UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

EVELYN SABRINA SILVA E SILVA

A INTERDISCIPLINARIDADE DO CÁLCULO: APLICAÇÕES DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I.

Belém - PA
2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

EVELYN SABRINA SILVA E SILVA

A INTERDISCIPLINARIDADE DO CÁLCULO: APLICAÇÕES DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora da Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. MSc. João Batista do Nascimento.
Coorientadora: Profa. Dra. Amanda Suellen Sena Corrêa Leão.

Belém - PA
2022

EVELYN SABRINA SILVA E SILVA

A INTERDISCIPLINARIDADE DO CÁLCULO: APLICAÇÕES DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora da Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Data da Defesa: 07/12/2022
Conceito: Excelente.

Banca Examinadora

Prof. MSc. João Batista do Nascimento.
Coorientadora: Profa. Dra. Amanda Suellen Sena Corrêa Leão.
Faculdade de Matemática - UFPA
Orientador

Profa. Dra. Amanda Suellen Sena Corrêa Leão
Faculdade de Matemática - UFPA
Coorientadora

Prof. Dr. João Carlos Alves dos Santos
Faculdade de Matemática - UFPA
Membro da Banca

Belém - PA
2022

Dedico este trabalho à minha mãe, mãe solo, mulher preta e forte, que apesar de todas as dificuldades me ensinou a nunca desistir e aos meus avós pois é graças aos seus apoio e confiança que hoje posso concluir o meu curso.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que me manteve firme em meus propósitos, me sustentando com sua graça e sua paz. À minha família, meu avô João Batista Rodrigues Silva e à minha mãe Izabella Silva e Silva, por estarem presentes nos momentos mais difíceis, me apoiando e me levantando.

Agradeço ao meu orientador, o Professor MSc. João Batista do Nascimento por ter aceitado acompanhar-me no desenvolvimento deste trabalho. O seu empenho foi essencial para a minha motivação à medida que as dificuldades surgiam nos avanços deste projeto.

Expresso minha gratidão a todos os profissionais do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará e à toda equipe do Projeto Newton, que me possibilitaram uma experiência única durante um dos momentos mais difíceis da minha vida acadêmica, a pandemia. Agradeço por todo o apoio que me deram ao longo do meu curso de graduação e da realização do meu trabalho.

Aos professores do curso de Matemática, que me forneceram todas as bases necessárias para a realização deste trabalho, em especial à minha coorientadora, a Professora Dra. Amanda Suellen Sena Corrêa Leão, que tornou minha experiência na produção do Pré-Projeto tranquila e agradável e a quem agradeço com profunda admiração pelo vosso profissionalismo.

Aos amigos que fiz na graduação e a todos que fizeram parte da turma de 2018.4, agradeço por fazerem essa minha experiência ser mais leve e divertida. Aos amigos que fiz no Projeto Newton, grandes monitores e discentes, focados e comprometidos com o trabalho, agradeço do fundo do meu coração, pois trabalhar durante a pandemia foi um desafio que superamos com muito foco e dedicação.

"A verdadeira viagem de descobrimento
não consiste em procurar novas paisagens,
mas em ter novos olhos."
(Marcel Proust)

RESUMO

Este Trabalho de Conclusão de Curso apresenta um material de apoio ao ensino do cálculo, tem como tema a Interdisciplinaridade do Cálculo e o objetivo de estudar o Cálculo Diferencial e Integral I, bem como mostrar a sua aplicabilidade em diferentes áreas, como ferramenta de motivação, para responder questionamentos do tipo “por que preciso aprender isso?” e destacar a sua relevância, resolvendo questões contextualizadas de livros para ensino do cálculo nas graduações e em provas do ENADE (Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes), utilizado para avaliar os cursos de ensino superior. Para isso faremos um breve apanhado histórico do Cálculo Diferencial e Integral, da sua importância para a sociedade atualmente e apresentaremos os conceitos de cálculo necessários para entender as resoluções dos problemas apresentados. A dificuldade dos discentes nas disciplinas de cálculo é reconhecida por diversos autores, professores e pedagogos e alguns muitos fatores são indicados como contribuintes para o mal desempenho nos cursos que possuem cálculo na sua grade. Em função disso, este trabalho desenvolve um material alternativo de apoio ao ensino do cálculo, abordando os principais conceitos do Cálculo Diferencial e Integral e resolvendo problemas de outras áreas e ciências. Também mostraremos alguns comportamentos de funções e gráficos com o auxílio do Software Geogebra, que é um grande auxiliar na modelagem do ensino e no desenvolvimento prático do conteúdo em sala de aula.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial. Cálculo Integral. Aplicações. Interdisciplinaridade.

ABSTRACT

This Course Conclusion Work presents an material to support the teaching of the calculation, has as its theme the Interdisciplinarity of Calculus and the objective of studying Differential and Integral Calculus I and also show its applicability indifferent areas, as a motivationtool, to answer questions such as for example, "by that I need to learn that?" and highlight its relevance, solving contextualized questions of books for teaching calculus in graduations and ENADE (National Student Performance Exam) exams, used to evaluate higher education courses. For this we will make a brief historical summary of differential and integral calculus, its importance to society today and we will present the calculation concepts necessary to understand the resolutions of the problems presented. The difficulty of students in the calculation disciplines is recognized by several authors, teachers and pedagogues and some many factors are indicated as contributors to poor performance in courses that have calculus in their grid. As a result of the above, this work develops an alternative material to support the teaching of calculus, addressing the main concepts of Differential and Integral Calculus and solving problems of other areas and sciences. We will also show some behaviors of functions and graphics with the help of Geogebra Software, which is a great aid in the modeling of teaching and practical development of content in the classroom.

Keywords: Differential Calculus. Integral Calculus. Applications. Interdisciplinarity.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Limite quando $x \to a$ 16
Figura 2 – Representação da definição de limite 17
Figura 3 – Limites Laterais 18
Figura 4 – Continuidade 22
Figura 5 – Representação Gráfica do Teorema do Valor Intermediário 23
Figura 6 – Representação gráfica de m_{AB} 24
Figura 7 – Posição da reta aproximando B de A 25
Figura 8 – Curva representando movimento 25
Figura 9 – Representação Gráfica do Teorema de Rolle 32
Figura 10 – Representação Gráfica do Teorema do Valor Médio 33
Figura 11 – Funções contínuas e seus máximos e mínimos globais 35
Figura 12 – Gráficos das alternativas da Questão 23 (Engenharia Grupo VII - ENADE 2011) 53

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO . . . 11
2 BREVE HISTÓRICO E ENSINO DO CÁLCULO . . . 12
2.1 Breve Histórico . . . 12
2.2 Ensino e Dificuldades . . . 13
2.3 Interdisciplinaridade . . . 14
2.4 Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes/ENADE . . . 15
3 CONCEITOS BÁSICOS DE CÁLCULO I . . . 16
3.1 Limite . . . 16
3.1.1 Definição de Limite . . . 16
3.1.2 Propriedades Básicas de Limites . . . 17
3.1.3 Limites Laterais . . . 18
3.1.4 Existência de um Limite . . . 19
3.1.5 Limites e a Ideia de Infinito . . . 19
3.1.5.1 Limites no Infinito . . . 19
3.1.5.2 Limites Infinitos . . . 19
3.1.5.3 Critérios de Limite no Infinito de Quociente de Polinômios . . . 19
3.1.6 Limites Fundamentais . . . 21
3.1.7 Continuidade . . . 22
3.1.7.1 Continuidade e Limites Laterais . . . 23
3.2 Derivada . . . 23
3.2.1 Taxa de Variação . . . 24
3.2.2 Reta Tangente . . . 24
3.2.3 Velocidade . . . 25
3.2.4 Definição de Derivada num Ponto . . . 26
3.2.5 A Função Derivada . . . 26
3.2.6 Propriedades da Derivada . . . 27
3.2.6.1 Derivada de Função Inversa . . . 30
3.2.7 Valores Extremos de uma Função Diferenciável . . . 32
3.2.7.1 Extremos Locais e Globais . . . 34
3.2.7.2 Pontos críticos . . . 35
3.2.7.3 Funções Crescentes e Decrescentes . . . 35
3.2.7.4 Intervalos de Crescimento e Decrescimento . . . 35
3.2.7.5 1º Método Básico para encontrar Máximos e Mínimos . . . 36
3.2.7.6 2º Método Básico para encontrar Máximos e Mínimos . . . 36
3.3 Integral . . . 36
3.3.1 Primitiva . . . 36
3.3.2 Primitivas Imediatas . . . 37

3.3.3 Métodos de Primitivação 39
3.3.3.1 Integração por Substituição 39
3.3.3.2 Integração por Partes 40
3.3.4 Integral de Riemann 41
3.3.5 Propriedades da Integral 42
3.3.6 1° Teorema Fundamental do Cálculo 43
4 APLICAÇÕES 45
4.1 Aplicações de Limites 45
4.2 Aplicações de Derivada 48
4.3 Aplicações da Integral 52
5 CONSIDERAÕES FINAIS 57
REFERÊNCIAS 58

1 INTRODUÇÃO

O Cálculo Diferencial e Integral é um ramo da matemática desenvolvido a partir de conceitos de geometria e álgebra, que estuda os movimentos, as variações e as taxas de mudanças com a derivada, além de medir áreas e volumes com a integral. É uma das criações mais importantes do século XVII e depois de sua criação o nível da matemática criativa foi elevado e a matemática elementar acabou por terminar, de acordo com (EVES, 2011).

Para a construção dos conceitos do Cálculo, destacam-se dois personagens, Sir Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried von Wilhelm Leibniz (1646-1716), que desenvolveram, em trabalhos independentes, o que utilizamos até hoje. Apesar de todo o conflito histórico, sabe-se que Newton descobriu o que ele chamou de “método dos fluxos e fluentes"e Leibniz se destacou, para além dos conceitos, pela notação que ainda é frequentemente usada.

Em nosso cotidiano é fácil encontrar problemas que podem ser resolvidos utilizando matemática, ela pode ser percebida nas porcentagens de vendas, descontos e juros que precisam ser calculados ao comprar algo ou transformar gramas em miligramas para preparar uma receita. Comumente professores se deparam com questionamentos como “por que preciso estudar as funções?” e “quando vou precisar usar a matemática?” no ensino básico e se repete na graduação, principalmente nos anos iniciais, nos quais o discente estuda as disciplinas de Cálculo.

Por isso é que propomos perceber/olhar que a matemática está inserida em dinâmicas comuns do cotidiano e que a Interdisciplinaridade pode ser vista como uma ferramenta fundamental para atribuir sentido aos conceitos matemáticos abstratos. (RODRIGUES, 2005, p.5) destaca que a matemática favorece e facilita a interdisciplinaridade, pois ela desenvolve o raciocínio e dá liberdade para criar e amadurecer ideias, algo que está fortemente ligado à sociedade e segundo (SANTOMÉ, 1998, p. 45) “apostar na interdisciplinaridade significa apostar em um novo tipo de pessoa, mais aberta, flexível, solidária, democrática e crítica”.

Este trabalho está dividido em três partes, o primeiro capítulo fará um breve apanhado da história do cálculo, focando na “Guerra do Cálculo” que ocorre entre dois personagens importantes, Newton e Leibniz. Neste capítulo ainda será mostrada a motivação da pesquisa, dada a importância do cálculo para o cotidiano, que é trabalhada de maneira interdisciplinar em cursos que não são necessariamente de matemática, a sua importância para o ENADE e o que ele representa. O segundo capítulo mostrará os conhecimentos básicos de Cálculo Diferencial e Integral necessários para resolver questões aplicadas, focando nos teoremas e definições usados nas resoluções. Para finalizar, o terceiro capítulo mostrará problemas com aplicações do cálculo e suas respectivas resoluções.

2 BREVE HISTÓRICO E ENSINO DO CÁLCULO

Neste capítulo faremos uma breve contextualização histórica direcionando o estudo à "Guerra do Cálculo"entre Newton. Mesmo sendo o Cálculo um dos conceitos mais influente da matemática, estudado por muitos filósofos e matemáticos, foi no século XVII que algo parecido com o que vemos hoje começou a ser formalizado. Há muitas discussões sobre como o cálculo foi realmente inventado, mas neste trabalho para a contrução do conceito do cálculo adotaremos as seguintes referências (BARDI, 2008), (BOYER, 2010) e (EVES, 2011) como principais.

2.1 Breve Histórico

O Cálculo foi criado por Isaac Newton e Gottfried Leibniz, em trabalhos independentes. No entanto, já era utilizado há muitos séculos, antes de ser definido por Isaac e Leibniz, por matemáticos como Isaac Barrow (1630 - 1677), Johannes Kepler (1571 - 1630) e Pierre de Fermat (1601 - 1665), não de forma rigorosa, mas que contribuiu para o seu surgimento. Tão somente focaremos na chamada “A Guerra do Cálculo” entre Isaac e Gottfried, destacando a importância dos dois para a descoberta do cálculo.

Sir Isaac Newton (1642 - 1727) é um dos protagonistas na história da construção do cálculo. Formado pela Universidade de Cambridge em janeiro de 1665, fez várias descobertas que revolucionaram a história da matemática e da física. Desenvolveu o Teorema do Binômio, para calcular logaritmos e enquanto observava o movimento de um planeta descobriu o que ele chamou de “método dos fluxos”. No entanto, nada sobre suas descobertas foi publicado antes de 1684.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 - 1716), outro nome importante nessa histórica disputa pela invenção do cálculo, recebeu seu diploma de bacharel com dezessete anos e estudou não só matemática, como teologia, direito e filosofia, conforme EVES (2011). Visitou Londres em 1673 e tornou-se membro da Royal Society e desta visita surgiram as especulações de que Leibniz teria tido acesso ao trabalho de Newton.

Somente após 10 anos das descobertas de Newton, foi que Leibniz chegou à mesma conclusão sobre o cálculo, que integrais e derivadas são, de certo modo, aplicações inversas em quaisquer que sejam as funções. Acontece que Leibniz não guardou para si tais informações e além de elaborar uma notação para estes cálculos e seus respectivos nomes, ele também publicou sobre o Cálculo Diferencial no ano de 1684 em *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irretionales moratu*, antes do Newton.

Ambos foram de grande importância para a construção e o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, e são considerados como coinventores independentes do cálculo, de acordo com BARDI (2008). Newton descobriu o que ele chamou de “método de fluxos e fluentes” e Leibniz conseguiu desenvolver uma nomenclatura para as fórmulas que usamos até hoje.

2.2 Ensino e Dificuldades

O Cálculo Diferencial e Integral estuda os movimentos, as variações e as taxas de mudanças e antes da invenção do cálculo estudava-se matemática em objetos estáticos. A partir daí a matemática elementar acaba por terminar e a invenção do cálculo eleva o nível da matemática criativa, de acordo com EVES (2011). Trata-se de uma ferramenta indispensável para diversas áreas das ciências exatas e naturais como por exemplo: a matemática, a química, as ciências econômicas, a biologia, a física e as engenharias.

É possível observar na Física, assim como nas engenharias e na química, o cálculo sendo utilizado para o obter o trabalho realizado por uma força ou a velocidade instantânea com a qual uma partícula se movimenta em um exato período. Dentro da matemática, a Integral é útil para calcular volumes, áreas e comprimentos de arcos. De modo geral, a disciplina Cálculo Diferencial e Integral, dividida entre limites, derivadas e integrais, possibilitará que tarefas complexas dessas áreas sejam mais bem assimiladas.

Para legitimar nossos estudos, apresentamos alguns argumentos a seguir, que demonstram que as dificuldades dos alunos nas disciplinas de Cálculo ocorrem em escala mundial e é claro que diversas ações e planos são traçados para minimizar a problemática. Destacamos a tese de doutorado de Maria Cristina Bonomi Barufi (1999), da Faculdade de Educação da USP, que defende a inserção de propostas de ensino de cálculo inovadoras nas disciplinas.

BARUFI (1999) mostra os índices de reprovação entre 1990 e 1995 em Cálculo Diferencial e Integral na USP, destacando que o índice de reprovação varia de 40% a 70% e que mesmo na reoferta da disciplina para quem não conseguiu ser aprovado anteriormente, o índice de reprovação ainda é alto, como na turma de 1994 que o índice de não-aprovação foi de 46,9%.

Na década de 80, o chamado *Calculus Reform Movement* (ou o Movimento de Reforma do Cálculo) buscou a reforma do currículo do ensino do cálculo. Segundo ROBIN (1997) este movimento de reforma começou após uma reunião em Washington em 1987, na qual os matemáticos anunciaram uma crise no ensino em cálculo. Essa crise, de acordo com o autor citado, dava-se pela constção de que até 40% dos alunos de graduação estavam falhando no cálculo introdutório, e mesmo aqueles que passaram não apreciaram a relevância do assunto. Os cursos de cálculo ministrados do modo tradicional, eram sem graça e os alunos aprendiam a cálcular derivadas e integrais, praticavam por conta própria e nas provas os professores forneciam questões semelhantes aos dos exercícios, como uma espécie de mezanização do ensino do cálculo.

SCHOENFELD (1995) define que a reforma do cálculo nasceu, de fato, em 2 de janeiro de 1986, o dia em que a conferência de cálculo *Toward Lean and Lively Calculus* (ou Rumo a um cálculo enxuto e animado) começou. Afirma que era clara a necessidade de propostas para o ensino do cálculo, já que durante o final dos anos 70 e início dos anos 80, houve um crescente descontentamento com os resultados da instrução de cálculo, do método tradicional de ensino.

Ainda segundo SCHOENFELD (1995), uma das grandes características do movimento era apoiar propostas que trabalhassem tanto a matemática formal, quanto sua aplicação no mundo.

As motivações para reformar o currículo de cálculo nas décadas de 1980 e 1990 são claras e vieram da preocupação com o grande número de estudantes que não conseguiram progredir através do cálculo. Uma de suas características dos movimentos de reforma era que fosse possível usar todas as ferramentas e tecnologias disponíveis para auxiliar no ensino e aprendizagem do cálculo, isto é, mostrar aos alunos o cálculo de forma analítica, geométrica e algébrica e levá-los a entender como funcionaria no mundo real, ou seja, suas aplicações.

Desta maneira, propor as aplicações do Cálculo Diferencial e Integral como uma ferramenta interdisciplinar é propor que o estudante construa seu conhecimento através de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, relacionando-o com a área em que está inserido e contribuir com a formação do professor que desenvolverá habilidades como trabalhar em equipe e ser flexível quanto ao conteúdo ministrado em sala de aula.

2.3 Interdisciplinaridade

Interdisciplinaridade não é algo de fácil conceituação. Seguindo FAZENDA (1994), só em 1970 foi que começaram a procurar uma definição para a interdisciplinaridade, havia uma necessidade não só de apresentar um conceito para a palavra como também, antes disso, traduzir/manifestar o seu significado corretamente. Diante da dificuldade de estabelecer um significado, ela considera que a interdisciplinaridade pode ser a relação entre duas disciplinas distintas, valorizando ambas as ciências que estão se relacionando e trabalhando de forma que eles se complementem.

Vista então como a relação entre duas ou mais disciplinas, a interdisciplinaridade é um mecanismo que rompe com a visão de que o ensino deve ser estabelecido de maneira fragmentada e segundo SANTOMÉ (1998, p. 45) "apostar na interdisciplinaridade significa apostar em um novo tipo de pessoa, mais aberta, flexível, solidária, democrática e crítica". Trabalhar com a interdisciplinaridade no cálculo é estabelecer uma maneira de promover a interação dos alunos com o conteúdo ensinado e entre eles. Olharemos para a interdisciplinaridade como formas diferentes de abordar um mesmo conteúdo, neste caso o Cálculo Diferencial e Integral. Utilizá-la no processo de ensino e aprendizagem é transformar o conhecimento teórico em um conhecimento material, palpável.

A interdisciplinaridade como ferramenta para o ensino do cálculo é uma proposta que tem por finalidade desenvolver o conhecimento do discente, não só dentro de sala de aula, mas que incentive e desperte o interesse do aluno a procurar problemas reais que podem ser resolvidos com o Cálculo Diferencial e Integral, construindo assim um saber significativo para ele dentro e fora do ambiente escolar/acadêmico.

2.4 Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes/ENADE

O Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE) é uma prova aplicada anualmente com conteúdos programáticos previstos nas Diretrizes Curriculares Nacionais ou no Catálogo Nacional de Cursos Superiores de Tecnologia do respectivo curso de graduação. O objetivo é avaliar as habilidades dos discentes dentro da evolução do conhecimento e a capacidade de compreender temas ligados a outras áreas de conhecimento. As provas são compostas em parte por conteúdo específico à área e em parte comum aos cursos de todas as áreas.

Nos anos de 2005, 2008 e 2011 as provas foram direcionadas à área da matemática, já em 2014 e 2017 as provas foram separadas entre Matemática Licenciatura e Bacharelado e em 2021 apenas Matemática Licenciatura. Nas provas de 2008 a 2009, a quantidade de questões que podem ser resolvidas com Cálculo Diferencial e Integral varia entre 7 e 9, sendo em 2011 a prova com mais questões contextualizadas. Nas provas de 2014 e 2017 (Bacharelado e Licenciatura) e 2021 (Licenciatura) é mais fácil identificar as questões que precisam do conhecimento do Cálculo Diferencial e Integral, com um número médio de 10 questões.

Nas provas da área da engenharia, há uma quantidade razoável de questões envolvendo Cálculo Diferencial e Integral, como as questões 16, 17 e 18, que envolvem pré-cálculo e conceitos de derivada e integral, na prova do Grupo VII de Engenharia, de 2005 e na questão 20 na prova de Engenharia Civil, de 2014, que se utiliza o conceito de derivada e integral no cálculo da taxa de evaporação de água, do momento de inércia e no estudo das deformações de materiais, como é o caso da equação da linha elástica. Na prova de Biologia de 2008 utiliza-se a derivada e a ideia de taxa de crescimento para a analisar o número de indivíduos da população em um período de tempo.

De acordo com a quantidade de questões de cálculo, principalmente nas provas de Licenciatura em Matemática no ENADE, é possível observar que o cálculo é essencial para a formação dos professores, proporcionando uma forte base teórica e um amplo conhecimento das funções, áreas, volumes, integrais e derivadas, formando um docente crítico e capaz de desenvolver e exemplificar problemas contextualizados ao ministrar conteúdos para o ensino fundamental e médio.

3 CONCEITOS BÁSICOS DE CÁLCULO I

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos do Cálculo, como limites, derivadas e integrais, de maneira elementar. O objetivo é mostrar conceitos, teoremas importantes e demonstrações para resolver as questões que serão apresentadas no próximo capítulo. As referências utilizadas nesse capítulo são Guidorizzi (2001), Stewart (2013) e Roffman (2015).

3.1 Limite

O conceito de limite de uma função é de grande importância para o cálculo diferencial e para outros ramos da matemática dentro da análise matemática. A concepção desse conceito leva ao desenvolvimento de conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral, como continuidade, derivadas e integrais. A ideia de limite é utilizada para tentar conceber o comportamento de fenômenos/funções quando consideramos aproximação de valores ou situações de aproximações. Sendo esse conceito importante para resolver problemas, ele é aplicado por engenheiros e diversos profissionais de outras ciências. Um exemplo clássico do estudo de limites é dado por Galileu Galilei (1564-1642) nos seus estudos de movimento em plano inclinado.

3.1.1 Definição de Limite

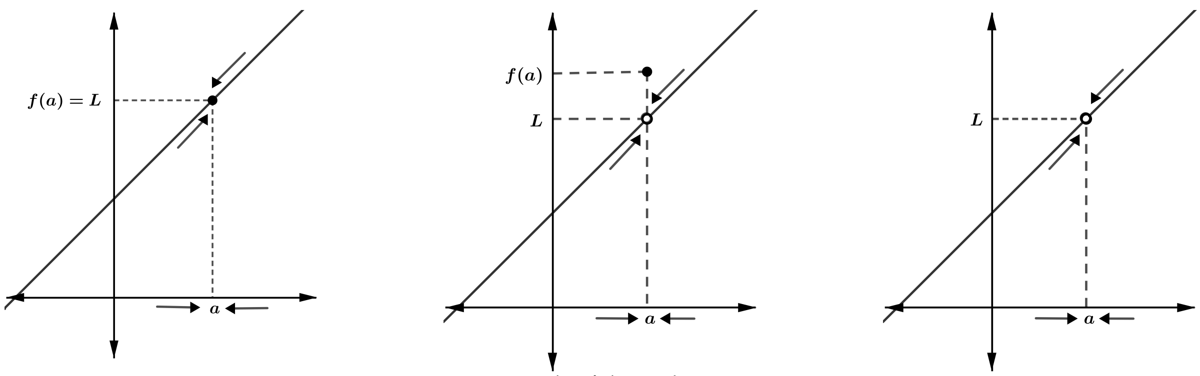
De maneira intuitiva, podemos compreender minimamente, no caso de função $f(x)$ real a valores reais, que à medida que os valores de x se aproximam de um certo valor a, os valores de $f(x)$ ficam próximos de um determinado valor L. E denotamos isto por

$$\lim_{x \to a} = L$$

e lê-se: "o limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a L. (Veja os exemplos na Figura 1)

Figura 1 – Limite quando $x \to a$

(a) $f(a)$ **é igual ao limite.** **(b)** $f(a)$ **é diferente do limite.** **(c)** $f(a)$ **não existe.**

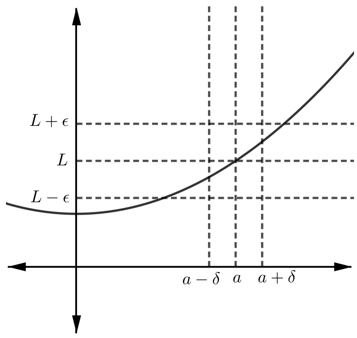


Fonte: Produzido pela autora.

Agora, vamos definir limite de maneira mais formal. Para tanto, a ideia de x próximo de a significará que existe $m > 0$ tal que $x \in (a-m, a+m)$ ou $x \in (a-m, a]$ ou $x \in [a, a+m)$, sem que necessariamente $a = x$ e sendo f uma função definida numa vizinhança de a, podendo f estar ou não definida em a, dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L se, para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Figura 2 – Representação da definição de limite



Fonte: Produzido pela autora.

No caso de haver a existência do limite, denotamos por $\lim_{x\to a} f(x) = L$ (Veja a Figura 2).

3.1.2 Propriedades Básicas de Limites

Vimos anteriormente a definição de limite, primeiro de forma mais intuitiva e depois de maneira mais formal, que para os cursos de Cálculo I fora os cursos de matemática não é muito utilizada, por conta da sua rigorosidade matemática. Veremos agora algumas propriedades básicas que surgem a partir dessa ideia e auxiliam nos cálculos dos limites.

Suponhamos a uma constante e a existência dos seguinte limites

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \ e \ \lim_{x\to a} g(x) = L_2.$$

Se existirem os limites das funções f e g, então possuirão as seguintes propriedades

Propriedade 3.1.1. O limite da soma de funções é a soma dos limites.

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x).$$

Propriedade 3.1.2. Para qualquer constante k, vale a propriedade

$$\lim_{x\to a}[kf(x)] = k \lim_{x\to a} f(x).$$

Propriedade 3.1.3. O limite da multiplicação de funções é a multiplicação dos limites.

$$\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x). \lim_{x\to a} g(x).$$

Propriedade 3.1.4. O limite do quociente de funções é o quociente dos limites.

Sejam $g(x) \neq 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}.$$

Propriedade 3.1.5. O limite de uma função composta $g(f(x))$.

Se $\lim_{x \to p} f(x) = a$, então

$$\lim_{x \to p} g(f(x)) = \lim_{u \to a} g(u).$$

Teorema 3.1.1. ***(Teorema da Substituição)*** *Suponha que a seja um número real e $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq a$. Se o limite de $g(x)$ existir quando $x \to a$, então $\lim_{x \to a} f(x)$ também existe e*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x).$$

3.1.3 Limites Laterais

Um refinamento do conceito de limite ocorre quando por necessidade, ou por conveniência, fazemos restrição de como será feita a aproximação. Havendo dois casos básicos: à esqueda, tomamos valores menores do que o do ponto de limite e à direita valores maiores do que o do ponto de limite. Neste caso, temos as seguintes notações:

- **Limite pela esquerda**

$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

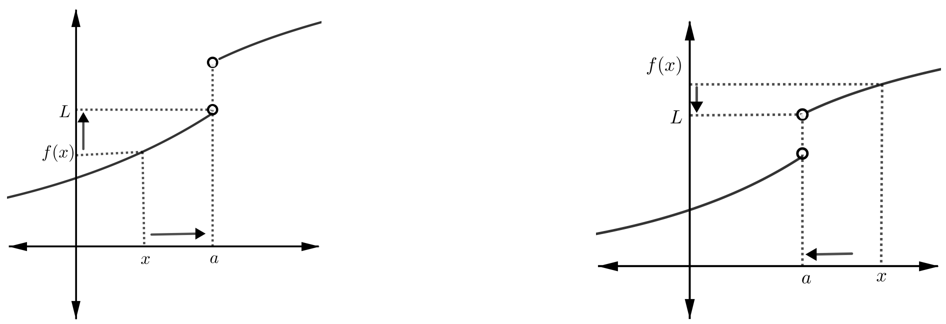
- **Limite pela direita**

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

Estas definições podem ser representadas graficamente da seguinte forma

Figura 3 – Limites Laterais

(a) Limite pela esquerda **(b) Limite pela direita**



Fonte: Produzido pela autora.

3.1.4 Existência de um Limite

O conceito de limite lateral deixa claro não haver necessidade de ambos sequer existirem e quanto menos serem iguais. Assim, é possível reobter um limite num determinado ponto. De fato, temos o resultado a seguir

Teorema 3.1.2. *Existe* $\lim_{x \to a} f(x) = L$ *se, somente se* $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L.$

Ante este resultado, podemos concluir que quando algum dos limites laterais não existe, ambos coincidem de não existir ou $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$, então o limite não existe.

3.1.5 Limites e a Ideia de Infinito

Determinar o comportamento de uma função a longo prazo é algo interessante para economistas, físicos, biólogos, engenheiros agrônomos e engenheiros de produção. Por isso, a ideia de infinito pode nos ajudar a acompanhar o aumento ou a diminuição sem limite de uma variável e seus resultados em muito tempo.

3.1.5.1 Limites no Infinito

O limite no infinito é limite que se aproxima de um valor real finito à medida que x aumenta ou diminui ilimitadamente. Isso geometricamente, significa que há uma assíntota horizontal no gráfico da função.

Dada uma função $f(x)$ e os números reais L_1 e L_2, denotam limites no infinito

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L_1 \; e \; \lim_{x \to -\infty} f(x) = L_2$$

lê-se "os valores de $f(x)$ tendem a um número L_i, $i = 1,2$ quando o valor de x cresce/decresce infini".

3.1.5.2 Limites Infinitos

Limites infinitos são aqueles em que o resultado do cálculo do limite é infinito. Isso geometricamente, pode significar uma assíntota vertical no gráfico da função.

Denotamos por limite infinito, quando $f(x)$ aumenta ilimitadamente à medida que $x \to a$ e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty.$$

3.1.5.3 Critérios de Limite no Infinito de Quociente de Polinômios

1. Se o polinômio de maior grau estiver no númerador, o limite da função será infinito quando x estiver tendendo ao infinito
$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty.$$

Exemplo 3.1.1. Calcule o limite de $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{2x}$ quando $x \to \infty$.
Solução: Vejamos que podemos escrever

$$\frac{x^2+3x}{2x} = \frac{x(x+3)}{2x} = \frac{1}{2}(x+3).$$

Pelo **Teorema 3.1.1**, temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}(x+3)$$

à medida que x cresce infinitamente, $f(x)$ também cresce, logo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x}{2x} = \infty.$$

2. Se o polinômio de maior grau estiver no denominador, o limite da função será 0 quando x estiver tendendo ao infinito
$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$

Exemplo 3.1.2. Calcule o limite de $f(x) = \dfrac{5x^2+3x}{3x^3+3x^2+x}$ quando $x \to \infty$.
Solução: Podemos fazer a seguinte tranformação na função

$$\begin{aligned}\frac{5x^2+3x}{3x^3+3x^2+x} &= \frac{x^3(\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2})}{x^3(3+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})} \\ &= \frac{\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}{3+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}.\end{aligned}$$

Pelo **Teorema 3.1.1**, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+3x}{3x^3+3x^2+x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}{3+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 3+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\end{aligned}$$

à medida que x cresce infinitamente, $P_1(x) = \frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}$ tende a zero e $Q_1(x) = 3+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}$ tende a 3, por tanto
$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+3x}{3x^3+3x^2+x} = \frac{0}{3} = 0.$$

3. Se o grau dos polinômios for igual, o limite da função será um número real $L \in \mathbb{R}$ quando x estiver tendendo ao infinito
$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = L.$$

Exemplo 3.1.3. Calcule o limite de $f(x) = \dfrac{5x^2+3x}{7x^2+4}$ quando $x \to \infty$.
Solução: Vejamos que podemos escrever

$$\frac{5x^2+3x}{7x^2+4} = \frac{x^2(5+\frac{3}{x})}{x^2(7+\frac{4}{x^2})} = \frac{5+\frac{3}{x}}{7+\frac{4}{x^2}}.$$

Pelo **Teorema 3.1.1**, temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+3x}{7x^2+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{5+\frac{3}{x}}{7+\frac{4}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 5+\dfrac{3}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty} 7+\dfrac{4}{x^2}}$$

à medida que x cresce infinitamente, $\frac{3}{x}$ e $\frac{4}{x^2}$ tendem a 0, por isso

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+3x}{7x^2+4} = \frac{5}{7}.$$

3.1.6 Limites Fundamentais

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Exemplo 3.1.4. Calcule o limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 6x}{x}$
Solução:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{x} = \lim_{x\to 0} 6.\frac{\sin 6x}{6x}$$

Fazendo $u = 6x$, teremos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{x} = \lim_{x\to 0} 6.\frac{\sin 6x}{6x} = \lim_{u\to 0} 6\frac{\sin u}{u} = 6.$$

2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

Exemplo 3.1.5. Use o limite acima para mostrar que $\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$.
Solução:
Fazendo $h = \frac{1}{x}$ e com isso, quando $h \to 0$ temos que $x \to \infty$, então

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Exemplo 3.1.6. Use o limite fundamental acima para mostrar que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h-1}{h} = 1$.
Solução:
Fazendo $u = e^h - 1$ ou $h = \ln(1+u)$ teremos

$$\frac{e^h-1}{h} = \frac{u}{\ln(1+u)} = \frac{1}{\ln(1+u)^{1/u}}.$$

Quando $h \to 0$ temos $u \to 0$. Por isso

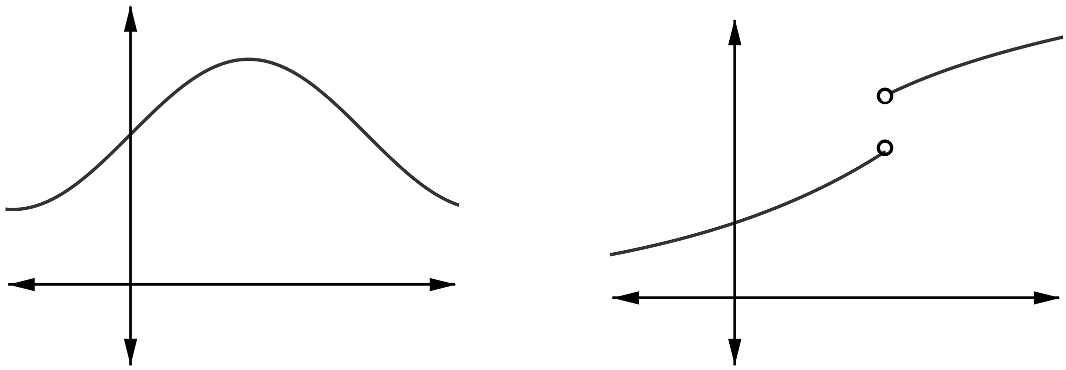
$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{\ln(1+u)^{1/u}} = 1.$$

3.1.7 Continuidade

A continuidade é um conceito que confundiu muitos matemáticos durante muito tempo, mas no início do século XIX uma definição precisa foi desenvolvida. E o significado de contínuo no dicionário é "não dividido em sua extensão" ou "não interrompido". A ideia de continuidade está ligada ao estudo dos limites de uma função, visto que para analisar se uma função é contínua, devemos analisar a existência do limite dessa função.

Figura 4 – Continuidade

(a) Contínua **(b) Descontínua**



Fonte: Produzido pela autora.

De maneira bruta podemos estabelecer que uma função é continua quando conseguimos desenhar seu gráfico sem tirar o lápis do papel, ou seja, sem interrupções.

Definição 3.1.1. (Continuidade) Suponha c um número no intervalo aberto (a,b) e uma função f cujo domínio contém (a,b). A função f será considerada contínua neste ponto se as seguintes condições forem satisfeitas.

1. $f(c)$ existe.
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(x)$.

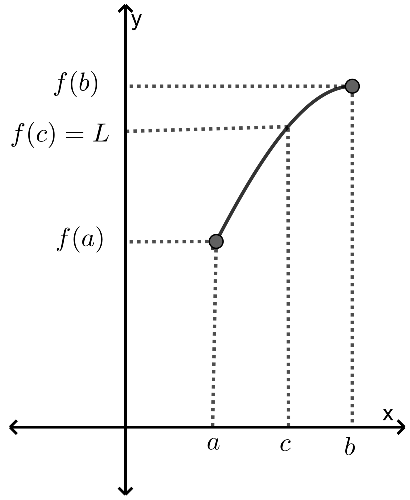
Se as condições forem satisfeitas para todos os pontos do domínio dizemos que f é contínua.

Um teorema importante do Cálculo, que necessita da definição acima como uma condição necessária para ser aplicado, é o Teorema do Valor Intermediário que tem como consequência garantia da existência de pelo menos uma raíz em uma função f se num dado intervalo I houver $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, onde $a,b \in I$.

Teorema 3.1.3. ***(Teorema do Valor Intermediário)***

Seja f contínua em um intervalo fechado $[a.b]$ e seja L um número real, tal que $f(a) < f(b)$ então existe $x = c \in [a,b]$ de modo que $f(c) = L$.

Figura 5 – Representação Gráfica do Teorema do Valor Intermediário



Fonte: Produzido pela autora.

3.1.7.1 Continuidade e Limites Laterais

Nas condições anteriores, podemos usar limite lateral para redefinir continuidade de uma função num ponto, dado o seguinte caso: f será onsiderada contínua neste ponto se as seguintes condições forem satisfeitas.

1. $f(c)$ existe.
2. $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ existe.
3. $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$ existe.
4. $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \lim\limits_{x \to c^-} f(x) = f(c)$.

3.2 Derivada

Calcular deslocamento e variação da posição no tempo em diversas situações é a ideia central que leva a aplicarmos limite para definir caso particular desta ideia, velocidade instantânea, por derivada e relacionar com o conceito de reta tangente. E derivadas, além de ter desenvolvimento e aplicações dentro da própria matemática, são usadas em muitas construções científicas em economia, estatística, engenharia, física, biologia, etc. A derivada pode ser utilizada para calcular o coeficiente angular de uma reta tangente a uma curva qualquer em um ponto determinado desta curva ou como a taxa de variação instantânea.

3.2.1 Taxa de Variação

Seja $y = f(x)$ nossa variável que depende de x. Se x variar entre x_1 e x_2, então y irá variar entre $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Ou seja, a variação de x será dada por

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

e a variação de y

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1).$$

Vamos definir a taxa de variação da seguinte forma.

Definição 3.2.1. (Taxa média de variação) A taxa média de variação de y em função de x será denotada da seguinte forma

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Tendo $\Delta x = x_2 - x_1$, vamos denotar a taxa de variação no intervalo $[x_1, x_1 + \Delta x_1]$ como sendo

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Quando tendermos Δx a zero $(\Delta x \to 0)$ teremos o que chamamos de taxa de variação instantânea, isto é

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

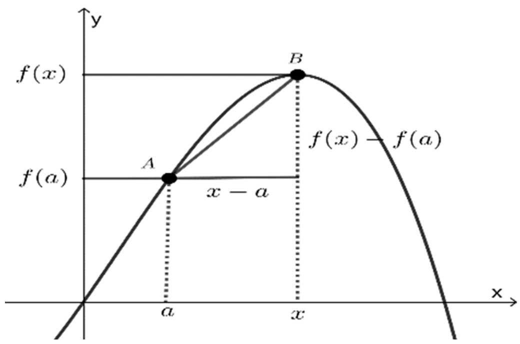
3.2.2 Reta Tangente

Seja C uma curva, dada localmente por $y = f(x)$, numa vizinhança de um determinado ponto $A = (a, f(a))$. Ao considerarmos um ponto $B = (x, f(x))$ com $x \neq a$ e x numa vizinhança de a fica determinada a inclinação da reta AB, chamada de reta secante, dada por:

$$m_{AB} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

.

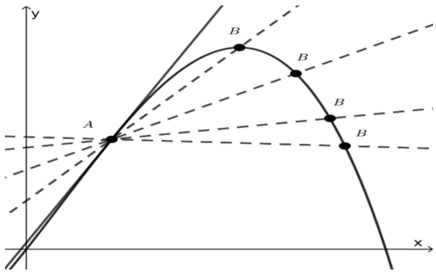
Figura 6 – Representação gráfica de m_{AB}



Fonte: Produzido pela autora.

A medida que, fixado o ponto A, o ponto B se aproxima desse ao longo da curva C, ou seja, quando x está tendendo a a ($x \to a$), temos, simultaneamente, a ideia visual das retas secantes como que atingindo uma posição limite e a possibilidade de aplicarmos parte do que já expomos para tentar calcular $\lim\limits_{x \to a}$.

Figura 7 – Posição da reta aproximando B de A



Fonte: Produzido pela autora.

Definição 3.2.2. Nas condições anteriores, quando $\lim\limits_{x \to a} m_{AB}$ existe, a reta que passa por $A = (a, f(a))$ e a inclinação dada por esse valor é chamada de reta tangente da curva C passando por A.

3.2.3 Velocidade

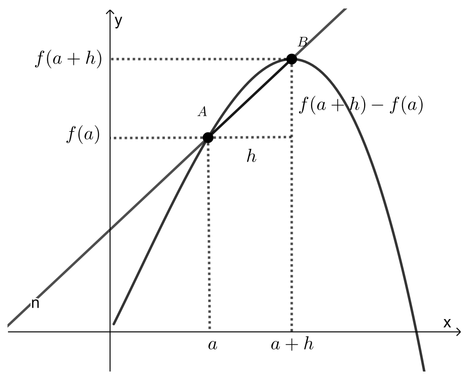
Suponha que um objeto está se movendo no plano euclidiano cujo deslocamento s desse, localmente, seja dado por $s = f(t)$, em função da variável tempo t. E a função f que descreve o movimento é chamada de função posição desse objeto.

No intervalo de tempo entre $t = a$ e $t = a + h$ a variação na posição será a posição final menos a inicial, isto é, $f(a+h) - f(a)$ (Ver Figura 8) e a velocidade média (v_m) será

$$v_m = \frac{deslocamento}{tempo} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Sendo isso, como vimos, uma inclinação de reta secante

Figura 8 – Curva representando movimento



Fonte: Produção da autora

Como antes, estamos ante uma situação em que é possível calcularmos limite e quando esse existe chamaremos de velocidade instantânea no ponto a ou velocidade em a. Ou seja, quando $v(a) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe, dizermos ser a velocidade no instante $t = a$ e , como antes, é a inclinação da reta tangente em $(a, f(a))$.

3.2.4 Definição de Derivada num Ponto

Definição 3.2.3. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$ (isto é, a é um ponto de acumulação de X pertencente a X). Diremos que f é derivável em um ponto a quando existir o limite

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Se escrevermos $h = x-a$, ou $x = a+h$, a derivada de f no ponto $a \in X \cap X'$ torna-se o limite:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Também usaremos a notação: $\dfrac{d}{dx}[f(x)](a) = f'(a)$.

Da definição de derivada num ponto, vejamos o teorema que garante a continuidade de da função no ponto utilizando essa definição.

Teorema 3.2.1. ***(Continuidade)*** *Se existir a derivada $f'(a)$ então f é contínua no ponto a.*

Demonstração: Se existir o limite $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ então existirá também o limite

$$\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)]$$

Utilizando o Teorema 3.1.1 e a Propriedade 3.1.3

$$\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)] = \lim_{x\to a} \frac{[f(x)-f(a)]}{(x-a)}.(x-a)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)] = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.\lim_{x\to a}(x-a) = 0$$

Assim, f será contínua em a.

3.2.5 A Função Derivada

A seção anterior apresenta a definição da derivada em um ponto específico a. Agora vamos generalizar a interpretação de forma que seja possível calcular a derivada em qualquer a percencente ao domínio da função f. No lugar de a vamos colocar a variável x e teremos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Para todo x no domínio da função, de modo que o limite exista, teremos $f'(x)$ uma nova função que chamamos de **função derivada de** $f(x)$.

Definição 3.2.4. (Derivadas de Ordem Superior) Seja f uma função e A o conjunto de todos os x para os quais $f'(x)$ está definida. A função $f' : A \to \mathbb{R}$ dada por $x \to f'(x)$, denomina-se função derivada ou derivada de f, assim denotamos f' como derivada de 1ª ordem de f. A derivada de f', denotada por f'' denominamos por derivada de 2ª ordem de f. Analogamente, ocorre a definição das derivadas de ordem superior a 2.

3.2.6 Propriedades da Derivada

Vamos deixar aqui algumas propriedades básicas das derivadas, que poderemos chamar de regras de derivação.

Propriedade 3.2.1. Derivada da função constante

Seja $f(x) = k$ com $k \in \mathbb{R}$. Chamada de função constante que tem por gráfico uma reta perpendicular ao eixo y e paralela ao eixo x. Sua derivada, será

$$\begin{aligned}\frac{d(f(x))}{dx} &= \frac{d(c)}{dx} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Exemplo 3.2.1. Calcule a derivada da função $f(x) = c$ que associa para todo x no domínio, um único número c no contradomínio.
Solução:

Aplicando a definição de derivada, temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

para qualquer x real, vale $f(x) = c$, então

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{0}{h} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Propriedade 3.2.2. Derivada da função potência

Seja n um número real e $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

A regra da potência se dá da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{d(f(x))}{dx} &= \frac{d(x^n)}{dx} \\ &= nx^{n-1}.\end{aligned}$$

Exemplo 3.2.2. Calcule a derivada da função $f(x) = x^2$.
Solução: Usando a definição de derivada, vamos calcular

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

teremos então,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (2x + h) \\
&= 2x.
\end{aligned}$$

Propriedade 3.2.3. Derivada de uma combinação linear

Suponha que f e g funções deriváveis e β, $\lambda \in \mathbb{R}$. Então

$$[\beta f(x) \pm \lambda g(x)]' = \beta f'(x) \pm \lambda g'(x).$$

Exemplo 3.2.3. Calcule a derivada da função $p(x) = 3x^2 + 4x$.
Solução: Vejamos que podemos escrever

$$p(x) = 3x^2 + 4x$$

como a combinação linear dos polinômios $p_1(x) = x^2$ e $p_2(x) = x$. Utilizando a **Propriedade 3.2.2**, teremos

$$p'(x) = [3p_1(x) + 4p_2(x)]' = 3p_1'(x) + 4p_2'(x)$$

portanto,

$$p'(x) = 6x + 4.$$

Propriedade 3.2.4. Derivada de um produto

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções diferenciáveis. Então a derivada do produto de f e g é dada por

$$\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = f'(x).g(x) + f(x)g'(x)$$

Exemplo 3.2.4. Calcule a derivada de $h(x) = x^3.(4x+2)$.
Solução: Utilizando a **Propriedade 3.2.4** vamos derivar a função $h(x) = x^3.(4x+2)$, que é o produto de duas funções $h_1(x) = x^3$ e $h_2(x) = 4x + 2$. Assim,

$$h'(x) = [h_1(x)h_2(x)]' = h_1'(x).h_2(x) + h_1(x)h_2'(x).$$

Portanto,

$$h'(x) = 3x^2(4x+2) + 4(x^3).$$

Propriedade 3.2.5. Derivada de um quociente

Sejam f e g funções diferenciáveis, com $g(a) \neq 0$. Então a derivada do quociente de f e g é dada por

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g(x)^2}.$$

Exemplo 3.2.5. Calcule a derivada da função:

$$g(x) = \frac{4x^2+4}{6x}.$$

Solução: A função g é o quociente das funções $g_1(x) = 4x^2+4$ e $g_2(x) = 6x$ e pela **Propriedade 3.2.5**, a derivada da função $g(x)$ pode ser desenvolvida da seguinte forma

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{g_1'(x).g_2(x) - g_1(x).g_2'(x)}{[g_2(x)^2]} \\ &= \frac{8x(6x) - 6(4x^2+4)}{(6x)^2} \\ &= \frac{6x^2-6}{9x^2}. \end{aligned}$$

Propriedade 3.2.6. Derivadas de e^x e $\ln x$:

1. Dada a função $f(x)$ sua derivada é dada por $f'(x) = e^x$.

2. Seja g uma função dada por $g(x) = \ln x$ sua derivada é $g'(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x > 0$.

Exemplo 3.2.6. Calcule as derivadas das funções pela definição:

1. $f(x) = e^x$.

2. $g(x) = \ln(x)$.

Solução: Para calcular as derivadas das funções abaixo vamos utilizar os conceitos apresentados no tópico **Limites Fundamentais**.

1. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} e^x \dfrac{e^h - 1}{h} = e^x$

2. $g'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \ln\left(1 + \dfrac{h}{x}\right).$

   Faremos uma substituição $u = \dfrac{h}{x}$, daí

$$g'(x) = \lim_{u\to 0} \ln(1+u)^{\frac{1}{xu}} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{x} \ln(1+u)^{\frac{1}{u}} = \frac{1}{x}$$

Propriedade 3.2.7. Derivadas de funções trigonométricas:
Seja f uma função trigonômétrica, valem as derivadas da tabela abaixo.

1. Se $f(x) = \sin x$ então $f'(x) = \cos x$.
2. Se $f(x) = \cos x$ então $f'(x) = -\sin x$.
3. Se $f(x) = \tan x$ então $f'(x) = \sec^2 x$.
4. Se $f(x) = \sec x$ então $f'(x) = \tan x \sec x$.
5. Se $f(x) = \cot x$ então $f'(x) = -cosec^2$
6. Se $f(x) = cosec\, x$ então $f'(x) = -cosc\, x \cot x$.

Teorema 3.2.2. ***(Regra da Cadeia)*** *Sejam $y = f(x)$ e $u = g(x)$ funções deriváveis, com $Im_g \cap Dom_f$, considerando $h(x) = f(g(x))$. Temos que $h'(x) = f'(g(x)).g'(x)$, para todo $x \in Dom_g$. Na notação de Leibniz, temos*

$$\frac{dh}{dx} = \frac{dh}{dy}.\frac{dy}{dx}$$

Exemplo 3.2.7. Calcule a derivada da função $f(x) = \sin(x^2)$.
Solução: A função $f(x)$ é composta pelas funções $g(x) = \sin x$ e $h(x) = x^2$. Para calcular a derivada dessa função basta usar as propriedades apresentadas acima e a regra da cadeia. Assim,

$$f'(x) = g'(h(x)).h'(x) = [\sin(h(x))]'.[x^2]'$$

Pelas **Propriedades 3.2.2 e 3.2.7**

$$f'(x) = 2x(\cos(x^2)).$$

3.2.6.1 Derivada de Função Inversa

Se f é inversível, com inversa g, de modo que

$$f(g(x)) = x, \text{ para todo } x \in D_g.$$

Teremos $[f(g(x))]' = 1$ ou $[f(g(x))]' = x'$ Utilizando o **Teorema 3.2.2** temos que a derivada da função inversa será

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \text{ para todo } x \in D_g.$$

Teorema 3.2.3. *Seja f uma função inversível, com função inversa g. Se f for deriável em $q = g(p)$, com $f'(q) \neq 0$ e se g for contínua em p, então g será derivável em p.*

Exemplo 3.2.8. Calcule a derivada da função inversa $f(x) = \arcsin x$
Solução:

Sabendo que $\arcsin x$ é a inversa de $\sin x$, para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Teremos

$$\begin{aligned}\arcsin' x &= \frac{1}{f'(\arcsin x)} \\ &= \frac{1}{\cos \arcsin x}\end{aligned}$$

e pela relação trigonimétrica fundamental, segue que

$$[\cos(\arcsin x)]^2 + [\sin(\arcsin x)]^2 = 1$$

daí,

$$[\cos(\arcsin x)]^2 = 1 - x^2$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}\arcsin' x &= \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

Exemplo 3.2.9. Calcule a derivada da função inversa $g(x) = \arctan x$.
Solução:

Utilizando a notação de Leibniz para escrever a fórmula da derivada da função inversa e utilizar para calcular $g'(x)$.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= g'(x) \\ &= \frac{1}{f'(g(x))}\end{aligned}$$

Voltando para a notação anterior

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Sabendo que $f^{-1}(x) = \arctan x = y$ e $x = \tan y$. Então,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1+\tan^2 y}\end{aligned}$$

Agora é só substituir $x = tan(y)$

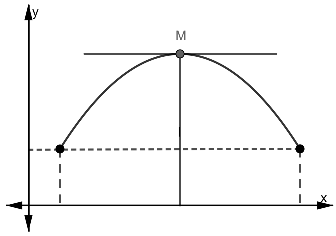
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

3.2.7 Valores Extremos de uma Função Diferenciável

Primeiro, vamos mostrar alguns teoremas que irão nos ajudar a analisar o comportamento das funções diferenciáveis e suas interpretações gráficas.

Teorema 3.2.4. ***(Teorema de Rolle)*** *Se f é uma função contínua em um invervalo fechado $[a,b]$ e derivável em um intervalo aberto (a,b) e $f(a) = f(b)$, então existe pelo menos um valor $x = c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Figura 9 – Representação Gráfica do Teorema de Rolle



Fonte: Produzido pela autora.

Vejamos um exemplo do teorema acima, que auxilia na determinação de valores máximos e mínimos das funções.

Exemplo 3.2.10. Verifique o teorema de Rolle para a função $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$ no intervalo fechado $[0,2]$.

Solução: A função é uma função polinomial, que é contínua e derivável em $(0,2)$. Vejamos agoa se $f(0) = f(2)$.

Temos

$$f(0) = -2.0^2 + 4.0 + 3 = 3$$

e

$$f(2) = -2.2^2 + 4.2 + 3 = 3.$$

Portanto, $f(0) = f(2)$ e agora vamos encontrar o valor de x, para o qual $f'(x) = 0$.

Utilizando a **Propriedade 3.2.2**

$$f'(x) - 4x + 4$$

fazendo $f'(x) = 0$

$$-4x + 4 = 0$$

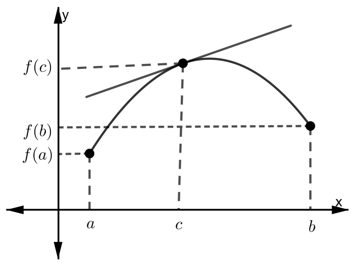
$$x = 1$$

Portanto, há $x = 1 \in (0,2)$ tal que $f'(1) = 0$.

Teorema 3.2.5. ***(Teorema do Valor Médio)*** *Se f for contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), então existirá pelo menos um $c \in (a,b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \text{ ou } f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$

Figura 10 – Representação Gráfica do Teorema do Valor Médio



Fonte: Produzido pela autora.

Exemplo 3.2.11. Seja $f(x) = \sqrt{2x-2}$ e c um número que satisfaça o Teorema do Valor Médio para f no intervalo de $1 \leq x \leq 3$. Qual o valor de c?
Solução: O teorema acima diz que a inclinação da reta tangente em um determinado ponto é igual a inclinação da reta tangente que liga esses dois pontos, ou seja

$$f'(c) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} \quad (1)$$

Primeiro vejamos quem é $f'(x)$ Utilizando o **Teorema 3.2.2** vamos calcular a derivada da função composta $f(x)$.

$$f'(x) = [\sqrt{2x-2}]' = [(2x-2)^{\frac{1}{2}}]'$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}(2x-2)^{-\frac{1}{2}}.2 = \frac{1}{\sqrt{2x-2}}$$

Substituindo $f'(c)$ em (1) teremos

$$\frac{1}{\sqrt{2c-2}} = \frac{2-0}{2} = 1$$

Agora só precisamos encontrar o valor de c

$$\frac{1}{\sqrt{2c-2}} = 1$$
$$1 = \sqrt{2c-2}$$
$$1 = 2c-2$$
$$c = \frac{3}{2}.$$

Exemplo 3.2.12. Questão 16 - Matemática Bacharelado (ENADE 2014)
Considere uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável em todo o seu domínio, com $f'(x) \leq x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $f(1) = 1$, então, pelo Teorema do Valor Médio, o valor máximo de $f(3)$ é igual a

1. 3.

2. 5.

3. 7.

4. 9.

5. 11.

Solução: Utilizando o **Teorema do Valor Médio** para f que é diferenciável em todo o seu domínio, teremos

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}.$$

Para $f(x)$ definida no intervalo $[1,3]$ e $c \in [1,3]$, continuamos

$$f'(c) = \frac{f(3) - 1}{2}$$

$$f(3) - 1 = 2f'(c)$$

$$f(3) = 2f'(c) + 1.$$

Dada a relação acima, queremos $f(3)$ máximo, usaremos a condição $f'(c) \leq c$ e teremos

$$f'(c) = c$$

para que $f(3)$ seja máximo e substituíremos

$$f(3) = 2.c + 1.$$

No intervalo $[1,3]$, o valor máximo para c é $c = 3$. Portanto,

$$f(3) = 2.3 + 1 = 7.$$

Gabarito: ítem 3.

3.2.7.1 Extremos Locais e Globais

Definição 3.2.5. Seja f uma função, I um intervalo contido em D_f e $p \in I$. Dizemos que $f(p)$ é máximo local de f no intervalo se $f(x) \leq f(p)$ para todo x em I. Se $f(x) \geq f(p)$ para todo $x \in I$ dizemos que o valor é mínimo local.

Definição 3.2.6. Seja f uma função e $p \in D_f$. Dizemos que $f(p)$ é máximo global se $f(x) \leq f(p)$ para todo x em D_f. Se $f(x) \geq f(p)$ para todo $x \in A$ dizemos que o valor é mínimo global.

3.2.7.2 Pontos críticos

Definição 3.2.7. Um ponto crítico de uma função é um número a definido no domínio tal que sua derivada é zero, ou não existe, isto é, se uma das duas condições abaixo é satisfeita para a então $(a, f(a))$ é chamado de ponto crítico.

1. $f'(a) = 0$

2. $f'(a)$ não existe.

Teorema 3.2.6. ***(Teorema de Fermat)*** *Se uma função f possui um ponto de extremo local em $x = c$ e a função f é derivável neste c, então $(c, f(c))$ é um ponto crítico, ou seja, $f'(c) = 0$.*

3.2.7.3 Funções Crescentes e Decrescentes

Definição 3.2.8. Seja f uma função e x_1,$x_2 \in D_f$. Chamamos f de função

1. Crescente se para $x_1 < x_2$ obtivermos $f(x_1) \leq f(x_2)$;

2. Estritamente crescente se para $x_1 < x_2$ obtivermos $f(x_1) < f(x_2)$;

3. Decrescente se para $x_1 < x_2$ obtivermos $f(x_1) \geq f(x_2)$;

4. Estritamente decrescente se para $x_1 < x_2$ obtivermos $f(x_1) > f(x_2)$.

3.2.7.4 Intervalos de Crescimento e Decrescimento

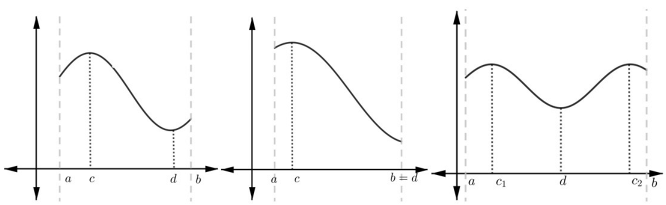
Teorema 3.2.7. *Seja f uma função contínua em um intervalo fechado $[a,b]$ e derivável no aberto (a,b). Então:*

1. *se $f'(x) > 0$, para todo $x \in (a,b)$, então f é crescente em (a,b);*

2. *se $f'(x) < 0$, para todo $x \in (a,b)$, então f é decrescente em (a,b).*

Teorema 3.2.8. ***(Teorema dos Valores Extremos)*** *Seja f uma função contínua em $[a,b]$, essa função terá um valor máximo e um valor mínimo nesse intervalo fechado $[a,b]$.*

Figura 11 – Funções contínuas e seus máximos e mínimos globais



Fonte: Produzido pela autora.

No que segue, apresentamos dois métodos para encontrar máximos e mínimos de uma função diferenciável.

3.2.7.5 1º Método Básico para encontrar Máximos e Mínimos

Se a função f dada, for contínua em um intervalo fechado $[a,b]$ seguimos os seguintes passos para encontrar valores máximos ou mínimos globais de f.

1. Encontrar os valores $x = c \in (a,b)$ críticos de f dentro de (a,b).
2. Determinar $f(a)$ e $f(b)$.
3. Comparar os valores de $f(a)$, $f(b)$ e $f(c)$. O maior valor será o valor máximo global.

3.2.7.6 2º Método Básico para encontrar Máximos e Mínimos

Seja $x = c \in D_f$, para verificar se c é um valor de máximo local de f devemos fazer os seguintes procedimentos:

1. Verificar se $(c, f(c))$ é um ponto crítico.
2. Analisar o sinal da derivada antes e depois dele.
3. Verificar se o sinal da derivada muda antes e depois de $(c, f(c))$.

3.3 Integral

A integral é o processo inverso da derivada e aqui apresentaremos algumas técnicas para a sua resolução, que é muito importânte para cálculos de áreas de curvas não regulares. O Cálculo Integral é muito utilizado para calcular acumulações de diferentes tipos, como por exemplo: a área debaixo de função que determina a quantidade de vendas, ou seja, que representa o total de vendas acumuladas durante um determinado peírodo.

3.3.1 Primitiva

Vamos compreender como encontrar a primitiva de uma função, para calcular uma integral.

Definição 3.3.1. (Primitiva de uma Função) Seja f uma função definida num intervalo I. Uma primitiva de f em I é uma função F definida em I, tal que

$$F'(x) = f(x)$$

para todo x em I.

Observação 3.3.1. O domínio deverá sempre ser em um intervalo. Se o domínio não for mencionado, o intervalo ficará implicito.

Definição 3.3.2. Sejam f e g contínuas num intervalo I. Se $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in I$, o que as diferenciam é uma constante K. Isto é,

$$f(x) = g(x) + K$$

para todo $x \in I$.

3.3.2 Primitivas Imediatas

Chamam-se primitivas imediatas às funções cujas derivadas são funções elementares básicas conhecidas, que aparecem no integrando da nossa integral indefinida.

Sejam $n \neq 0$ e b constantes reais. Das fórmulas de derivação já vistas, vejamos algumas primitivas imediatas:

1. $\int c\, dx = cx + k$, pois
$$[cx + k]' = c$$
pelas **Propriedade 3.2.1** e **Propriedade 3.2.2**.

2. $\int x^n\, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k\ (n \neq -1)$, pois
$$\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} + k\right]' = \frac{n+1}{n+1} x^{n+1-1} = x^n$$
pelas **Propriedade 3.2.1** e **Propriedade 3.2.2**.

3. $\int e^x\, dx = e^x + k$, pois
$$[e^x + k]' = e^x.$$
Veja o ítem 1 do **Exemplo 3.2.6**.

4. $\int \dfrac{1}{x}\, dx = \ln|x| + k$, pois
$$[ln|x| + k]' = [ln(\sqrt{x^2}) + k]' = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \frac{2x}{2\sqrt{x^2}} = \frac{1}{x}$$
pelo teorema **Teorema 3.2.2**. Veja também o ítem 2 do **Exemplo 3.2.6**.

As primitivas a seguir, seguem da **Propriedade 3.2.7**.

5. $\int \cos x dx = \sin x + k$, pois
$$[sin(x) + k]' = cos(x).$$

6. $\int \sin x \, dx = -\cos x + k$, pois

$$[-cos(x) + k]' = sin(x).$$

7. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + k.$, pois

$$[tan(x) + k]' = sec^2(x)$$

Veja o **Exemplo 3.3.4** a seguir.

8. $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + k$, pois

$$[sec(x) + k]' = sec(x)tan(x).$$

9. $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + k$, pois

$$[\arctan x + k]' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Veja o **Exemplo 3.2.9**.

10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + k$, pois

$$[\arcsin x + k]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Veja o **Exemplo 3.2.8**.

Exemplo 3.3.1. Calcule a primitiva

$$\int 5\pi dx.$$

Solução: A integral de uma constante em função de uma variável, é a constante que multiplica a variavél mais a constante de integraçã. Portanto,

$$\int 5\pi dx = 5\pi x + K.$$

Exemplo 3.3.2. Calcule a primitiva

$$\int x^7 dx.$$

Solução: Utilizando a primitiva imediata

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k \; (n \neq -1)$$

teremos

$$\int x^7 dx = \frac{x^8}{8} + K.$$

Exemplo 3.3.3. Calcule a primitiva
$$\int \frac{1}{x^3} dx.$$
Solução: Vejamos que podemos escrever
$$\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx$$
Utilizando a primitiva imediata
$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k \ (n \neq -1)$$
teremos
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3} dx &= \int x^{-3} dx \\ &= -\frac{x^{-2}}{2} + K \\ &= -\frac{1}{2x^2} + K.\end{aligned}$$

3.3.3 Métodos de Primitivação

3.3.3.1 Integração por Substituição

Considerando a integral
$$\int f(g(x))g'(x)dx$$
Como consequência da regra da cadeia, a técnica de integração por substituição consiste em aplicar a mudança de variável $u = g(x)$. Desta forma, $du = g'(x)dx$ o que, substituindo na integral acima, nos fornece a integral toda em uma nova variável u:
$$\int f(u)du.$$

Exemplo 3.3.4. Calcule a primitiva $\displaystyle\int \tan x \, dx$

Solução: Sabendo que $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, vamos calcular
$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$
Para cálcular, basta que utilizemos o metodo de primitivação acima.
Faremos a mudança $u = \cos x$ e com isso, teremos $du = -\sin x dx$, então
$$\begin{aligned}\int \tan x \, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= \int -\frac{1}{u} du \\ &= -\ln(|u|) + k \\ &= -\ln(|\cos(x)|) + k.\end{aligned}$$

Exemplo 3.3.5. Calcule a primitiva

$$\int \frac{1}{\sqrt{(2-3x)}}dx$$

Solução: Vamos organizar a função

$$\int \frac{1}{\sqrt{(2-3x)}}dx = \int \frac{1}{(2-3x)^{\frac{1}{2}}}dx = \int (2-3x)^{-\frac{1}{2}}dx.$$

Utilizando o método de substituição, fazendo $u = 2-3x$ teremos $du = -3dx$ e

$$\int \frac{1}{\sqrt{(2-3x)}}dx = \int (2-3x)^{-\frac{1}{2}}dx = -\frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{2}}dx.$$

Utilizando a primitiva imediata

$$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k\ (n \neq -1)$$

teremos

$$\int \frac{1}{\sqrt{(2-3x)}}dx = -\frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{2}}dx = -\frac{2}{3}u^{\frac{1}{2}} + K = -\frac{2}{3}\sqrt{2-3x} + K.$$

Exemplo 3.3.6. Calcule a primitiva $\int x\sin(x^2)dx$

Solução: Faremos a seguinte substituição $t = x^2$ e $dt = 2xdx$. Agora basta usar o método de substituição

$$\int x\sin(x^2)dx = \int \frac{\sin(t)}{2}dt$$

Utilizando a primitiva imediata de $\sin(t)$

$$\int x\sin(x^2)dx = \int \frac{\sin(t)}{2}dt = -\frac{cos(t)}{2} + K.$$

3.3.3.2 Integração por Partes

Como consequência da regra do produto das derivadas, temos a seguinte forma para integrais do tipo $\int u(x)dv$

$$\int u(x)dv = u(x)v(x) - \int v(x)du.$$

Exemplo 3.3.7. Ache a primitiva $\int xe^x dx$.

Solução: Para utilizar o método acima, faremos $u(x) = x$ e $dv = e^x dx$, daí teremos $v(x) = e^x$ e $du = dx$. Assim,

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + k.\end{aligned}$$

Exemplo 3.3.8. Calcule a primitiva $\int e^x \cos(x)dx$.
Solução: Avaliando a integral, utilizaremos o método de integração por partes, onde $u = cos(x)$, $dv = e^x dx$, $du = -\sin(x)$ e $dv = e^x dx$.

Teremos, então

$$\int e^x \cos(x)dx = cos(x)e^x - \int e^x(-\sin(x))dx.$$

Teremos que aplicar novamente a integração por partes.

Fazendo $u = \sin(x)$, $dv = e^x dx$, $du = cos(x)dx$ e $v = e^x dx$, teremos

$$\begin{aligned}\int e^x \cos(x)dx &= cos(x)e^x - \int e^x(-\sin(x))dx \\ &= cos(x)e^x + \sin(x)e^x - \int e^x(cos(x))dx.\end{aligned}$$

Dados dois termos iguais com sinais opostos em lados opostos da igualdade, vamos somar ele dos dois lados

$$2\int e^x \cos(x)dx = cos(x)e^x + \sin(x)e^x.$$

Portanto,

$$\int e^x \cos(x)dx = \frac{cos(x)e^x + \sin(x)e^x}{2} + K.$$

Exemplo 3.3.9. Ache a primitiva $\displaystyle\int xln(x)dx$.

Solução: Para utilizar o método acima, faremos $u(x) = ln(x)$ e $dv = xdx$, daí teremos $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$ e $du = \dfrac{1}{x}dx$. Assim,

$$\int xln(x)dx = ln(x)\frac{x^2}{2} - \int \frac{x}{2}dx = ln(x)\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + k.$$

3.3.4 Integral de Riemann

Aqui vamos apresentar a definição de Integral de Riemann e algumas propriedades da integral.

Definição 3.3.3. Uma partição P de um intervalo $[a,b]$ é um conjunto finito $P = x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ onde $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

Uma partição P de $[a,b]$ divide $[a,b]$ em intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2,3,...,n$. A amplitude do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ será indicada por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Assim:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1 \ etc.$$

Os números $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ não são necessariamente iguais; o maior deles denomina-se amplitude da partição P e indica-se por $max\Delta x_i$.

Uma partição $P = x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ de $[a,b]$ será indicada simplesmente por

$$P : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b.$$

Definição 3.3.4. Seja f uma função definida em um intervalo fechado $[a,b]$ e seja L um número real.

Dizemos que $\sum_{i=1}^{n} f(\overline{c_i})\Delta x$, tendendo a L, quando tendemos $max\Delta x_i$ a zero, e escrevemos

$$\lim_{max\Delta x_1 \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = L$$

se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ que só dependa de ε mas não depende da escolha dos números c_i, de forma que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - L \right| < \varepsilon$$

para todo "pedaço"P de $[a,b]$, com $max\Delta x_i < \delta$.

Denominamos por Integral de Riemann de f em $[a,b]$, indicado por $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ o número L, único, quando existir.

Sendo assim, por definição,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{max\Delta x_1 \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \\ &= L. \end{aligned}$$

Ainda por definição, se $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ existe, então dizemos que f é integrável em $[a,b]$ (segundo Riemann). E podemos nos referir a integral como integral definida de f em $[a,b]$.

3.3.5 Propriedades da Integral

Suponhamos F e G duas primitivas das funções f e g respectivamente e $c \in \mathbb{R}$. Então, teremos

Propriedade 3.3.1. $f+g$ é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Propriedade 3.3.2. kf é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

Propriedade 3.3.3. Se $f(x) \geq 0$ em $[a,b]$, então $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Propriedade 3.3.4. Se $c \in]a,b[$ e f é integrável em $[a,c]$ e $[c,b]$ então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

3.3.6 1° Teorema Fundamental do Cálculo

O teorema fundamental do Cálculo, é muito importante para o Cálculo diferencial e integral, pois é quem estabelece uma ligação entre o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. Visto que a derivada surge a medida que surgem necessidades humanas de determinar a reta tangente a uma curva e taxas de variações instantâneas, vamos ressaltar que o Cálculo Integral é necessário para cálcular áreas sob curvas, custos, gastos médios, dentre outras coisas.

Teorema 3.3.1. *Se f for integrável em $[a,b]$ e se F for uma primitiva de f em $[a,b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Demonstração: De acordo com a definição de integral, se f for integráel em $[a,b]$, o valor do limite

$$\lim_{max\Delta x_1 \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = L$$

então teremos $L = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Suponhamos, agora, que f seja integrável em $[a,b]$ e que admita uma primitiva $F(x)$ em $[a,b]$, isto é, $F'(x) = f(x)$ em $[a,b]$. Seja $P : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ uma partição qualquer de $[a,b]$.

Vejamos então que

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Segue do **Teorema do Valor Médio**, que teremos

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} F'(\bar{c}_i)\Delta x_i$$

ou

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{c}_i)\Delta x_i.$$

Se para cada partição P de $[a,b]$, os $\bar{c}_i$ forem escolhidos em um intervalo propício, teremos

$$\lim_{mas\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{c}_i)\Delta x_i = F(b) - F(a)$$

e assim

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Exemplo 3.3.10. Calcule $\int_0^1 f(x)dx$ para $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 1$
Solução: Vamos encontrar $F(x)$

$$F(x) = \int f(x)dx = \int (x^3 + 2x^2 + 5x + 1)dx$$

Usando o **item 2** de **Primitivas Imediatas** e a **Propriedade 3.3.1** teremos

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int x^3 + 2x^2 + 5x + 1dx \\
F(x) &= \int x^3dx + \int 2x^2dx + \int 5xdx + \int 1dx \\
F(x) &= \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + x + k.
\end{aligned}$$

Agora, utilizando o **1º Teorema Fundamental do Cálculo**

$$\int_0^1 x^3 + 2x^3 + 5x + 1dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + x \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{5}{2} + 1 = \frac{53}{12}.$$

4 APLICAÇÕES

Neste capítulo apresentamos algumas aplicações do Cálculo Diferencial e Integral I, com o objetivo de destacar a sua interdisciplinaridade, mostrando como são abordados nas questões contextualizadas os tópicos mostrados no capítulo anterior em livros clássicos de usados em cursos de Cálculo I no Ensino Superior como Stewart (2013) e Hoffmann (2018) e Larson (2010) dentre outros e em provas do ENADE (Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes).

4.1 Aplicações de Limites

Exemplo 4.1.1. (Larson 2010) pág. 88 - Questão 70.
Você efetuou um depósito de $R\$2.000,00$ em uma conta que é capitalizada trimestralmente a uma taxa anual de r (na forma decimal). O saldo A após 10 anos é

$$A(r) = 2000\left(1+\frac{r}{4}\right)^{40}.$$

O limite de A existe quando a taxa de juros tende a 6%? Se sim, qual é esse limite?
Solução: Analisando a função saldo A, que depende de uma taxa de juros r, verificamos que não há restrições no domínio da função, ou seja, r está definido em todos os reais.

Logo, pelo **Teorema 3.1.1**

$$\lim_{r\to 0,06} A(r) = A(0,06).$$

Isso significa, que calcular o limite neste caso, é aplicar o valor específico de r na função $A(r)$. Então,

$$\lim_{r\to 0,06} 2000\left(1+\frac{r}{4}\right)^{40} = 2000\left(1+\frac{0,06}{4}\right)^{40}.$$

Portanto, o limite quando a taxa de juros tende a 6% é de alguns reais.

Exemplo 4.1.2. (Hoffmann 2018) Seção 1.5 - Exemplo 1.5.10 (Adaptado pela autora).
Para produzir e vender x unidades em centenas de um produto, o produtor terá um lucro dado por $L(x) = 6x - \sqrt{x}$ em milhares de reais. Qual seria o lucro médio para uma produção muito pequena.
Solução: Para resolver essa questão vamos primeiro escrever o que é o lucro médio. O lucro médio é a variação do lucro sobre a variação da unidade de produto, como inicialmente temos uma produção de 0 unidades de produto e consequentemente um lucro de $R\$ = 0,00$ reais, então o lucro médio será

$$LM(x) = \frac{6x-\sqrt{x}}{x}.$$

Para determinar o lucro médio para uma produção muito pequena, calcularemos o comportamento da função chegando bem próximo de zero, ou seja, limite de $LM(x)$ quando $x \to 0$, isto é

$$\lim_{x\to 0} \frac{6x-\sqrt{x}}{x}.$$

Para isso, sabendo que

$$LM(x) = \frac{6x - \sqrt{x}}{x} = 6 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

vamos usar o **Teorema 3.1.1** e obter

$$\lim_{x\to 0} LM(x) = \lim_{x\to 0} \frac{6x - \sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0} 6 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

pela **Propriedade 3.1.1**

$$\lim_{x\to 0} LM(x) = \lim_{x\to 0} 6 - \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

à medida que x se aproxima de 0 a função $h(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$ decresce infinitamente. Portanto,

$$\lim_{x\to 0} LM(x) = -\infty.$$

A interpretação desse cálculo é que à medida que aproximamos o valor de x de zero ou quanto menos unidades de material forem produzidas, menor será o lucro médio e maior será o prejuízo.

Exemplo 4.1.3. (Hoffmann 2018) Problemas 1.5 - Questão 52.

O gerente de uma empresa observa que, t meses após começar a fabricação de um novo produto, serão fabricadas P milhares de unidades, em que

$$P(t) = \frac{6t^2 + 5t}{(t+1)^2}$$

O que acontecerá com a produção a longo prazo (ou seja, para $t \to \infty$)?

Solução: Para calcular a produção a longo prazo, vamos utilizar a ideia de limite no infinito, ou seja, ver como se comporta a função que determina a quantidade de produtos fabricados quando $x \to \infty$. Isto é,

$$\lim_{x\to\infty} P(t) = \lim_{x\to\infty} \frac{6t^2 + 5t}{(t+1)^2}$$

pela **Propriedade 3.2.4**

$$\lim_{x\to\infty} P(t) = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} (6t^2 + 5t)}{\lim\limits_{x\to\infty} (t+1)^2} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Dada a indeterminação, e sabendo que

$$P(t) = \frac{6t^2 + 5t}{(t+1)^2} = \frac{6 + \frac{5}{t}}{1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}}$$

utilizando o **Teorema 3.1.1**

$$\lim_{x\to\infty} P(t) = \lim_{x\to\infty} \frac{6 + \frac{5}{t}}{1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}}$$

pela **Propriedade 3.2.4**

$$\lim_{x\to\infty} P(t) = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 6 + \dfrac{5}{t}}{\lim\limits_{x\to\infty} 1 + \dfrac{2}{t} + \dfrac{1}{t^2}} = \frac{6}{1}.$$

Portanto, a produção a longo prazo será de 6 milhões de unidades.

Exemplo 4.1.4. (Hoffmann 2018) Problemas 1.5 - Questão 59.

A concentração de um medicamento no sangue de um paciente t horas após uma injeção é $C(t)$ miligramas por milímetro, em que

$$c(x) = \frac{0,4}{t^{1,2}+1} + 0,013.$$

1. Qual é a concentração do medicamento imediatamente após a injeção (ou seja, para $t = 0$)?

2. Qual a concentração residual do medicamento, ou seja a concentração a longo prazo?

Solução:

1. Vamos calcular $C(x)$ quando $x \to 0$ já que queremos o valor muito próximo a t inicial que é $t = 0$. Assim,
$$\lim_{x\to 0} C(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{0,4}{t^{1,2}+1} + 0,013\right).$$
Pela **Propriedade 3.1.1**
$$\lim_{x\to 0} C(x) = \lim_{x\to 0}\frac{0,4}{t^{1,2}+1} + \lim_{x\to 0} 0,013.$$
O primeiro limite não apresenta indeterminação, então é só substituir 0 em t e o limite da constante é a própria constante, então
$$\lim_{x\to 0} C(x) = 0,413.$$

2. Vamos calcular o limite de $C(x)$ quando $x \to \infty$ para entender o comportamento da função e verificar o residual de medicamento a longo prazo
$$\lim_{x\to \infty} C(x) = \lim_{x\to \infty}\left(\frac{0,4}{t^{1,2}+1} + 0,013\right).$$
Pela **Propriedade 3.1.1**
$$\lim_{x\to \infty} C(x) = \lim_{x\to \infty}\frac{0,4}{t^{1,2}+1} + \lim_{x\to \infty} 0,013.$$
O primeiro limite tende a zero e o limite da constante é a própria constante, então
$$\lim_{x\to \infty} C(x) = 0,013.$$

4.2 Aplicações de Derivada

Exemplo 4.2.1. (Larson 2010) Pág 128 - Questão 62.
O custo variável da fabricação de um componente elétrico é de R$7,75 por unidade e o custo fixo é R$500,00. Determine o custo C em função de x, o número de unidades produzidas. Mostre que a derivada desta função de custo é uma constante e é igual ao custo variável.
Solução: Vamos montar a função que determina o custo C em função do x número de unidades produzidas. Dada a função afim, $y = ax + b$, teremos $b = 500,00$ que é a constante fixa de custo e $a = 7,75$ acompanha o número de unidades vendidas x. Logo, o custo $C(x)$ é dado por

$$C(x) = 7,75x + 500.$$

Precisamos mostrar que a derivada da função é constante, temos

$$\frac{dC}{dx} = \frac{d}{dx}[7,75x + 500]$$

pela **Propriedade 3.2.2**

$$\frac{dC}{dx} = \frac{d}{dx}(7,75x) + \frac{d}{dx}(500)$$

agora, faremos uso das **Propriedades 3.2.1 e 3.2.5**

$$\frac{dC}{dx} = C'(x) = 7,75.$$

Portanto, a derivada da função custo é constante e igual ao custo variável.

Exemplo 4.2.2. (Larson 2010) Pág. 151 - Questão 59.
Considere a população de uma cultura de bactérias. O número de bactérias P pode ser modelado por

$$P = 500\left(1 + \frac{4t}{50 + t^2}\right)$$

em que t é o tempo (em horas). Determine a taxa de variação da população quando $t = 2$.
Solução: Para cálcular a taxa de variação, quando $t = 2$, vamos calcular a derivada de P em função de t e calcular a função derivada em $t = 2$.

$$P'(x) = \left(500 + \frac{2000t}{50 + t^2}\right)'.$$

Usando as **Propriedades 3.2.1, 3.2.3 e 3.2.5**

$$P'(x) = 0 + \frac{2000(50 + t^2) - 2000t.2t}{(50 + t^2)^2} = \frac{100000 - 2000t^2}{(50 + t^2)^2}.$$

Basta calcular P'(2) agora

$$P'(2) = \frac{100000 - 2000.2^2}{(50 + 2^2)^2} = \frac{23000}{729}.$$

Portanto, a taxa de variação quando $t = 2$ é igual a $\frac{23000}{729}$.

Exemplo 4.2.3. (Hoffmann 2018) Problemas 3.1 - Questão 64 (Adaptado pela autora).
As autoridades de uma cidade observam que, se x milhões de reais são investidos no controle da poluição, a porcentagem de poluição removida é dada por

$$P(x) = \frac{50\sqrt{x}}{x^2+3}.$$

Que investimento resulta na maior porcentagem de remoção de poluição?
Solução: Para achar o investimento x que resulta na maior porcentagem P de remoção de poluição, vamos usar os conceitos de Máximos e Mínimos de uma função.
Analisando inicialmente o domínio dessa função, temos

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}.$$

Vejamos que pelo **2° Método para Encontrar Máximos e Mínimos** devemos achar os pontos críticos de $P(x)$. Então pela **Propriedade 3.2.5** teremos

$$P'(x) = \frac{-75x^2+75}{\sqrt{x}(x^2+3)^2}.$$

A raíz de $P'(x)$ é $x = 1$. Temos que $P'(1) = 0$. Vamos analisar valores entre $(0,1)$ e $(1,\infty)$, temos que $f(1/2) = 7,53$ e $f'(2) = -3,2$.
Logo, temos um valor máximo em $x = 1$. Vamos verificar o limite da função tendendo a ∞

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = 0.$$

Portanto, $P(x)$ assume valor máximo global em $x = 1$, logo o investimento $x = 1$ resulta na maior porcentagem de remoção de poluição.

Exemplo 4.2.4. (ENADE 2008) Matemática - Questão 16.
A concentração de certo fármaco no sangue, t horas após sua administração, é dada pela fórmula:

$$y(t) = \frac{10t}{(t+1)^2}, t \geq 0.$$

Em qual intervalo essa função é crescente?

1. $t \geq 0$
2. $t > 10$
3. $t > 1$
4. $0 \leq t < 1$
5. $\frac{1}{2} < t < 10$

Solução: Para encontrar os intervalos de crescimento veremos como se comporta o coeficiente angular da reta tangente nos pontos da curva $y(t)$ para $t \geq 0$. Isto é, vamos analisar o comportamento da função derivada.
Derivando $y(t)$, teremos

$$y(t) = \left[\frac{10t}{(t+1)^2}\right]'$$

Pela **Propriedade 3.2.5**

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{(10t)'(t+1)^2 - 10t((t+1)^2)'}{((t+1)^2)^2} \\ &= \frac{10(t+1)^2 - 20t(t+1)}{(t+1)^4} \\ &= \frac{-10t+10}{(t+1)^3} \end{aligned}$$

O Domínio da função é $t \in \mathbb{R} - \{1\}$, a função é contínua para $t \geq 0$. A função tem ponto crítico em $t = 1$, onde $y(t) = 0$, calculando $y'(0) = 10$ e $y'(2) = -\frac{10}{27}$, vemos que $y'(t)$ será positiva para $0 \geq t < 1$ e negativa para $t > 1$.
Feita a análise do sinal da derivada da função, podemos estabelecer que a função cresce no intervalo em que $y'(t)$ é positiva.
Portanto, a função é crescente em "1", $0 \leq t < 1$.

Exemplo 4.2.5. (ENADE 2019) Engenharia de Produção - Questão 10.
A gerência de produção de uma empresa fabricante de calculadoras definiu como objetivo garantir o custo mínimo de estocagem. O perfil de produção da empresa indica, por meio de dados históricos, que o custo de estoque C(x), em milhares de reais, é dado pela expressão

$$C(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{11}{2}x^2 + 24x + 31$$

para $x > 0$ em que x epresenta, em milhares, o número de calculadoras produzidas diariamente.
HOFFMANN, L. D.; BRADLEY, G. L. Cálculo: um curso moderno e suas aplicações. 11. ed., Rio de Janeiro: LTC, 2015 (adaptado).
Neste contexto, o número de calculadoras produzidas por dia que minimiza o custo de estocagem é

1. 3.000.
2. 5.500.
3. 8.000.
4. 41.000.
5. 62.500.

Solução: Para resolver este tipo de questão, utiliza-se a derivada e o conceito de máximos e mínimos de uma função.
Os passos para encontrar os máximos e mínimos locais e globais de uma função são: derivar a função, igualar a derivada da função a zero, achar os possíveis pontos críticos (raízes da função derivada) e analisar o sinal da função. Agora vamos resolver a questão:

$$
\begin{aligned}
C'(x) &= x^2 - 11x + 24 \\
0 &= x^2 - 11x + 24 \\
0 &= (x-3)(x-8) \\
x_1 &= 3 \; e \; x_2 = 8.
\end{aligned}
$$

Calculando $C'(0) = 24$, $C'(4) = -4$ e $C'(10) = 14$, valores nos intervalos ao redor das raízes, é possível analisar os intervalos de crescimento e decrescimento de C, daí é possível observar que C é crescente para todo $x \in (-\infty, 3) \cup (8, \infty)$ e decrescente para todo $x \in (3, 8)$. Concluímos que o valor que minimiza a função é $x = 8$.
Portanto, o número x de calculadoras produzidas diariamente que minimiza o custo, em milhares, é ”3” 8000 calculadoras.

4.3 Aplicações da Integral

Exemplo 4.3.1. (Thomas 2009) Pág 397 - Questão 70.
Receita a partir da receita marginal Suponha que a receita marginal de uma empresa pela fabricação e venda de batedeiras seja

$$\frac{dr}{dx} = 2 - \frac{2}{(x+1)^2}.$$

onde r é medido em milhares de dólares e x em milhares de unidades. Quanto dinheiro a companhia deve esperar de uma produção de $x = 3$ batedeiras? Para descobrir, integre o rendimento marginal de $x = 0$ a $x = 3$.
Solução: Como indicado na questão, vamos integrar a função para encontrar $r(3)$.

$$r(3) = \int_0^3 \left[2 - \frac{2}{(x+1)^2}\right] dx.$$

Vamos calcular primeiro a integral indefinida

$$\int \left[2 - \frac{2}{(x+1)^2}\right] dx$$

e aqui vamos utilizar a **Propriedade 3.3.1**, as primitivas da **Seção 3.3.2** e o **Método de Integração por Substituição**.
Faremos $t = x + 1$, e teremos $dt = dx$

$$\begin{aligned}\int \left[2 - \frac{2}{(x+1)^2}\right] dx &= \int 2dx - \int \left[\frac{2}{(x+1)^2}\right] dx \\ &= 2x - \int \left(\frac{2}{t^2}\right) dt \\ &= 2x - \frac{2}{t} + k.\end{aligned}$$

Voltando para a variável x, teremos

$$\int 2 - \frac{2}{(x+1)^2} dx = 2x - \frac{2}{x+1} + k.$$

Usando o **1° Teorema Fundamental do Cálculo**

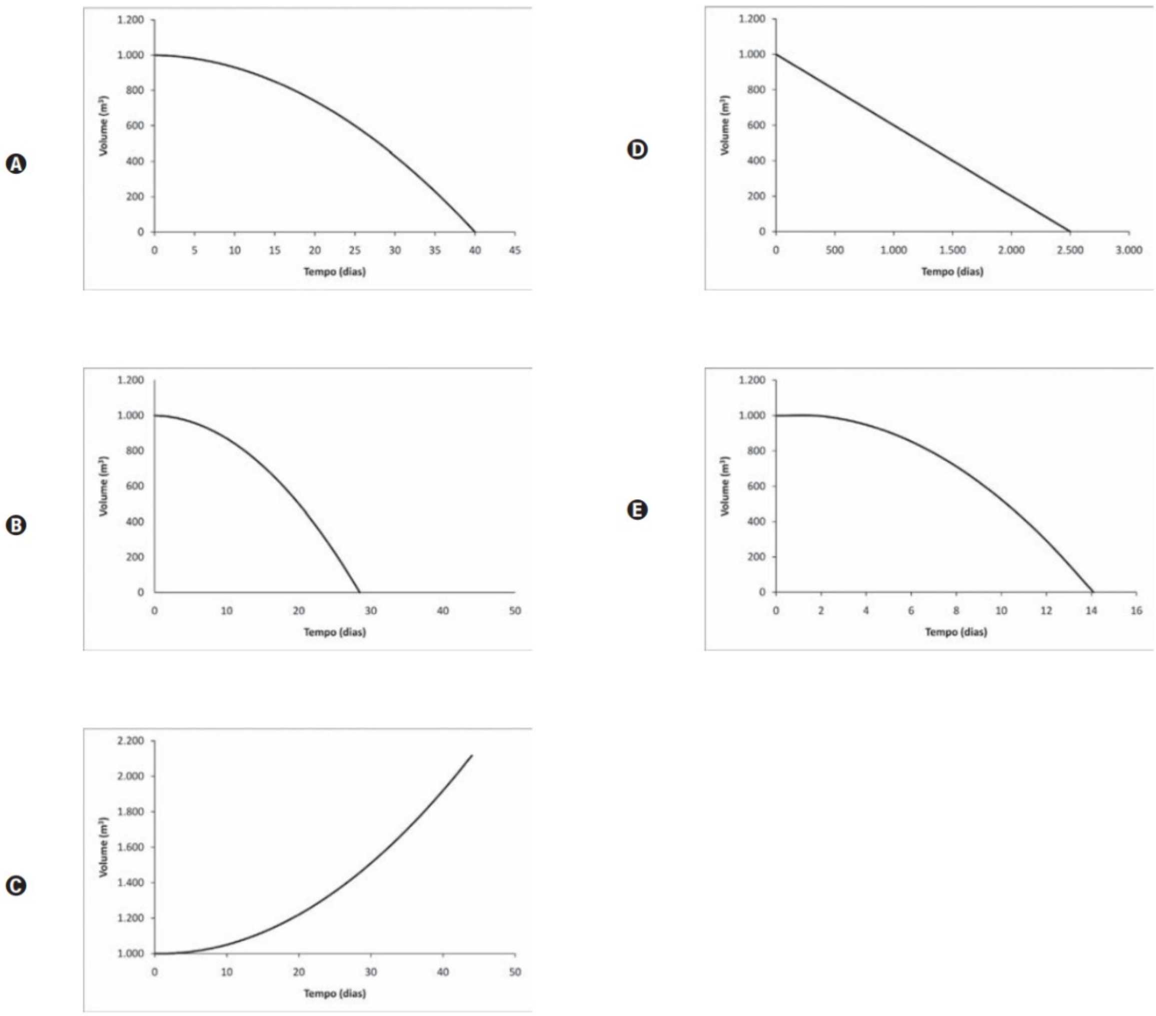
$$\begin{aligned}\int_0^3 2 - \frac{2}{(x+1)^2} dx &= \left(2x - \frac{2}{x+1}\right) \\ &= \left(2.3 - \frac{2}{3+1}\right) - \left(2.0 - \frac{2}{0+1}\right) \\ &= 4 + \frac{2}{4} \\ &= \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

Exemplo 4.3.2. (ENADE 2011) Engenharia Grupo VII - Questão 23.
O balanço de massa de qualquer elemento é a contabilização das massas de entrada e de saída em um volume de controle (VC), além das reações e acumulações de massa no interior do sistema. A equação abaixo expressa o balanço de massa do elemento água, em termos de volume, em um modelo físico de reservatório em escala reduzida. Na equação a seguir, a variação do volume de água ao longo do tempo no VC é igual ao somatório dos volumes de entrada subtraído dos de saída, ambos expressos em m^3/d.

$$\frac{dV}{dt} = 10 - (11 + 1,2t).$$

Considerando o volume inicial do reservatório de $1000m^3$ e a equação diferencial apresentada acima, é possível calcular a variação do volume de água ao longo do tempo. Qual dos gráficos a seguir representa adequadamente o comportamento dos volumes de água no VC ao longo do tempo?

Figura 12 – Gráficos das alternativas da Questão 23 (Engenharia Grupo VII - ENADE 2011)



Fonte: ENADE, 2011.

Solução: Se a taxa de varação, que conhecemos como derivada da função, do volume é dada pela equação acima. Para achar a equação do volume devemos achar a primitiva de $\frac{dV}{dt}$. Então

$$\begin{aligned} V(t) &= \int (10-(11+1,2t))dt \\ &= 10t - 11t - \frac{1,2t^2}{2} + k \\ &= -\frac{1,2t^2}{2} - t + k. \end{aligned}$$

Usaremos o fato de o volume ser $1000m^3$ em $t = 0$. Assim,

$$V(0) = k \Longrightarrow k = 1000.$$

Nossa função para os volumes no Volume de Controle (VC) será

$$V(t) = -\frac{1,2t^2}{2} - t + 1000.$$

O gráfico dessa função é uma parábola com concavidade para baixo, raízes $t = 40$ e $t = -\frac{125}{3}$ e tocando no eixo das ordenadas em $y = 1000$. O ítem (A) tem o gráfico que satisfáz as condições.

Exemplo 4.3.3. (ENADE 2011) Física - Questão 21.
A lei de resfriamento de Newton diz que a taxa de variação temporal da temperatura de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo T e a temperatura constante T_m do meio ambiente, isto é,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m),$$

em que é uma constante de proporcionalidade. Com o auxílio dessas informações, analise a seguinte situação-problema: Um bolo é retirado do forno à temperatura de $160°C$. Transcorridos três minutos, a temperatura do bolo passa para $90°C$. Com uma temperatura ambiente de $20°C$ determina-se o tempo necessário para que o bolo esteja a uma temperatura adequada para ser saboreado, ou seja, para atingir $25°C$, após ser retirado do forno. Considerando $ln(1/2) = -0,69$ e $ln(28) = 3,33$, o tempo transcorrido desde a retirada do forno até atingir a temperatura ideal é de, aproximadamente,

1. 5,37 minutos
2. 5,27 minutos
3. 7,17 minutos
4. 10,57 minutos
5. 14,47 minutos

Solução: De acordo com as informações fornecidas na questão a temperatura em $t = 0$ é igual a $160°C$ e em $t = 3$ temos a temperatura igual a $90°C$. A temperatura ambiente poderá ser chamada de T_m adota-se $20°C$.
Primeiro vamos escrever a equação da seguinte forma

$$\frac{dT}{(T - T_m)} = -kdt$$

Integrando ambos os membros da igualdade, teremos

$$\ln(T - T_m) = kt + K.$$

Agora basta usar as informações fornecidas no enunciado.
Para $t = 0$, temos $k = \ln(140)$. Agora acharemos K, para isso usaremos $t = 3$, teremos

$$\ln(160 - 90) = -3k + \ln(140)$$

$$k = \frac{\ln(1/2)}{3}.$$

Tendo todas as constantes, podemos encontrar t após $5°$, que será

$$3\ln(25 - 20) = \ln(1/2)t + \ln(140) \Longrightarrow t = 14,47.$$

O ítem correto é "5".

Exemplo 4.3.4. (ENADE 2014) Licenciatura em Matemática - Questão 10.
No contexto de investimento e formação de capital, se $M(t)$ representa o montante do capital de uma empresa existente em cada instante t e $I(t)$ representa a taxa de investimento líquido por um período de tempo, então

$$M = \int_a^b I(t)dt$$

fornece o montante acumulado no período $a \leq t \leq b$. Considere que a função $I(t) = t.\ln(t)$ definida para $t \geq 1$, representa a taxa de investimento líquido, em milhares de reais, de uma empresa de cosméticos. Neste caso, utilizando $\ln(3) \cong 1,1$, o valor do montante acumulado no período $1 \leq t \leq 3$ é igual a

1. $R\$1.100,00$.

2. $R\$2.100,00$.

3. $R\$2.950,00$.

4. $R\$3.750,00$.

5. $R\$4.950,00$.

Solução: Calcular o valor do montante acumulado no período $1 \leq t \leq 3$, é resolver a seguinte integral

$$\int_1^3 t\ln(t)dt.$$

Para resolver a integral definida que contém no seu integrando um produto de funções, devemos utilizar o **Método de Integração por Partes**.
Assim, definindo $u = ln(t)$ e $dv = tdt$ teremos $du = \frac{1}{t}dt$ e $v = \frac{t^2}{2}$ e utilizando a fórmula e o **1º Teorema Fundamental do Cálculo**, podemos resolver a integral

$$\begin{aligned}
\int_1^3 t\ln(t)dt &= \int_1^3 \ln(t)tdt \\
&= \ln(t)\frac{t^2}{2}\Big|_1^3 - \int_1^3 \frac{t^2}{2}.\frac{1}{t}dt \\
&= \ln(t)\frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{4}\Big|_1^3 \\
&= \ln(3)\frac{9}{2} - \frac{9}{4} - \ln 1\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\
&= 1,1.\frac{9}{2} - 2 \\
&= \frac{59}{20} \\
&\cong 2,95.
\end{aligned}$$

Portanto, o ítem "3"é a opção correta, o valor em milhares será $R\$2.950,00$.

5 CONSIDERAÕES FINAIS

No decorrer deste trabalho, pude perceber o quanto o cálculo Diferencial e Integral é necessário para o mundo e para a evolução humana. O objetivo é mostrar uma minúscula parte das aplicabilidades do Cálculo Diferencial e Integral como forma de responder a algumas perguntas como por exemplo “por que preciso estudar isso?” e exibir questões contextualizadas, de maneira a auxiliar no ensino do conteúdo das disciplinas de Cálculo. Além de apresentar o Cálculo como solução para diferentes problemas de outras ciências, conectando a matemática a diversas áreas como a engenharia, a economia, a química e etc.

Com a resolução das questões contextualizadas de cálculo, buscamos tornar os conceitos da Derivadas e Integral um pouco mais palpáveis, mostrando que é possível conectar o ensino do Cálculo Diferencial e Integral com outras áreas. De modo que seja possível identificar sua interdisciplinaridade e salientar a sua importância na resolução destes problemas que necessitam de seus conceitos e definições e que contribuem para o processo de ensino e aprendizagem. Ainda mais, é desejado mostrar que a interdisciplinaridade do Cálculo é um mecanismo interdisciplinar muito útil na motivação do interesse pelo Cálculo.

Assim, é desejamos que seja possível despertar no aluno o interesse pelo cálculo através de seu estudo em áreas diversas, além de incentivar discentes e futuros docentes de cursos ligados às ciências exatas a explorar a interdisciplinaridade da matemática, pois a medida que procuramos as aplicações do cálculo, os problemas se tornam cada vez mais interessantes e é fácil verificar como obtendo o domínio dos conceitos abstratos de cálculo, uma questão contextualizada de uma outra área pode ser compreendida, dominada e resolvida.

REFERÊNCIAS

1. BARDI, Jason Socrates, A Guerra do Cálculo [tradução Aluizio Pestana da Costa] – Rio de Janeiro: Record, 2008.

2. BARUFI, M. C. B. A construção/negociação de significados do curso universitário inicialde Cálculo Diferencial e Integral. Tese de Doutorado FE-USP, 1999. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48133/tde-06022004-105356/pt-br.php> Acesso em: 18 de novembro de 2022.

3. BRASIL, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), Ministério da Educação. Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE 2008): Matemática. SINAES, Brasília: 2008.

4. BRASIL, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), Ministério da Educação. Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE 2011): Engenharia Grupo VII. SINAES, Brasília: 2011.

5. BRASIL, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), Ministério da Educação. Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE 2011): Física. SINAES, Brasília: 2011.

6. BRASIL, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), Ministério da Educação. Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE 2014): Bacharelado em Matemática. SINAES, Brasília: 2014.

7. BRASIL, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), Ministério da Educação. Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE 2014): Licenciatura em Matemática. SINAES, Brasília: 2014.

8. BRASIL, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), Ministério da Educação. Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE 2019): Engenharia de Produção. SINAES, Brasília: 2019.

9. BOYER, Carl B. História da matemática. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

10. EVES, Howard W. Introdução à história da matemática. 2011.

11. FAZENDA, I. C. A. Interdisciplinaridade: história, teoria e pesquisa. São Paulo: Cortez, 1994.

12. GUIDORIZZI, H. Um curso de cálculo. LTC. Vol. I. 2001.

13. HOFFMANN, Laurence D., 1943- Cálculo: um curso moderno e suas aplicações / Laurence D. Hoffmann et al.; tradução Ronaldo Sérgio de Biasi. - 11. ed. - Rio de Janeiro: LTC, 2018.

14. LARSON, Ron Cálculo aplicado / Ron Larson ; tradução All Tasks ; revisão técnica Helena Maria Ávila de Castro. – 1. ed. – São Paulo : Cengage Learning, 2010.

15. ROBIN, Wilson. 'Reform Calculus' Has Been a Disaster, Critics Charge."The Chronicle of Higher Education. (February 7, 1997): A12. Disponível em:

    <https://www.chronicle.com/article/reform-calculus-has-been-a-disaster-critics-charge/>

    Acesso em: 18 de novembro de 2022.

16. SANTOMÉ, J. T. Globalização e interdisciplinaridade: o currículo integrado. Porto Alegre: Artes Médicas Sul LTDA, 1998.

17. SCHOENFELD, Alan H. A brief biography of calculus reform. UME Trends: News and Reports on Undergraduate Mathematics Education, p. 4-5, 1995. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/234705281> Acesso em: 18 de novembro de 2022.

18. STEWART, J. (2013). Cálculo (Vol. 1. 7a ed.) São Paulo: Cengage Learning.

19. TTHOMAS, George Brinton; WEIR, Maurice D. Cálculo - Volume 1; tradução: Thelma Guimarães e Leila Maria Vasconcellos Figueiredo; revião técnica Claudio Hirofume Anaso. - São Paulo: Addson Wesley, 2009.