a dívida ao longo do tempo, permitindo ao devedor cumprir suas obrigações de forma organizada e previsível.

2.3 Saldo devedor (SD)

É o valor da dívida que ainda falta ser quitado em um determinado momento do contrato. Esse valor corresponde ao capital principal, já descontadas as parcelas de amortização que foram pagas.

2.4 Prestação (PMT)

É composta pelo valor da amortização mais os encargos financeiros devidos em determinado período de tempo. Em termos gerais, pode ser representada pela seguinte expressão:

$$Prestação = Amortização + Encargos\ Fimanceiros$$

2.5 Carência

Em muitos contratos de empréstimos e financiamentos existe a possibilidade de adiar o início do pagamento das parcelas. Esse intervalo é chamado de carência e corresponde ao período entre a data da liberação do crédito e o pagamento da primeira prestação. Na prática, a carência pode variar conforme o contrato e pode abranger apenas o principal, enquanto os juros costumam ser pagos desde o início. Quando os juros também são diferidos, eles são incorporados (capitalizados) ao saldo devedor e pagos junto com as parcelas posteriores.

2.6 Sistema de Amortização Constante (SAC) e expressões utilizadas para cálculo

O Sistema de Amortização Constante (SAC), como o próprio nome indica, tem como característica fundamental a manutenção de amortizações do principal, sempre iguais (ou constantes), ao longo de todo o prazo da operação. Esse valor é obtido de forma simples, dividindo-se o capital financiado pelo número total de prestações.

Os encargos de juros, por sua vez, incidem sobre o saldo devedor atualizado, que se reduz a cada amortização realizada. Como consequência, os juros apresentam comportamento decrescente ao longo do tempo. Dessa interação entre amortizações constantes e juros decrescentes, resulta a estrutura típica do SAC: as prestações periódicas não permanecem fixas, mas diminuem progressivamente, assumindo o formato de uma progressão aritmética.

São apresentadas, a seguir, as expressões genéricas de cálculo utilizadas no Sistema de Amortização Constante (SAC), as quais servirão de base para a compreensão e aplicação prática em exemplos posteriores.

- **Amortização (Amort)**: os valores permanecem constantes ao longo de todo o contrato e são determinados pela seguinte expressão:

$$Amort = \frac{VP}{n} \tag{25}$$

Onde;

$VP = Valor\ do\ fimanciamento\ (\ capital\ emprestado\ ou\ saldo\ devedor\ inicial)$;

$n = número\ de\ prestações$.

Logo:

$$\frac{VP}{n} = Amort_1 = Amort_2 = Amort_3 = \cdots = Amort_n$$

e

$$VP = Amort_1 + Amort_2 + Amort_3 + \cdots + Amort_n$$

- **Saldo Devedor ($\boldsymbol{SD}$):** apresenta comportamento decrescente em progressão aritmética (PA), em função da constância da amortização. Assim, a redução periódica do saldo devedor é dada por:

$$\frac{VP}{n}$$

É possível perceber se consideramos SD_t o saldo devedor ao final do período t, tal que $t = 1,2,3, \dots, n$, temos:

$$SD_1 = VP - \frac{VP}{n} = (n-1) \times \frac{VP}{n},$$

$$SD_2 = VP - \frac{VP}{n} - \frac{VP}{n} = (n-2) \times \frac{VP}{n}$$

$$SD_3 = VP - \frac{VP}{n} - \frac{VP}{n} - \frac{VP}{n} = (n-3) \times \frac{VP}{n}$$

Em continuidade, para um período t qualquer, tem-se:

$$SD_t = VP - \frac{VP}{n} - \frac{VP}{n} - \cdots - \frac{VP}{n}$$

$$\Rightarrow SD_t = VP - t \times \frac{VP}{n}$$

$$\Rightarrow SD_t = (n-t) \times \frac{VP}{n} \tag{26}$$

Ou ainda, como $Amort = \frac{VP}{n}$, temos:

$$SD_t = (n - t) \times Amort. \tag{27}$$

- **Juros** $(\boldsymbol{J})$**:** em razão da redução constante do saldo devedor, os juros assumem comportamento linearmente decrescente ao longo do tempo, configurando-se como uma progressão aritmética (PA) decrescente. O valor da redução periódica corresponde a:

$$\frac{VP}{n} \times i$$

Sendo i a taxa de juros.

As expressões de cálculo dos juros para cada período, consideramos J_t, tal que $t = 1,2,3, \dots, n$, temos:

$$J_1 = VP \times i$$

$$J_2 = \left(VP - \frac{VP}{n}\right) \times i$$

$$J_2 = \left(\frac{VP \times n - VP}{n}\right) \times i$$

$$J_2 = \frac{VP(n-1)}{n} \times i$$

$$J_3 = \left(VP - \frac{VP}{n} - \frac{VP}{n}\right) \times i$$

$$J_3 = \left(PV - \frac{2VP}{n}\right) \times i$$

$$J_3 = \frac{VP \times n - 2VP}{n} \times i$$

$$J_3 = \frac{VP(n-2)}{n} \times$$

$$J_3 = \frac{VP}{n} \times (n-2) \times i$$

e assim por diante.

Para um período t qualquer, temos:

$$J_t = \left(VP - \frac{VP}{n} - \frac{VP}{n} - \cdots - \frac{VP}{n}\right) \times i$$

$$\Rightarrow J_t = \left(PV - \frac{(t-1) \times VP}{n}\right) \times i$$

$$\Rightarrow J_t = \left(\frac{VP \times n - (t-1) \times VP}{n}\right) \times i$$

$$\Rightarrow J_t = \left(\frac{VP[n-(t-1)]}{n}\right) \times i$$

$$\Rightarrow J_t = \frac{VP}{n} \times (n - t + 1) \times i \tag{28}$$

- **Prestação ($\boldsymbol{PMT}$):** corresponde à soma da amortização com os juros, ou seja:

$$PMT = Amort + J$$

$$\Rightarrow PMT = \frac{VP}{n} + \left[\frac{VP}{n} \times (n - t + 1) \times i\right]$$

$$\Rightarrow PMT = \frac{VP}{n} \times [1 + (n - t + 1) \times i] \tag{29}$$

2.6.1 Exemplo (SAC):

Admita-se um empréstimo de R$ 80.000,00, a ser pago em 10 prestações semestrais sucessivas à taxa de 30% ao ano, sem carência. Para a resolução, serão aplicadas as expressões matemáticas do Sistema de Amortização Constante (SAC), e, em seguida, elaborada a tabela financeira correspondente aos dados do exemplo.

Solução:

Percebe-se que a taxa de juros fornecida está expressa em termos anuais, enquanto as prestações do empréstimo estão definidas em períodos semestrais. Para que o cálculo seja realizado de forma consistente, torna-se necessário converter a taxa anual em sua taxa equivalente semestral. Como já discutido no capítulo anterior a respeito dos juros compostos, a equivalência de taxas possibilita compatibilizar diferentes unidades de tempo.

$$Taxa\ equivalente\ semestral\ de\ 30\%\ a.a = \sqrt[2]{1 + 0{,}3} - 1$$

$$i = \sqrt[2]{1{,}3} - 1 = 14{,}0175\%\ a.s$$

Cálculo da amortização, que é fixo (constante).

$$Amort = \frac{VP}{n}$$

$$Amort = \frac{80.000{,}00}{10} = 8.000{,}00.$$

Logo, o valor da amortização em todo período será de $R\$\ 8.000{,}00$.

Pensamos, agora o cálculo relacionado aos juros para isso utilizaremos a expressão dos juros referente ao período de pagamento t. Dada por:

$$J_t = \frac{VP}{n} \times (n - t + 1) \times i$$

Logo:

- ✓ 1° Semestre: $J_1 = \frac{80.000,00}{10} \times (10 - 1 + 1) \times 0{,}140175 \Rightarrow J_1 = R\$\ 11.214{,}00$
- ✓ 2° Semestre: $J_2 = \frac{80.000,00}{10} \times (10 - 2 + 1) \times 0{,}140175 \Rightarrow J_2 = R\$\ 10.092{,}60$
- ✓ 3° Semestre: $J_3 = \frac{80.000,00}{10} \times (10 - 3 + 1) \times 0{,}140175 \Rightarrow J_3 = R\$\ 8.971{,}20$
- ✓ 4° Semestre: $J_4 = \frac{80.000,00}{10} \times (10 - 4 + 1) \times 0{,}140175 \Rightarrow J_4 = R\$\ 7.849{,}80$
- ✓ 5° Semestre: $J_5 = \frac{80.000,00}{10} \times (10 - 5 + 1) \times 0{,}140175 \Rightarrow J_5 = R\$\ 6.728{,}40$
- ✓ 6° Semestre: $J_6 = \frac{80.000,00}{10} \times (10 - 6 + 1) \times 0{,}140175 \Rightarrow J_6 = R\$\ 5.607{,}00$
- ✓ 7° Semestre: $J_7 = \frac{80.000,00}{10} \times (10 - 7 + 1) \times 0{,}140175 \Rightarrow J_7 = R\$\ 4.875{,}60$
- ✓ 8° Semestre: $J_8 = \frac{80.000,00}{10} \times (10 - 8 + 1) \times 0{,}140175 \Rightarrow J_8 = R\$\ 3.364{,}20$
- ✓ 9° Semestre: $J_9 = \frac{80.000,00}{10} \times (10 - 9 + 1) \times 0{,}140175 \Rightarrow J_9 = R\$\ 2.242{,}80$
- ✓ 10° Semestre: $J_{10} = \frac{80.000,00}{10} \times (10 - 10 + 1) \times 0{,}140175 \Rightarrow J_{10} = R\$\ 1.121{,}40$

Para obtenção das prestações (PMT), vamos utilizar a seguinte expressão:

$$PMT_t = \frac{VP}{n} \times [1 + (n - t + 1) \times i]$$

1ºSemestre:$PMT_1 = \frac{80.000,00}{10} \times [1 + (10 - 1 + 1) \times 0{,}140175] \Rightarrow PMT_1 = R\$\ 19.214{,}00$

2º Sem.: $PMT_2 = \frac{80.000,00}{10} \times [1 + (10 - 2 + 1) \times 0{,}140175] \Rightarrow PMT_2 = R\$\ 18.092{,}60$

3º Sem.: $PMT_3 = \frac{80.000,00}{10} \times [1 + (10 - 3 + 1) \times 0{,}140175] \Rightarrow PMT_3 = R\$\ 16.971{,}20$

4º Sem.: $PMT_4 = \frac{80.000,00}{10} \times [1 + (10 - 4 + 1) \times 0{,}140175] \Rightarrow PMT_4 = R\$\ 15.849{,}80$

5º Sem.: $PMT_5 = \frac{80.000,00}{10} \times [1 + (10 - 5 + 1) \times 0{,}140175] \Rightarrow PMT_5 = R\$\ 14.728{,}40$

6º Sem.: $PMT_6 = \frac{80.000,00}{10} \times [1 + (10 - 6 + 1) \times 0{,}140175] \Rightarrow PMT_6 = R\$\ 13.607{,}00$

7º Sem.: $PMT_7 = \frac{80.000,00}{10} \times [1 + (10 - 7 + 1) \times 0{,}140175] \Rightarrow PMT_7 = R\$\ 12.485{,}60$

8º Sem.: $PMT_8 = \frac{80.000,00}{10} \times [1 + (10 - 8 + 1) \times 0{,}140175] \Rightarrow PMT_8 = R\$\ 11.364{,}20$

9º Sem.: $PMT_9 = \frac{80.000,00}{10} \times [1 + (10 - 9 + 1) \times 0{,}140175] \Rightarrow PMT_9 = R\$\ 10.242{,}80$

10º Sem.: $PMT_{10} = \frac{80.000,00}{10} \times [1 + (10 - 10 + 1) \times 0{,}140175] \Rightarrow PMT_{10} = R\$\ 9.121{,}40$

Além disso, como a amortização é reduzida do saldo devedor a cada mês, a tabela assume a seguinte forma:

Tabela 4: SAC sem carência.

Períodos (Semestre)	*Saldo Devedor (R$))*	*Amortização (R$))*	*Juros (R$))*	*Prestação (R$))*
0	80.000,00	-	-	-
1	72.000,00	8.000,00	11.214,00	19.214,00
2	64.000,00	8.000,00	10.092,60	18.092,60
3	56.000,00	8.000,00	8.971,20	16.971,20
4	48.000,00	8.000,00	7.849,80	15.849,80
5	40.000,00	8.000,00	6.728,40	14.728,40
6	32.000,00	8.000,00	5.607,00	13.607,00
7	24.000,00	8.000,00	4.875,60	12.875,60
8	16.000,00	8.000,00	3.364,20	11.364,20
9	8.000,00	8.000,00	2.242,80	10.242,80
10	-	8.000,00	1.121,40	9.121,40
Total	-	80.000,00	62.067,00	142.067,00

Fonte: Elaborado pelo autor.

2.6.2 Período de Carência

Como já mencionado anteriormente, o período de carência consiste na prorrogação do início da amortização do principal. Tendo como base o exemplo anteriormente apresentado, podem ser destacados três modelos distintos:

- **Situação A:** os juros são pagos periodicamente ao longo do período de carência, não se incorporando ao saldo devedor;
- **Situação B:** os juros são capitalizados durante a carência e pagos totalmente no momento da primeira amortização;
- **Situação C**: os juros são capitalizados e incorporados ao saldo devedor, o que implica em um fluxo de amortizações futuras com valores mais elevados.

As tabelas 4, 5 e 6 apresentadas a seguir ilustram cada uma dessas situações de forma detalhada.

Considerando que o período de carência seja de 3 semestres, inicia-se, a partir do quarto semestre, a amortização (devolução) do principal emprestado, sendo o fluxo de prestações, deste momento em diante, equivalente ao desenvolvido anteriormente no Exemplo 2.6.1.

Tabela 5: SAC com carência, situação A.

Períodos (Semestre)	*Saldo Devedor (R$))*	*Amortização (R$))*	*Juros (R$))*	*Prestação (R$))*
0	80.000,00	-	-	-
1	80.000,00	-	11.214,00	11.214,00
2	80.000,00	-	11.214,00	11.214,00
3	80.000,00	-	11.214,00	11.214,00
4	72.000,00	8.000,00	11.214,00	19.214,00
5	64.000,00	8.000,00	10.092,60	18.092,60
6	56.000,00	8.000,00	8.971,20	16.971,20
7	48.000,00	8.000,00	7.849,80	15.849,80
8	40.000,00	8.000,00	6.728,40	14.728,40
9	32.000,00	8.000,00	5.607,00	13.607,00
10	24.000,00	8.000,00	4.875,60	12.875,60
11	16.000,00	8.000,00	3.364,20	11.364,20
12	8.000,00	8.000,00	2.242,80	10.242,80
13	-	8.000,00	1.121,40	9.121,40
Total	-	80.000,00	95.709,00	175.709,00

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota-se que, durante os três semestres de carência, a prestação é constituída unicamente pelos encargos financeiros (juros), calculados sobre o saldo devedor de R$ 80.000,00 à taxa de 14,0175% ao semestre $R\$\ 80.000{,}00 \times 0{,}140175 = \text{R\$ } 11.214{,}00$. Com o término da carência no terceiro semestre, a amortização do capital emprestado tem início a partir do quarto semestre, inicia-se a amortização do capital emprestado, sendo o valor da amortização fixo em:

$$Amort = \frac{80.000{,}00}{10} = \text{R\$ } 8.000{,}00.$$

Tabela 6: SAC com carência, situação B.

Períodos (Semestre)	*Saldo Devedor (R$))*	*Amortização (R$))*	*Juros (R$))*	*Prestação (R$))*
0	80.000,00	-	-	-
1	91.214,00	-	-	-
2	103.999,92	-	-	-
3	118.578,12	-	-	-

4	72.000,00	8.000,00	55.199,81	63.199,81
5	64.000,00	8.000,00	10.092,60	18.092,60
6	56.000,00	8.000,00	8.971,20	16.971,20
7	48.000,00	8.000,00	7.849,80	15.849,80
8	40.000,00	8.000,00	6.728,40	14.728,40
9	32.000,00	8.000,00	5.607,00	13.607,00
10	24.000,00	8.000,00	4.875,60	12.875,60
11	16.000,00	8.000,00	3.364,20	11.364,20
12	8.000,00	8.000,00	2.242,80	10.242,80
13	-	8.000,00	1.121,40	9.121,40
Total	-	80.000,00	106.052,81	186.052,81

Fonte: Elaborado pelo autor.

Neste caso, os encargos são capitalizados segundo o critério de juros compostos, sendo exigidos integralmente no vencimento da primeira parcela de amortização. Podemos utilizar a seguinte expressão $VF = VP \times (1 + i)^n$ já mencionada anteriormente, para calcular o saldo devedor ao final de cada semestre da carência. Ou seja, ao final do primeiro semestre, o saldo devedor é atualizado pela incidência dos juros, resultando em:

$$R\$\ 80.000{,}00 \times 1{,}140175 = R\$91.214{,}00.$$

No final do segundo semestre, procede-se da mesma forma, ou seja, os juros incidem sobre o saldo devedor anterior, acrescendo-se ao mesmo: $R\$91.214{,}00 \times 1{,}140175 = 103.999{,}92$.

No final do terceiro semestre, o saldo devedor atinge o valor obtido pela aplicação da taxa sobre o montante acumulado até então: $103.999{,}92 \times 1{,}140175 = 118.578{,}12$.

A partir do quarto semestre, encerrada a carência de 3 semestres, inicia-se a amortização do capital, sendo o fluxo de prestações, deste momento em diante, equivalente ao já apresentado anteriormente. Os juros acumulados durante a carência são integralmente pagos na primeira prestação após esse período, enquanto o valor da amortização permanece constante em:

$$Amort = \frac{80.000{,}00}{10} = R\$8.000{,}00.$$

Tabela 7: SAC com carência, situação C.

Períodos (Semestre)	*Saldo Devedor (R$))*	*Amortização (R$))*	*Juros (R$))*	*Prestação (R$))*
0	80.000,00	-	-	-

1	91.214,00	-	-	-
2	103.999,92	-	-	-
3	118.578,12	-	-	-
4	106.720,308	11.857,812	16.621,688	28.479,50
5	94.862,496	11.857,812	14.959,519	26.817,331
6	83.004,684	11.857,812	13.297,350	25.155,162
7	71.146,872	11.857,812	11.635,181	23.492.993
8	59.289,06	11.857,812	9.973,013	21.830,825
9	47.431,248	11.857,812	8.310,844	20.168,656
10	35.573,436	11.857,812	6.648,675	18.506,487
11	23.715,624	11.857,812	4.986,506	16.844,318
12	11.857,812	11.857,812	3.324,337	15.182,149
13	-	11.857,812	1.662,169	13.519,981
Total	-	118.578,12	91.419,282	209.997,402

Fonte: Elaborado pelo autor.

Neste caso, de modo semelhante ao observado na Situação B, os encargos são capitalizados segundo o critério de juros compostos. Contudo, além de não serem pagos durante a carência, os juros são incorporados ao saldo devedor e distribuídos uniformemente ao longo do fluxo de amortização do financiamento a partir do quarto semestre. Assim, ao término do período de carência de 3 semestres, o saldo devedor acrescido do montante capitalizado de juros atinge $R\$ = 118.578{,}12$.

Dessa forma, o valor total a ser amortizado passa a corresponder a esse novo montante, e, consequentemente, cada amortização será de:

$$Amort = \frac{118.578{,}12}{10} = R\$11.857{,}812. \qquad (32)$$

Os valores dos juros e das prestações referentes aos demais semestres são determinados de acordo com as expressões próprias do Sistema de Amortização Constante (SAC), conforme já exposto anteriormente.

2.7 Sistema de Prestação Constante (SPC) e expressões utilizadas para cálculo.

Sistema de Prestação Constante (SPC), também conhecido como Sistema de Amortização Francês ou sistema Price, é amplamente utilizado no mercado financeiro brasileiro. Diferentemente do Sistema de Amortização Constante (SAC), esse método estabelece que as prestações sejam iguais, periódicas e sucessivas ao longo de todo o prazo do financiamento. Em outras palavras, o SPC corresponde ao modelo-padrão de fluxo de caixa uniforme, conforme apresentado anteriormente.

Nesse sistema, os juros incidem sobre o saldo devedor e, por consequência, apresentam valores decrescentes ao longo do tempo. Em contrapartida, as parcelas de amortização tornam-se progressivamente maiores, de modo que a soma entre juros e amortização resulta sempre em prestações de valor constante.

Para que possamos ter um entendimento melhor, vamos ver as expressões que são utilizadas para o cálculo no sistema de prestação constante.

- **Prestação** $(\boldsymbol{PMT})$ **:** conforme mencionado anteriormente, o valor da prestação é determinado a partir da fórmula do valor presente desenvolvida para o modelo-padrão de fluxos de caixa. Assim, com base nessa expressão, tem se:

$$VP = PMT \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \; ou \; VP = PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$$

De onde segue que:

$$VP = PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$$

$$\Rightarrow \frac{VP}{PMT} = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$$

$$\Rightarrow VP \times (1+i)^n \times i = PMT \times (1+i)^n - 1$$

$$\Rightarrow PMT = VP \times \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1} \qquad (30)$$

Considerando PMT_t, considerando o valor da prestação no período t, tal que $t = 1, 2, 3, \dots, n$, temos:

$$PMT_1 = PMT_1 = \cdots = PMT_n = PMT = VP \times \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}.$$

- **Amortização** $(\boldsymbol{Amort})$**:** corresponde à diferença entre o valor da prestação PMT e aos juros (J). Pois, por definição, a prestação é a soma da amortização mais os juros. Isto é: $PMT = Amort + j$, logo:

$$Amort = PMT - J \qquad (31)$$

Considerando $Amort_{t,}$ considerando valor da amortização no período t, tal que $t = 1, 2, 3, \dots, n$, e J_t o valor dos juros no período t, tal que $t = 1, 2, 3, \dots, n$, temos:

$$primeiro\ período \; \Rightarrow \; Amort_1 = PMT - J_1$$

Ou ainda:

$$Amort_1 = PMT - (VP \times i),$$

Sabendo que $VP = PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$, obtemos:

$$Amort_1 = PMT - \left[\left(PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}\right) \times i\right]$$

$$\Rightarrow Amort_1 = PMT - \left(PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}\right)$$

$$\Rightarrow Amort_1 = PMT \times \left(1 - \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}\right)$$

$$\Rightarrow Amort_1 = PMT \times \left(\frac{(1+i)^n - [(1+i)^n - 1]}{(1+i)^n}\right)$$

$$\Rightarrow Amort_1 = PMT \times \left(\frac{(1+i)^n - (1+i)^n + 1]}{(1+i)^n}\right)$$

$$\Rightarrow Amort_1 = PMT \times \frac{1}{(1+i)^n}$$

$$\Rightarrow Amort_1 = PMT \times (1+i)^{-n} \tag{32}$$

$$Segundo\ período\ \Rightarrow\ Amort_2 = PMT - J_2$$

E sabendo que $J_2 = (VP - Amort_1) \times i.$ Logo:

$$Amort_2 = PMT - (VP - Amort_1) \times i$$

$$\Rightarrow Amort_2 = PMT - VP \times i + Amort_1 \times i$$

É perceptível que $PMT - VP \times i = Amort_{1,}$ daí temos:

$$\Rightarrow Amort_2 = Amort_{1,} + Amort_1 \times i$$

$$\Rightarrow Amort_2 = Amort_{1,} \times (1+i)$$

$Terceiro\ período\ \Rightarrow\ Amort_3 = PMT - J_3.$

Sabendo que $J_3 = (PV - Amort_1 - Amort_2) \times i.$ Dai:

$$Amort_3 = PMT - (PV - Amort_1 - Amort_2) \times i$$

$$\Rightarrow Amort_3 = PMT - PV \times i + Amort_1 \times i + Amort_2 \times i$$

Mas, $PMT - PV \times i$, daí temos:

$$Amort_3 = Amort_1 + Amort_1 \times i + Amort_1 \times (1+i) \times i$$

$$\Rightarrow Amort_3 = Amort_1 \times (1 + i + i + i^2)$$
$$\Rightarrow Amort_3 = Amort_1 \times (1 + 2i + i^2)$$
$$\Rightarrow Amort_3 = Amort_1 \times (1 + i)^2,$$

Como o seu crescimento é exponencial no tempo, o valor da amortização em um momento t qualquer é calculado pela expressão:

$$Amort_t = Amort_1 \times (1 + i)^{t-1} \tag{33}$$

- **Saldo Devedor (SD):** é determinado, em cada período, pela diferença entre o valor devido no início do intervalo e a amortizado no respectivo período. Assim, considerando uma taxa de juros, o saldo devedor em um período t, qualquer.

Considerando SD_t: o saldo devedor no final de cada período t, tal que $t = 1, 2, 3, \dots, n$. Daí temos:

$$SD_1\ no\ final\ 1^{\underline{o}}\ período: SD_1 = VP - Amort_1.$$
$$SD_2\ no\ final\ 2^{\underline{o}}\ período: SD_1 = VP - Amort_1 - Amort_2.$$
$$SD_3\ no\ final\ 3^{\underline{o}}\ período: SD_1 = VP - Amort_1 - Amort_2 - Amort_3.$$

Seguindo esse mesmo raciocínio o saldo devedor no final de um período t qualquer temos:

$$SD_t = VP - Amort_1 - Amort_2 - Amort_3 - \cdots - Amort_t.$$

Relembrando que: $Amort_t = Amort_1 \times (1 + i)^{t-1}$, logo temos:

$$SD_t = VP - Amort_1 - Amort_1 \times (1 + i) - Amort_1 \times (1 + i)^2 - \cdots$$
$$- Amort_1 \times (1 + i)^{t-1}$$
$$\Rightarrow SD_t = VP - Amort_1 \times [1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \cdots + (1 + i)^{t-1}]$$

É perceptível que na segunda parcela temos a soma dos termos de uma PG, assim,

$$SD_t = VP - Amort_1 \times \frac{1 - (1 + i)^t}{1 - (1 + i)}.$$

É importante relembrar que: $Amort_1 = PMT \times (1 + i)^{-n}$ e $VP = PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$, sendo assim temos:

$$SD_t = \left[PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i},\right] - \left[PMT \times (1+i)^{-n}\right] \times \frac{1-(1+i)^t}{1-(1+i)}$$

$$\Rightarrow SD_t = \left[PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}\right] - \left[\frac{PMT}{(1+i)^n}\right] \times \frac{1-(1+i)^t}{1-1-i}$$

$$\Rightarrow SD_t = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} - \frac{1}{(1+i)^n} \times \frac{1-(1+i)^t}{1-1-i}\right]$$

$$\Rightarrow SD_t = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} - \frac{1}{(1+i)^n} \times \frac{1-(1+i)^t}{-i}\right]$$

$$\Rightarrow SD_t = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} + \frac{1-(1+i)^t}{(1+i)^n \times i}\right]$$

$$\Rightarrow SD_t = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1 + 1 - (1+i)^t}{(1+i)^n \times i}\right]$$

$$\Rightarrow SD_t = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^t}{(1+i)^n \times i}\right]$$

$$\Rightarrow SD_t = PMT \times \left[\frac{(1+i)^{n-t+t} - (1+i)^t}{(1+i)^n \times i}\right]$$

$$\Rightarrow SD_t = PMT \times \left[\frac{(1+i)^t \times [(1+i)^{n-t} - 1]}{(1+i)^n \times i}\right]$$

$$\Rightarrow SD_t = PMT \times \left[\frac{(1+i)^t \times [(1+i)^{n-t} - 1]}{(1+i)^{n-t+t} \times i}\right]$$

$$\Rightarrow SD_t = PMT \times \left[\frac{(1+i)^t \times [(1+i)^{n-t} - 1]}{(1+i)^t \times [(1+i)^{n-t} \times i]}\right]$$

$$\Rightarrow SD_t = PMT \times \left[\frac{(1+i)^t \times [(1+i)^{n-t} - 1]}{(1+i)^t \times [(1+i)^{n-t} \times i]}\right]$$

$$\Rightarrow SD_t = PMT \times \frac{(1+i)^{n-t} - 1}{(1+i)^{n-t} \times i} \tag{34}$$

Ou ainda,

$$SD_t = PMT \times FPV(i, n-t), onde\ FPV(i, n-t) = \frac{(1+i)^{n-t} - 1}{(1+i)^{n-t} \times i}.$$

Consideremos SD_0 sendo o valor inicial VP (saldo devedor na data zero).

- **Juros (J):** incidem sobre o saldo devedor apurado no início de cada período (ou, equivalentemente, ao final do período imediatamente anterior). Dessa forma, a expressão para o cálculo dos juros em cada intervalo de tempo pode ser representada da seguinte maneira:

$$J_1 = SD_0 \times i = VP \times i$$
$$J_2 = SD_1 \times i = (VP - Amort_1) \times i$$
$$J_3 = SD_2 \times i = (VP - Amort_1 - Amort_2) \times i$$
$$J_4 = SD_3 \times i = (VP - Amort_1 - Amort_2 - Amort_3) \times i,$$

e assim sucessivamente, para qualquer t, tal que $t = 1, 2, 3, \ldots, n$, temos:

$$J_t = SD_{t-1} \times i. \tag{35}$$

Para fins de compreensão será utilizado o mesmo exemplo 2.6.1 do Sistema de Amortização Constante (SAC). Admita-se um empréstimo de R$ 80.000,00, a ser pago em 10 prestações semestrais sucessivas, à taxa de 30% ao ano, sem carência. Para a resolução desta aplicação, serão utilizadas as expressões matemáticas do Sistema de Prestação Constante (SPC), sendo apresentada posteriormente a tabela financeira correspondente aos dados.

Resolução:

Como já mencionado no Sistema de Amortização Constante à taxa de juros de 30% ao ano que é equivalente a juros compostos a uma taxa de 14,0175% ao semestre.

Primeiramente, como já mencionado as prestações são constantes, utilizando a fórmula $PMT = VP \times \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}$.

$$\Rightarrow PMT = 80.000{,}00 \times \frac{(1{,}140175)^{10} \times 0{,}140175}{(1{,}140175)^{10} - 1}$$
$$\Rightarrow PMT = 80.000{,}00 \times \frac{(1{,}140175)^{10} \times 0{,}140175}{(1{,}140175)^{10} - 1}$$
$$\Rightarrow PMT = 80.000{,}00 \times \frac{0{,}5204580223}{2{,}7129161569}$$
$$\Rightarrow PMT = 80.000{,}00 \times 0{,}1918444921$$
$$\Rightarrow PMT = 15.347{,}56.$$

Logo, as prestações no período de 10 semestres será de $PMT =$ R$ 15.347,56.

Cálculo da amortização se dá pela expressão $Amort_1 = PMT \times (1+i)^{-n}$ e $Amort_t = Amort_1 \times (1+i)^{t-1}$.

Logo:

- ✓ 1° Semestre: $Amort_1 = 15.347{,}56 \times (1 + 0{,}140175)^{-10} = 4.133{,}56$.
- ✓ 2° Semestre: $Amort_2 = 4.133{,}56 \times (1 + 0{,}140175)^{1} = 4.712{,}98$
- ✓ 3º Semestre: $Amort_3 = 4.133{,}56 \times (1 + 0{,}140175)^{2} = 5.373{,}62$
- ✓ 4° Semestre: $Amort_4 = 4.133{,}56 \times (1 + 0{,}140175)^{3} = 6.126{,}87$
- ✓ 5° Semestre: $Amort_5 = 4.133{,}56 \times (1 + 0{,}140175)^{4} = 6.985{,}71$
- ✓ 6° Semestre: $Amort_6 = 4.133{,}56 \times (1 + 0{,}140175)^{5} = 7.964{,}93$
- ✓ 7° Semestre: $Amort_7 = 4.133{,}56 \times (1 + 0{,}140175)^{6} = 9.081{,}41$
- ✓ 8° Semestre: $Amort_8 = 4.133{,}56 \times (1 + 0{,}140175)^{7} = 10.354{,}40$
- ✓ 9º semestre: $Amort_9 = 4.133{,}56 \times (1 + 0{,}140175)^{8} = 11.805{,}83$
- ✓ 10º semestre: $Amort_{10} = 4.133{,}56 \times (1 + 0{,}140175)^{9} = 13.460{,}71$

Calculo do saldo devedor utilizando a expressão:$SD_t = PMT \times \frac{(1+i)^{n-t}-1}{(1+i)^{n-t} \times i}$.

- ✓ 1° Semestre: $SD_1 = 15.347{,}56 \times \frac{(1+0{,}140175)^{10-1}-1}{(1+0{,}140175)^{10-1} \times 0{,}140175} = 75.866{,}44$.
- ✓ 2° Semestre:$SD_2 = 15.347{,}56 \times \frac{(1+0{,}140175)^{10-2}-1}{(1+0{,}140175)^{10-2} \times 0{,}140175} = 71.153{,}46$.
- ✓ 3º Semestre: $SD_3 = 15.347{,}56 \times \frac{(1+0{,}140175)^{10-3}-1}{(1+0{,}140175)^{10-3} \times 0{,}140175} = 65.779{,}84$.
- ✓ 4° Semestre: $SD_4 = 15.347{,}56 \times \frac{(1+0{,}140175)^{10-4}-1}{(1+0{,}140175)^{10-4} \times 0{,}140175} = 59.652{,}97$
- ✓ 5° Semestre: $SD_5 = 15.347{,}56 \times \frac{(1+0{,}140175)^{10-5}-1}{(1+0{,}140175)^{10-5} \times 0{,}140175} = 52.667{,}26$

Seguindo do mesmo modo para os demais até o 10º semestre.

Calculo dos juros utilizando a expressão:

$$J_t = SD_{t-1} \times i.$$

- ✓ 1° Semestre: $J_1 = SD_{1-1} \times i \Rightarrow 80.000{,}00 \times 0{,}140175 = 11.214{,}00$.
- ✓ 2° Semestre: $J_2 = SD_{2-1} \times i \Rightarrow 75.866{,}44 \times 0{,}140175 = 10.634{,}58$.
- ✓ 3º Semestre: $J_3 = SD_{3-1} \times i \Rightarrow 71.153{,}46 \times 0{,}140175 = 9.973{,}94$.
- ✓ 4° Semestre: $J_4 = SD_{4-1} \times i \Rightarrow 65.779{,}84 \times 0{,}140175 = 9.220{,}69$.

Seguindo do mesmo modo para os demais até o 10º semestre.

Tabela 8: SPC sem carência.

Períodos (Semestre)	*Saldo Devedor (R$))*	*Amortização (R$))*	*Juros (R$))*	*Prestação (R$))*
0	80.000,00	-	-	-
1	75.866,44	4.133,56	11.214,00	15.347,56
2	71.153,46	4.712,98	10.634,58	15.347,56
3	65.779,84	5.373,62	9.973,94	15.347,56
4	59.652,97	6.126,87	9.220,69	15.347,56
5	52.667,26	6.985,71	8.361,85	15.347,56
6	44.702,33	7.964,93	7.382,63	15.347,56
7	35.620,92	9.081,41	6.266,15	15.347,56
8	25.266,52	10.354,40	4.993,16	15.347,56
9	13.460,69	11.805,83	3.541,73	15.347,56
10	-	13.460,71	1.886,85	15.347,56
Total	-	80.000,02	73.475,58	153.475,6

Fonte: Elaborado pelo autor

2.7.1 Período de Carência

De modo análogo ao que ocorre no Sistema de Amortização Constante (SAC), o Sistema de Prestação Constante (SPC) também possibilita a inclusão de um período de carência. Durante esse intervalo, os juros (encargos financeiros) podem ser tratados de duas formas distintas: na primeira situação A, são pagos regularmente ao longo do período de carência, conforme demonstrado na Tabela (7); e na segunda situação B, são capitalizados e cobrados em conjunto com as prestações subsequentes, conforme apresentado na Tabela (8), respectivamente.

Considerando que o período de carência seja de 3 semestres, inicia-se, a partir do quarto semestre, a amortização (devolução) do principal emprestado, sendo o fluxo de prestações, deste momento em diante, equivalente ao desenvolvido anteriormente no cálculo do SPC sem carência.

Tabela 9: SPC com carência, situação A.

Períodos (Semestre)	*Saldo Devedor (R$))*	*Amortização (R$))*	*Juros (R$))*	*Prestação (R$))*
0	80.000,00	-	-	-
1	80.000,00	-	11.214,00	11.214,00
2	80.000,00	-	11.214,00	11.214,00

3	80.000,00	-	11.214,00	11.214,00
4	75.866,44	4.133,56	11.214,00	15.347,56
5	71.153,46	4.712,98	10.634,58	15.347,56
6	65.779,84	5.373,62	9.973,94	15.347,56
7	59.652,97	6.126,87	9.220,69	15.347,56
8	52.667,26	6.985,71	8.361,85	15.347,56
9	44.702,33	7.964,93	7.382,63	15.347,56
10	35.620,92	9.081,41	6.266,15	15.347,56
11	25.266,52	10.354,40	4.993,16	15.347,56
12	13.460,69	11.805,83	3.541,73	15.347,56
13	-	13.460,71	1.886,85	15.347,56
Total	-	80.000,02	107.117,58	187.117,58

Fonte: Elaborado pelo autor.

O sistema francês de Amortização (prestação constante), com período de carência e pagamento dos juros no período, conforme ilustrado na tabela 9, segue basicamente o mesmo funcionamento do modelo (SPC sem carência), diferenciando-se unicamente nas prestações dos três primeiros semestres (carência). Nestes períodos estão previstos somente pagamentos de R$ 11.214,00 referentes aos juros do principal não amortizado (14,0175% × R$ 80.000,00). A partir dos semestres seguintes, o raciocínio é idêntico ao formulado anteriormente, apurando-se prestações com valores constantes, juros decrescentes e amortizações crescentes.

Tabela 10: SPC com carência, situação B.

Períodos (Semestre)	*Saldo Devedor (R$))*	*Amortização (R$))*	*Juros (R$))*	*Prestação (R$))*
0	80.000,00	-	-	-
1	91.214,00	-	-	-
2	103.999,92	-	-	-
3	118.578,11	-	-	-
4	112.451,24	6.126,87	16.621,6	22.748,56
5	105.465,53	6.985,71	15.762,85	22.748,56
6	97.500,60	7.964,93	14.783,63	22.748,56
7	88.419,19	9.081,41	13.667,15	22.748,56
8	78.064,79	10.354,40	12.394,16	22.748,56

9	66.258,96	11.805,83	10.942,73	22.748,56
10	52.798,24	13.460,72	9.287,84	22.748,56
11	37.450,67	15.347,57	7.400,99	22.748,56
12	19.951,76	17.498,91	5.249,65	22.748,56
13	-	19.951,82	2.796,74	22.748,56
Total	-	118.578,17	108.907,43	227.485,60

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Tabela 10, observa-se a capitalização dos juros ao longo do período de carência de três semestres. O montante acumulado nesse intervalo é incorporado ao saldo devedor, resultando, ao final do terceiro semestre, em um novo valor de R$ 118.578,11. Esse montante passa, então, a constituir a base de cálculo para as prestações com vencimento a partir do quarto semestre, ou seja:

• Saldo Devedor (3ºsemestre) que serve de base para o cálculo das prestações após o período de carência (4º semestre): $R\$\ 118.578{,}12 \times (1 + 0{,}140175)^3 = R\$118.578{,}11$.

$$PMT = 118.578{,}11 \times \frac{(1 + 0{,}140175)^{10} \times 0{,}140175}{(1 + 0{,}140175)^{10} - 1}$$

$$\Rightarrow PMT = 118.578{,}11 \times \frac{0{,}5204580223}{2{,}7129161569}$$

$$\Rightarrow PMT = 118.578{,}11 \times 0{,}1918444921$$

$$\Rightarrow PMT = 22.748,56$$

Logo, as prestações após o período de carência com um novo saldo devedor maior será de $PMT =$ R$ 22.748,56.

2.8 Uma aplicação habitacional

Neste momento, procede-se à aplicação prática dos conceitos abordados anteriormente, voltando-se à análise de um financiamento habitacional com base nas condições reais oferecidas pela Caixa Econômica Federal (CEF). Os dados apresentados a seguir foram obtidos por meio do simulador habitacional on-line da instituição, instrumento amplamente utilizado para estimar as condições de pagamento e encargos de financiamentos imobiliários no âmbito do Programa Minha Casa, Minha Vida (MCMV).

Para tanto, fixou-se uma simulação sobre um imóvel residencial novo, avaliado em R$ 150.000,00, com pagamentos efetuados pelos sistemas de amortização SAC e SPC, de forma a permitir uma análise comparativa entre ambos. Ressalta-se que, durante a simulação, será considerada a taxa efetiva de juros disponibilizada pela própria Caixa, de modo a garantir a fidelidade dos cálculos em relação às práticas do mercado financeiro.

Cabe ainda destacar que, de acordo com a Portaria MCID nº 399/2025, o programa habitacional é estruturado em faixas de renda familiar, que determinam as condições de subsídio[2] e os limites de financiamento. A tabela a seguir apresenta a classificação vigente, conforme informações da Caixa Econômica Federal.

Quadro 1 – Faixas de renda

Faixas	Renda familiar urbana (mensal)	Renda familiar rural (anual)	Características e benefícios
1	Até R$ 2.850,00	Até R$ 40.000,00	Subsídios mais altos e taxas de juros reduzidas para famílias de renda mais baixa.
2	De R$ 2.850,00 a R$ 4.700,00	De R$ 40.000,00 a R$ 66.600,00	Benefícios de subsídios e juros reduzidos, em bora em menor proporção que na Faixa 1.
3	De R$ 4.700,00 a R$ 8.600,00	De R$ 66.000,00 a R$ 120.000,00	Condições facilitadas de financiamento, mas sem o benefício de subsídio, como nas faixas anteriores.
4	De R$ 8.600,00 a 12.000,00	Não se aplica	Nova faixa, introduzida em 2025, com financiamento de imóveis de até R$ 500 mil. Oferece crédito mais acessível para famílias que não qualificariam com as taxas de mercado.

Fonte: Adaptada de Caixa Econômica Federal (2025) e Ministério das cidades (portaria MCID nº399/2025).

2.9 Perfil Socioeconômico do Contrariante

O candidato enquadra-se na Faixa 2 do programa habitacional, possuindo 24 anos de idade, sendo trabalhador assalariado e apresentando renda familiar mensal de R$ 4.200,00.

---

[2] Subsídio habitacional é um valor concedido pelo governo para reduzir parte do financiamento do comprador.

Simulação 1

Simulador on-line da Caixa Econômica Federal com taxas de juros 6,70% a.a.

Quadro 2 - Dados emitidos pelo simulador via SAC

Valor do imóvel (R$)	Subsidio (R$)	Valor de entrada (R$)	Saldo devedor (R$)	Prazo escolhido (meses)	Sistema de Amortização
150.000,00	625,00	29.375,00	120.000,00	300	SAC

Fonte: Elaborado pelo autor

Conforme estudado nos capítulos anteriores, as expressões matemáticas que definem o Sistema de Amortização Constante (SAC) foram apresentadas e analisadas. Com base nessas formulações e juntamente com a elaboração do Quadro 2, que reúne as principais informações fornecidas pelo simulador habitacional da Caixa Econômica Federal, referentes à aplicação do SAC. A partir dos dados apresentados nesse quadro, foi possível obter os valores expressos na Tabela 9, que demonstra a evolução do financiamento de acordo com as características do sistema, evidenciando o comportamento da amortização, saldo devedor, dos juros e das prestações ao longo do tempo.

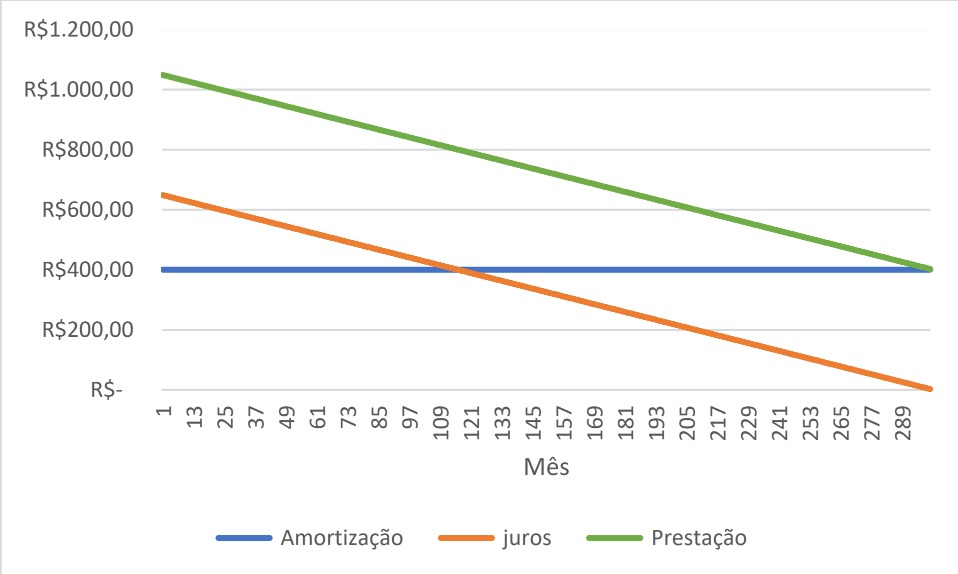
Tabela 11 - Simulação no SAC

Mês	Saldo devedor	Amortização	juros	Prestação
0	R$ 120.000,00			R$ 1.043,68
1	R$ 119.600,00	R$ 400,00	R$ 648,00	R$ 1.041,52
2	R$ 119.200,00	R$ 400,00	R$ 645,84	R$ 1.039,36
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	R$ 116.000,00	R$ 400,00	R$ 628,56	R$ 1.022,08
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
16	R$ 113.600,00	R$ 400,00	R$ 615,60	R$ 1.015,60
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
52	R$ 99.200,00	R$ 400,00	R$ 537,84	R$ 937,84
53	R$ 98.800,00	R$ 400,00	R$ 535,68	R$ 935,68
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
100	R$ 80.000,00	R$ 400,00	R$ 434,16	R$ 834,16
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
150	R$ 60.000,00	R$ 400,00	R$ 326,16	R$ 726,16
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
200	R$ 40.000,00	R$ 400,00	R$ 218,16	R$ 618,16
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
250	R$ 20.000,00	R$ 400,00	R$ 110,16	R$ 510,16
251	R$ 19.600,00	R$ 400,00	R$ 108,00	R$ 508,00
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
287	R$ 5.200,00	R$ 400,00	R$ 30,24	R$ 430,24
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
299	R$ 400,00	R$ 400,00	R$ 4,32	R$ 404,32
300	R$ -	R$ 400,00	R$ 2,16	R$ 402,16
Total		R$ 120.000,00	R$ 97.524,00	R$ 217.524,00

Fonte: Elaborado pelo autor

O gráfico apresentado a seguir corresponde à Tabela 9, evidenciando a variação dos componentes da prestação, dos juros e da amortização ao longo do período de financiamento.

Gráfico 2 – Comportamento do financiamento no SAC – Simulação 1



Fonte: Elaborado pelo autor.

Simulação 2

Simulador on-line da Caixa Econômica Federal com taxas de juros 6,70 % a.a.

Quadro 3 - Dados emitidos pelo simulador via SPC

Valor do imóvel (R$)	Subsídio (R$)	Valor de entrada (R$)	Saldo devedor (R$)	Prazo escolhido (meses)	Sistema de Amortização
150.000,00	625,00	29.375,00	120.000,00	300	SPC

Fonte: Elaborado pelo autor

Assim como no Sistema de Amortização Constante (SAC), as expressões matemáticas que definem o Sistema Prestação Constante (SPC) apresentadas e analisadas nos capítulos anteriores. Com base nessas formulações, como também a elaboração do Quadro 3, que reúne as principais informações fornecidas pelo simulador habitacional da Caixa Econômica Federal, referentes à aplicação do (SPC). A partir dos dados apresentados nesse quadro, foi possível obter os valores expressos na Tabela 10, que demonstra a evolução do financiamento segundo as características desse sistema, evidenciando o comportamento das amortizações, saldo devedor, juros e das prestações constantes ao longo do tempo.

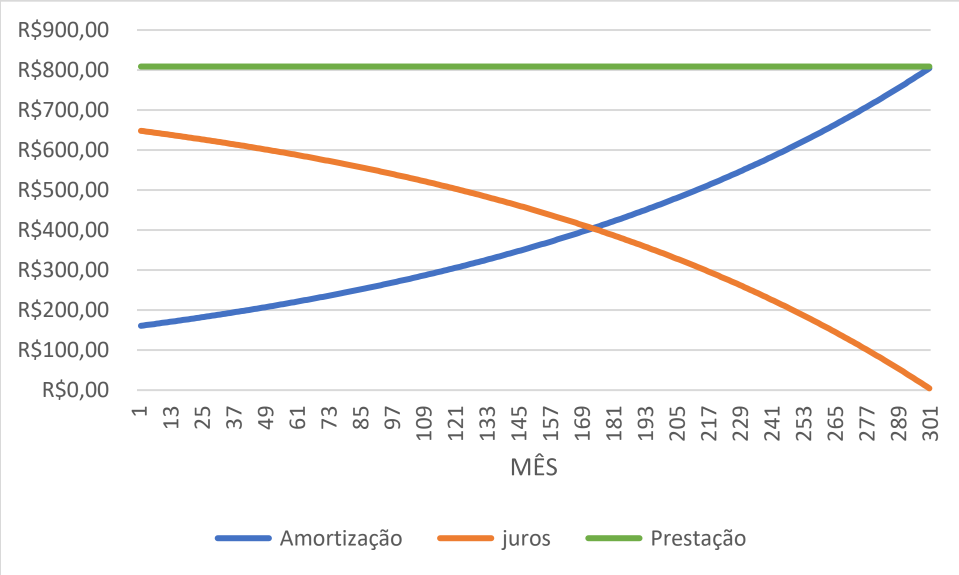
Tabela 12 - Simulação no SPC

Mês	Saldo devedor	Amortização	juros	Prestação
0	R$ 120.000,00			
1	R$ 119.839,25	R$ 160,75	R$ 648,00	R$ 808,75
2		R$ 161,62	R$ 647,13	R$ 808,75
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	R$ 118.352,87	R$ 168,73	R$ 640,02	R$ 808,75
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
16	R$ 117.321,17	R$ 174,27	R$ 634,48	R$ 808,75
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
52	R$ 110.379,18	R$ 211,56	R$ 597,19	R$ 808,75
53	R$ 110.166,47	R$ 212,70	R$ 596,05	R$ 808,75
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
100	R$ 98.759,75	R$ 273,97	R$ 534,78	R$ 808,75
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
150	R$ 82.997,39	R$ 358,63	R$ 450,12	R$ 808,75
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
200	R$ 62.364,26	R$ 469,45	R$ 339,30	R$ 808,75
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
250	R$ 35.355,21	R$ 614,51	R$ 194,24	R$ 808,75
251	R$ 34.737,37	R$ 617,83	R$ 190,92	R$ 808,75
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
287	R$ 10.126,83	R$ 750,01	R$ 58,73	R$ 808,75
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
299	R$ 804,41	R$ 800,09	R$ 8,66	R$ 808,75
300	R$ -	R$ 804,41	R$ 4,34	R$ 808,75
Total		R$ 120.000,00	R$ 122.624,87	R$ 242.624,87

Fonte: Elaborado pelo autor

O gráfico apresentado a seguir corresponde à Tabela 10, evidenciando a variação dos componentes da prestação, dos juros e da amortização ao longo do período de financiamento.

Gráfico 3 – Comportamento do financiamento no SPC – Simulação 2



Fonte: Elaborado pelo autor.

2.9.1 Análise comparativa das simulações SAC e SPC

No Sistema de Amortização Constante (SAC), observou-se que o valor das parcelas é decrescente ao longo do tempo, iniciando em $R\$\ 1.043,08$ e encerrando-se em $R\$\ 402,16$. Isso ocorre em razão da amortização constante de R$ 400,00, somada a juros decrescentes, que partem de $R\$\ 648,00$ e se reduzem progressivamente até $R\$\ 2,16$. Ao término do contrato, o total desembolsado pelo contratante atinge $R\$\ 217.524,00$, sendo $R\$\ 120.000,00$ de amortização e $R\$\ 97.524,00$ correspondentes aos juros pagos.

Por sua vez, no Sistema de Prestação Constante (SPC), o comportamento é distinto. As prestações permanecem iguais durante todo o período, no valor de$R\$\ 808,75$, o que confere maior previsibilidade ao contratante. Entretanto, a composição interna dessas parcelas se altera ao longo do tempo: os juros decrescem de $R\$\ 648,00$ até $R\$\ 4,34$ enquanto as amortizações aumentam, partindo de $R\$\ 160,75$ e alcançando $R\$\ 804,41$ na última prestação. O valor total pago ao final do financiamento é de $R\$\ 242.624,87$, sendo $R\$\ 120.000,00$ de amortização e $R\$\ 122.624,87$ referentes aos juros.

Comparando os dois sistemas, verifica-se que, embora o SPC proporcione parcelas iniciais mais leves, o custo total do financiamento é superior ao do SAC, representando uma diferença de $R\$\ 25.100,87$ em favor do sistema de amortização constante. Essa diferença reflete o impacto da estrutura de cálculo dos juros compostos no SPC, que incidem sobre saldos devedores mais elevados nas fases iniciais do contrato. Em contrapartida, o SAC, ao amortizar de forma mais acelerada o principal, reduz progressivamente a base de cálculo dos juros, resultando em menor custo total da dívida.

Dessa forma, considerando o perfil socioeconômico do contratante com renda mensal de $R\$\ 4.200{,}00$ e enquadramento na faixa 2 do programa habitacional da Caixa Econômica Federal, o Sistema de Amortização Constante (SAC) se revela mais vantajoso. Apesar das prestações iniciais mais altas, sua redução gradual ao longo do tempo traz maior alívio financeiro futuro e contribui para um planejamento orçamentário mais equilibrado. Já o Sistema de Prestação Constante (SPC), por oferecer parcelas fixas, tende a ser mais adequado a perfis que priorizam previsibilidade imediata, ainda que a um custo total maior.

Em síntese, a análise evidencia que o SAC, além de ser um dos sistemas mais utilizados nos financiamentos habitacionais da Caixa Econômica Federal, proporciona economia significativa em juros e uma melhor relação entre prazo e custo efetivo da dívida, confirmando sua eficiência econômica em relação ao SPC.

CONCLUSÃO

No contexto das operações financeiras, a Matemática Financeira desempenha papel central na análise das movimentações de capital, permitindo compreender aplicações, recebimentos e pagamentos que dependem da incidência de taxas e juros. Ao longo deste estudo, verificou-se que os regimes de capitalização simples e composto permeiam grande parte das transações financeiras, sendo o regime composto o que mais se destaca, por refletir situações em que os juros incidem sobre o próprio montante acumulado, característica predominante nas operações de crédito

O estudo dos sistemas de amortização permitiu compreender como uma dívida pode ser quitada de forma planejada e eficiente. Dentre os modelos analisados, destacam-se o Sistema de Amortização Constante (SAC), que apresenta amortizações fixas e prestações decrescentes e o Sistema de Amortização Constante, caracterizado por parcelas iguais e juros decrescentes. Ambos são amplamente utilizados em financiamentos imobiliários e demonstram a importância da Matemática Financeira para decisões econômicas mais conscientes, seguras e alinhadas à realidade financeira do tomador de crédito.

É relevante destacar que o conhecimento em Matemática Financeira ultrapassa o campo teórico, tornando-se um recurso essencial para qualquer cidadão que participe do mercado de consumo e crédito. Compreender o funcionamento dos juros, das taxas e das amortizações possibilita evitar armadilhas contratuais, comparar alternativas de financiamento e identificar as condições mais favoráveis para o orçamento pessoal ou familiar. Assim, o domínio desses conceitos representa um passo importante para o fortalecimento da educação financeira, permitindo decisões mais seguras e sustentáveis.

Em suma, a pesquisa reafirma a importância da Matemática Financeira como ferramenta de autonomia econômica e social. Mais do que um conjunto de fórmulas e cálculos, ela se consolida como um instrumento de conscientização, planejamento e equilíbrio nas relações financeiras, capacitando o indivíduo a atuar com responsabilidade diante das múltiplas opções que o sistema financeiro oferece.

REFERÊNCIAS

ASSAF NETO, A**. Matemática Financeira e suas aplicações.** Alexandre Assaf Neto. – 12 ed. – São Paulo; Atlas, 2012.

ARCANJO, C. F. **Matemática financeira aplicada HP 12C++ e excel**. Campo Grande: Editora Inovar, 2020. 88p.

BRASIL. Ministério das Cidades. **Portaria MCID nº 399, de 22 de abril de 2025**. Dispõe sobre a atualização anual dos limites de renda bruta familiar admitidos para famílias atendidas pelo Programa Minha Casa, Minha Vida. *Diário Oficial da União*: seção 1, Brasília, DF, 25 abr. 2025. Disponível em:https://www.gov.br/cidades/pt-br/acesso-a-informacao/institucional/basejuridica/portarias/PORTARIAMCIDN399DE22DEABRILDE2025.pdf. Acesso em: 20/11/25

Gil, A. C. Como elaborar projetos de pesquisa/Antônio Carlos Gil. - 4. ed. - São Paulo: Atlas, 2002.

GUERRA, F. TANEJA, I. J. Matemática financeira. 3. ed. Florianópolis: Departamento de Ciências da Administração/UFSC, 2014.

MATHIAS, W. F. GOMES, J. M. **Matemática financeira.** 2. ed. São Paulo: Atlas, 1998.

SILVA, Caio Vinícius da; BARBOSA, Daiana Estrela Ferreira; SANTOS, José Jorge Casimiro dos. Matemática Financeira: contexto histórico e sua importância na contemporaneidade. **Congresso Nacional de Pesquisa e Ensino em ciência**, p. 1-10. Disponível em https://editorarealize.com.br/editora/anais/conapesc/2022/TRABALHO_COMPLETO_EV177_MD1_ID130_TB550_20062022143328.pdf .Acesso em: 20/11/25

.