



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
FACULDADE DE GEOFÍSICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

BRENNO CARNEIRO PINHEIRO

MODELAGEM BORN-RAIO EM MEIOS ANISOTRÓPICOS

BELÉM
2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
FACULDADE DE GEOFÍSICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

BRENNO CARNEIRO PINHEIRO

MODELAGEM BORN-RAIO EM MEIOS ANISOTRÓPICOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará - UFPA, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de graduado em Ciências na Área de Geofísica.

Área de concentração: Métodos Sísmicos

Orientador: Jessé Carvalho Costa

BELÉM
2009

BRENNO CARNEIRO PINHEIRO

MODELAGEM BORN-RAIO EM MEIOS ANISOTRÓPICOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará - UFPA, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de graduado em Ciências na Área de Geofísica.

Data de Aprovação: / /

Banca Examinadora:

Profº. Jessé Carvalho Costa - Orientador
Doutor em Geofísica
Universidade Federal do Pará

Profº. Cícero Roberto Teixeira Régis - Membro
Doutor em Geofísica
Universidade Federal do Pará

Profª. Ellen de Nazaré Souza Gomes - Membro
Doutora em Geofísica
Universidade Federal do Para

BELEM
2009

AGRADECIMENTOS

Nada é possível sem dedicação, esforço e sorte. Por isso, agradeço a todos que nesse momento fizeram e/ou fazem parte de todas as etapas da educação. A Deus por mais esse momento de vitória que está me proporcionando e a meus familiares, que mesmo estando distante, me mantem mais forte para continuar.

Meu orientador, Professor Dr. Jessé C. Costa, por me ensinar que o suor de um aprendizado é a alegria de uma vitória. E aos Professores Cícero R. T. Régis e Ellen N. S. Gomes por participarem da banca examinadora.

A meus pais Maria das Graças e Ildo, pelas chamadas de atenção e carinho.

Aos amigos da turma 2006 e de outras turmas do curso de Geofísica e Geologia, que mesmo nos momentos de farra e festas não perdiam o foco do aprendizado.

A todos os amigos de Abaetetuba, que mesmo tendo me afastado, por motivos estudantis, nunca os esqueci e sempre que posso, volto a minha terra para relembrar as histórias e conhecer as novidades desse povo tão acolhedor.

A Thaiz pelo seu apoio incondicional. Ao Reggae, por me proporcionar calma e alegria, no seu ritmo contagiante e energia dominante.

As entidades de fomento CNPq e PIBIC/FAPESPA pelo suporte financeiro. Peço sinceras desculpas pela memória gasta àqueles cujos nomes não foram citados.

Meu lar é sempre onde estou, meu lar está na minha mente, meu lar são meus pensamentos, meu lar é pensar as coisas que eu penso. Esse é meu lar. Meu lar não é um lugar material por ai... meu lar está na minha mente.

Bob Marley

RESUMO

A modelagem da propagação de ondas em bacias sedimentares é essencial a sismica de reflexão. Por exemplo, projetos de parâmetros de aquisição, estudos de iluminação, validação de algoritmos de imageamento sísmico e análise de velocidade. A presença de anisotropia em bacias sedimentares está associada predominantemente a folhelhos e rochas com padrões de fraturamento, por exemplo, carbonatos. A modelagem numérica da propagação de ondas em meios anisotrópicos, através da solução completa da equação da onda é computacionalmente dispendiosa. Adicionalmente, alguns dos eventos modelados pela solução completa da equação de onda são considerados ruídos na sismica de reflexão, por exemplo, ondas de superfície e reflexões múltiplas. A combinação da Aproximação de Born com Teoria do Raio e a hipótese de anisotropia elíptica, para ondas qP, permite a elaboração de um algoritmo computacionalmente eficiente para simular eventos de reflexão e difração em meios anisotrópicos heterogêneos.

Palavras Chaves: Geofísica. Modelagem Sísmica - Born. Anisotropia.

ABSTRACT

The simulation of wave propagation in sedimentary basins is essential for processing and imaging reflection seismic data. For example, design of acquisition parameters, illumination studies, validation of imaging and velocity analysis algorithms. Anisotropy in sedimentary basins is mainly associated to shales and fractured rocks, for example, carbonates. Numerical modeling of wave propagation in inhomogeneous anisotropic media, using the complete solution of the wave equation, is computationally expensive. Moreover, some of the events resulting from a complete solution are considered noise in reflection seismic, i.e., surface waves and multiples. The combination of Born approximation, ray theory and the assumption of elliptical anisotropy, for qP waves, highly improves efficiency for the computation of primary reflection and diffraction events in inhomogeneous and anisotropic media.

Key Words: Geophysics. Born - Seismic Modeling. Anisotropy.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

| | |
|---|----|
| Figura 3.1 Feixes de raios em torno do raio paraxial $\mathbf{x}(\tau)$. Estão indicados: o vetor vago- ridade \mathbf{s} , normal a frente de onda; o vetor velocidade de grupo $\partial\mathbf{x}/\partial\tau$, tangente ao raio; e os vetores $\partial\mathbf{x}/\partial q_1$ e $\partial\mathbf{x}/\partial q_2$, ambos tangentes à frente de onda $\tau(\mathbf{x})$. Em meios anisotrópicos, a direção do raio não é normal a frente de onda. | 24 |
| Figura 3.2 Modelo 2.5D supondo um eixo de simetria perpendicular ao plano de propagação e fonte 3D. | 34 |
| Figura 4.1 Modelo geológico representando um canal, uma folha e um anticlinal. Meio de referência homogêneo. | 36 |
| Figura 4.2 Tempo de Trânsito, em segundos, no meio anisotrópico de referência. A fonte está na posição $x = 100$ m. | 37 |
| Figura 4.3 Amplitude relativa no meio de referência anisotrópico. | 37 |
| Figura 4.4 Sismograma sintético em meio acústico isotrópico calculado através da Apro- ximação de Born. | 39 |
| Figura 4.5 Sismograma sintético em meio acústico anisotrópico calculado através da Apro- ximação de Born. | 40 |

SUMÁRIO

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 10 |
| 2 | FUNDAMENTOS TEÓRICOS | 12 |
| 2.1 | A EQUAÇÃO DA ONDA EM MEIOS ACÚSTICOS ANISOTRÓPICOS | 13 |
| 2.2 | RELAÇÃO DE RECIPROCIDADE DO TIPO CONVOLUÇÃO | 14 |
| 2.3 | APLICAÇÃO DO TEOREMA DA RECIPROCIDADE | 15 |
| 2.4 | A APROXIMAÇÃO DE BORN | 18 |
| 3 | A MODELAGEM BORN-RAIO | 19 |
| 3.1 | FUNÇÃO DE GREEN EM UM MEIO ANISOTRÓPICO HOMOGÊNEO | 19 |
| 3.2 | TEORIA DO RAIOS E FUNÇÃO DE GREEN ASSINTÓTICA | 21 |
| 3.3 | SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO ICONAL | 22 |
| 3.4 | SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE | 23 |
| 3.5 | CÁLCULO DA AMPLITUDE AO LONGO DO RAIOS | 25 |
| 3.6 | CÁLCULO DA FUNÇÃO DE GREEN ASSINTÓTICA | 27 |
| 3.7 | FUNÇÃO DE GREEN EM MEIOS 2.5D | 32 |
| 3.8 | MODELAMENTO 2.5D | 33 |
| 3.9 | O ALGORITMO DE MODELAGEM BORN-RAIO | 34 |
| 4 | IMPLEMENTAÇÃO | 36 |
| 5 | CONCLUSÃO | 41 |
| | REFERÊNCIAS | 42 |
| | Apêndice A – EQUAÇÃO DO RAIOS | 44 |

1 INTRODUÇÃO

A simulação numérica da propagação de ondas sísmicas em modelos geológicos é essencial para se interpretar dados reais e produzir imagens da subsuperfície. Modelos pressupondo isotropia são os mais utilizados pela indústria para simulação e processamento de dados sísmicos, mesmo sabendo-se que folhelhos e rochas apresentando padrões de fraturamento se comportam com meios efetivamente anisotrópicos (THOMSEN, 1986; SCHOENBERG, 2000; DE HOOP, 2000).

A melhoria da qualidade e acurácia das imagens sísmicas de alvos exploratórios mais profundos, depende da utilização de modelos de velocidade que permitam a inclusão de anisotropia (CARCIONE, 2007). A simulação da propagação do campo de onda elástico em meios anisotrópicos é computacionalmente dispendiosa. Adicionalmente, em sismica de reflexão, apenas eventos de reflexão e difração, associados a ondas qP, são utilizados para produzir uma imagem da subsuperfície.

O alto custo computacional da simulação da propagação de ondas em meios anisotrópicos é um dos motivos que justificam a predominância da utilização de modelos isotrópicos no processamento sísmico convencional. Neste trabalho, estuda-se e implementa-se, a Aproximação de Born e a Teoria do Raio (ČERVENÝ, 2001), para simular a propagação de ondas em meios acústicos e anisotrópicos. Estes meios apresentam anisotropia elíptica, o tipo mais simples de anisotropia com interesse para simulação da propagação de ondas qP em meios geológicos.

A Aproximação de Born modela o espalhamento do campo de ondas em meios fracamente heterogêneos. Espalhamento múltiplo é excluído e apenas reflexões primárias são consideradas. Esta abordagem é conveniente para simular o campo de ondas refletido e difratado pelas heterogeneidades em subsuperfície. No método sísmico de reflexão, o mais aplicado à exploração de reservatórios de hidrocarbonetos, reflexões primárias e difrações são os eventos utilizados para produzir imagens da subsuperfície.

A modelagem da propagação, através da Aproximação de Born, requer que se calcule o campo de ondas incidente em refletores e difratores. A Teoria do Raio é utilizada para este fim. A Equação Iconal e a Equação de Transporte (CHAPMAN, 2004), são deduzidas e solucionadas para meios acústicos e anisotrópicos. A combinação da Teoria do Raio e da

Aproximação de Born permitem a construção de um algoritmo computacionalmente eficiente para simular a propagação de ondas primárias refletidas e difratadas em meios acústicos e anisotrópicos.

Este trabalho formula a modelagem do campo de ondas utilizando a Aproximação de Born em meio acústicos anisotrópicos em 3D e descreve sua implementação em meios 2.5D. Estes meios apresentam invariância de suas propriedades físicas ao longo de uma direção, mas a propagação do campo de ondas é simulada em 3D. O algoritmo implementado pode ser utilizado para estudar a propagação de ondas em meios com anisotropia e para gerar dados sintéticos adequados, para validar métodos de imageamento sísmico em meios anisotrópicos.

O trabalho está disposto da seguinte forma. O segundo capítulo apresenta os fundamentos teóricos da propagação de ondas em meios acústicos e anisotrópicos. O terceiro capítulo desenvolve aproximações para a função de Green em meios anisotrópicos suavemente heterogêneos e detalha o algoritmo de modelagem Born-raio. O quarto capítulo descreve a implementação numérica do algoritmo de modelagem e discute os resultados de experimentos numéricos. O último capítulo apresenta as conclusões.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Homogeneidade e isotropia definem simetrias de um meio material que se refletem em suas propriedades físicas. No contexto deste trabalho, as propriedades relevantes são a densidade e as constantes elásticas do meio. Um meio é homogêneo se as propriedades físicas são invariantes por translação, ou seja, as propriedades físicas do meio são as mesmas independentemente da posição. Um meio que não possui esta simetria é heterogêneo. Por outro lado, um meio é isotrópico se suas propriedades físicas permanecem invariantes por uma rotação do sistema de coordenadas utilizado para descrevê-la, ou seja, a propriedade física independente da orientação do sistema de coordenadas utilizado para descrevê-la. Um meio que não possui esta simetria, em alguma posição, é denominado anisotrópico. Uma consequência da definição de isotropia é que apenas propriedades do meio que relacionam campos vetoriais podem exibir anisotropia, uma vez que campos escalares são invariantes sob rotação.

Na descrição da propagação de ondas em meios geológicos a distinção entre heterogeneidade e anisotropia é mais sutil e depende da frequência da onda. Um meio que exibe padrões de heterogeneidade em uma escala bem abaixo do comprimento de onda, por exemplo, uma formação finamente estratificada, se comporta como um meio efetivamente anisotrópico para ondas de comprimento de ondas muito maior que a espessura das laminações. Diz-se que o meio se comporta como um meio anisotrópico efetivo. Em meios geológicos a anisotropia efetiva está associada a padrões de estratificação e padrões de fraturamento. Folhelhos são as rochas sedimentares que apresentam mais forte anisotropia.

Este trabalho discute a propagação de ondas em um meio acústico e anisotrópico. Um meio acústico apresenta duas propriedades físicas, a densidade e o módulo de compressibilidade. Como será apresentado na próxima seção, o módulo de compressibilidade relaciona duas grandezas escalares, o campo de pressão à dilatação do material. A densidade relaciona duas grandezas vetoriais, a aceleração das partículas do meio ao gradiente do campo de pressão. Em consequência, a única propriedade de um meio acústico que pode exibir anisotropia é a densidade, ou o seu inverso, chamado de flutuabilidade.

2.1 A EQUAÇÃO DA ONDA EM MEIOS ACÚSTICOS ANISOTRÓPICOS

O sistema de equações que governa o campo de onda em meios acústicos anisotrópicos é

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= -b_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} + b_{ij}(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x}, t), \\ \kappa(\mathbf{x}) \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{\partial v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} + q(\mathbf{x}, t),\end{aligned}\quad (2.1)$$

em que v_i indica a velocidade da partícula, p o campo de pressão, f_j a distribuição de fontes dipolares, q a distribuição de fontes de injeção de volume, κ o módulo de compressibilidade e b_{ij} o tensor de fluatibilidade, que é o inverso do tensor de densidade de massa (DE HOOP, 1988); \mathbf{x} indica a posição e t o tempo. Em todo este trabalho utilizaremos sistemas de coordenadas Cartesiano e notação indicial para componentes de vetores e tensores. As direções das coordenadas são identificadas pelos índice 1, 2 e 3. Componentes de vetores e tensores são indicadas por subscritos que assumem os valores 1, 2 e 3 de acordo com as direções do sistema de coordenadas. A convenção do somatório é utilizada para indicar soma em expressões envolvendo produtos de componentes de vetores e tensores.

Como as propriedades físicas do meio são estacionárias, podemos representar os campos como a superposição de harmônicos

$$\begin{aligned}p(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \\ v_i(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V_i(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega.\end{aligned}\quad (2.2)$$

As distribuições de fontes podem ser representadas na mesma forma

$$\begin{aligned}q(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \\ f_j(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_j(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega.\end{aligned}\quad (2.3)$$

Substituindo as equações (2.2) e (2.3) na equação (2.1) obtem-se o sistema de equações para o campo acústico no domínio da frequência

$$\begin{aligned}(-i\omega)V_i(\mathbf{x}, \omega) &= -b_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_j} + b_{ij}(\mathbf{x}) F_j(\mathbf{x}, \omega), \\ (-i\omega)\kappa(\mathbf{x})P(\mathbf{x}, \omega) &= -\frac{\partial V_i(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_i} + Q(\mathbf{x}, \omega).\end{aligned}\quad (2.4)$$

Multiplicando a segunda equação no sistema (2.4) por $(-i\omega)$ e substituindo o termo $(-i\omega)V_i(\mathbf{x}, \omega)$ em função do campo de pressão obtem-se a equação da onda para o campo de pressão

$$(-i\omega)^2 \kappa(\mathbf{x})P(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(b_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_j} \right) + (-i\omega)Q(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\partial}{\partial x_i} (b_{ij}(\mathbf{x})F_j(\mathbf{x}, \omega)). \quad (2.5)$$

Levantamentos sísmicos marinhos utilizam um canhão de ar comprimido como fonte (YILMAZ, 2001). Esta fonte pode ser representada na equação acima por uma fonte de injeção de volume, puntual e impulsiva, na forma

$$Q(\mathbf{x}, \omega) = S(\omega)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s), \quad (2.6)$$

em que $S(\omega)$ indica o espectro do pulso emitido pela fonte e \mathbf{x}_s indica a localização da fonte (CHAPMAN, 2004).

2.2 RELAÇÃO DE RECIPROCIDADE DO TIPO CONVOLUÇÃO

O teorema da reciprocidade permite obter representações integrais para solução dos seguintes problemas:

- a) solução da equação de onda (2.5) conhecidas as propriedades do meio;
- b) solução do problema de espalhamento em um meio com heterogeneidades.

As relações de reciprocidade podem ser estabelecidas em contextos muito gerais. A geometria associada a este teorema é um domínio V , limitado por uma fronteira ∂V . Considere dois estados acústicos distintos nesse domínio. O primeiro, $P^a(\mathbf{x}, \omega)$ produzido por uma fonte com taxa de injeção de volume $Q^a(\mathbf{x}, \omega)$ e, o segundo, $P^b(\mathbf{x}, \omega)$ produzido por uma fonte com taxa de injeção de volume $Q^b(\mathbf{x}, \omega)$. Estes dois estados ocorrem dentro do domínio V e devem satisfazer, respectivamente, as equações,

$$(-i\omega)^2 \kappa^a(\mathbf{x})P^a(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(b_{ij}^a(\mathbf{x}) \frac{\partial P^a(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_j} \right) + (-i\omega)Q^a(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\partial}{\partial x_i} (b_{ij}^a(\mathbf{x})F_j^a(\mathbf{x}, \omega)) \quad (2.7)$$

e

$$(-i\omega)^2 \kappa^b(\mathbf{x})P^b(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(b_{ij}^b(\mathbf{x}) \frac{\partial P^b(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_j} \right) + (-i\omega)Q^b(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\partial}{\partial x_i} (b_{ij}^b(\mathbf{x})F_j^b(\mathbf{x}, \omega)). \quad (2.8)$$

Note que as propriedades físicas dos meios em que ocorrem os dois estados acústicos, (κ^a, b_{ij}^a) e (κ^b, b_{ij}^b) , podem ser distintas.

Multiplicando-se a equação (2.7) por $P^b(\mathbf{x}, \omega)$, a equação (2.8) por $P^a(\mathbf{x}, \omega)$ e subtraindo estes resultados obtém-se

$$\begin{aligned} & \left[\kappa^a(\mathbf{x}) - \kappa^b(\mathbf{x}) \right] (-i\omega)^2 P^a(\mathbf{x}, \omega) P^b(\mathbf{x}, \omega) = \\ & P^b(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(b_{ij}^a(\mathbf{x}) \frac{\partial P^a(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_j} \right) - P^a(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(b_{ij}^b(\mathbf{x}) \frac{\partial P^b(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_j} \right) \\ & + (-i\omega) [P^b(\mathbf{x}, \omega) Q^a(\mathbf{x}, \omega) - P^a(\mathbf{x}, \omega) Q^b(\mathbf{x}, \omega)] + P^b(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial}{\partial x_i} (b_{ij}^a(\mathbf{x}) F_j^a(\mathbf{x}, \omega)) \\ & - P^a(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial}{\partial x_i} (b_{ij}^b(\mathbf{x}) F_j^b(\mathbf{x}, \omega)), \end{aligned}$$

integrando o resultado em todo o domínio V e aplicando-se o Teorema da Divergência (DE HOOP, 1988), obtém-se o teorema da reciprocidade do tipo convolução

$$\begin{aligned} & (-i\omega)^2 \int_V \left[\kappa^a(\mathbf{x}) - \kappa^b(\mathbf{x}) \right] P^a(\mathbf{x}, \omega) P^b(\mathbf{x}, \omega) dV + \\ & \int_V \left[b_{ij}^a(\mathbf{x}) - b_{ij}^b(\mathbf{x}) \right] \frac{\partial P^a(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_i} \frac{\partial P^b(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_j} dV + \\ & (-i\omega) \int_V (P^a(\mathbf{x}, \omega) Q^b(\mathbf{x}, \omega) - P^b(\mathbf{x}, \omega) Q^a(\mathbf{x}, \omega)) dV + \\ & \int_V \left[\frac{\partial P^b(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_i} b_{ij}^a(\mathbf{x}) F_j^a(\mathbf{x}, \omega) - \frac{\partial P^a(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_i} b_{ij}^b(\mathbf{x}) F_j^b(\mathbf{x}, \omega) \right] dV = \\ & \int_{\partial V} \left[P^b(\mathbf{x}, \omega) b_{ij}^a(\mathbf{x}) \frac{\partial P^a(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_j} - P^a(\mathbf{x}, \omega) b_{ij}^b(\mathbf{x}) \frac{\partial P^b(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_j} \right] \hat{n}_i dS + \\ & \int_{\partial V} [P^b(\mathbf{x}, \omega) b_{ij}^a(\mathbf{x}) F_j^a(\mathbf{x}, \omega) - P^a(\mathbf{x}, \omega) b_{ij}^b(\mathbf{x}) F_j^b(\mathbf{x}, \omega)] \hat{n}_i dS. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Nesta expressão estamos utilizando a propriedade de simetria do tensor de fluotabilidade $b_{ij}(\mathbf{x}) = b_{ji}(\mathbf{x})$.

2.3 APLICAÇÃO DO TEOREMA DA RECIPROCIDADE

Uma consequência importante da relação de reciprocidade é a simetria da função de Green em meios acústicos anisotrópicos com condições de fronteira homogêneas. A função de Green, $G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}')$, para equação da onda acústica (2.5) é a solução para uma fonte impulsiva,

ou seja,

$$(-i\omega)^2 \kappa(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}') = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(b_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}')}{\partial x_j} \right) + (-i\omega) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.10)$$

Considerando, no teorema da reciprocidade, dois estados acústicos $P^a(\mathbf{x}, \omega) \equiv G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_a)$ e $P^b(\mathbf{x}, \omega) \equiv G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_b)$, que:

- a) ocorrem em um mesmo meio, $\kappa^a = \kappa^b$ e $b_{ij}^a = b_{ij}^b$;
- b) e as condições de fronteira são homogêneas em ∂V ;

Verifica-se que

$$G(\mathbf{x}_a, \omega; \mathbf{x}_b) = G(\mathbf{x}_b, \omega; \mathbf{x}_a), \quad (2.11)$$

ou seja, nestas condições o campo medido é o mesmo ao se permutar a posição de fonte e receptor. Em levantamentos sísmicos, condição de fronteira homogêneas decorrem da condição de fronteira livre, ou seja, pressão nula na interface entre a terra e o ar, e da condição de radiação de Sommerfeld, que assegura que os campos tendem a zero muito distante da fonte. Esta simetria da função de Green é utilizada nos resultado a seguir.

O teorema da reciprocidade permite obter a resposta ao impulso para uma fonte dipolar. Considere, no teorema da reciprocidade, que $P^a(\mathbf{x}, \omega) = \Gamma_k(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_a)$ seja a solução da equação da onda para uma fonte dipolar impulsiva, polarizada na direção k , $F_j^a(\mathbf{x}, \omega) = \delta_{jk} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a)$, ou seja,

$$(-i\omega)^2 \kappa(\mathbf{x}) \Gamma_k(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_a) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(b_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial \Gamma_k(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_a)}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} (b_{ij}(\mathbf{x}) \delta_{jk} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a)). \quad (2.12)$$

Considere como estado $P^b(\mathbf{x}, \omega) = G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_b)$, ou seja, a função de Green para uma fonte de injeção de volume, $Q^b(\mathbf{x}, \omega) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)$. Substituindo-se estes estados acústicos na equação (2.9), pressupondo o mesmo meio e condições de fronteira homogêneas, obtém-se

$$(-i\omega) \Gamma_k(\mathbf{x}_b, \omega; \mathbf{x}_a) = - \frac{\partial G(\mathbf{x}_a, \omega; \mathbf{x}_b)}{\partial x_i^a} b_{ik}(\mathbf{x}_a),$$

aplicando a reciprocidade da função de Green e da simetria de b_{ij} ,

$$\Gamma_k(\mathbf{x}_b, \omega; \mathbf{x}_a) = - \frac{1}{(-i\omega)} b_{ki}(\mathbf{x}_a) \frac{\partial G(\mathbf{x}_b, \omega; \mathbf{x}_a)}{\partial x_i^a}. \quad (2.13)$$

Outra aplicação importante do teorema da reciprocidade (2.9), é a representação integral

para a solução da equação de onda para uma fonte puntual de banda limitada, ou seja, a solução do problema

$$(-i\omega)^2 \kappa(\mathbf{x}) P(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_0) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(b_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}')}{\partial x_j} \right) + (-i\omega) S(\omega) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (2.14)$$

em que $S(\omega)$ indica o espectro do pulso emitido pela fonte sísmica e \mathbf{x}_0 a posição da fonte.

Para obter representação integral da solução pressupõe-se que:

- a) ocorrem em um mesmo meio, $\kappa^a = \kappa^b$ e $b_{ij}^a = b_{ij}^b$;
- b) as condições de fronteira são homogêneas em ∂V ;
- c) $P^a(\mathbf{x}, \omega)$ é gerado por uma fonte de banda limitada, $P(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_0)$ e $P^b(\mathbf{x}, \omega) \equiv G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}')$;

Nestas condições verifica-se que

$$P(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_0) = S(\omega) G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_0). \quad (2.15)$$

A aplicação do teorema da reciprocidade ao espalhamento em meios acústicos, central para este trabalho, resulta em uma representação integral para o campo espalhado em relação ao campo que se propaga em um meio de referência. Pressupondo que:

- a) os estados acústicos ocorrem em um mesmo meios distintos, $\kappa^a(\mathbf{x}) = \kappa(\mathbf{x}) + \delta\kappa(\mathbf{x})$, $b_{ij}^a = b_{ij}(\mathbf{x}) + \delta b_{ij}(\mathbf{x})$, $\kappa^b(\mathbf{x}) = \kappa(\mathbf{x})$ e $b_{ij}^b = \delta b_{ij}(\mathbf{x})$;
- b) as condições de fronteira são homogêneas na fronteira ∂V para os dois estados acústicos;
- c) $P^a(\mathbf{x}, \omega) \equiv P(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_0)$ e $P^b(\mathbf{x}, \omega) \equiv G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}')$;

Substituindo estas condições no teorema da reciprocidade e utilizando a reciprocidade da função de Green, equação (2.11), verifica-se que:

$$\begin{aligned} & P(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_0) - S(\omega) G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_0) = \\ & -(-i\omega) \int_V \delta\kappa(\mathbf{x}') P(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}_0) G(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{x}') dV(\mathbf{x}') \\ & - \frac{1}{(-i\omega)} \int_V \delta b_{ij}(\mathbf{x}') \frac{\partial P(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}_0)}{\partial x_i} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}')}{\partial x_j} dV(\mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (2.16)$$

O campo espalhado é definido pelo termo à direita do sinal de igualdade, ou seja, a diferença entre a solução da equação no meio com as propriedades diferentes do meio de referência e a solução da equação de onda no meio de referência.

2.4 A APROXIMAÇÃO DE BORN

A modelagem Born é um método integral baseado na chamada Aproximação de Born, bem conhecida na teoria das perturbações. A Aproximação de Born (CHAPMAN, 2004) pressupõe um meio fracamente heterogêneo em relação ao meio de referência, ou seja, $\delta\kappa(\mathbf{x}) \ll \kappa(\mathbf{x})$ e $\delta b_{ij}(\mathbf{x}) \ll b_{ij}(\mathbf{x})$. Nestas condições, o campo de onda incidente nas heterogeneidades $P(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}_0)$ é aproximado pelo campo de onda no meio de referência $S(\omega)G(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}_0)$. Substituindo esta aproximação na equação (2.16), obtem-se a Aproximação de Born para o campo espalhado medido na posição \mathbf{x} ,

$$\begin{aligned}
 P^B(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_0) = & \\
 & -(-i\omega)S(\omega) \int_V \delta\kappa(\mathbf{x}')G(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}_0)G(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{x}')dV(\mathbf{x}') \\
 & - \frac{1}{(-i\omega)}S(\omega) \int_V \delta b_{ij}(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}_0)}{\partial x_i} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}')}{\partial x_j} dV(\mathbf{x}').
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

Fisicamente esta aproximação despreza a amplitude do campo de onda que sofre espalhamento múltiplo. Apenas eventos que foram espalhados uma única vez contribuem para a avaliação do campo de onda espalhado. No método sísmico de reflexão, apenas reflexões primárias são utilizadas para formar uma imagem da subsuperfície. Reflexões múltiplas são consideradas ruído e são atenuadas durante a etapa de processamento de dados (YILMAZ, 2001). Portanto, os dados modelados pela Aproximação de Born são muito convenientes para simular dados sísmicos de reflexão pois modelam apenas a propagação de eventos de reflexão e difrações primárias. Estes dados simulados são muito úteis para validar algoritmos de tomografia e imageamento sísmico (BILLETTE ET AL, 2003).

O outro aspecto importante da equação (2.17) decorre da observação que toda a informação sobre a propagação de onda no meio está contida na função de Green do meio de referência. A utilização desta equação para modelagem sísmica em meios de referência suavemente heterogêneos precisa que se conheça a função de Green do meio. Infelizmente soluções analíticas para a função de Green em meios anisotrópicos só são possíveis para meios homogêneos ou estratificados (CHAPMAN, 2004).

3 A MODELAGEM BORN-RAIO

Neste capítulo descrevo o algoritmo para modelagem sísmica através da Aproximação de Born em que a função de Green é calculada através da Teoria do Raio. Esta abordagem, conhecida como modelagem Born-raio, permite simular o campo espalhado em um meio de referência suavemente heterogêneo. Inicialmente apresento o cálculo da a função de Green em um meio de referência anisotrópico, homogêneo e ilimitado. A seguir, esta solução é utilizada para motivar a aproximação da Teoria do Raio para a função de Green em um meio suavemente heterogêneo. Finalmente, a modelagem Born-raio é formulada.

3.1 FUNÇÃO DE GREEN EM UM MEIO ANISOTRÓPICO HOMOGÊNEO

Em um meio acústico isotrópico homogêneo e ilimitado, a função de Green é a solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_0) + \frac{\omega^2}{c^2} G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_0) = (-i\omega)\rho\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (3.1)$$

Esta equação possui a seguinte solução analítica (Chapman, 2004),

$$G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_0) = \frac{(-i\omega)\rho}{4\pi} \frac{e^{i\omega\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|/c}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}, \quad (3.2)$$

em que c representa a velocidade de propagação e ρ a densidade de massa.

Em um meio anisotrópico homogêneo e ilimitado a função de Green satisfaz a equação (2.5),

$$b_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j} + \omega^2 \kappa G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_0) = -(-i\omega)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (3.3)$$

Definindo a matriz $a_{ij} = b_{ij}/\kappa$,

$$a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j} + \omega^2 G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_0) = -(-i\omega) \frac{1}{\kappa} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (3.4)$$

A matriz a_{ij} é simétrica e positivo definida (GOLDSTEIN, 1980), pois o tensor de densidade de massa deve ser positivo definido. Portanto a matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ é diagonalizável e

pode ser fatorada na forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T,$$

em que o sobrescrito T indica transposto, \mathbf{V} é ortogonal e $\mathbf{\Lambda}$ é diagonal e contém os autovalores de \mathbf{A} , que são todos positivos (GOLDSTEIN, 1980).

Considere a matriz

$$\mathbf{C} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{V}^T,$$

e note que $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{C}$. A partir de \mathbf{C} , definimos a matriz adimensional,

$$\mathbf{R} = \mathbf{C}/c_0,$$

em que $c_0 = Tr(\mathbf{C})/3$.

Efetuada a transformação de coordenadas,

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}, \quad (3.5)$$

ou em notação indicial

$$y_i = r_{ij}^{-1}x_j,$$

segue que,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} = r_{ji}^{-1} \frac{\partial}{\partial y_j} = r_{ij}^{-1} \frac{\partial}{\partial y_j}$$

em que a última igualdade decorre da simetria da matriz $\mathbf{R} = [r_{ij}]$ e, conseqüentemente, de sua inversa $\mathbf{R}^{-1} = [r_{ij}^{-1}]$.

Aplicando a transformação de coordenadas à equação (3.4) verifica-se que

$$a_{ij}r_{ik}^{-1}r_{jl}^{-1} \frac{\partial^2 G}{\partial y_k \partial y_l} = c_0^2 c_{in} c_{nj} c_{ik}^{-1} c_{jl}^{-1} \frac{\partial^2 G}{\partial y_k \partial y_l} = c_0^2 \delta_{nk} \delta_{nl} \frac{\partial^2 G}{\partial y_k \partial y_l} = c_0^2 \frac{\partial^2 G}{\partial y_n \partial y_n}. \quad (3.6)$$

Substituindo este resultado em (3.4), obtem-se

$$c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_i} G(\mathbf{y}, \omega; \mathbf{y}_0) + \omega^2 \tilde{G} = -(-i\omega) \frac{1}{\kappa} \delta[\mathbf{R}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)]. \quad (3.7)$$

Aplicando a identidade (CHAMPAN, 2004)

$$\delta[\mathbf{R}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)] = \frac{1}{\det \mathbf{R}} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0),$$

obtem-se

$$c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_i} G(\mathbf{y}, \omega; \mathbf{y}_0) + \omega^2 \tilde{G} = -(-i\omega) \frac{1}{\kappa \det \mathbf{R}} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0), \quad (3.8)$$

e finalmente,

$$\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_i} G(\mathbf{y}, \omega; \mathbf{y}_0) + \frac{\omega^2}{c_0^2} \tilde{G} = -(-i\omega) \frac{c_0}{\kappa \sqrt{\det \mathbf{A}}} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0). \quad (3.9)$$

Esta expressão é a equação de onda em um meio isotrópico homogêneo e ilimitado, equação (3.1). Podemos imediatamente identificar sua solução, a qual pode ser reescrita na forma

$$G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_0) = \frac{(-i\omega)}{4\pi\kappa\sqrt{\det \mathbf{A}}} \frac{e^{i\omega\sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}}}{\sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}}. \quad (3.10)$$

Esta é a função de Green para um meio acústico anisotrópico, homogêneo e ilimitado. Deve-se notar que $\tau = \sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}$ é o tempo de trânsito entre a fonte e o receptor.

A resposta ao impulso para uma fonte dipolar pode ser obtida imediatamente substituindo a equação (3.10) na equação (2.13). O resultado é

$$\Gamma_k(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi\sqrt{\det A}} \frac{\mathbf{e}_k^T \boldsymbol{\nu}}{\sqrt{\boldsymbol{\nu}^T \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\nu}}} e^{i\omega\sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}} \times \left[\frac{(-i\omega)}{\sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}} + \frac{1}{\left(\sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}\right)^2} \right], \quad (3.11)$$

em que $\boldsymbol{\nu} \equiv (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)/\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|$ é o vetor unitário na direção do radial, que aponta da fonte para o receptor e \mathbf{e}_k representa o vetor unitário na direção de polarização do dipolo. A segunda parcela na expressão em colchetes representa o campo próximo a fonte.

3.2 TEORIA DO RAIOS E FUNÇÃO DE GREEN ASSINTÓTICA

A Teoria do Raio (ČERVENÝ, 2001), é uma metodologia para se estimar aproximações para a função de Green em meios suavemente heterogêneos. Baseados na solução para a equação de onda em um meio acústico anisotrópico homogêneo e ilimitado, a função de Green para a equação de onda (2.5) é proposta na forma

$$G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_0) = A(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) e^{i\omega\tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}. \quad (3.12)$$

Nesta expressão $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ descreve a amplitude do campo de onda e $\tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ o tempo de

trânsito entre a fonte e o ponto de observação. Substituindo (3.12) na equação de onda (2.5) segue que

$$(i\omega)^2 \left[a_{ij} \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} - 1 \right] A + (i\omega) \left[2b_{ij} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \frac{\partial A}{\partial x_i} + b_{ij} \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_i \partial x_j} A + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} A \right] + b_{ij} \frac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial A}{\partial x_j} = 0. \quad (3.13)$$

Para que esta solução seja válida, independentemente da frequência, os coeficientes multiplicando as potências de ω devem ser nulos. Aplicando esta condição, obtem-se a equação Iconal,

$$a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} - 1 = 0, \quad (3.14)$$

e a Equação de Transporte,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(\mathbf{x}) \kappa(\mathbf{x}) \frac{\partial \tau}{\partial x_j} A^2 \right) = 0. \quad (3.15)$$

Esta última foi obtida multiplicando-se o coeficiente da parcela com fator $(i\omega)$ pela amplitude. Outra consequência da equação (3.13) é que a solução (3.12) não é uma solução exata para a equação de onda. Entretanto a solução proposta pela Teoria do Raio é uma ótima aproximação para descrever o campo de onda no limite de altas frequências (CHAMPAN, 2004). Neste trabalho utilizei a função de Green proposta pela Teoria do Raio e a Aproximação de Born para simular o campo de ondas.

3.3 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO ICONAL

A equação iconal pode ser reescrita na forma

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2} [a_{ij}(\mathbf{x}) s_i s_j - 1] = \frac{1}{2} [\mathbf{s}^T \mathbf{A} \mathbf{s} - 1] = 0, \quad (3.16)$$

em que \mathcal{H} representa uma função Hamiltoniana e $\mathbf{s} \equiv \nabla_{\mathbf{x}} \tau(\mathbf{x})$ é o vetor vagarosidade. A partir de uma fonte puntual, pode-se estender a solução ao longo de curvas, $\mathbf{x}(\xi)$ e $\mathbf{s}(\xi)$, onde ξ representa um parâmetro que varia monotonicamente ao longo da trajetória do raio (ČERVENÝ, 2001). Para garantir que a equação iconal seja satisfeita ao longo da trajetória, deve-se exigir que

$$d\mathcal{H}(\xi) = \left[\nabla_{\mathbf{x}}^T \mathcal{H} \frac{d\mathbf{x}}{d\xi} + \nabla_{\mathbf{s}}^T \mathcal{H} \frac{d\mathbf{s}}{d\xi} \right] d\xi = 0, \quad (3.17)$$

$$d\tau(\xi) = \mathbf{s}^T \frac{d\mathbf{x}}{d\xi} d\xi. \quad (3.18)$$

Note que qualquer trajetória satisfazendo as equações

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{d\xi} &= \lambda(\xi) \nabla_{\mathbf{s}} \mathcal{H}, \\ \frac{d\mathbf{s}}{d\xi} &= -\lambda(\xi) \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{H}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

são solução da equação (3.17). O tempo de trânsito ao longo da trajetória pode ser avaliado integrando a equação (3.18)

$$\frac{d\tau}{d\xi} = \lambda(\xi) \mathbf{s}^T \nabla_{\mathbf{s}} \mathcal{H}. \quad (3.20)$$

A solução $\mathbf{x}(\xi)$ define a trajetória do raio. O valor de λ depende da escolha do parâmetro ξ ao longo da curva (ČERVENÝ, 2001). Considerando $\xi \equiv \tau$, as equações de Hamilton se reduzem a

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} &= \nabla_{\mathbf{s}} \mathcal{H} \\ \frac{d\mathbf{s}}{d\tau} &= -\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{H} \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\frac{d\tau}{d\tau} = 1 \quad (3.22)$$

Para um meio acústico anisotrópico

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} &= \mathbf{A} \mathbf{s}, \\ \frac{d\mathbf{s}}{d\tau} &= -\frac{1}{2} \mathbf{s}^T \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{A} \mathbf{s}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

3.4 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE

Considere a região limitada por duas frentes de onda e um tubo de raios paraxiais a um raio central, conforme indicado na Figura 3.1.

Aplicando o teorema da divergência neste domínio e observando que apenas as integrais sobre as frentes de onda que interceptam o tubo de raios, em τ_0 e τ , são não nulas, segue que

$$A^2(\tau_0) \kappa(\tau_0) a_{ij}(\tau_0) s_j(\tau_0) \mathbf{n}_i(\tau_0) \Delta S(\tau_0) = A^2(\tau) \kappa(\tau) a_{ij}(\tau) s_j(\tau) \mathbf{n}_i(\tau) \Delta S(\tau)$$

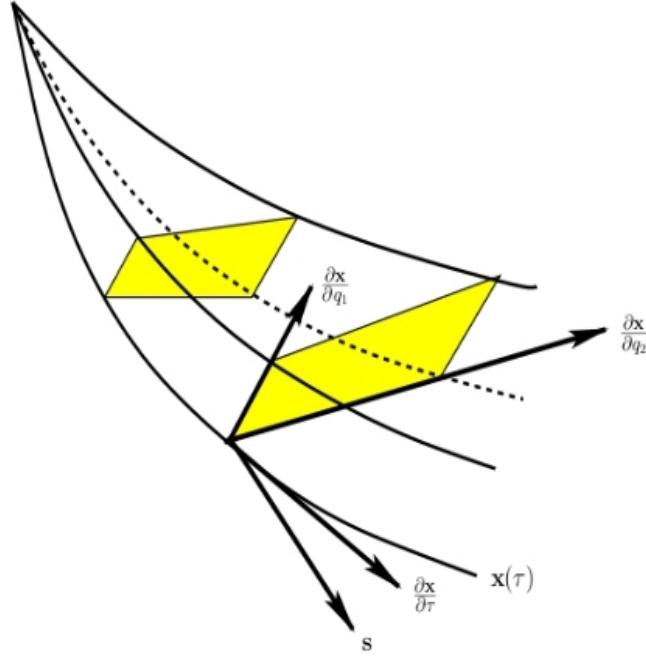


Figura 3.1: Feixes de raios em torno do raio paraxial $\mathbf{x}(\tau)$. Estão indicados: o vetor vagarosidade \mathbf{s} , normal a frente de onda; o vetor velocidade de grupo $\partial\mathbf{x}/\partial\tau$, tangente ao raio; e os vetores $\partial\mathbf{x}/\partial q_1$ e $\partial\mathbf{x}/\partial q_2$, ambos tangentes à frente de onda $\tau(\mathbf{x})$. Em meios anisotrópicos, a direção do raio não é normal a frente de onda.

onde, \mathbf{n} indica o vetor unitário normal a frente de onda, ΔS representa a área da seção da frente de onda interceptada pelo tubo de raios. Esta relação mostra que a quantidade

$$A^2(\tau)\kappa(\tau)a_{ij}(\tau)s_j(\tau)\mathbf{n}_i(\tau)\Delta S(\tau) = \Lambda^2$$

é conservada ao longo de um tubo de raios paraxiais a um raio central. Consequentemente,

$$A(\tau) = \frac{\Lambda}{\sqrt{\kappa(\tau)a_{ij}(\tau)s_j(\tau)\mathbf{n}_i(\tau)\Delta S(\tau)}}. \quad (3.24)$$

Para avaliar a área $\Delta S(\tau)$ é necessário estabelecer uma representação paramétrica para as frentes de onda ao longo do tubo de raios.

Frentes de ondas são superfícies de isovalores da função $\tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$. Para uma fonte puntual, qualquer vetor vagarosidade na forma

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{n}}{c(\mathbf{n})},$$

em que \mathbf{n} indica um vetor uniário e

$$c^2(\mathbf{n}) = a_{ij}(\mathbf{x}_0)\mathbf{n}_i\mathbf{n}_j,$$

satisfaz a equação iconal, (3.14). A velocidade c é denominada velocidade de fase. Consequentemente, cada raio a partir de uma fonte puntual, na posição \mathbf{x}_0 é determinado pelas condições de fronteira para o sistema de equações (3.21)

$$\mathbf{x}(\tau = 0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{s}(\tau = 0) = \frac{\mathbf{n}}{c(\mathbf{x}_0, \mathbf{n})}. \quad (3.26)$$

Uma parametrização possível para as frentes de onda é dada pela direção do vetor vago-rosidade, definida, por exemplo, pelos ângulos θ e ϕ em um sistema de coordenadas esférico. Esta escolha não é única, mas indica que qualquer ponto ao longo de um raio é uma função $\mathbf{x}(\tau, q_1, q_2)$, como sendo, $q_1 = \theta$ e $q_2 = \phi$. Portanto, cada superfície de isovalor de $\tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ pode ser parametrizada na forma $\mathbf{x}(q_1, q_2)$ (CHAMPAN, 2004). Nestas condições,

$$\Delta S(q_1, q_2) = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} \right| dq_1 dq_2. \quad (3.27)$$

Consequentemente, de (3.24),

$$A(\tau) = \frac{\Lambda}{\sqrt{\kappa(\tau)a_{ij}(\tau)s_j(\tau)\mathbf{n}_i(\tau) \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} \right|}}. \quad (3.28)$$

Observando que $\mathbf{s} = \mathbf{n}/c$ e que $c^2 = a_{ij}\mathbf{n}_i\mathbf{n}_j$, segue que

$$A(\tau) = \frac{\Lambda}{\sqrt{\kappa(\tau)c(\tau) \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} \right|}}. \quad (3.29)$$

Para avaliar $A(\tau)$ é necessário determinar $\partial \mathbf{x}(\tau)/\partial q_1$ e $\partial \mathbf{x}(\tau)/\partial q_2$ ao longo do raio.

3.5 CÁLCULO DA AMPLITUDE AO LONGO DO RAI0

Para um feixe de raios, $\mathbf{x}'(\tau)$ e $\mathbf{s}'(\tau)$, na vizinhança de um raio central, $\mathbf{x}(\tau)$ e $\mathbf{s}(\tau)$, vale a equação iconal

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}'(\tau), \mathbf{s}'(\tau)) = 0. \quad (3.30)$$

Expandindo esta expressão em série de Taylor em torno do raio central, $\mathbf{x}(\tau)$ e $\mathbf{s}(\tau)$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}'}{d\tau} &= \nabla_{\mathbf{s}}\mathcal{H} + \nabla_{\mathbf{s}}\nabla_{\mathbf{x}}^T\mathcal{H}(\mathbf{x}'(\tau) - \mathbf{x}(\tau)) + \nabla_{\mathbf{s}}\nabla_{\mathbf{s}}^T\mathcal{H}(\mathbf{s}'(\tau) - \mathbf{s}(\tau)) + \mathcal{O}(\Delta^2), \\ \frac{d\mathbf{s}'}{d\tau} &= -\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{H} + \nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{x}}^T\mathcal{H}(\mathbf{x}'(\tau) - \mathbf{x}(\tau)) + \nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{s}}^T\mathcal{H}(\mathbf{s}'(\tau) - \mathbf{s}(\tau)) + \mathcal{O}(\Delta^2).\end{aligned}$$

O raio central obedece as equações de Hamilton, (3.21),

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} &= \nabla_{\mathbf{s}}\mathcal{H}, \\ \frac{d\mathbf{s}}{d\tau} &= -\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{H},\end{aligned}$$

considerando apenas os termos de primeira ordem em Δ , e representando as perturbações ao longo do raio por $\delta\mathbf{x}(\tau)$ e $\delta\mathbf{s}(\tau)$, chega-se a solução para as perturbações associadas a raios paraxiais em torno de um raio central, (ČERVENÝ, 2001),

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \delta\mathbf{x} \\ \delta\mathbf{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{s}}\nabla_{\mathbf{x}}^T\mathcal{H} & \nabla_{\mathbf{s}}\nabla_{\mathbf{s}}^T\mathcal{H} \\ -\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{x}}^T\mathcal{H} & -\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{s}}^T\mathcal{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\mathbf{x} \\ \delta\mathbf{s} \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Substituindo nesta equação as perturbações associadas aos raios paraxiais

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{x}(\tau) &= \frac{\partial\mathbf{x}(\tau)}{\partial q_v} dq_v, \quad v = 1, 2 \\ \delta\mathbf{s}(\tau) &= \frac{\partial\mathbf{s}(\tau)}{\partial q_v} dq_v,\end{aligned}$$

obtem-se a equação que determina $\partial\mathbf{x}/\partial q_v$ e $\partial\mathbf{s}/\partial q_v$ ao longo de um raio central $\mathbf{x}(\tau, q_1, q_2)$, $\mathbf{s}(\tau, q_1, q_2)$

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \partial\mathbf{x}/\partial q_v \\ \partial\mathbf{s}/\partial q_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{s}}\nabla_{\mathbf{x}}^T\mathcal{H} & \nabla_{\mathbf{s}}\nabla_{\mathbf{s}}^T\mathcal{H} \\ -\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{x}}^T\mathcal{H} & -\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{s}}^T\mathcal{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial\mathbf{x}/\partial q_v \\ \partial\mathbf{s}/\partial q_v \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

A solução dessas equações permite avaliar a variação da amplitude, (3.29), ao longo de um raio central especificadas as condições de fronteira. Para uma fonte puntual, em um meio acústico anisotrópico,

$$\frac{\partial\mathbf{x}(0)}{\partial q_v} = \mathbf{0} \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial\mathbf{s}(0)}{\partial q_v} = \frac{1}{c(\mathbf{x}_0, \mathbf{n})} \frac{\partial\mathbf{n}}{\partial q_v} - \frac{1}{c^2(\mathbf{x}_0, \mathbf{n})} \frac{\partial c}{\partial q_v} \mathbf{n}. \quad (3.34)$$

Especializando as equações (3.32) para o meio acústico anisotrópico, obtém-se

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \partial \mathbf{x} / \partial q_v \\ \partial \mathbf{s} / \partial q_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{A} \mathbf{s} & \mathbf{A} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{s}^T \nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \mathbf{s} & \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{A} \mathbf{s}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \mathbf{x} / \partial q_v \\ \partial \mathbf{s} / \partial q_v \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Os sistemas de equações diferenciais (3.23) e (3.35) são integrados numericamente usando o método de Runge-Kutta (PRESS ET AL., 1986) a partir das condições de fronteira (3.25) e (3.33).

Pressupondo a trajetória do raio central ser conhecida, i.e., $\mathbf{x}(\tau)$ e $\mathbf{s}(\tau)$, o sistema de equações (3.32) tem a forma,

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \mathbf{B}(\tau)\mathbf{y}(\tau), \quad (3.36)$$

em que,

$$\mathbf{y} \equiv \begin{bmatrix} \partial \mathbf{x} / \partial q_v \\ \partial \mathbf{s} / \partial q_v \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

A solução deste sistema de equações pode ser obtida para qualquer condição inicial $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ conhecendo-se a matriz propagadora $\mathbf{P}(\tau, \tau_0)$. A matriz propagadora é a solução fundamental para a equação (3.36) (CHAMPAN, 2004), obtida resolvendo-se numericamente o sistema de equações

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\tau} = \mathbf{B}(\tau)\mathbf{P}(\tau), \quad (3.38)$$

com a condição inicial $\mathbf{P}(\tau_0, \tau_0) = \mathbf{I}$, em que \mathbf{I} representa a matriz identidade. Verifica-se imediatamente que

$$\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{P}(\tau, \tau_0)\mathbf{y}_0$$

é solução da equação (3.32) qualquer que seja a condição inicial \mathbf{y}_0 . A solução geral para a equação (3.32) pode ser representada, particionando a matriz propagadora, na forma

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_v}(\tau) \\ \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial q_v}(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{xx} & \mathbf{P}^{xs} \\ \mathbf{P}^{sx} & \mathbf{P}^{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_v}(0) \\ \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial q_v}(0) \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

3.6 CÁLCULO DA FUNÇÃO DE GREEN ASSINTÓTICA

Para calcular a aproximação para a função de Green através da Teoria do Raio, precisamos avaliar a amplitude, (3.29), para uma fonte pontual. Pressupondo que o meio é suavemente heterogêneo, é razoável admitir que a amplitude próximo a fonte se comporta como a solução em um meio homogêneo, equação (3.10).

Para determinar a constante $\mathbf{\Lambda}$, na equação (3.29), considera-se a trajetória do raio arbitrariamente próximo a fonte, neste caso, a solução da equação de Hamilton, (3.21) pode ser aproximada pela expressão

$$\mathbf{x}_i(\tau) = \mathbf{x}_i^0 + a_{ij}(\mathbf{x}_0)\mathbf{s}_j^0\Delta\tau + \mathcal{O}(\Delta\tau)^2, \quad (3.40)$$

em que \mathbf{x}_0 e \mathbf{s}_0 indicam as condições de fronteira para o raio em $\tau = 0$. Conseqüentemente,

$$\frac{dx_i}{d\tau} = a_{ij}\mathbf{s}_j^0, \quad (3.41)$$

e

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} = a_{ij}\frac{\partial \mathbf{s}_j^0}{\partial q_\nu}\Delta\tau. \quad (3.42)$$

Utilizando a notação indicial para o produto vetorial (AKI; RIRCHARDS, 1980),

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2}\right)_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} = \epsilon_{ijk}a_{jm}a_{kn}\frac{\partial \mathbf{s}_m^0}{\partial q_1}\frac{\partial \mathbf{s}_n^0}{\partial q_2}(\Delta\tau)^2. \quad (3.43)$$

Considerando a identidade

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} = [\delta_{ij}],$$

ou em notação indicial,

$$d_{ik}a_{kj} = d_{ki}a_{jk} = \delta_{ij}, \quad (3.44)$$

em que $\mathbf{A}^{-1} = [d_{ij}]$, pode-se reescrever a equação (3.43) na forma

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2}\right)_i = d_{pi}a_{lp}\epsilon_{ljk}a_{jm}a_{kn}\frac{\partial \mathbf{s}_m^0}{\partial q_1}\frac{\partial \mathbf{s}_n^0}{\partial q_2}(\Delta\tau)^2,$$

observando que $\epsilon_{ljk}a_{lp}a_{jm}a_{kn} = \det \mathbf{A}\epsilon_{pmn}$,

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2}\right)_i = d_{pi}\det \mathbf{A}\epsilon_{pmn}\frac{\partial \mathbf{s}_m^0}{\partial q_1}\frac{\partial \mathbf{s}_n^0}{\partial q_2}(\Delta\tau)^2,$$

que pode ser escrita em notação vetorial na forma,

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2}\right) = |\mathbf{A}|(\mathbf{A}^{-1})^T\frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_2}(\Delta\tau)^2. \quad (3.45)$$

O produto

$$\frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_2}$$

é perpendicular a superfície $\mathcal{H}(\mathbf{x}_0, \mathbf{s})$, portanto está na direção de $\nabla_{\mathbf{s}} \mathcal{H}$, ou seja, aponta na direção do raio $d\mathbf{x}/d\tau$. Considerando ν o vetor unitário na direção do raio e que a matriz \mathbf{A}^{-1} é simétrica, segue que

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} \right) = |\mathbf{A}| (\mathbf{A}^{-1}) \nu \left| \frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_2} \right| (\Delta\tau)^2. \quad (3.46)$$

A partir da equação (3.23), definindo a velocidade de grupo $V = |d\mathbf{x}/d\tau|$ e observado que o vetor vagarosidade $\mathbf{s} = \mathbf{n}/c$ segue que

$$\mathbf{A}^{-1} \nu = \mathbf{n}/cV.$$

Utilizando este resultado podemos escrever

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} \right) = \frac{|\mathbf{A}|}{cV} \left| \frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_2} \right| (\Delta\tau)^2 \mathbf{n}. \quad (3.47)$$

Portanto,

$$\left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} \right| = \frac{|\mathbf{A}|}{cV} \left| \frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_2} \right| (\Delta\tau)^2. \quad (3.48)$$

Substituindo este resultado na expressão para a amplitude, equação (3.29), obtem-se a expressão para a amplitude próximo a fonte

$$A(\Delta\tau) = \sqrt{\frac{V}{\kappa \det A}} \frac{\Lambda}{\Delta\tau \sqrt{\left| \frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_2} \right|}}. \quad (3.49)$$

Assim, a aproximação obtida através da Teoria do Raio para a função de Green, equação (3.12), próximo a fonte é

$$G(\mathbf{x}(\Delta\tau), \omega; \mathbf{x}_0) = \sqrt{\frac{V(\mathbf{x}_0)}{\kappa(\mathbf{x}_0) \det A(\mathbf{x}_0)}} \frac{\Lambda e^{i\omega\Delta\tau}}{\Delta\tau \sqrt{\left| \frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_2} \right|}}.$$

Igualando-se este resultado, a função de Green em um meio acústico anisotrópico ho-

mogêneo, e efetuando o limite quando $\Delta\tau \rightarrow 0$, segue que

$$\Lambda = \frac{(i\omega)}{4\pi} \sqrt{\frac{\kappa(\mathbf{x}_0)}{V(\mathbf{x}_0)}} \left| \frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_2} \right|^{1/2}. \quad (3.50)$$

Substituindo este resultado em (3.29) segue que a amplitude ao longo do raio varia na forma,

$$A(\tau) = \frac{(i\omega)}{4\pi} \frac{\sqrt{\frac{\kappa(\mathbf{x}_0)}{V(\mathbf{x}_0)}} \left| \frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_2} \right|^{1/2}}{\sqrt{\kappa(\tau)c(\tau)} \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} \right|^{1/2}}. \quad (3.51)$$

Para obter uma solução que não dependa da escolha de q_1 e q_2 , utiliza-se a representação da solução para $\partial \mathbf{x}/\partial q_\nu$ usando a matriz propagadora, equação (3.39), observando-se as condições de fronteira para uma fonte puntual, equação (3.33). Nestas condições segue que

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} = \mathbf{P}^{xs} \frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_1}, \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} = \mathbf{P}^{xs} \frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_2}. \quad (3.53)$$

Utilizando estas expressões, o produto vetorial no denominador da equação (3.51), segue que

$$\epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_2} \right) = \epsilon_{ijk} \mathbf{P}_{lm}^{xs} \mathbf{P}_{kn}^{xs} \frac{\partial \mathbf{s}_m^0}{\partial q_1} \frac{\partial \mathbf{s}_n^0}{\partial q_2}$$

Aplicando a esta expressão procedimentos análogos aos utilizados na dedução da equação (3.45), segue que

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} \right) = \det \mathbf{P}^{xs} [(\mathbf{P}^{xs})^{-1}]^T \left| \frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_2} \right| \hat{\nu}_0.$$

Efetuando o produto interno desta expressão com $d\mathbf{x}/d\tau = V\nu$ e observando que

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} \right) = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} \right| \mathbf{n}$$

pois este vetor é perpendicular a frente de onda, segue que

$$V\nu^T \mathbf{n} \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} \right| = V\nu^T \det \mathbf{P}^{xs} [(\mathbf{P}^{xs})^{-1}]^T \nu_0 \left| \frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_2} \right|. \quad (3.54)$$

Finalmente, observando que

$$\frac{d\tau}{d\tau} = 1 = \nabla_{\mathbf{x}}^T \tau \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{s}^T V \nu = \mathbf{n}^T \nu \frac{V}{c},$$

segue que $c = V \nu^T \mathbf{n}$, conseqüentemente,

$$c \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} \right| = V \nu^T \det \mathbf{P}^{xs} [(\mathbf{P}^{xs})^{-1}]^T \nu_0 \left| \frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_2} \right|. \quad (3.55)$$

Substituindo este resultado na equação (3.51), obtem-se aproximação da função de Green através da Teoria do Raio para meios acústicos e anisotrópicos

$$G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_0) = \frac{(-i\omega)}{4\pi} \sqrt{\frac{1}{\kappa(\mathbf{x})\kappa(\mathbf{x}_0)V(\mathbf{x})V(\mathbf{x}_0)}} \frac{e^{i\omega\tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) - i\frac{\pi}{2}\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}}{\sqrt{\nu^T \det \mathbf{P}^{xs} [(\mathbf{P}^{xs})^{-1}]^T \nu_0}}, \quad (3.56)$$

a função $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$, conhecida como índice KMAH é uma generalização da Teoria do Raio em regiões de singularidade, em que $\det \mathbf{P}^{xs} = 0$. Estas regiões são chamadas de cáusticas, e ocorrem onde a curvatura do frente de onda é singular. Em 3D o índice de KMAH é incrementado de 1 cada vez que o raio atravessa uma cáustica em que $\det \mathbf{P}^{xs}$ possui um zero de primeira ordem, linha de cáustica; e de 2 se o raio atravessa um zero de segunda ordem de $\det \mathbf{P}^{xs}$, cáustica puntual (CHAPMAN, 2004). Em 2D ocorrem apenas cáusticas de primeira ordem.

A resposta para uma fonte dipolar impulsiva é obtida substituindo (3.56) em (2.13) e retendo o termo de maior ordem na frequência,

$$\Gamma_k(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_0) = -\frac{(-i\omega)}{4\pi} \mathbf{e}_k^T \nu_0 \sqrt{\frac{\kappa(\mathbf{x}_0)V(\mathbf{x}_0)}{\kappa(\mathbf{x})V(\mathbf{x})}} \frac{e^{i\omega\tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) - i\frac{\pi}{2}\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}}{\sqrt{\nu^T \det \mathbf{P}^{xs} [(\mathbf{P}^{xs})^{-1}]^T \nu_0}}. \quad (3.57)$$

A velocidade da partícula pode ser calculada a partir da equação de balanço de momento linear (AKI; RIRCHARDS, 1980), em um meio acústico anisotrópico:

$$v_i(\mathbf{x}, \omega) = -b_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_j}. \quad (3.58)$$

Para uma fonte dipolar impulsiva, a velocidade da partícula, Γ_{ik} , é

$$\Gamma_{ik}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_0) = -\frac{(-i\omega)}{4\pi} (\mathbf{e}_i^T \nu) (\mathbf{e}_k^T \nu_0) \sqrt{\kappa(\mathbf{x}_0)V(\mathbf{x}_0)\kappa(\mathbf{x})V(\mathbf{x})} \frac{e^{i\omega\tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) - i\frac{\pi}{2}\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}}{\sqrt{\nu^T \det \mathbf{P}^{xs} [(\mathbf{P}^{xs})^{-1}]^T \nu_0}}. \quad (3.59)$$

3.7 FUNÇÃO DE GREEN EM MEIOS 2.5D

Para as implementações numéricas, considere meios em que as propriedades físicas são invariantes ao longo da direção da coordenada x_2 e em que o plano $x_1 - x_3$ é um plano de simetria especular. Neste caso o tensor a_{ij} tem a forma:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{13} & 0 & a_{33} \end{pmatrix} .$$

Nestas condições, a propagação de ondas no plano de simetria $x_1 - x_3$ se reduz a integração do sistema de equações

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_1}{d\tau} &= a_{11}\mathbf{s}_1 + a_{13}\mathbf{s}_3 , \\ \frac{d\mathbf{x}_3}{d\tau} &= a_{13}\mathbf{s}_1 + a_{33}\mathbf{s}_3 , \\ \frac{d\mathbf{s}_1}{d\tau} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_3 + \frac{\partial a_{13}}{\partial x_3} \mathbf{s}_3 \mathbf{s}_3 \right) , \\ \frac{d\mathbf{s}_3}{d\tau} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{13}}{\partial x_3} \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_3 + \frac{\partial a_{33}}{\partial x_3} \mathbf{s}_3 \mathbf{s}_3 \right) , \end{aligned}$$

e

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial q_\nu} \\ \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial q_\nu} \\ \frac{\partial \mathbf{x}_3}{\partial q_\nu} \\ \frac{\partial \mathbf{s}_1}{\partial q_\nu} \\ \frac{\partial \mathbf{s}_2}{\partial q_\nu} \\ \frac{\partial \mathbf{s}_3}{\partial q_\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_l \frac{\partial a_{1l}}{\partial x_1} & 0 & \mathbf{s}_l \frac{\partial a_{1l}}{\partial x_3} & a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{22} & 0 \\ \mathbf{s}_l \frac{\partial a_{3l}}{\partial x_1} & 0 & \mathbf{s}_l \frac{\partial a_{3l}}{\partial x_3} & a_{13} & 0 & a_{33} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{s}_k \mathbf{s}_l \frac{\partial^2 a_{kl}}{\partial x_1^2} & 0 & \mathbf{s}_k \mathbf{s}_l \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_1 \partial x_3} & \mathbf{s}_l \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} & 0 & \mathbf{s}_l \frac{\partial a_{13}}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} \mathbf{s}_k \mathbf{s}_l \frac{\partial^2 a_{kl}}{\partial x_3 \partial x_1} & 0 & \mathbf{s}_k \mathbf{s}_l \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_3 \partial x_3} & \mathbf{s}_l \frac{\partial a_{11}}{\partial x_3} & 0 & \mathbf{s}_l \frac{\partial a_{13}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial q_\nu} \\ \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial q_\nu} \\ \frac{\partial \mathbf{x}_3}{\partial q_\nu} \\ \frac{\partial \mathbf{s}_1}{\partial q_\nu} \\ \frac{\partial \mathbf{s}_2}{\partial q_\nu} \\ \frac{\partial \mathbf{s}_3}{\partial q_\nu} \end{pmatrix} .$$

Observando que

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathbf{s}_2}{\partial q_\nu} = 0 ,$$

segue que

$$\frac{\partial \mathbf{s}_2}{\partial q_\nu}(\tau) = \frac{\partial \mathbf{s}_2}{\partial q_\nu}(0) .$$

Consequentemente, a equação

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial q_\nu}(\tau) = \frac{\partial \mathbf{s}_2}{\partial q_\nu}(0) a_{22}(\tau) ,$$

se desacopla do sistema linear acima. Nestas condições o sistema de equações se reduz a

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial q_\nu} \\ \frac{\partial \mathbf{x}_3}{\partial q_\nu} \\ \frac{\partial \mathbf{s}_1}{\partial q_\nu} \\ \frac{\partial \mathbf{s}_3}{\partial q_\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_l \frac{\partial a_{1l}}{\partial x_1} & \mathbf{s}_l \frac{\partial a_{1l}}{\partial x_3} & a_{11} & a_{13} \\ \mathbf{s}_l \frac{\partial a_{3l}}{\partial x_1} & \mathbf{s}_l \frac{\partial a_{3l}}{\partial x_3} & a_{13} & a_{33} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{s}_k \mathbf{s}_l \frac{\partial^2 a_{kl}}{\partial x_1^2} & \mathbf{s}_k \mathbf{s}_l \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_1 \partial x_3} & \mathbf{s}_l \frac{\partial a_{1l}}{\partial x_1} & \mathbf{s}_l \frac{\partial a_{13}}{\partial x_1} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{s}_k \mathbf{s}_l \frac{\partial^2 a_{kl}}{\partial x_3 \partial x_1} & \mathbf{s}_k \mathbf{s}_l \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_3 \partial x_3} & \mathbf{s}_l \frac{\partial a_{1l}}{\partial x_3} & \mathbf{s}_l \frac{\partial a_{13}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial q_\nu} \\ \frac{\partial \mathbf{x}_3}{\partial q_\nu} \\ \frac{\partial \mathbf{s}_1}{\partial q_\nu} \\ \frac{\partial \mathbf{s}_3}{\partial q_\nu} \end{pmatrix}.$$

Estas são as equações utilizadas para o cálculo da função de Green em 2.5D.

3.8 MODELAMENTO 2.5D

O modelamento 2.5D tem as mesmas características que o modelamento 2D, com exceção de que a fonte é puntual (CALLE OCHOA, 2003). Esta é localizada no plano vertical que passa sobre a linha sísmica. Estas características, quando combinadas, permitem dizer que a propagação de ondas é tridimensional em um meio essencialmente bidimensional. Graças a esta feição híbrida, este modelamento é chamado de 2.5D.

Sendo assim, para que o modelamento seja considerado 2.5D são necessárias as seguintes premissas:

- a) supor, que para modelos geológicos, exista um eixo de simetria, ao longo do qual as propriedades do meio não variam;
- b) considerar uma fonte puntual sobre a linha sísmica, fazendo que a propagação de ondas seja tridimensional;
- c) considerar a linha sísmica ortogonal ao eixo de simetria do meio;

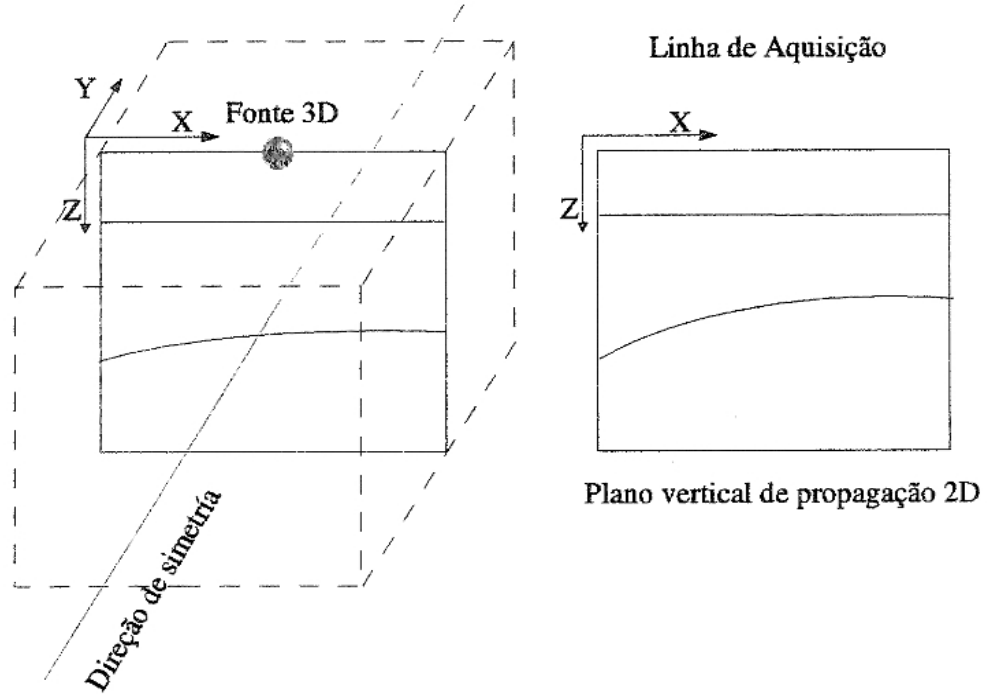


Figura 3.2: Modelo 2.5D supondo um eixo de simetria perpendicular ao plano de propagação e fonte 3D.

3.9 O ALGORITMO DE MODELAGEM BORN-RAIO

A modelagem Born-Raio consiste em utilizar as aproximações para a função de Green, obtidas através da Teoria do Raio na Aproximação de Born para o campo espalhado. Considerando a expressão para o modelagem utilizando a Aproximação de Born,

$$\begin{aligned}
 P^B(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_0) &= \\
 &- (-i\omega)S(\omega) \int_V \delta\kappa(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}_0) G(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{x}') dV(\mathbf{x}') \\
 &- \frac{1}{(-i\omega)} S(\omega) \int_V \delta b_{ij}(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}_0)}{\partial x_i} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}')}{\partial x_j} dV(\mathbf{x}') ,
 \end{aligned}$$

e substituindo as funções de Green pelas aproximações obtidas a partir da Teoria do Raio

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{x}', \omega; \mathbf{x}_0) &= A(\mathbf{x}', \mathbf{x}_0) e^{i\omega\tau(\mathbf{x}', \mathbf{x}_0)} , \\
 G(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{x}') &= A(\mathbf{x}, \mathbf{x}') e^{i\omega\tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} ,
 \end{aligned}$$

e retendo apenas os termos de maior ordem na frequência, obtem-se a expressão para a modelagem Born-Raio

$$P^B(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_0) = -(-i\omega)S(\omega) \int_V \left[\delta\kappa(\mathbf{x}') + \delta b_{ij}(\mathbf{x}') \frac{\partial\tau(\mathbf{x}', \mathbf{x}_0)}{\partial x'_i} \frac{\partial\tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial x'_j} \right] A(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}_0) e^{i\omega\tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}_0)} dV(\mathbf{x}') . \quad (3.60)$$

em que

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}_0) \equiv A(\mathbf{x}, \mathbf{x}')A(\mathbf{x}', \mathbf{x}_0) ,$$

e

$$\tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}_0) \equiv \tau(\mathbf{x}', \mathbf{x}) + \tau(\mathbf{x}', \mathbf{x}_0) .$$

Esta equação é aproximada numericamente por quadratura para calcular o campo espalhado por refletores e difratores.

4 IMPLEMENTAÇÃO

Para simular a propagação do campo de ondas em meios acústicos e anisotrópicos, foi implementado um programa em linguagem FORTRAN90. O programa de modelagem Born-raio utiliza como dados de entrada, tabelas de tempo de trânsito e amplitude associadas a posições de fonte e receptor e as perturbações das propriedades física em relação ao modelo de referência. O programa avalia numericamente a integral da equação (3.60) e utiliza a transformada de Fourier rápida (FFT) (PRESS ET AL., 1986) para obter o traço sísmico no domínio do tempo. Para validar o código de modelagem utilizamos dois modelos de referência. O primeiro consiste de um meio isotrópico homogêneo e, o segundo, um meio anisotrópico homogêneo.

O modelo de heterogeneidades consiste de três refletores indicados na Figura 4.1. Este modelo representa uma estrutura sinclinal no topo, refletores planos indicando uma falha e, na base, uma estrutura anticlinal. O contraste de propriedades física foi especificado pela variação fracional em relação as propriedades do meio de referência. O refletor anticlinal apresenta variação de +10.0% em relação a densidade do meio de referência; o refletor anticlinal apresenta variação de -25.0% em relação a densidade do meio de referência; os refletores planos apresentam variação de -25.0% em relação ao módulo de compressibilidade do meio de referência.

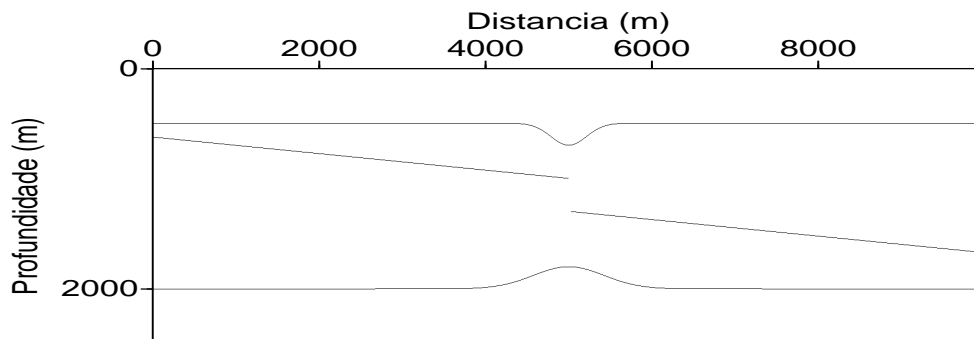


Figura 4.1: Modelo geológico representando um canal, uma falha e um anticlinal. Meio de referência homogêneo.

A modelagem simulou uma seção de tiro comum com a fonte localizada na superfície no centro do modelo, $x_{fonte} = 5000$ m. Os 360 receptores estão distribuídos simetricamente em torno da fonte em intervalos de 12.5 m e o menor afastamento entre fonte e receptor é de 12.5 m. Para efetuar a modelagem de Born-raio foram calculadas as tabelas de tempo de trânsito e de amplitude para cada posição de receptor e para a posição da fonte. A Figura 4.2 apresenta uma tabela de tempo de trânsito para um receptor na coordenada $x_{receptor} = 100$ m. O meio de referência é anisotrópico e homogêneo, a velocidade de fase ao longo das direções principais é de 2500 m/s e 2000 m/s, as direções principais formam um ângulo de 45° em relação a horizontal. A tabela correspondente para a amplitude está na Figura 4.3. Note-se claramente a variação do tempo de trânsito e da amplitude com a direção radial a partir da fonte, indicando a anisotropia do meio.

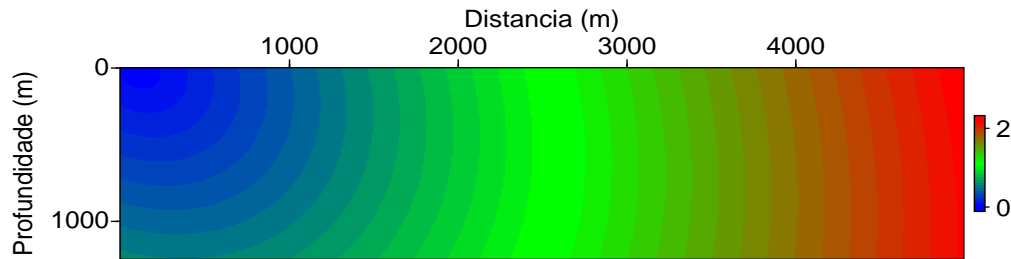


Figura 4.2: Tempo de Trânsito, em segundos, no meio anisotrópico de referência. A fonte está na posição $x = 100$ m.

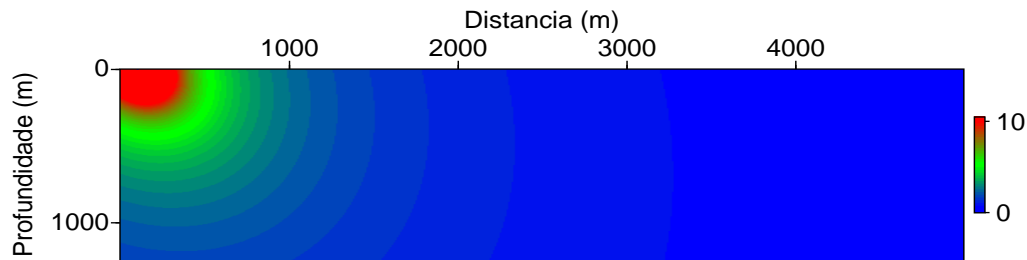


Figura 4.3: Amplitude relativa no meio de referência anisotrópico.

Para observar os efeitos da anisotropia no sismograma, efetuei inicialmente a modelagem utilizando um meio de referência isotrópico, em que a velocidade de propagação é de 2250 m/s. Os resultados da modelagem estão na Figura 4.4. Devido a simetria das estruturas sinclinal

e anticlinal em torno para posição da fonte, observa-se a simetria dos eventos associados a estas duas reflexões. Observa-se a triplicação produzida pela estrutura sinclinal e os dois focos na reflexão produzida pela estrutura anticlinal causados pela forte curvatura nos flancos desta estrutura. As reflexões nos refletores planos apresentam a mesma curva de tempo versus afastamento e as difrações produzidas na borda dos refletores pela falha são modeladas corretamente. Também observe-se a variação na amplitude destas reflexões em função da variação da profundidade do refletor.

A Figura 4.5 mostra os resultados da modelagem Born-raio para o meio de referência anisotrópico. Observa-se a perda de simetria das reflexões associadas a estrutura sinclinal e anticlinal. Na ausência de informação adicional a falta de simetria na triplicação poderia ser interpretada como uma estrutura não simétrica. Da mesma forma os focos nas bordas da estrutura anticlinal poderiam ser atribuídos a uma forma não simétrica do refletor. As reflexões associadas aos refletores planos não apresentam grande diferença em relação a modelagem isotrópica. Entretanto, se o ápice das difrações for utilizado para localizar a posição da falha o erro da estimativa será maior que 100 m. O erro no posicionamento na interpretação dos eventos refletidos, em relação aos refletores em subsuperfície, aumenta com o comprimento da trajetória dos raios no meio anisotrópico. Por exemplo, a reflexão associada à estrutura anticlinal na base do modelo. Observa-se que o ápice desta reflexão está deslocado de algumas centenas de metros em relação a posição do ápice do refletor em subsuperfície. Estes erros de posicionamento são críticos para a sismica de exploração.

Estes exemplos numéricos mostram que a modelagem proposta neste projeto, a Aproximação de Born combinada com a Teoria do Raio para simular a propagação de ondas em meios acústicos e anisotrópicos, permite simular reflexões e difrações primárias. Estes dois tipos de eventos são os sinais utilizados para formar imagens sísmicas da subsuperfície. Este método de modelagem é computacionalmente muito mais eficiente que a solução direta da equação da onda, por exemplo, através do método de diferenças finitas (PRESS ET AL., 1986).

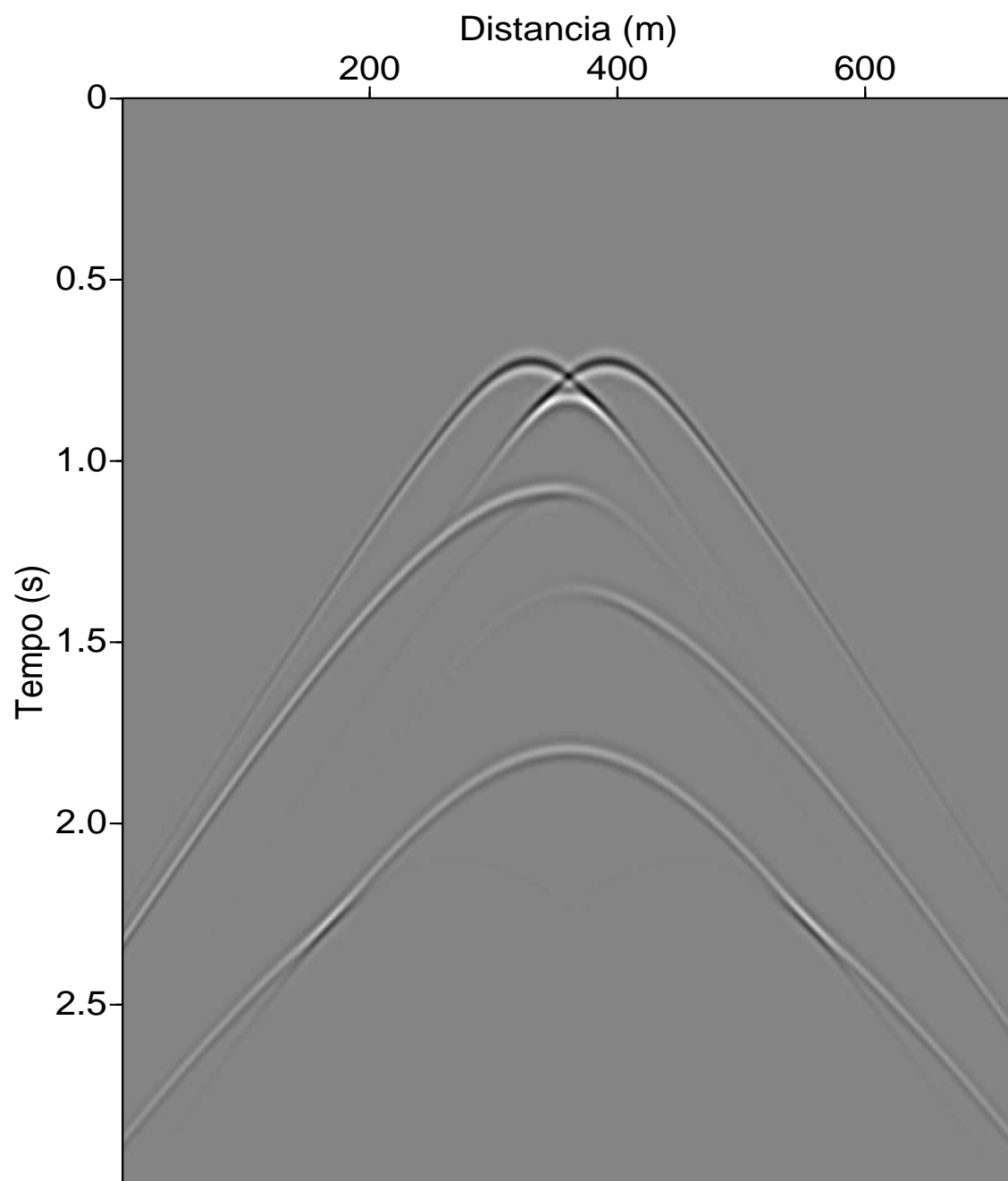


Figura 4.4: Sismograma sintético em meio acústico isotrópico calculado através da Aproximação de Born.

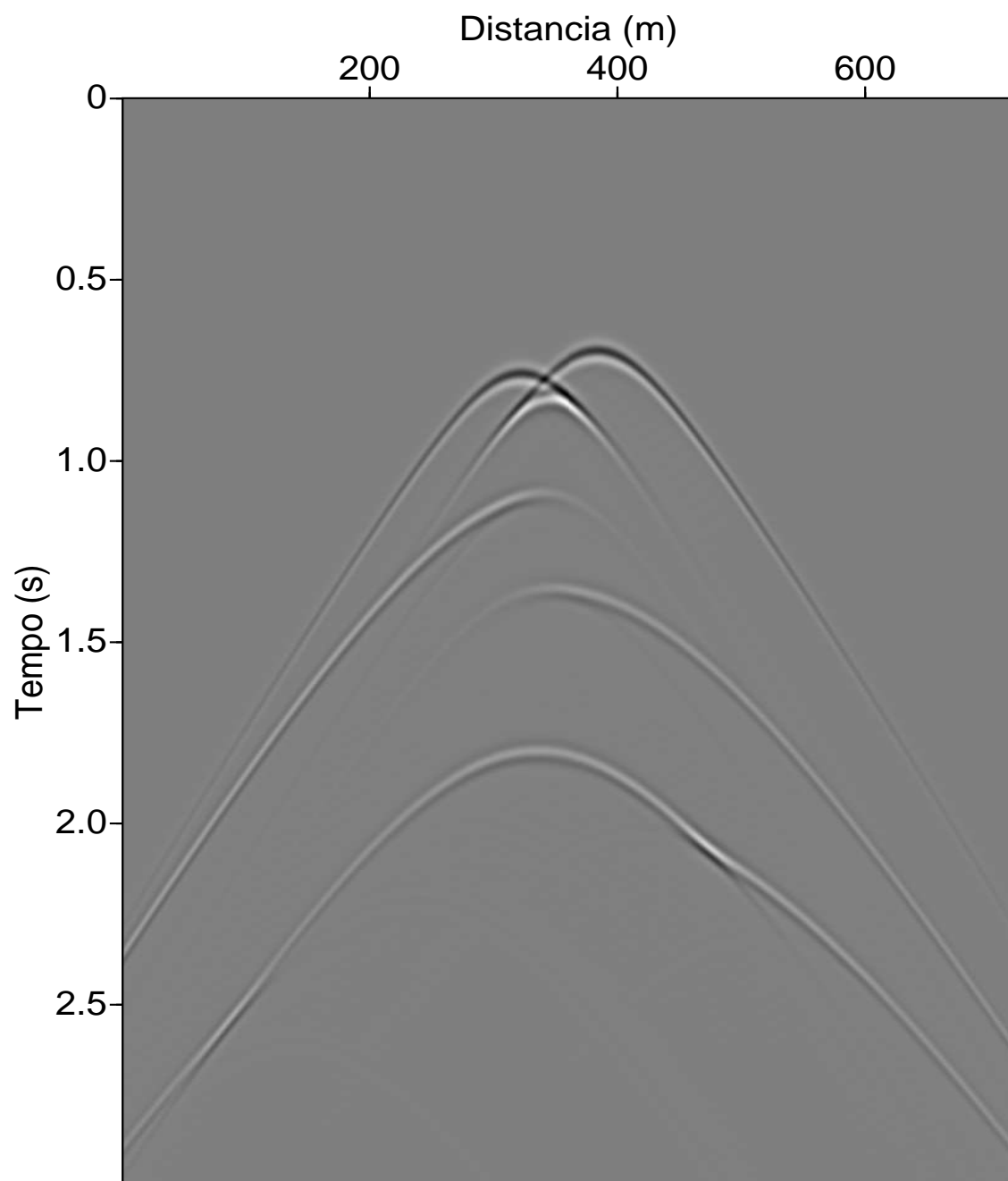


Figura 4.5: Sismograma sintético em meio acústico anisotrópico calculado através da Aproximação de Born.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como finalidade o estudo da propagação de ondas sísmicas em meios acústicos e anisotrópicos fracamente heterogêneos, utilizando a modelagem por Aproximação de Born. A Teoria do Raio foi utilizada para obter a função de Green em um meio acústico. Desta forma, o meio de referência pode ser suavemente heterôgeneo. A formulação teórica para modelagem Born foi feita em 3D e o algoritmo de simulação foi implementado em 2.5D.

A Aproximação de Born modela apenas reflexões e difrações primárias. Esta característica é conveniente para simular os eventos que são utilizados na sísmica de exploração para formar as imagens em subsuperfície. Nestas aplicações reflexões múltiplas são consideradas ruído.

Outra vantagem da modelagem Born é o reduzido custo computacional em comparação com métodos que calculam o campo de onda completo. O custo da modelagem Born depende, quase exclusivamente, do cálculo das tabelas de tempo e amplitude. Este cálculo é efetuado através da integração numérica de equações diferenciais ordinárias. Portanto não é necessário a solução de equações diferenciais parciais como ocorre com métodos numéricos de solução direta da equação da onda.

A hipótese de anisotropia elíptica é apenas uma aproximação para a anisotropia em meios elásticos. A qualidade desta aproximação elíptica é melhor para simular a propagação de ondas qP que para simular ondas qS. Em aplicações da sísmica de reflexão em que o foco é produzir uma imagem da subsuperfície, modelos com anisotropia elíptica são a alternativa mais simples para corrigir erros de posicionamento e focalização da imagem decorrentes da hipótese de isotropia.

Outra aplicação possível do algoritmo descrito neste trabalho é a simulação de dados de radar de penetração de solo (GPR), na presença de anisotropia. Neste caso a hipótese de anisotropia elíptica não é uma aproximação.

O programa computacional implementado neste projeto, pode ser aplicado para estudar a propagação de ondas em meios com anisotropia elíptica. Uma aplicação importante do programa, que motivou este projeto, é gerar dados sintéticos de levantamentos sísmicos. Estes dados são necessários para validar algoritmos de análise de velocidade e de imageamento sísmico em meios anisotrópicos.

REFERÊNCIAS

- AKI, K.; RICHARDS, P. Quantitative seismology: Theory and methods. [S.l.]: *Freeman, W.H. and Company*, v. 21, p. 783-795. 1980.
- BILLETTE, F.; LE BEGAT, S.; PODOVIN, P.; LAMBARE, G. Practical aspects and applications of 2D stereotomography. *Geophysics*, v. 3, p.1008-1021. 2003.
- CALLE OCHOA, A. E. InterSis: Uma interface gráfica para modelamento sísmico. *Campinas, SP*,[s.n.]: p. 1-9, Dissertação de Mestrado, 2003.
- CARCIONE, J. M. Wave fields in real media: Wave propagation in anisotropic, anelastic, porous and electromagnetic media. *Handbook of Geophysical Exploration*. Elsevier, 2007.
- ČERVENÝ, V. Seismic Ray Theory. [S.l.]: *Cambridge University Press*, 2001.
- CHAPMAN, C. Fundamentals of seismic wave propagation. [S.l.]: *Cambridge University Press*, 2004.
- DE HOOP, A.; STAM, H. Time-domain reciprocity theorems for elastodynamics wave fields in solids with relaxation and their application to inverse problems. *Wave Motion*, v. 10, p.479–489. 1988.
- GOLDSTEIN, H. Classical Mechanics. *Addison Wesley series in physics*, 2nd edition, 1980.
- PRESS, W.; TEUKOLSKY, S.; VETTERLING, V.; FLANNERY, B. Numerical recipes in FORTRAN77: The art of scientific computing. [S.l.]: *Cambridge University Press*, 1986.
- SCHOENBERG, M.; DEHOOP, M. V. Approximate dispersion relations for qP-qSV-waves in transversely isotropic media. *Geophysics*, v. 3, p.919–933. 2000.
- THOMSEN, L. Weak elastic anisotropy. *Geophysics*, v. 10, p.1954–1966. 1986.
- YILMAZ, O. Seismic data analysis: Processing, inversion and interpretation of seismic data. [S.l.]: *Society of Exploration Geophysicists*, 2001.v. 1.

APÊNDICE

=

APÊNDICE A - EQUAÇÃO DO RAIOS

Tendo a equação,

$$(-i\omega)^2 \partial P = K(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(b_{ij} \frac{\partial P(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right) \quad (\text{A.1})$$

sugere soluções para a equação da onda na forma,

$$P = A(\mathbf{x}) e^{i\omega\tau(x)} \quad (\text{A.2})$$

Substituindo o valor para o campo de pressão, temos,

$$\begin{aligned} (-i\omega)^2 A e^{i\omega\tau} = K(\mathbf{x}) \left\{ b_{ij}(i\omega)^2 \frac{\partial\tau}{\partial x_i} \frac{\partial\tau}{\partial x_j} A + b_{ij}(i\omega) \left[2 \frac{\partial\tau}{\partial x_i} \frac{\partial A}{\partial x_j} + A \frac{\partial^2\tau}{\partial x_i \partial x_j} \right] \right. \\ \left. + i\omega \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial\tau}{\partial x_j} A + b_{ij} \frac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial A}{\partial x_j} \right\} e^{i\omega\tau} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Com isso organizando os termos,

$$\begin{aligned} (i\omega)^2 \left[K(\mathbf{x}) b_{ij}(x) \frac{\partial\tau}{\partial x_i} \frac{\partial\tau}{\partial x_j} - 1 \right] A + (i\omega) \left[2b_{ij} \frac{\partial\tau}{\partial x_j} \frac{\partial A}{\partial x_i} + b_{ij} \frac{\partial^2\tau}{\partial x_i \partial x_j} A + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial\tau}{\partial x_j} A \right] \\ + b_{ij} \frac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial A}{\partial x_j} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Temos, então, a Equação Iconal,

$$K(\mathbf{x}) b_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial\tau}{\partial x_i} \frac{\partial\tau}{\partial x_j} - 1 = 0, \quad (\text{A.5})$$

e a Equação de Transporte,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(b_{ij} \frac{\partial\tau}{\partial x_j} A^2 \right) = 0. \quad (\text{A.6})$$

Um elemento de superfície orientado pode ser calculado pela expressão,

$$\Delta S = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} \right| dq_1 dq_2, \quad (\text{A.7})$$

e tendo em vista que,

$$\hat{n} // \hat{s}, \quad (\text{A.8})$$

que é a vagarosidade e

$$\hat{v} // \frac{dx}{d\tau}, \quad (\text{A.9})$$

que representa a velocidade de grupo. Podemos, de acordo com as equações (A.8) e (A.9), chegar ao termo,

$$\frac{1}{c} |\Delta S| n_i b_{ij} n_j A^2 = \Lambda. \quad (\text{A.10})$$

Aplicando o termo acima na equação (A.6), obtive,

$$A^2 = \frac{\Lambda c}{\rho(\hat{n})} \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} \right|, \quad (\text{A.11})$$

onde $\rho(\hat{n}) = n_i b_{ij} n_j$. Uma forma alternativa $a_{ij} = K b_{ij}$ é,

$$A^2 = \frac{\Lambda^2 K c}{n_i a_{ij} n_j \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} \right|} = \frac{\Lambda^2 K}{c \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} \right|}. \quad (\text{A.12})$$

A solução em um meio homogêneo para fonte puntual de injeção de volume,

$$G(\mathbf{x}, \omega) = \frac{(-i\omega)K}{4\pi\sqrt{|A|}} \frac{e^{i\omega\sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T \bar{A}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}}}{\sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}}. \quad (\text{A.13})$$

Para determinar Λ adota-se que,

$$\mathbf{x}_i(\tau) = \mathbf{x}_i^0 + a_{ij} s_j^0 \Delta\tau + \mathcal{O}(\Delta\tau)^2, \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{dx_i}{d\tau} = a_{ij} s_j^0, \quad (\text{A.15})$$

e

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} = a_{ij} \frac{\partial s_j^0}{\partial q_\nu} \Delta\tau. \quad (\text{A.16})$$

Assim,

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} \right)_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} = \epsilon_{ijk} a_{jm} a_{kn} \frac{\partial s_m^0}{\partial q_1} \frac{\partial s_n^0}{\partial q_2} (\Delta\tau)^2 \quad (\text{A.17})$$

notando que,

$$A^{-1} A = I = [\delta_{ij}] \Leftrightarrow (A^{-1})^T A^T = \delta_{ij}, \quad (\text{A.18})$$

e

$$A^{-1} = [d_{ij}] \Leftrightarrow d_{ki} a_{jk} = \delta_{ij}, \quad (\text{A.19})$$

efetuando-se as operações,

$$d_{pi}a_{lp}\epsilon_{ljk}a_{jm}a_{kn}\frac{\partial\mathbf{s}_m^0}{\partial q_1}\frac{\partial\mathbf{n}_n^0}{\partial q_2}(\Delta\tau)^2, \quad (\text{A.20})$$

$$d_{pi}|A|\epsilon_{pmn}\frac{\partial\mathbf{s}_m^0}{\partial q_1}\frac{\partial\mathbf{n}_n^0}{\partial q_2}(\Delta\tau)^2, \quad (\text{A.21})$$

Como a equação acima é perpendicular a superfície de vagarosidade, temos,

$$|A|(A^{-1})^T\frac{\partial\mathbf{s}^0}{\partial q_1}\times\frac{\partial\mathbf{s}^0}{\partial q_2}(\Delta\tau)^2, \quad (\text{A.22})$$

obtendo a expressão,

$$\frac{\partial\mathbf{x}^0}{\partial q_1}\times\frac{\partial\mathbf{x}^0}{\partial q_2}=|A|(A^{-1})^T\hat{\nu}\frac{\partial\mathbf{s}^0}{\partial q_1}\times\frac{\partial\mathbf{s}^0}{\partial q_2}(\Delta\tau)^2. \quad (\text{A.23})$$

Sabendo que $A^{-1}\hat{\nu}=\hat{n}/cV$ onde \hat{n} é um vetor unitário, temos,

$$\left|\frac{\partial\mathbf{x}^0}{\partial q_1}\times\frac{\partial\mathbf{x}^0}{\partial q_2}\right|=\frac{|A|}{cV}\left|\frac{\partial\mathbf{s}^0}{\partial q_1}\times\frac{\partial\mathbf{s}^0}{\partial q_2}\right|(\Delta\tau)^2\hat{n} \quad (\text{A.24})$$

Organizando os termos,

$$A^2=\frac{\Lambda^2K}{c\frac{|A|(\Delta\tau)^2}{cV}\cdot\left|\frac{\partial\mathbf{s}^0}{\partial q_1}\times\frac{\partial\mathbf{s}^0}{\partial q_2}\right|} \quad (\text{A.25})$$

No limite quando $\Delta\tau\rightarrow 0$,

$$\lim_{\Delta\tau\rightarrow 0}A=\frac{\Lambda\sqrt{KV}}{\sqrt{A}\Delta\tau\sqrt{\left|\frac{\partial\mathbf{s}^0}{\partial q_1}\times\frac{\partial\mathbf{s}^0}{\partial q_2}\right|}}=\frac{(-i\omega)K}{4\pi\sqrt{|A|}}\frac{1}{\Delta\tau}. \quad (\text{A.26})$$

Isolando Λ ,

$$\Lambda=\frac{(i\omega)\sqrt{K}\left|\frac{\partial\mathbf{s}^0}{\partial q_1}\times\frac{\partial\mathbf{s}^0}{\partial q_2}\right|^{1/2}}{4\pi\sqrt{V}}, \quad (\text{A.27})$$

Com isso, chego a equação,

$$A(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)=\frac{(i\omega)}{4\pi}\frac{\sqrt{k_0K}}{V_0}\left|\frac{\partial\mathbf{s}^0}{\partial q_1}\times\frac{\partial\mathbf{s}^0}{\partial q_2}\right|^{1/2}}{\sqrt{c}\left|\frac{\partial\mathbf{x}^0}{\partial q_1}\times\frac{\partial\mathbf{x}^0}{\partial q_2}\right|^{1/2}}. \quad (\text{A.28})$$

Contudo, falta-nos encontrar o valor de $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1}$ e $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2}$, para isso usei a seguinte notação,

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} = \bar{P}^{xs} \frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_1}, \quad (\text{A.29})$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} = \bar{P}^{xs} \frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_2}. \quad (\text{A.30})$$

Utilizando da expressão (A.17) nas equações (A.29) e (A.30), temos,

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_2} \right) &= \epsilon_{ijk} P_{lm} P_{kn} \frac{\partial \mathbf{s}_m^0}{\partial q_1} \frac{\partial \mathbf{s}_n^0}{\partial q_2} = \\ Q \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} \right) &= |\bar{P}_{xs}| (\bar{P}_{xs}^{-1})^T \left| \frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_2} \right| \hat{v}_s. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Organizando os termos,

$$c_r \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2} \right| = v_r \hat{v}_r^T |\bar{P}_{xs}^{-1}| (\bar{P}_{xs}^{-1})^T \hat{v}_s \left| \frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{s}^0}{\partial q_2} \right|, \quad (\text{A.32})$$

onde $c_r = V_r \cos \theta$.

Substituindo (A.32) em (A.28),

$$A = \frac{(-i\omega)}{4\pi} \sqrt{\frac{K^s K^r}{V_s V_r}} \frac{1}{\sqrt{|\bar{P}_{xs}| \hat{v}_r^T (\bar{P}_{xs}^{-1})^T \hat{v}_s}} \quad (\text{A.33})$$

Substituindo a expressão acima em (A.13), otitive equação para o meio homogêneo,

$$G(\mathbf{x}_r, \omega; \mathbf{x}_s) = \frac{(-i\omega)}{4\pi} \sqrt{\frac{K^s K^r}{V_s V_r}} \frac{e^{i\omega\tau(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s) - i\frac{\pi}{2}\sigma(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s)}}{\sqrt{\hat{v}_s^T P_{xs}^\dagger \hat{v}_s}}. \quad (\text{A.34})$$