



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ**  
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS**  
**FACULDADE DE FÍSICA**

**LEONARDO REIS DE OLIVEIRA**

**MOVIMENTO DE CORPOS EM MEIO RESISTIVO:** Uma proposta para um análogo de partícula com massa negativa.

**BELÉM – PA**

**2019**



LEONARDO REIS DE OLIVEIRA

**MOVIMENTO DE CORPOS EM MEIO RESISTIVO:** Uma proposta para um análogo de partícula com massa negativa.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Faculdade de Física da Universidade Federal do Pará, como requisito para a obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Newton Martins Barbosa Neto

BELÉM – PA  
2019





SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
FACULDADE DE FÍSICA

ATA DA APRESENTAÇÃO E DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE  
CURSO – TCC

Ata da sessão de apresentação e defesa de Trabalho de Conclusão de Curso para concessão de grau de Bacharelado em Física, realizado às 14:00 horas do dia 18 de dezembro de 2019, no auditório de física pesquisa, cuja orientação teve início em maio de 2017 sendo intitulada: “**Movimento de corpos em meio resistivo: Uma proposta para um análogo de partícula com massa negativa.**”, com um total de 43 páginas, que foi apresentado durante 25 minutos pelo discente **Leonardo Reis de Oliveira**, matrícula 201608140017, diante da banca examinadora tendo sido aprovada pela Faculdade de Física do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará, assim constituída: **Prof. Dr. Newton Martins Barbosa Neto** (Orientador - UFPA), **Prof. Dr. Alexandre Guimarães Rodrigues** (UFPA), **Prof. Me. Victor Façanha Serra** (UFPA), **Prof. Dr. Van Sérgio da Silva Alves** (UFPA). Em seguida o mesmo foi submetido à arguição, tendo demonstrado conhecimentos no tema objeto da proposta de TCC, favorecendo à banca examinadora apresentar contribuições para melhoras no desenvolvimento e decidir pelo conceito EXC do mesmo, bem como conceder o prazo máximo de 15 dias para serem efetuadas as modificações sugeridas pela banca, se for o caso, e em seguida a mesma será assinada por todos os membros. Para constar foram lavrados os termos da presente ata que lida e aprovada recebe a assinatura dos integrantes da banca examinadora e do DISCENTE.

ORIENTADOR: Newton Barbosa

EXAMINADOR 1: Alexandre Rodrigues

EXAMINADOR 2: Victor Façanha Serra

EXAMINADOR 3: Van Sérgio

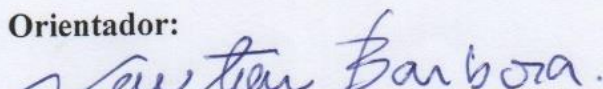
DISCENTE: Leonardo Reis de Oliveira

# LEONARDO REIS DE OLIVEIRA

“MOVIMENTO DE CORPOS EM MEIO RESISTIVO: Uma proposta para um análogo de partícula com massa negativa.”


Monografia apresentada como pré-requisito para obtenção do título de Bacharel em Física pela Faculdade de Física do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal Pará, submetida à apreciação da banca examinadora composta pelos seguintes membros:

**Orientador:**



Prof. Dr. *Newton Martins Barbosa Neto*  
(FACFIS – ICEN – UFPA)

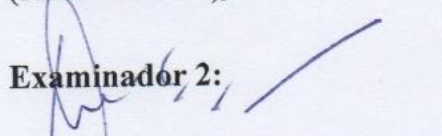
**Examinador 1:**

---

Prof. Dr. *Alexandre Guimarães Rodrigues*  
(ITEC – UFPA)

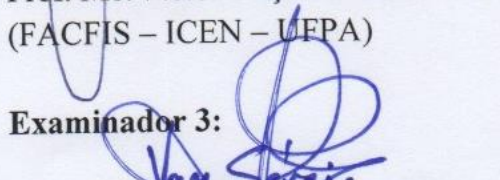
**Examinador 2:**

---

Prof. Me. *Victor Façanha Serra*  
(FACFIS – ICEN – UFPA)

**Examinador 3:**

---

Prof. Dr. *Van Sérgio da Silva Alves*  
(FACFIS – ICEN – UFPA)

Belém, 18 de dezembro de 2019.

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente ao meu orientador Prof. Dr. Newton Martins Barbosa Neto, por ter me aceito como seu orientando por todos esses anos. Que mesmo com todas as dificuldades, faltas e crises, não desistiu de mim como estudante e futuro pesquisador. Obrigado professor por ter ajudado a construir alguns dos meus objetivos e pensamentos, tanto acadêmicos quanto pessoais. Gostaria de agradecer também a todos os professores que participaram da minha formação, em especial àqueles que forneceram, de alguma forma, um amadurecimento intelectual não só na área da física.

Agradeço aos meus pais, Leidia Fernandes dos Reis e Raimundo Neto de Oliveira por me apoiarem na escolha não convencional do curso e confiarem em minhas decisões. Agradeço também a minha avó, Francisca Francinete Bezerra de Oliveira, por cuidar de mim durante a graduação e antes disso. E as minhas primas Vanessa de Oliveira Santos e Viviane Bezerra Dourado por me ajudarem através das suas experiências.

Por fim, agradeço as pessoas que conheci durante essa graduação, Eliezer Duarte, Matheus Bastos, Armando Solheiro e Evelyn Freire. Agradeço aos meus colegas de turma com quem dividi os trabalhos do curso, Bruno César, Brendo Luís e Agradeço aos que também me ajudaram na escrita de parte desse trabalho, Gabriel Ribeiro e Huan Souza. Por fim, agradeço principalmente aos meus companheiros de laboratório que compartilharam e compartilham essa experiência comigo: Ruan Lima, Diogo Lourenço, Willian Carvalho, Pallas Athenas, Pedro Henrique, Jhon Rewllyson, Jefferson Lopes, Luís Eduardo e João Marcelo. Ao João, eu agradeço pela ajuda no desenvolvimento desse e de trabalhos paralelos; ao Jefferson pelos puxões de orelha bem aplicados; a Pallas e ao Jhon eu agradeço por terem me recebido no laboratório e por me ensinarem, seja física, química, LoL ou Taiko; ao Pedro pelos xingamentos motivacionais, que mesmo sem querer são efetivos; ao Ruan, Willian e o Diogo eu agradeço por terem sido os *mosqueteiros* que me acompanharam durante a entrada no laboratório, e pela ajuda que sem ela eu não estaria aqui; a todos eu agradeço pelas conversas, piadas, jogos, músicas, trabalhos e listas feitas.

*“Nenhuma grande descoberta foi feita jamais sem um palpite ousado”.*

- Isaac Newton.

## RESUMO

Este trabalho analisa o movimento de uma bolha em um meio fluido viscoso, através tanto da abordagem convencional de mecânica dos fluidos quanto da abordagem de um sistema análogo de massa negativa. Utilizando um aparato experimental padrão de ensino e uma metodologia simplificada são feitas medidas que corroboram com as interpretações teóricas. Tomando a análise teórica que trata a bolha como um análogo de partícula com massa negativa encontram-se as equações horárias que descrevem o movimento do corpo através das leis de Newton, e seguindo de uma sequência lógica de considerações é construído um modelo no qual os efeitos gerados pelo meio sobre a partícula são interpretados como parte equivalente da sua massa. Para que aja equivalência com a abordagem fluidodinâmica, essa massa precisa ser considerada negativa. Através da velocidade terminal obtida nos dados é evidenciada a característica da força viscosa de ser uma função de ordem  $n$  da velocidade. Como conclusão faz-se possível a interpretação da massa negativa para explicar o movimento de subida de uma bolha em um fluido viscoso, pontuando que a estranheza desse conceito pode ser atenuada através das definições de massa (inercial) e inércia; e encontra-se que a força viscosa depende da velocidade possivelmente não com a primeira ordem. É importante frisar que a massa negativa aqui considerada é um análogo.

**Palavras-chave:** Análogo. Massa. Massa negativa. Inércia. Força resistiva.

## ABSTRACT

This work analyzes the motion of a bubble in a viscous fluid using both, the conventional fluid mechanics approach and the negative mass analog approach. Using a common experimental teaching apparatus and a simplified methodology, measurements are made which corroborate with the theoretical interpretations. Taking the theoretical analysis that treats the bubble as a negative mass particle analogue the equations that describe de body movement are encountered using Newton's laws, and following a sequence of logic considerations a model is constructed in which the effects generated by the environment on the particle are interpreted as equivalent parts of its mass. For equivalence with the fluid dynamics approach this mass must be considered negative. Using the terminal velocity obtained in the data, the characteristic of the viscous force of being a function of order  $n$  of the velocity is evidenced. In conclusion, it's possible to use the negative mass to explain the rising movement of a bubble in a viscous fluid, pointing out that the strangeness of this concept can be attenuated by knowing the definitions of mass (inertial) and inertia; and it's found that the viscous force possibly not depends with the first order of velocity. It's important to note that the negative mass considered here is an analog.

**Keywords:** Analog. Mass. Negative Mass. Inertia. Resistive Force.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b> – Força $\vec{F}$ atuando sobre uma superfície A .....	13
<b>Figura 2</b> – Representação de um elemento de volume do fluido e das pressões.....	15
<b>Figura 3</b> – Experimento para a confirmação da dependência da quantidade de movimento com a massa.....	18
<b>Figura 4</b> – Volume de líquido contido entre duas placas. A placa superior em movimento provoca movimento no fluido, entretanto a cada profundidade as camadas do fluido se movimentam com velocidades diferentes.....	20
<b>Figura 5</b> – Movimento relativo entre as camadas do fluido .....	21
<b>Figura 6</b> – Diagrama de forças padrão para uma bolha em um meio fluido resistivo.....	23
<b>Figura 7</b> – Diagrama de forças para a partícula de massa m e sem empuxo .....	25
<b>Figura 8</b> – Diagrama de forças para uma partícula de massa -m e sem empuxo .....	27
<b>Figura 9</b> – Plano inclinado <i>Kersting III</i> .....	29
<b>Figura 10</b> – Comparação entre os movimentos para $V_b$ e $V_B$ .....	32
<b>Figura 11</b> – Comparação entre os movimentos com diferentes ângulos de inclinação do plano de movimento .....	34

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1</b> – Resultados experimentais obtidos para as bolhas com volumes $V_b$ e $V_B$ .....	32
<b>Tabela 2</b> – Resultados experimentais obtidos para as bolhas com diferentes ângulos de inclinação do plano .....	34

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>11</b>
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....</b>	<b>13</b>
<b>2.1 Sistemas análogos .....</b>	<b>13</b>
<b>2.2 Empuxo.....</b>	<b>15</b>
<b>2.3 Massa &amp; Inércia.....</b>	<b>17</b>
<b>2.4 Características do movimento .....</b>	<b>20</b>
2.4.1 Viscosidade.....	20
2.4.2 Força Resistiva & Lei de Stokes.....	21
<b>3 MODELAGEM TEÓRICA .....</b>	<b>23</b>
<b>3.1 Análise padrão da 2ª lei de newton para o movimento de subida de uma bolha.....</b>	<b>23</b>
<b>3.2 Análise da 2ª lei de newton para uma partícula de massa <math>m</math> (sem empuxo).....</b>	<b>25</b>
<b>3.3 Análise da 2ª lei de newton para uma partícula de massa <math>-m</math> (sem empuxo).....</b>	<b>26</b>
<b>4 METODOLOGIA.....</b>	<b>29</b>
<b>4.1 Aparato &amp; Instrumentos.....</b>	<b>29</b>
<b>4.2 Análise .....</b>	<b>30</b>
<b>5 RESULTADOS &amp; DISCUSSÕES .....</b>	<b>31</b>
<b>5.1 Bolhas de volumes diferentes e mesma angulação.....</b>	<b>31</b>
<b>5.2 Bolhas de mesmo volume e angulações diferentes .....</b>	<b>33</b>
<b>5.3 Aproximação do expoente da força viscosa.....</b>	<b>35</b>
<b>6 CONCLUSÕES.....</b>	<b>38</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>39</b>
<b>APÊNDICE A – RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL COMUM AOS CASOS DA MODELAGEM.....</b>	<b>40</b>



## 1 INTRODUÇÃO

O Movimento dos corpos é uma questão fundamental na física desde sua gênese e entender como tal fenômeno acontece é um objetivo buscado desde que a humanidade percebeu a importância do movimento para sua vida. O entendimento da movimentação dos corpos começou a ser fundamentado em bases sólidas e formais a partir do renascimento com os trabalhos de Galileu e outros, e teve sua primeira formulação científica rigorosa, precisa e completa<sup>1</sup> com o estabelecimento das leis de Newton. As leis de Newton estabeleceram que para descrever o movimento de um corpo é necessário obter sua equação de movimento. A equação de movimento de um corpo é obtida a partir da segunda lei de Newton e, em linguagem moderna, consiste numa equação diferencial de segunda ordem cuja solução fornece a função horária do movimento do objeto. A forma desta equação diferencial resulta das interações que agem sobre o corpo, e as características do movimento são determinadas pela função horária, que é solução da equação de movimento, e pelas propriedades intrínsecas do corpo. Ou seja, para diferentes corpos em movimento existem diferentes soluções e cada solução apresenta as variáveis que descrevem e podem alterar essa movimentação, sendo uma dessas possíveis características a massa do corpo. Massa é naturalmente associada a quantidade de matéria existente num objeto, em alguns casos é igualada erroneamente a inércia entretanto, o que de fato é essa grandeza, e como ela se comporta em diferentes teorias ainda é razão para discussões na física.

No contexto clássico, a teoria da gravitação de Newton, por exemplo, implica em uma diferenciação entre dois “tipos” de massa, a massa inercial e a massa gravitacional.

*A interação gravitacional é outro tipo especial de força entre dois corpos, análoga a força eletrostática, mas com a peculiaridade de que a “carga gravitacional” corresponde à massa. Como se trata de um conceito logicamente de natureza independente, vamos chama-lo de “massa gravitacional”. (NUSSENZVEIG, 2013, p. 368).*

Em teorias mais complexas surgem ainda mais observações. Como na teoria da relatividade, em que a massa de um corpo depende de sua velocidade.

---

<sup>1</sup> A noção de completude aqui escrita se refere ao conjunto de dados existentes na época e os gerados até o século XIX

*Quando o momento é conservado numa colisão num sistema, não é conservado no outro. Este resultado contraria o postulado básico da relatividade especial [...] Portanto, nós precisamos de uma generalização da definição do momento [...] Precisamos que a massa de uma partícula seja uma função da sua velocidade  $u$  [...]. (RESNICK, 1971, p. 122).*

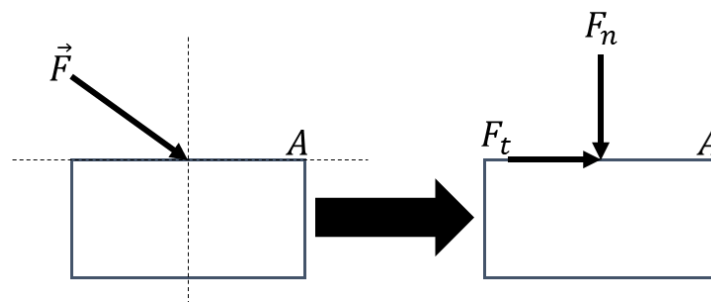
Existem ainda teorias que sustentam ideias mais ousadas como a da chamada matéria exótica, que inclui definições de massa complexa (VIEIRA, 2012) e até massa negativa (MORRIS; THORNE, 1988). Classicamente é feita uma comparação entre carga e massa, ambas sendo características intrínsecas da matéria e mediadoras de forças de interação (elétrica e gravitacional, respectivamente). Se uma carga é posta sobre a ação de um campo elétrico, a força elétrica que atua sobre ela (atrativa ou repulsiva) depende da natureza dessa carga (positiva ou negativa); Qualitativamente, a mesma interpretação pode ser aplicada a uma massa posta sobre a ação de um campo gravitacional. A força Peso atuará sobre ela no sentido de descida ou subida dependendo da natureza positiva ou negativa da massa.

Entretanto, problemas envolvendo corpos com esse tipo de propriedade (massa negativa) ainda estão, quase que completamente, fora do alcance direto da experimentação e a melhor forma de estudá-los é através de modelos e/ou sistemas análogos. Como diz Sayão (2001, p.83): “[...] um modelo é uma criação [...] destinada a representar uma realidade ou alguns de seus aspectos, a fim de torna-los descritíveis qualitativa e quantitativamente [...]”, daí a importância de conhecer e produzir esses sistemas. Este trabalho aborda o problema de criar um sistema análogo a uma partícula de massa negativa a partir de uma situação recorrente da mecânica: o movimento de corpos em um meio resistivo. O fato de corpos com massa realmente negativa estarem longe do alcance experimental geral torna-os excelentes candidatos a produção de um sistema análogo, e a tentativa de estudá-los, mesmo que por modelos simples e iniciais, se torna válida. É importante frisar que: (i) propõe-se aqui um análogo de partícula com massa negativa, sendo que sistemas com massa negativa, embora previstos teoricamente, nunca foram detectados na natureza e (ii) a ideia de usar o movimento de corpos em fluidos para gerar análogos de partículas com massa negativa não é nova e já foi reportada diversas vezes (GREINER, 1989, p. 158; OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE FÍSICA, 2016). A contribuição do presente trabalho foi ter concebido e executado um experimento que coloca em bases quantitativas tal hipótese.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

No cotidiano a matéria é encontrada predominantemente em três estados físicos: Sólido, líquido ou gasoso. Os meios em que um corpo pode estar inserido conseqüentemente variam entre essas três possibilidades. Líquidos e gases são denominados fluidos, havendo características específicas que diferenciam um meio fluido de um meio sólido. Quando uma força  $\vec{F}$  age sobre uma superfície  $A$  ela pode ser decomposta em duas componentes: uma normal a  $A$ , e uma tangente a  $A$ .

**Figura 1** – Força  $\vec{F}$  atuando sobre uma superfície  $A$



**Fonte:** Autor.

A ação de uma força por unidade de área é chamada tensão. A componente normal é denominada pressão, quando a tensão é de compressão, e a componente tangencial é chamada de cisalhamento (NUSSENZVEIG, 2014, p.11). Segundo Nussenzveig (2014, p. 12): “A diferença fundamental entre sólidos e fluidos está na forma de responder às tensões tangenciais.”. A baixas tensões um sólido gera forças de interações internas que tendem a equilibrar a componente de cisalhamento cancelando seus efeitos; já para os fluidos mesmo uma força tangencial pouco intensa não tem seus efeitos anulados e o meio, pertencente ao plano onde a tensão de cisalhamento atua, tende a fluir no sentido da força. É nesse contexto que este trabalho busca construir um modelo de sistema análogo. As sessões a seguir apresentam algumas características importantes de se discutir tanto dos sistemas análogos, quanto dos meios fluidos.

### 2.1 Sistemas análogos

Como o próprio nome indica, um análogo é um sistema que se assemelha a algo sendo esse um conceito explorado tanto teórica quanto experimentalmente. A utilização de um modelo análogo recai na necessidade e/ou vantagem de se estudar um sistema mais simples, pois ao produzir um sistema análogo reduz-se o sistema real, que possui propriedades,

características e comportamentos específicos, a um sistema equivalente em seu comportamento, seja parcialmente ou totalmente.

No contexto teórico os modelos análogos podem ser encontrados em procedimentos que criam sistemas equivalentes aos problemas reais (KRIMHOLTZ; LEEDOM; MATTHAEI, 1970). Na mecânica, por exemplo, um corpo rígido nada mais é do que um conjunto infinito de pontos em que, em geral, os efeitos de forças a distância e algumas grandezas físicas podem ser escritas em termo do centro de massa. Assim, o objeto, seja qual for sua forma, é reduzido a um único ponto. Na eletrônica também, quando um circuito complexo cheio de componentes associados é reduzido a um resistor, capacitor e indutor equivalentes que diminuem a complexidade do problema. Em ambos os casos o sistema análogo ou sistema equivalente foi construído produzindo um sistema reduzido que tivesse as mesmas propriedades do sistema real. No corpo extenso a velocidade de translação de cada ponto é igual a velocidade de translação do centro de massa, por exemplo; num circuito a corrente que passaria por um conjunto de  $N$  resistores de resistência  $R$  é a mesma que passa por um único resistor equivalente de resistência  $R_{eq}$ .

No âmbito da experimentação um sistema análogo é um projeto normalmente representado por um sistema que apresenta características e/ou comportamentos similares ao que se quer estudar. No geral são produzidos para entender tópicos da física que estão fora do alcance direto dos experimentos (MAIA, 2008). Alguns dos modelos análogos mais comuns da física são produzidos pela área da cosmologia e gravitação, sendo este processo de grande auxílio para entendimento do comportamento dos objetos cosmológicos. Um exemplo clássico e precursor de muitos outros é o que é proposto por W. G. Unruh, no seu trabalho “*Experimental Black-Hole Evaporation?*” publicado em 1981, em que se faz a analogia entre buracos negros e buracos acústicos e percebe-se que certos comportamentos de um objeto diretamente fora do alcance experimental (buraco negro) são reproduzidos pelo seu análogo (buraco acústico) (UNRUH, 1981). Em problemas como esses é necessário que algo reproduza o espaço em que o objeto real está inserido, para essa função meios fluidos são considerados bons análogos (WEINFURTNER; et al., 2016).

Em outros sistemas os fluidos também recebem certa notoriedade, incluindo aqueles que motivaram a produção deste trabalho. Em 2017, por exemplo, P.Engels, et al., foram capazes de produzir um superfluido condensado de Bose-Einstein (BECs) com um comportamento que remete a uma massa negativa.

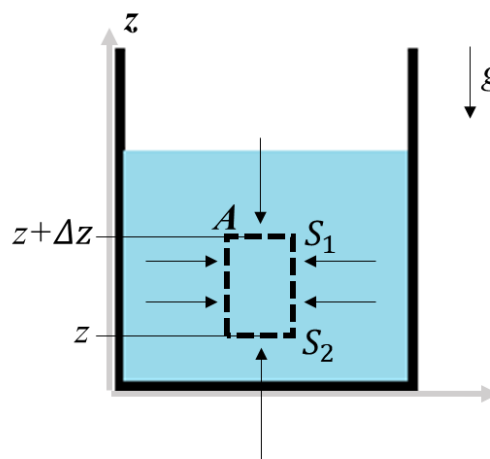
*“A massa de um objeto é geralmente positiva, e a aceleração, portanto, na mesma direção da força. Em alguns sistemas, porém, podem encontrar-se objetos que aceleram contra a força aplicada, realizando um efeito de massa negativa”<sup>2</sup> (ENGELS; et al., 2017).*

A possibilidade de existência desse material torna plausível iniciar uma busca por um sistema análogo a ele que seja experimentalmente mais fácil de se trabalhar do que o sistema real e possa nos ajudar a entender o comportamento desses corpos auxiliando em práticas de ensino que visem discutir o conceito de massa inercial. Nota-se que no trabalho de Engels o fluido exerce o papel principal de objeto estudado, enquanto neste projeto faz o papel de meio em que naturalmente acontece o movimento do análogo.

## 2.2 Empuxo

Seja um fluido homogêneo em equilíbrio estático num recipiente, e supondo a existência de um elemento de volume  $\Delta V$  do próprio fluido com área  $A$  e profundidade  $\Delta z$  (Figura 2), as camadas adjacentes ao elemento pressionam-no, como indicam as setas, gerando equivalentemente uma força resultante.

**Figura 2** – Representação de um elemento de volume do fluido e das pressões



**Fonte:** Autor.

Nas laterais do elemento de volume há em cada profundidade pressões iguais e em sentidos opostos que se anulam e não produzem efeitos para a direita ou esquerda. Caso as

<sup>2</sup> Tradução Livre do Autor

pressões laterais não se anulassem o elemento teria uma assimetria nestas que implicaria em uma força resultante horizontal provocando um movimento nessa direção, e nesse caso o fluido não estaria estático.

Na direção do eixo  $z$ , porém, além das pressões nas superfícies superior  $S_1$  e inferior  $S_2$  há a ação a distância do campo gravitacional que gera o equivalente a força peso do elemento de volume. Portanto, para que o fluido se mantenha em equilíbrio as pressões em cada superfície devem ser diferentes de tal forma que a força resultante gerada pela diferença das pressões equilibre o peso do elemento.

A pressão é definida como a razão entre a componente normal da força  $\vec{F}$  e a área da superfície em que ela atua, de modo que para o problema,  $P$  é uma pressão na direção  $z$ .

$$P = \frac{F_n}{A} \quad (1)$$

A pressão sobre uma superfície atua sempre no sentido contrário ao vetor normal dessa superfície, uma vez que é uma tensão de compressão. Por convenção o vetor normal de uma superfície fechada aponta para o exterior dela logo, as forças causadas nas superfícies  $S_1$  e  $S_2$  por conta das pressões  $P_1$  e  $P_2$  estão, respectivamente, nos sentidos negativo e positivo de  $z$ .

Para equilibrar o peso da massa de fluido contida no elemento de volume a força resultante deve agir no sentido positivo de  $z$ , conseqüentemente a força gerada pela pressão  $P_2$  ( $F_{P_2}$ ) é maior que a gerada por  $P_1$  ( $F_{P_1}$ ). Como ambas as tensões atuam sobre a mesma área  $A$ , para que  $F_{P_2}$  seja maior que  $F_{P_1}$  a pressão  $P_2$  deve ser maior que  $P_1$ , ou seja, quanto maior a profundidade maior a pressão. Somadas a força peso, o equilíbrio de forças na direção  $z$  é;

$$-P_1A + P_2A - m_f g = 0 \Rightarrow P_2A - P_1A = \rho_f V_f g \quad (2)$$

sendo  $\rho_f$ ,  $V_f$  e  $g$  a densidade do fluido, o volume de fluido analisado e a aceleração da gravidade, respectivamente.

O termo da esquerda na equação (2), é a diferença entre as forças atuantes em cada superfície, que é equivalente a força resultante gerada pela diferença de pressões.

$$F_{P_R} = \rho_f V_f g \quad (3)$$

A essa força resultante, responsável por equilibrar o peso da porção de fluido envolvido pelo volume  $V$  dá-se o nome de Empuxo ( $E$ ). Se o elemento de volume imaginado for substituído por um objeto maciço, o corpo estará sujeito as mesmas pressões que o elemento de volume, uma vez que essas são um efeito do meio fluido. Portanto, está sujeito a mesma força resultante, e  $V_f$  será o volume do corpo que sofre a ação dessa força (o volume do corpo que está submerso,  $V_{sub}$ ), como indica a equação (4). Essa característica da força de empuxo deixa claro que essa força é, primordialmente, uma ação do meio (nesse caso o meio fluido) sobre um corpo que está inserido nele, sendo independente de quem quer seja esse corpo. Vale ressaltar que por ser uma força o empuxo tem um caráter vetorial que até o momento foi ignorado devido a natureza unidimensional do problema.

$$\vec{E} = \rho_f V_{sub} \vec{g} \quad (4)$$

### 2.3 Massa & Inércia

Na mecânica pode-se dizer que corpos são caracterizados por seu estado de movimento. Diferenciamos os tipos de movimento a partir da observação de diferentes estados, por exemplo: repouso, movimento uniforme, movimento acelerado, dentre outros. Quando um objeto inicialmente parado é posto para se deslocar o seu estado de movimento é alterado. A 1ª lei de Newton fala exatamente sobre como os corpos naturalmente tendem a resistir as tentativas de alteração do seu estado de movimento, e a essa característica é dado o nome de **inércia**. Para mudar esse estado é necessária uma ação externa que o tire da conformação em que se encontra, Nussenzveig (2014, p. 89) diz que “*Nossa ideia intuitiva de forças está relacionada com o esforço muscular, e sabemos que, exercendo ‘forças’ desse tipo, somos capazes de colocar objetos em movimento [...]’*”. A esse agente externo então, é dado o nome de força. Cabe agora encontrar características para descrever e quantificar o estado de movimento de um objeto.

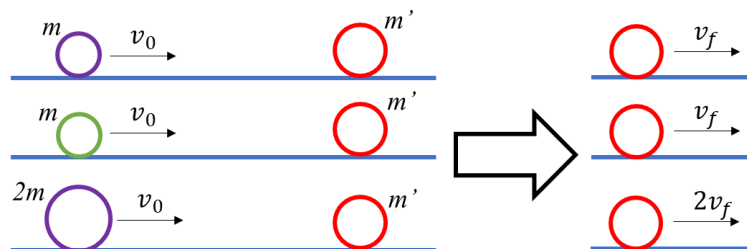
Quando uma força atua sobre um corpo é uma observação empírica que sua velocidade se altera, entretanto, não há como garantir que um corpo está sobre a ações de forças apenas por ele possuir velocidade. Como aponta Galileu (apud. NUSSENZVEIG, 2014, p. 91-93) em seu trabalho “Diálogos sobre os dois principais sistemas do mundo” em que ele leva a entender que um corpo se movendo com velocidade constante e sem qualquer ação de resistência não tem motivos para ser acelerado ou desacelerado e segue em movimento indefinidamente, ou seja, estará sujeito a não alterar seu estado de movimento e

consequentemente não estará sobre a ação de forças. Portanto, o efeito da ação de forças num corpo não é o de gerar velocidade, mas sim o de produzir uma variação dela.

Quantificar o estado de movimento de um corpo é o equivalente a procurar um valor para a sua quantidade de movimento. Naturalmente essa quantidade está associada a velocidade do objeto: quanto mais velocidade o corpo possui, mais movimento ele tem. Contudo essa não pode ser a única grandeza responsável por descrever essa característica, visto que, por exemplo, os efeitos da colisão de um carro com uma parede são maiores que os da colisão de uma bola de futebol com a mesma parede, mesmo que ambos estejam com a mesma velocidade. Afirma-se que o carro possui uma inércia maior que a bola portanto, a outra característica que descreve a quantidade de movimento deve ser uma espécie de **coeficiente de inércia**. No exemplo do carro e da bola de futebol fica evidente que a grandeza a que se refere é a massa, porém, um experimento simples pode provar essa afirmação.

Seja uma esfera de material A (roxa) com massa  $m$  e velocidade  $v_0$ , se movendo numa superfície sem atrito em direção a uma esfera B (vermelha) de massa  $m'$  inicialmente em repouso, no caso em que há uma transferência completa do estado de A para B, a segunda esfera se desloca com uma velocidade final  $v_f$  após a colisão. Colidindo agora uma esfera de material C (verde), massa  $m$  e velocidade  $v_0$ , com a esfera B nas mesmas condições anteriores, a esfera se movimentará com a mesma velocidade  $v_f$ . Ou seja, a quantidade de movimento de um objeto não depende do material que ele é feito. Colidindo novamente com a esfera B uma esfera de material A mas dessa vez com massa  $2m$  e velocidade  $v_0$ , B atingirá uma velocidade final  $2v_f$ . demonstrando que a propriedade com que a quantidade de movimento se altera é a massa. Ainda mais, a relação entre massa e quantidade de movimento é linear.

**Figura 3** – Experimento para a confirmação da dependência da quantidade de movimento com a massa



Fonte: Autor.

O mesmo experimento pode ser repetido mantendo a massa constante e alterando a velocidade  $v_0$  para mostrar que a quantidade de movimento também é linear com a velocidade, de modo que pode ser descrita por;

$$\vec{q} = m\vec{v} \quad (5)$$

Como a velocidade é uma grandeza vetorial a quantidade de movimento (ou como é mais formalmente denominada, **momento linear**) também é uma grandeza vetorial. Entretanto, não é a quantidade de movimento que indica a existência de forças, e sim a sua variação. Dizer que quando há variação da quantidade de movimento de um corpo há uma força atuando sobre ele, ou que a ação de uma força sobre um corpo provoca variação na quantidade de movimento são afirmações equivalentes. Com a ajuda do cálculo diferencial a força é escrita, em linguagem moderna, como a taxa de variação temporal da quantidade de movimento e é escrita matematicamente como:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt} \quad (6)$$

A equação (6) representa a 2ª Lei de Newton na sua forma geral. No caso em que massa do corpo é constante ela assume a forma mais conhecida e utilizada neste trabalho.

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \\ \vec{F} &= m\vec{a} \end{aligned} \quad (7)$$

A associação entre massa, coeficiente de inércia e quantidade de matéria leva a comum confusão de igualar massa a inércia. Entretanto, essas duas grandezas não são iguais. Como discutido anteriormente, a inércia é a característica que um corpo possui de resistir a mudança de estado de movimento; a massa por sua vez pode ser entendida como uma grandeza extensiva (depende da quantidade de matéria) que exprime os efeitos da inércia (isso quando refere-se a massa inercial, que recebe esse nome por ser associado ao coeficiente de inércia. A grandeza massa definida em outras teorias pode apresentar características que dificultem essa interpretação). Essa diferença entre massa e inércia faz parte do que será utilizado mais adiante no trabalho para produzir o **modelo análogo**.

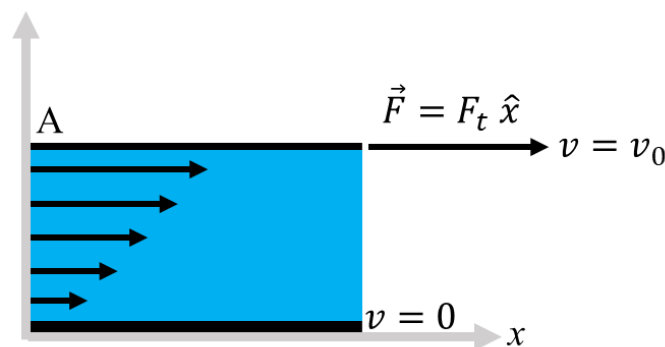
## 2.4 Características do Movimento

As características individuais do fluido no caso estático (empuxo) e as do objeto (massa) não são o suficiente para explicar o resultado do movimento da partícula no meio. A interação por conta da movimentação entre os dois componentes do problema evidencia efeitos e particularidades que só podem ser observadas no contexto dinâmico. É necessário então descrever algumas dessas propriedades com mais atenção.

### 2.4.1 Viscosidade

Seja um fluido contido entre duas placas de área  $A$  e esteja a placa superior sujeita a uma força  $\vec{F}$ , veja figura 4. Evidentemente a força pode ser decomposta em uma componente normal a superfície e uma componente tangencial. A componente normal é responsável pela tensão de compressão chamada de pressão e suas características já foram analisadas. Cabe agora conhecer os efeitos da componente tangencial, responsável por produzir uma tensão de cisalhamento. Considerando que a força pode ser descrita somente pela sua parte tangente a superfície ( $F_t$ ), ou seja, imaginando que não há uma componente normal, a placa superior será conduzida no sentido de  $F_t$  como mostra a figura 4;

**Figura 4** – Volume de líquido contido entre duas placas. A placa superior em movimento provoca movimento no fluido, entretanto a cada profundidade as camadas do fluido se movimentam com velocidades diferentes



**Fonte:** Autor.

É uma característica dos fluidos que quando em contato com uma superfície, se movimentam de acordo com ela. Ou seja, a camada do fluido imediatamente em contato com a placa superior e a própria placa se movimentam no mesmo sentido e com a mesma velocidade. Porém, a camada do fluido em contato com a placa inferior não deve se mover, uma vez que a segunda placa é mantida em repouso. Imaginando o meio como um conjunto de placas laminares o problema pode ser visto como se fossem várias camadas do fluido

deslizando umas sobre as outras (figura 5). Esse deslizamento provoca um efeito entre as camadas adjacentes que é contrário ao movimento, um efeito resistivo que é associado a viscosidade do meio. Em outras palavras, a viscosidade pode ser resumida como o atrito provocado entre as camadas do fluido quando há movimento.

**Figura 5** – Movimento relativo entre as camadas do fluido



**Fonte:** Autor.

Matematicamente, a tensão de cisalhamento  $\tau$  necessária para fazer a placa superior mover-se com uma velocidade constante  $v_0$  é proporcional a taxa de variação da velocidade com a profundidade, e a constante de proporcionalidade é a viscosidade  $\mu$  do meio. Essa é a chamada Lei de Newton para a Viscosidade enunciada como uma hipótese pelo próprio em seu livro *Principia* (apud. NUSSENZVEIG, 2014, p. 49).

$$\frac{F_t}{A} = \tau \propto \frac{dv}{dy} \Rightarrow \tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad (8)$$

Ou seja, no limite de escoamento laminar (velocidades de escoamento não muito altas), considerando dois fluidos diferentes sob as mesmas condições (entre duas placas de área  $A$  distantes  $d$  uma da outra e com ambas as placas superiores se movimentando com velocidade  $v_0$ ) se, as suas tensões de cisalhamento forem diferentes significa que os fluidos possuem viscosidade distintas. Assim, a viscosidade é a medida de quão resistivo o fluido pode ser ao movimento tanto próprio, quanto de um corpo no seu interior.

#### 2.4.2 Força Resistiva & Lei de Stokes

De maneira mais geral as forças de resistência que atuam sobre um objeto em movimento são proporcionais a alguma ordem da velocidade, ou seja:

$$\vec{f}_{res} \propto \vec{v}^n \quad (9)$$

Nos casos mais simples, é aproximada a uma função de primeira ordem da velocidade. No movimento laminar de um corpo em um meio fluido e viscoso essa aproximação é verdadeira. Dessa forma a força de resistência associada a viscosidade do meio é proporcional a velocidade.

$$\vec{f}_{res} \propto \vec{v} \Rightarrow \vec{f}_{res} = -b\vec{v} \quad (10)$$

A constante de proporcionalidade  $b$  guarda em si as características que podem aumentar a resistência como a geometria do corpo e a viscosidade do meio. O sinal negativo na igualdade decorre do fato de  $\vec{f}_{res}$  ser uma força sempre no sentido contrário de  $\vec{v}$  (se opõem ao movimento).

Neste trabalho o objeto de estudo tem a geometria muito próxima a de uma esfera, e para corpos desse tipo a constante  $b$  possui uma forma bem definida na literatura;

$$b = 6\pi\mu r \quad (11)$$

E a força resistiva que age sobre o corpo assume a forma da chamada *Lei de Stokes* (para a viscosidade).

$$\vec{f}_{res} = -6\pi\mu r \vec{v} \quad (12)$$

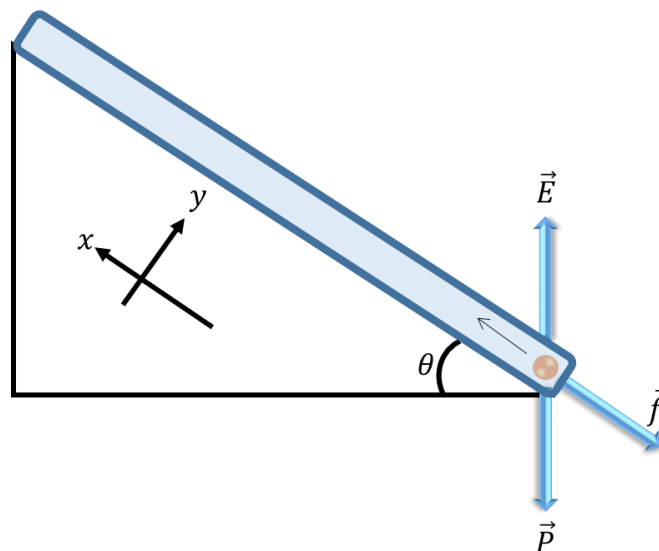
### 3 MODELAGEM TEÓRICA

A seguir são apresentados três casos em que um corpo se movimenta num meio viscoso. As três situações são colocadas em uma sequência lógica para a construção do conceito de análogo da partícula de massa negativa.

#### 3.1 Análise padrão da 2ª Lei de Newton para o movimento de subida de uma bolha

Primeiramente é analisado o movimento de uma bolha em um fluido viscoso. Na tentativa de se encontrar a equação horária que descreve o movimento do corpo utiliza-se a 2ª Lei de Newton na forma  $\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{\ddot{x}}$  analisando o diagrama de forças descrito na figura 6. Aqui é importante frisar que, tal como feito por Galileu Galilei (NUSSENZVEIG, 2013, p. 99-100), o tubo com o fluido foi colocado em um plano inclinado e ajustado com uma inclinação  $\theta$  visando diminuir o efeito das forças que atuam sobre ele. Tal procedimento diminui sua aceleração e permite que a aquisição de dados ganhe maior precisão. A atribuição padrão das forças que atuam sobre o corpo indica a existência de três forças atuando sobre o objeto: O empuxo  $\vec{E}$  do fluido sobre a bolha; a força peso  $\vec{P}$ , associada a massa da bolha; e a força resistiva viscosa  $\vec{f}$ , relacionada ao movimento no meio.

**Figura 6** – Diagrama de forças padrão para uma bolha em um meio fluido resistivo



Fonte: Autor.

No sistema de coordenadas escolhido o conjunto de forças deve ser descrito em termos de suas componentes como mostram as equações 13.a, 13.b e 13.c.

$$\vec{E} = \rho_f V_{sub} g \sin \theta \hat{x} + \rho_f V_{sub} g \cos \theta \hat{y} \quad (13.a)$$

$$\vec{P} = \rho_b V_b g \sin \theta (-\hat{x}) + \rho_b V_b g \cos \theta (-\hat{y}) \quad (13.b)$$

$$\vec{f} = -b\vec{\dot{x}} = -b(\dot{x} \hat{x}) \quad (13.c)$$

Os subíndices  $f$  e  $b$  são associados as grandezas relacionadas ao fluido e a bolha respectivamente, sendo  $V_{sub}$  o volume de fluido deslocado (volume do corpo submerso),  $V_b$  o volume da bolha,  $\rho_f$  a densidade do fluido,  $\rho_b$  a densidade do ar dentro da bolha e  $g$  a aceleração da gravidade. A força viscosa é aproximada como uma função de 1ª ordem da velocidade, em que o sinal negativo decorre do fato dela sempre se opor ao movimento, e a constante de proporcionalidade  $b$  é dada, segundo a Lei de Stokes, por  $b = 6\pi\mu r_b$ . Note que,  $V_{sub} = V_b$  uma vez que a bolha está contida completamente no fluido. Dada a escolha do sistema de referência o problema se reduz a um movimento unidimensional no eixo  $x$  que pela 2ª Lei de Newton resulta em;

$$\rho_f V_b g \sin \theta - \rho_b V_b g \sin \theta - 6\pi\mu r_b \dot{x} = m_b \ddot{x} = \rho_b V_b \ddot{x} \quad (14)$$

$$\ddot{x} + 6\pi\mu \frac{r_b}{\rho_b V_b} \dot{x} = \left( \frac{\rho_f}{\rho_b} - 1 \right) g \sin \theta \quad (15)$$

que recai de forma simplificada na equação diferencial;

$$\ddot{x} + A_1 \dot{x} = B_1 \quad (16)$$

em que;

$$A_1 = 6\pi\mu \frac{r_b}{\rho_b V_b} ; B_1 = \left( \frac{\rho_f}{\rho_b} - 1 \right) g \sin \theta \quad (17)$$

A solução geral da E.D.O. consiste na soma das soluções homogêneas e particular. Uma forma de encontrar a solução homogênea é através da separação de variáveis lembrando que  $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$ ; a solução particular por sua vez pode ser determinada através do método dos coeficientes indeterminados (Apêndice A). O conjunto 18 mostra as equações horárias obtidas com a resolução do problema.

$$x(t) = \frac{B_1}{A_1} \left( t + \frac{1}{A_1} (e^{-A_1 t} - 1) \right) \quad (18.a)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{B_1}{A_1} (1 - e^{-A_1 t}) \quad (18.b)$$

$$\ddot{x}(t) = B_1 e^{-A_1 t} \quad (18.c)$$

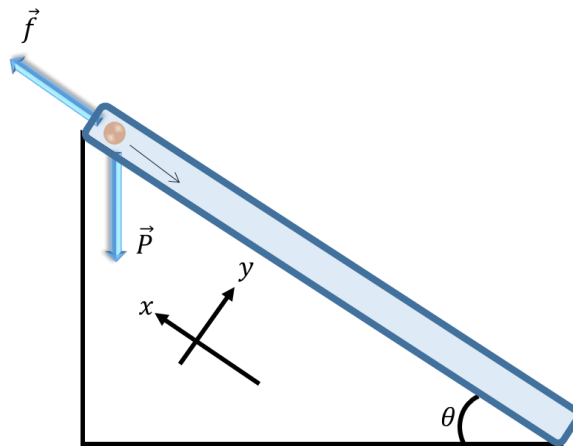
E para  $t \rightarrow \infty$  a velocidade tende a uma constante chamada de velocidade terminal (ou velocidade limite  $v_L$ );

$$\dot{x}(t \rightarrow \infty) = \frac{B_1}{A_1} = \frac{\left(\frac{\rho_f}{\rho_b} - 1\right) g \sin \theta}{6\pi\mu \frac{r_b}{\rho_b V_b}} = \frac{g}{6\pi\mu} \frac{(\rho_f - \rho_b)V_b}{r_b} \sin \theta = v_{L_1} \quad (19)$$

### 3.2 Análise da 2ª Lei de Newton para uma partícula de massa $m$ (Sem Empuxo)

Validada e obtida a solução para o movimento natural da bolha em um meio fluido e viscoso, fazem-se suposições sobre o problema. Considerando o corpo em movimento no sistema uma partícula esférica de massa  $m$ , e supondo que não haja a força causada pelo meio, o Empuxo, o diagrama de corpo livre para o objeto é descrito na figura 7. A força responsável por alterar o estado de movimento do corpo e fazê-lo percorrer a rampa é unicamente a força Peso, o sentido das suas componentes (seguindo o mesmo sistema de coordenadas escolhido previamente) justifica o sentido da força resistiva que surgirá após o corpo começar a se movimentar.

**Figura 7** – Diagrama de forças para a partícula de massa  $m$  e sem empuxo



**Fonte:** Autor.

As equações 20.a e 20.b mostram as forças e suas componentes,

$$\vec{P} = mg \sin \theta (-\hat{x}) + mg \cos \theta (-\hat{y}) = \rho V g \sin \theta (-\hat{x}) + \rho V g \cos \theta (-\hat{y}) \quad (20.a)$$

$$\vec{f} = -b\vec{\dot{x}} = -b(\dot{x}(-\hat{x})) = -6\pi\mu r(\dot{x}(-\hat{x})) \quad (20.b)$$

Sendo o movimento unidimensional no eixo  $x$  e com sentido negativo, a equação 22 mostra a E.D.O. que descreve o problema;

$$\vec{f} + mg \sin \theta (-\hat{x}) + mg \cos \theta (-\hat{y}) = m(\ddot{x}(-\hat{x}) + 0 \hat{y}) \quad (21)$$

$$\rho V g \sin \theta (-\hat{x}) - b(\dot{x}(-\hat{x})) = m(\ddot{x}(-\hat{x})) = \rho V(\ddot{x}(-\hat{x}))$$

$$\ddot{x} + 6\pi\mu \frac{r}{\rho V} \dot{x} = g \sin \theta \quad (22)$$

De maneira diretamente análoga, a solução de (22) é a mesma que foi obtida para (16);

$$x(t) = \frac{B_2}{A_2} \left( t + \frac{1}{A_2} (e^{-A_2 t} - 1) \right) \quad (23.a)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{B_2}{A_2} (1 - e^{-A_2 t}) \quad (23.b)$$

$$\ddot{x}(t) = B_2 e^{-A_2 t} \quad (23.c)$$

Em que;

$$A_2 = 6\pi\mu \frac{r}{\rho V} ; B_2 = g \sin \theta \quad (24)$$

E a velocidade limite será;

$$\dot{x}(t \rightarrow \infty) = \frac{B_2}{A_2} = \frac{g \sin \theta}{6\pi\mu \frac{r}{\rho V}} = \frac{g}{6\pi\mu} \frac{\rho V}{r} \sin \theta = v_{L_2} \quad (25)$$

### 3.3 Análise da 2ª Lei de Newton para uma partícula de massa $-m$ (Sem Empuxo)

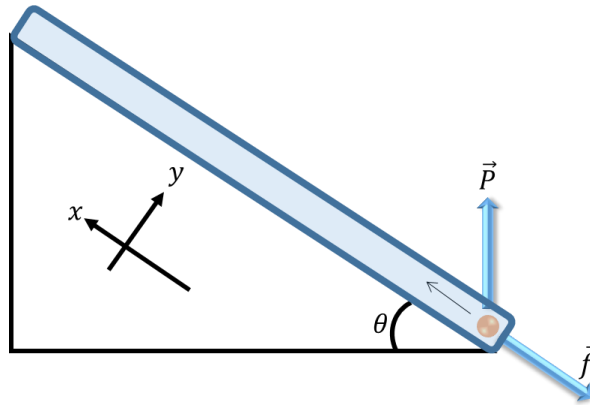
Considerando uma terceira situação em que a partícula do caso anterior possui agora uma massa negativa  $-m$ , somente os termos que dependem da massa mudam de imediato, e a 2ª Lei de Newton é escrita unicamente alterando  $m$  por  $-m$  na equação (21);

$$\vec{f} + (-m)g \sin \theta (-\hat{x}) + (-m)g \cos \theta (-\hat{y}) = (-m)(\ddot{x}(-\hat{x}) + 0 \hat{y})$$

$$\vec{f} + mg \sin \theta \hat{x} + mg \cos \theta \hat{y} = m\ddot{x} \hat{x} \quad (26)$$

Uma consequência direta e visível dessa alteração na massa é que a força peso, responsável por alterar o estado de movimento do corpo, passa a apontar no sentido contrário ao que estava anteriormente, e o movimento acontece no sentido positivo de  $x$  (segundo o mesmo sistema de coordenadas utilizado nos dois outros casos). A figura 8 mostra o esquema das forças que atuam sobre a partícula;

**Figura 8** – Diagrama de forças para uma partícula de massa  $-m$  e sem empuxo



**Fonte:** Autor.

Nessa situação, a força resistiva é descrita como indica a equação 27, e a E.D.O. do movimento unidimensional no eixo  $x$  é dada pela equação 28;

$$\vec{f} = -b\vec{\dot{x}} = -b(\dot{x} \hat{x}) \quad (27)$$

$$mg \sin \theta \hat{x} - b(\dot{x} \hat{x}) = \rho V g \sin \theta \hat{x} - 6\pi\mu r \dot{x} \hat{x} = m(\ddot{x} \hat{x}) = \rho V \ddot{x} \hat{x}$$

$$\ddot{x} + 6\pi\mu \frac{r}{\rho V} \dot{x} = g \sin \theta \quad (28)$$

Considerando que a partícula a qual o segundo e terceiro caso se referem é a bolha da primeira situação os parâmetros  $r$ ,  $\rho$  e  $V$  são referentes a ela;

$$\ddot{x} + 6\pi\mu \frac{r_b}{\rho_b V_b} \dot{x} = g \sin \theta \quad (29)$$

E as funções horárias encontradas de maneira análoga aos casos 1 e 2;

$$x(t) = \frac{B_3}{A_3} \left( t + \frac{1}{A_3} (e^{-A_3 t} - 1) \right) \quad (30.a)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{B_3}{A_3} (1 - e^{-A_3 t}) \quad (30.b)$$

$$\dot{x}(t) = B_3 e^{-A_3 t} \quad (30.c)$$

Em que;

$$A_3 = 6\pi\mu \frac{r_b}{\rho_b V_b} ; B_3 = g \sin \theta \quad (31)$$

E a velocidade limite atingida no regime terminal será;

$$\dot{x}(t \rightarrow \infty) = \frac{B_3}{A_3} = \frac{g \sin \theta}{6\pi\mu \frac{r_b}{\rho_b V_b}} = \frac{g}{6\pi\mu} \frac{\rho_b V_b}{r_b} \sin \theta = v_{L_3} \quad (32)$$

O mesmo resultado obtido para a bolha na primeira situação, o movimento de subida, é obtido no terceiro caso, contudo por motivos diferentes. No primeiro caso, a ação do meio sobre a partícula (o Empuxo) faz com que a bolha suba; o terceiro caso mostra que substituir a massa da bolha por uma massa negativa é equivalente a transferir os efeitos que o meio produz no corpo para efeitos decorrentes da massa, e que essa transformação mantém as características do movimento. Ou seja, as duas situações são **análogas ou equivalentes**.

## 4 METODOLOGIA

Nesta sessão serão apresentados o aparato experimental utilizado e os detalhes do procedimento de aquisição e tratamento dos dados. É importante ressaltar que as medições e as análises foram feitas com a utilização de aparelhos, ferramentas e processos que, no geral, são acessíveis aos estudantes.

### 4.1 Aparato & instrumentos

Para a realização do experimento foi utilizado um aparelho de plano inclinado *Kersting III EQ001F* da marca Cidepe (Figura 09). O fluido colocado dentro do tubo foi água, e a bolha produzida com a utilização de uma seringa. Primeiro produziu-se uma bolha de 0,1 mL retirando essa quantidade de líquido do tubo completamente cheio, e regulou-se o plano inclinado para  $15^\circ$ . Uma vez feita, a bolha é levada a extremidade do tubo próxima ao regulador do plano para começar o movimento.

**Figura 9** – Plano inclinado *Kersting III*



**Fonte:** Autor.

Em seguida aumentou-se a inclinação do plano de  $15^\circ$  para  $20^\circ$  e novamente a bolha foi levada a extremidade para iniciar o movimento. O objetivo de tal mudança é observar como a grandeza angular afeta o movimento do corpo, e se essencialmente, está de acordo com a modelagem feita. Por fim, foi produzida uma bolha de 0,2 mL retirando mais 0,1 mL do que havia no tubo e regulou-se o plano para a mesma angulação utilizada inicialmente. O objetivo de tal medição é encontrar como essa outra grandeza, o volume do corpo (que está diretamente associada a massa), afeta o movimento.

## 4.2 Análise

Para a etapa da análise foram feitos vídeos do movimento das bolhas, todos gravadas com a câmera de um aparelho celular, e foram utilizados programas para a obtenção dos resultados experimentais. Os vídeos foram analisados no *software* de modelagem experimental de vídeos *Tracker*, que produz uma sequência de pontos no movimento do corpo e fornece uma curva experimental com eles. Em seguida a curva experimental gerada é posta no programa de ajuste e construção de gráficos *OriginPro*.

Infelizmente não foi possível comparar os resultados experimentais obtidos, diretamente com o modelo teórico previsto. A falta de controle na saída da bolha fez com que se perdesse o regime transiente do movimento. Contudo, restringindo o modelo a situação terminal, em que a velocidade é constante, os resultados experimentais e teóricos podem ser comparados.

## 5 RESULTADOS & DISCUSSÕES

Neste capítulo são apresentados os resultados experimentais obtidos através da análise das curvas de  $x(t)$ , com o modelo já simplificado ao regime terminal. Para o caso da velocidade constante  $\dot{x}(t) = v = \text{constante}$  e  $\ddot{x}(t) = \frac{d\dot{x}(t)}{dt} = 0$  a E.D.O. recorrente (16) se torna;

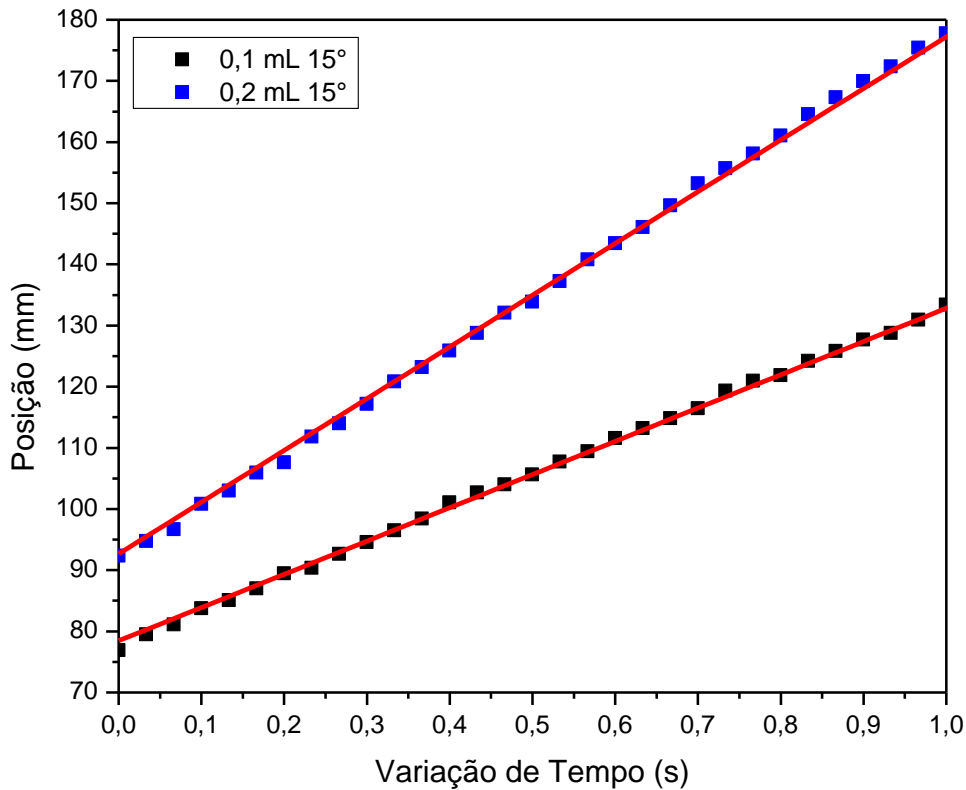
$$0 + A\dot{x} = B \therefore \dot{x}(t) = \frac{B}{A} \Rightarrow \text{Velocidade Terminal}$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{B}{A} \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t \frac{B}{A} dt \therefore x(t) = \frac{B}{A}t + x_0 \quad (33)$$

Ou seja, o movimento do corpo é descrito por uma reta tanto para  $m$  quanto para  $-m$ . Além disso o coeficiente  $\frac{B}{A}$  é a velocidade terminal para cada caso expressa como indicam (19), (25) e (32). Os casos analisados experimentalmente foram: Bolha com 0,1 mL inclinada 15° e 20°; Bolha com 0,2 mL inclinada 15°.

### 5.1 Bolhas de volumes diferentes e mesma angulação

O primeiro parâmetro a ser avaliado na velocidade terminal da bolha é o volume, que se relaciona com a massa nesse problema, uma vez que essas são características diretamente proporcionais que se igualam através de uma característica do material que o corpo é feito (densidade do ar contido na bolha). A velocidade atingida pela bolha tanto na expressão para o primeiro caso quanto na expressão para o terceiro depende positivamente do volume, ou seja, quanto maior o volume maior a velocidade. A figura 10 mostra a comparação entre duas retas, uma que descreve o movimento para a bolha de  $V_b = 0,1 \text{ mL}$  e outra para a bolha de  $V_B = 0,2 \text{ mL} = 2V_b$ .

**Figura 10** – Comparação entre os movimentos para  $V_b$  e  $V_B$ 

Fonte: Autor.

O coeficiente angular de cada reta deve representar a velocidade terminal atingida por cada uma das bolhas. A Tabela 1 reúne os dados obtidos experimentalmente de cada curva;

**Tabela 1** – Resultados experimentais obtidos para as bolhas com volumes  $V_b$  e  $V_B$ 

<b>Bolha (mL)</b>	<b>Angulação (°)</b>	<b>Velocidade Terminal (cm/s)</b>
0,1	15	5,4382
0,2	15	8,4540

Fonte: Autor.

A razão entre as velocidades terminais pode então ser determinada tanto teoricamente, pelos modelos construídos, quanto experimentalmente, pelos dados da tabela 1. Pelas equações (19) e (32), as velocidades terminais para bolhas de volumes  $V_b$  e  $V_B$  são;

$$\text{Para } V_b: \quad v_{L_{1b}} = \frac{g}{6\pi\mu} \frac{(\rho_f - \rho_b)V_b}{r_b} \sin \theta \quad v_{L_{3b}} = \frac{g}{6\pi\mu} \frac{\rho_b V_b}{r_b} \sin \theta$$

$$\text{Para } V_B: \quad v_{L_{1B}} = \frac{g}{6\pi\mu} \frac{(\rho_f - \rho_b)V_B}{r_B} \sin \theta \quad v_{L_{3B}} = \frac{g}{6\pi\mu} \frac{\rho_b V_B}{r_B} \sin \theta$$

A densidade dos corpos é a mesma e como cada bolha é aproximada de uma esfera, o raio está ligado ao volume pela expressão  $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \therefore r = \left[\frac{3}{4\pi}\right]^{\frac{1}{3}} [V]^{\frac{1}{3}}$ ;

$$\text{Para } V_b: \quad v_{L_{1b}} = \frac{g}{6\pi\mu} \frac{(\rho_f - \rho_b)}{\left[\frac{3}{4\pi}\right]^{\frac{1}{3}}} [V_b]^{\frac{2}{3}} \sin \theta \quad v_{L_{3b}} = \frac{g}{6\pi\mu} \frac{\rho_b}{\left[\frac{3}{4\pi}\right]^{\frac{1}{3}}} [V_b]^{\frac{2}{3}} \sin \theta$$

$$\text{Para } V_B: \quad v_{L_{1B}} = \frac{g}{6\pi\mu} \frac{(\rho_f - \rho_b)}{\left[\frac{3}{4\pi}\right]^{\frac{1}{3}}} [V_B]^{\frac{2}{3}} \sin \theta \quad v_{L_{3B}} = \frac{g}{6\pi\mu} \frac{\rho_b}{\left[\frac{3}{4\pi}\right]^{\frac{1}{3}}} [V_B]^{\frac{2}{3}} \sin \theta$$

Assim a razão entre as velocidades terminais previstas tanto no modelo com  $m$  ( $v_{L_1}$ ) quanto no modelo com  $-m$  ( $v_{L_3}$ ) é a mesma e depende somente dos volumes;

$$\frac{v_{L_{1B}}}{v_{L_{1b}}} = \frac{v_{L_{3B}}}{v_{L_{3b}}} = \left[\frac{V_B}{V_b}\right]^{\frac{2}{3}} = \bar{v}_{LV} \quad (34)$$

Em que  $\bar{v}_{LV}$  é a razão entre as velocidades terminais que diferem pelo volume. Para o experimento o volume da bolha foi levado de 0,1 mL a 0,2 mL. E as velocidades terminais também foram medidas experimental. As razões devem então ser;

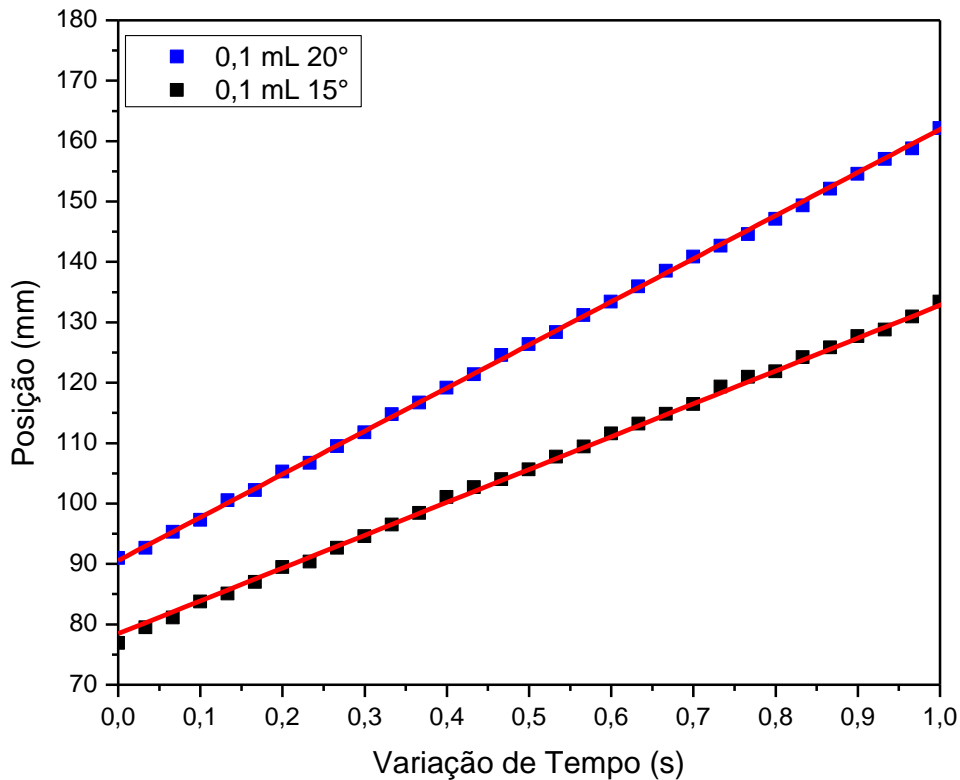
$$\bar{v}_{LVteo} = \left[\frac{0,2 \text{ ml}}{0,1 \text{ ml}}\right]^{\frac{2}{3}} \approx 1,5874 \quad (35.a)$$

$$\bar{v}_{LVexp} = \frac{v_{L_{Bexp}}}{v_{L_{bexp}}} = \frac{8,4540 \text{ cm/s}}{5,4382 \text{ cm/s}} \approx 1,5545 \quad (35.b)$$

Um resultado com erro experimental de aproximadamente 2%.

## 5.2 Bolhas de mesmo volume e angulações diferentes

A velocidade terminal é diretamente proporcional a angulação do plano inclinado (assim como para o volume), ou seja, quanto maior a angulação maior a velocidade atingida. Contudo, não varia linearmente com ela, mas sim de acordo com a função seno da angulação. A figura 11 compara as retas que descrevem a posição em relação ao tempo de uma bolha num plano inclinado com ângulos  $\theta$  iguais a  $15^\circ$  e  $20^\circ$ .

**Figura 11** – Comparação entre os movimentos com diferentes ângulos de inclinação do plano de movimento

Fonte: Autor.

Para a bolha com inclinação de 20°, como a velocidade depende do ângulo através da função seno, os efeitos de aumento são reduzidos. A tabela 2 sintetiza os resultados obtidos com a análise dos coeficiente angulares das retas.

**Tabela 2** – Resultados experimentais obtidos para as bolhas com diferentes ângulos de inclinação do plano

<b>Bolha (mL)</b>	<b>Angulação (°)</b>	<b>Velocidade Terminal (cm/s)</b>
0,1	15	5,4382
0,1	20	7,1387

Fonte: Autor.

Considerando agora os diferentes ângulos, as velocidades terminais serão;

$$\text{Para } \theta_1: \quad v_{L_1\theta_1} = \frac{g}{6\pi\mu} \frac{(\rho_f - \rho_b)V_b}{r_b} \sin \theta_1 \quad v_{L_3\theta_1} = \frac{g}{6\pi\mu} \frac{\rho_b V_b}{r_b} \sin \theta_1$$

$$\text{Para } \theta_2: \quad v_{L_1\theta_2} = \frac{g}{6\pi\mu} \frac{(\rho_f - \rho_b)V_b}{r_b} \sin \theta_2 \quad v_{L_3\theta_2} = \frac{g}{6\pi\mu} \frac{\rho_b V_b}{r_b} \sin \theta_2$$

Novamente a razão entre elas será a mesma independente do caso (massa  $m$  ou  $-m$ ), dada pela relação;

$$\frac{v_{L_1\theta_2}}{v_{L_1\theta_1}} = \frac{v_{L_3\theta_2}}{v_{L_3\theta_1}} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \bar{v}_{L_A} \quad (36)$$

Em que  $\bar{v}_{L_A}$  é a razão entre velocidades terminais que diferem pela angulação. No experimento  $\theta_1 = 15^\circ$  e  $\theta_2 = 20^\circ$ , e juntamente com os dados da tabela 2, as razões teórica e experimental entre as velocidades terminais serão;

$$\bar{v}_{L_{Ateo}} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 15^\circ} \approx 1,3215 \quad (37.a)$$

$$\bar{v}_{L_{Aexp}} = \frac{v_{L\theta_2exp}}{v_{L\theta_1exp}} = \frac{7,1387 \text{ cm/s}}{5,4382 \text{ cm/s}} \approx 1,3126 \quad (37.b)$$

Um resultado com erro experimental de aproximadamente 1%. É interessante notar que as previsões teóricas obtidas tanto pelo modelo hidrodinâmico quanto pelo modelo que supõe a bolha como uma partícula de massa negativa fornecem previsões quantitativamente idênticas, tanto para variação da angulação do plano quanto para a variação do volume da bolha. Estas previsões são corroboradas, dentro de um erro da ordem 1,5% pelos experimentos realizados. Desta, forma estes experimentos indicam, quantitativamente, que bolhas são bons análogos de partículas com massa negativa.

### 5.3 Aproximação do expoente da força viscosa

O último ponto a ser discutido é a respeito da consideração feita sobre a força viscosa. Para a modelagem do problema considerou-se que a força de resistência se comportava com uma dependência de primeira potência da velocidade. Contudo, no caso mais geral a força viscosa depende de uma potência  $n$  da velocidade. É importante frisar que Quanto mais laminar for o fluxo e menos arrasto a geometria do corpo propiciar mais próxima de 1 é o valor do expoente  $n$ . Embora existam soluções particulares para casos específicos de  $n > 1$ , não há uma resolução analítica geral para a E.D.O. se o expoente da velocidade for considerado uma potência  $\neq 1$  desde o princípio, pois nesse caso (16) se tornaria uma equação diferencial não linear.

$$\ddot{x} + A'\dot{x}^n = B' \quad (38)$$

Por outro lado, é possível fazer a suposição de que as velocidades terminais ainda são dadas pelo modelo obtido em (19) e (32), mas dessa vez elevadas a uma potência  $n$ .

$$(v_{L1})^n = \frac{g}{6\pi\mu} \frac{(\rho_f - \rho_b)V_b}{r_b} \sin \theta \quad (39.a)$$

$$(v_{L3})^n = \frac{g}{6\pi\mu} \frac{\rho_b V_b}{r_b} \sin \theta \quad (39.b)$$

Nesse caso as razões entre as velocidades permanecem as mesmas com a adição do expoente;

$$\left(\frac{v_{L1B}}{v_{L1b}}\right)^n = \left(\frac{v_{L3B}}{v_{L3b}}\right)^n = (\bar{v}_{LV})^n = \left[\frac{V_B}{V_b}\right]^{\frac{2}{3}} \quad (40.a)$$

$$\left(\frac{v_{L1\theta_2}}{v_{L1\theta_1}}\right)^n = \left(\frac{v_{L3\theta_2}}{v_{L3\theta_1}}\right)^n = (\bar{v}_{LA})^n = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \quad (40.b)$$

Existem agora duas formas de encontrar o expoente da força viscosa do nosso problema. Aplicando o logaritmo natural em ambos os lados de 40.a e 40.b, e utilizando as propriedades da função logaritmo;

$$n = \frac{\frac{2}{3} \ln \frac{V_B}{V_b}}{\ln \bar{v}_{LV}} \quad (41.a)$$

Ou;

$$n = \frac{\ln \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1}}{\ln \bar{v}_{LA}} \quad (41.b)$$

Os valores experimentais de  $\bar{v}_L$  são obtidos diretamente da análise dos resultados, utilizando-os para encontra  $n$  em 41.a e 41.b;

$$n = \frac{\frac{2}{3} \ln \frac{V_B}{V_b}}{\ln \bar{v}_{LVexp}} = \frac{\frac{2}{3} \ln \frac{0,2 \text{ mL}}{0,1 \text{ mL}}}{\ln 1,5545} \approx 1,05 \quad (42.a)$$

Ou;

$$n = \frac{\ln \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1}}{\ln \bar{v}_{L_{Exp}}} = \frac{\ln \frac{\sin 20^\circ}{\sin 15^\circ}}{\ln 1,3126} \approx 1,03 \quad (42.b)$$

Observa-se que o expoente experimental difere ligeiramente do valor teórico assumido nos modelos mas se aproxima muito de 1, o que torna a consideração assumida para a produção dos modelos válida. Novamente, tanto o modelo fluidodinâmico quanto o modelo da partícula com massa negativa funcionam de forma análoga para obter o parâmetro  $n$  do expoente da velocidade, corroborando uma vez mais e de forma quantitativa que bolhas são bons modelos análogos de partículas com massa negativa.

## 6 CONCLUSÕES

Em resumo, este trabalho mostra de forma quantitativa que bolhas de ar, podem ser consideradas bons sistemas análogos a partículas de massa negativa. Para chegar a esta conclusão mostrou-se que o comportamento da bolha sob a ação de forças é perfeitamente explicado pela mecânica de fluidos convencional e, além disso, é também modelado supondo a bolha como uma partícula de massa negativa. Os resultados experimentais obtidos concordam com as previsões teóricas, de ambos os modelos, dentro de um erro de aproximadamente 1,5%. Importante frisar que é impossível diferenciar as previsões teóricas de ambos os modelos para os experimentos realizados, o que indica ser a bolha um modelo análogo a uma partícula de massa negativa, considerando os limites da modelagem (medidas comparativas). Adicionalmente, o uso do plano inclinado e do telefone celular como instrumento de medida em associação com os softwares de tratamento de imagem se mostraram ferramentas bastante adequadas para o tipo de investigação aqui realizado (estudo do movimento de corpos), além de acessíveis. Apontando para a possibilidade de utilizar este trabalho e/ou esta metodologia em projetos e/ou práticas de ensino, como a formação de físicos experimentais através de experimentos investigativos, por exemplo. Por fim, realizando modificações simples no experimento (diferentes angulações do plano e diferentes volumes) obtivemos experimentalmente o expoente da força viscosa presente no experimento, obtendo um valor de aproximadamente 1,03 para este. Uma vez que modelamos o nosso problema supondo um expoente unitário, em ambos os modelos, tal valor é um fator que pode contribuir para o erro observado entre a previsão teórica e o dado experimental.

## REFERÊNCIAS

- CARDOSO, V. M .S., et al, (ed.). **Analogue Spacetime: The first thirty years**. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013.
- CARDOSO, V.; WEINFURTNER, S. et al. Detecting rotational superradiance in fluid laboratories. **Physical Review Letters**, 30 dez. 2016.
- DAS NEVES, U. M. Estudo do movimento de um corpo sob ação de força viscosa usando uma porção de xampu, régua e relógio. **Revista brasileira de ensino de física**, v. 28, n. 3, p. 381-390, 2006.
- ENGELS, P. et al. Negative-mass hydrodynamics in a spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensate. **Physical Review Letters**, 14 abr. 2017.
- GREINER, W. **Classical Mechanics: Point Particles and Relativity**. 1. ed. New York: Springer, 1935.
- KRIMHOLTZ, R.; LEEDOM, D.A.; MATTHAEI, G. L. New equivalent circuits for elementary piezoelectric transducer. **Electronics Letters**, v. 6, n. 13, p. 398-399, 25 jun. 1970.
- MAIA, C. A. S. **Análogos gravitacionais em matéria condensada**. 2008. Tese (Doutorado em Física Teórica). Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2008.
- MORRIS, M. S.; THORNE, K. S. Wormholes in space time an their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. **American Journal of Physics**, v. 56, n. 5, p. 395-412, mai. 1988.
- NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de física básica**. 5. ed. São Paulo: Blücher, 2014. v. 2.
- NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de física básica**. 5. ed. São Paulo: Blücher, 2013. v. 1.
- RESNICK, R. **Introdução a relatividade especial**. 1. ed. São Paulo: Polígono S. A., 1971.
- SAYÃO, L. F. Modelos teóricos em ciência da informação: Abstração e método científico. **Revista IBICT**, v. 30, n. 1, p. 82-91, abr. 2001.
- SOCIEDADE BRASILEIRA DE FÍSICA. **Olimpíada Brasileira de Física – 3ª Fase**. 2016.
- UNRUH, W. G. Experimental black-hole evaporation?. **Physical Review Letters**, v. 46, n. 21, p. 1351-1353, 25 mai. 1981.
- VIEIRA, R. S. Uma introdução à teoria dos táquions. **Revista brasileira de ensino de física**, v. 34, n. 3, p. 01-15, 22 nov. 2012.
- YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física I: Mecânica**. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2008.
- YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física II: Termodinâmica e Ondas**. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2008.

## APÊNDICE A – Resolução da equação diferencial comum aos casos da modelagem

Os três casos descritos na modelagem teórica recaem na mesma equação diferencial, resolve-la então é um passo necessário para a solução do problema. A expressão a ser resolvida é;

$$\ddot{x} + C_1\dot{x} = C_2 \quad (\text{A.1})$$

Em que  $C_1$  e  $C_2$  são constantes. A equação é denominada uma equação diferencial ordinária de 2ª ordem com coeficientes constantes e não homogênea, a solução  $x(t)$  chamada de solução geral é formada a partir da soma das soluções homogênea e particular.

A solução homogênea  $x_h(t)$  é a solução do problema quando este é homogêneo (igual a 0). Ou seja;

$$\ddot{x}_h + C_1\dot{x}_h = 0 \quad (\text{A.2})$$

Uma das técnicas possíveis para se encontrar  $x_h$  é a separação de variáveis. Como  $\ddot{x}_h$  é a derivada de  $\dot{x}_h$  a E.D.O. (A.2) assume a forma da equação (A.3), cuja solução ( $x_h$ ) é dada pela expressão (A.4);

$$\frac{d\dot{x}_h}{dt} = -C_1\dot{x}_h \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{1}{\dot{x}_h} d\dot{x}_h = -C_1 dt \Rightarrow \int_{\dot{x}_h(0)}^{\dot{x}_h(t)} \frac{1}{\dot{x}_h} d\dot{x}_h = \int_0^t -C_1 dt \Rightarrow \ln \frac{\dot{x}_h(t)}{\dot{x}_{h0}} = -C_1 t$$

$$\therefore \dot{x}_h(t) = \dot{x}_{h0} e^{-C_1 t}$$

$$\frac{dx_h}{dt} = \dot{x}_{h0} e^{-C_1 t} \Rightarrow \int_{x_{h0}}^{x_h(t)} dx_h = \int_0^t \dot{x}_{h0} e^{-C_1 t} dt$$

$$\therefore x_h(t) = x_{h0} - \frac{\dot{x}_{h0}}{C_1} e^{-C_1 t} \quad (\text{A.4})$$

Para a solução particular, utilizando a técnica dos coeficientes indeterminados, supõe-se pela parte não homogênea que a solução  $x_p$  possui a forma  $x_p(t) = Dt$ , em que  $D$  é uma constante qualquer. Se  $x_p$  possui a forma descrita,  $\dot{x}_p = D$  e  $\ddot{x}_p = 0$ . Substituindo esses resultados na E.D.O. (A.1);

$$\ddot{x}_p + C_1 \dot{x}_p = C_2 \Rightarrow 0 + C_1 D = C_2 \Rightarrow D = \frac{C_2}{C_1}$$

$$\therefore x_p(t) = \frac{C_2}{C_1} t \quad (\text{A.5})$$

A solução geral  $x(t)$ , e o conjunto de equações horárias formadas a partir dela serão;

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = x_{h0} - \frac{\dot{x}_{h0}}{C_1} e^{-C_1 t} + \frac{C_2}{C_1} t \quad (\text{A.6.a})$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_{h0} e^{-C_1 t} + \frac{C_2}{C_1} \quad (\text{A.6.b})$$

$$\ddot{x}(t) = -C_1 \dot{x}_{h0} e^{-C_1 t} \quad (\text{A.6.c})$$

As constantes  $x_{h0}$  e  $\dot{x}_{h0}$  devem ser encontradas através das condições iniciais e por isso definem a unicidade da solução. Para o problema em questão o conjunto de condições iniciais diz que  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ ;

$$x(0) = x_{h0} - \frac{\dot{x}_{h0}}{C_1} = 0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_{h0} + \frac{C_2}{C_1} = 0$$

$$\therefore \dot{x}_{h0} = -\frac{C_2}{C_1} \quad (\text{A.7.a})$$

$$\therefore x_{h0} = -\frac{C_2}{(C_1)^2} \quad (\text{A.7.b})$$

E substituindo os valores dessas constantes na expressão para  $x(t)$  encontra-se a solução descrita nas modelagens, com  $C_1$  e  $C_2$  fazendo os papeis de  $A$  e  $B$  respectivamente.

$$x(t) = \frac{C_2}{C_1} \left( t + \frac{1}{C_1} (e^{-C_1 t} - 1) \right) \quad (\text{A.8.a})$$

$$\dot{x}(t) = \frac{C_2}{C_1} (1 - e^{-C_1 t}) \quad (\text{A.8.b})$$

$$\ddot{x} = C_2 e^{-C_1 t} \quad (\text{A.8.c})$$