



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL  
FACULDADE DE MATEMÁTICA

**DEBORA DUARTE COSTA**

**DIFUSÃO DO CALOR EM UM MEIO BIDIMENSIONAL PELO  
MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS**

CASTANHAL-PA

2021

**DEBORA DUARTE COSTA**

**DIFUSÃO DO CALOR EM UM MEIO BIDIMENSIONAL PELO  
MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS**

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado à Faculdade de Matemática de  
Universidade Federal do Pará, como parte  
integrante dos requisitos necessários para a  
obtenção do Grau de Licenciatura Plena em  
Matemática. Orientador: Prof. Dr. Arthur da  
Costa Almeida

CASTANHAL-PA

2021

**DEBORA DUARTE COSTA**

**DIFUSÃO DO CALOR EM UM MEIO BIDIMENSIONAL PELO  
MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS**

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado à Faculdade de Matemática de  
Universidade Federal do Pará, como parte  
integrante dos requisitos necessários para a  
obtenção do Grau de Licenciatura Plena em  
Matemática. Orientador: Prof. Dr. Arthur  
da Costa Almeida

Aprovado em \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

Conceito: \_\_\_\_\_.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Arthur da Costa Almeida

Faculdade de Matemática/ UFPA – Orientador

---

Prof. Dr. Samuel Levi Freitas da Luz

Faculdade de Matemática/ UFPA – Membro

---

Prof. Dr. Edilberto Oliveira Rozal

Faculdade de Matemática/ UFPA-Membro

---

Prof. Me. Marcos Vinícius Orguen Gouvea

Faculdade de Matemática/ UFPA-Membro

*Dedico este trabalho aos meus pais Antônio Waldeci e Antônia Denize por me apoiarem e se dedicarem ao máximo para realização deste sonho, e aos meus Pets (Marley, Paloma, Romeu), por estarem sempre ao meu lado (literalmente) nas incansáveis horas de estudos.*

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente quero agradecer à Deus por me proporcionar viver esse momento que é estar quase graduada, e mostrar que eu era capaz nas vezes em que pensei que não iria conseguir, por sempre ouvir minhas orações e nunca deixar eu desistir dos meus sonhos.

Aos meus pais Antônio Waldeci e Antônia Denize por estarem sempre ao meu lado, por fazerem o possível e o impossível para que eu consiga concluir minha graduação, por nunca deixarem que me faltasse nada, gratidão sempre por vocês.

A alguns familiares da família paterna, em especial meus avós, e materna, em especial meus tios pela ajuda direta e indireta do início até o momento.

A minha tia/madrinha Eliene de Jesus (in memoriam) pelas aulas de reforço em plena as férias quando eu fazia o fundamental I, pelas ajudas, pelo carinho enorme que sentia por mim (como dizia ela: a minha Cristal), e pelo orgulho que sentia de mim, que onde andava fazia questão de dizer as coisas que eu tinha conquistado durante minha vida acadêmica, obrigada por tudo.

As vizinhas pela assistência, incentivo e estadia quando precisei.

Aos vários amigos que tenho desde a infância e amigos dos meus pais que acabaram virando meus amigos também, por me incentivarem, me ajudarem, se preocuparem, ficarem alegres pelos meus avanços, e por ficarem sempre ao meu lado mesmo eu tendo ficado algumas vezes distante por consequência dos estudos.

A uma pessoa em especial pela assistência, paciência, carinho, pelo companheirismo de sempre, por sempre me mostrar a capacidade e a força que existe em mim nos momentos em que duvidei, pelas inúmeras horas de estudo quando eu precisei durante o curso, por ampliar meus horizontes, enfim, por todo o apoio.

A UFPA por me dar a chance de estudar na maior do Norte e aos professores que fazem parte do corpo docente da Faculdade de Matemática pelo embasamento teórico e prático necessário para a minha formação.

A alguns amigos de classe (sexteto fantástico) pelo apoio nas horas boas e nas horas difíceis, pelas várias horas de conversas, brincadeiras e estudos. Obrigada por tornarem suportável esses períodos em que passamos na UFPA.

Ao meu orientador Professor Arthur, por aceitar fazer parte desta página da minha vida acadêmica, por me nortear na realização deste trabalho, pela paciência e compreensão pois sou

meio enjoada, e aos professores Samuel, Marcos e Edilberto por aceitarem participar da banca examinadora e tornar possível a defesa.

Gratidão a todos!

# SUMÁRIO

<b>SUMÁRIO .....</b>	<b>7</b>
<b>RESUMO .....</b>	<b>10</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>11</b>
<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>12</b>
1.1. OBJETIVOS .....	13
1.1.1. OBJETIVO GERAL .....	13
1.1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	13
<b>2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS: CONCEITOS BÁSICOS .....</b>	<b>14</b>
2.1. INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS .....	14
2.2. CONCEITOS FUNDAMENTAIS DAS EDPS .....	14
2.2.1. EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA .....	14
2.2.2. EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL .....	14
2.2.3. EXEMPLOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS .....	14
2.3. SOLUÇÃO DE UMA EDP .....	14
2.3.1. SOLUÇÃO GERAL E SOLUÇÕES PARTICULARES DE UMA EDP .....	15
2.3.1.1. EXEMPLOS .....	15
2.3.2. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DAS EDPS .....	19
2.3.3. ORDEM DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL .....	20
2.3.3.1. EXEMPLOS .....	20
2.3.4. GRAU DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL .....	20
2.3.4.1. EXEMPLOS .....	20
2.4. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS LINEARES .....	20
2.4.1. EXEMPLOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS LINEARES E NÃO- LINEARES	21
2.4.2. HOMOGENEIDADE DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL .....	21
2.4.2.1. EXEMPLOS DE EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS .....	21
2.4.2.2. EXEMPLOS DE EQUAÇÕES NÃO-HOMOGÊNEAS .....	21
2.5. CLASSIFICAÇÃO DAS EDPS LINEARES .....	22
2.5.1. DISCRIMINANTE DE UMA EDP LINEAR DO SEGUNDO GRAU .....	22
2.5.2. TIPOS DE EDPS LINEARES .....	22
2.5.3. EXEMPLOS CLASSIFICADOS .....	22
2.6. PROBLEMAS DE CONDIÇÕES INICIAIS OU DE CONTORNO .....	23
2.6.1. EXEMPLO DE PVI COM CONDIÇÕES DE CONTORNO .....	23
2.7. APLICAÇÕES DAS EDPS .....	24
2.7.1. APLICAÇÃO DO MÉTODO DE FOURIER À EQUAÇÃO DA ONDA .....	24

<b>3.</b>	<b>SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS: MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS.</b>	<b>28</b>
3.1.	POLINÔMIO DE TAYLOR DE ORDEM $N$	28
3.1.1.	<i>EXEMPLO</i>	28
3.2.	O MÉTODO DE EULER	29
3.3.1.	<i>EXEMPLO</i>	30
3.3.	ERRO ASSOCIADO AO MÉTODO DE EULER	30
3.4.	MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS	32
3.4.1.	<i>EXPANSÕES EM SÉRIE DE TAYLOR UNIDIMENSIONAL</i>	32
3.4.2.	<i>EXPANSÃO EM SÉRIE DE TAYLOR BIDIMENSIONAL</i>	38
3.4.3.	<i>MALHA DE UMA APROXIMAÇÃO BIDIMENSIONAL</i>	39
3.5.	DISCRETIZAÇÃO UNIDIMENSIONAL DA EQUAÇÃO DO CALOR	40
3.6.	DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DO CALOR BIDIMENSIONAL	41
<b>4.</b>	<b>UM ESTUDO DE CASO: PROPAGAÇÃO DO CALOR EM 2D.</b>	<b>43</b>
4.1.	MODELO DO ESTUDO DE CASO 1D	43
4.2.	SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL 1D	43
4.2.1.	<i>CASO 1 (TEMPERATURA DE 100°C NOS PONTOS INTERNOS DA BARRA)</i>	43
4.2.2.	<i>CASO 2 (TEMPERATURA DE 100°C NO LADO ESQUERDO DA BARRA)</i>	49
4.3.	MODELO DO ESTUDO DE CASO 2D	51
4.4.	SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL 2D	52
4.4.1.	<i>CASO 1 (TEMPERATURA DE 100°C NO LADO SUPERIOR DA CHAPA)</i>	52
4.4.2.	<i>CASO 2 (TEMPERATURA DE 100°C NOS LADOS ESQUERDO E DIREITO DA CHAPA)</i>	54
4.4.3.	<i>CASO 3 (VARIANDO A PROPRIEDADE FÍSICA “K” DA CHAPA)</i>	56
<b>5.</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>59</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>61</b>
	<b>ANEXO 1</b>	<b>62</b>
<b>1.</b>	<b>PROGRAMA MATLAB 1D</b>	<b>62</b>
<b>2.</b>	<b>PROGRAMA MATLAB 2D</b>	<b>64</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Malha de pontos uniformemente espaçados. ....	33
Figura 2 - Malha de uma EDP bidimensional. ....	39
Figura 3 - Distribuição de temperatura nos pontos internos da barra subdividida com apenas 10 pontos. Coeficiente de difusividade térmica igual 1.0.....	46
Figura 4 - Distribuição de temperatura nos pontos internos da barra subdividida com 40 pontos. Coeficiente de difusividade térmica igual 1.0. ....	47
Figura 5 - Distribuição de temperatura nos pontos internos da barra subdividida com 40 pontos. Coeficiente de difusividade térmica igual 0.5, .....	48
Figura 6 - Distribuição de temperatura nos pontos internos da barra subdividida com 40 pontos. Coeficiente de difusividade térmica igual 1.5. ....	49
Figura 7 - Distribuição de temperatura no lado esquerdo da barra subdividida com 40 pontos. Coeficiente de difusividade térmica igual 1.5. ....	50
Figura 8 - Distribuição de temperatura no centro da barra subdividida com 100 pontos. Coeficiente de difusividade térmica igual 0.08. ....	51
Figura 9 - Distribuição de temperatura no lado superior da chapa, subdividida com 31 pontos na horizontal e na vertical. Com coeficiente de difusividade térmica igual 1.0.....	53
Figura 10 - Distribuição de temperatura no lado superior da chapa, subdividida com 31 pontos na horizontal e na vertical. Com coeficiente de difusividade térmica igual a 1.0. ....	54
Figura 11 - Distribuição de temperatura nos lados esquerdo e direito da chapa subdividida com 31 pontos na horizontal e na vertical. Com coeficiente de difusividade térmica igual a 1.0. ...	55
Figura 12 - Distribuição de temperatura nos lados esquerdo e direito da chapa, subdividida com 31 pontos na horizontal e na vertical. Com coeficiente de difusividade térmica igual a 1.0. ...	56
Figura 13 - Distribuição de temperatura no lado superior da chapa, subdividida com 31 pontos. Com coeficiente de difusividade térmica igual a 0.001. ....	57
Figura 14 - Distribuição de temperatura nos lados esquerdo e direito da chapa subdividida com 31 pontos. Com coeficiente térmico igual a 0.001. ....	58

## RESUMO

Os fenômenos físicos acontecem diariamente ao nosso redor, e a grande maioria deles são modelados por equações diferenciais parciais, o que nos mostra a importância de estudar esses fenômenos e simular computacionalmente para entender melhor como eles se concretizam. A pesquisa bibliográfica estudada para realização deste trabalho nos proporciona uma compreensão melhor desta área da matemática aplicada.

Este trabalho estuda a simulação de difusão do calor em um meio bidimensional. Para isto, será feito um breve estudo de equações diferenciais parciais, seguida das expansões em série de Taylor, método de Euler e o método de diferenças de finitas para obter as aproximações, e então discretizar estas aproximações e substituir na equação de difusão do calor. Por fim, simularemos no Matlab primeiro a propagação do calor em uma dimensão e em seguida a propagação do calor em duas dimensões, para observarmos o comportamento da difusão e obter os resultados numéricos em ambos os casos.

**Palavras-chave:** Equação Diferencial Parcial, Equação do calor, Método de diferenças finitas, Matlab.

## **ABSTRACT**

Physical phenomena happen daily around us, and the vast majority of them are modeled by partial differential equations, which shows us the importance of studying these phenomena and simulating computationally to better understand how they materialize. The bibliographic research studied to carry out this work provides a better understanding of this area of applied mathematics.

This work studies the simulation of heat diffusion in a two-dimensional medium. For this, a brief study of partial differential equations will be made, followed by Taylor's serial expansions, Euler's method, and the finite difference method to obtain the approximations, and then discretize these approximations and replace in the heat diffusion equation. Finally, in Matlab we will first propagate the heat in one dimension and then propagate the heat in two dimensions, to observe the diffusion behavior and obtain the numerical results in both cases.

**Keywords:** Partial Differential Equation, Heat equation, Finite difference method, Matlab.

## 1. INTRODUÇÃO

Vários são os fenômenos físicos da natureza presentes no dia a dia, como por exemplo, as enchentes, o aquecimento global, e etc, todos eles são modelados por equações diferenciais parciais que nos permite compreender melhor como eles acontecem.

Este trabalho trata do estudo fenômeno de difusão do calor em um meio bidimensional, que pode, por exemplo, estar presente nas queimadas das florestas, possibilitando-nos ter uma visualização, por meio da simulação computacional, e isto é possível quando se tem, por exemplo, um modelo matemático que represente o fenômeno em questão.

Tais modelos matemáticos podem ser descritos por equações diferenciais ordinárias (EDO) (que são mais simples) ou mais frequentemente, por equações diferenciais parciais (EDP). Para exemplificar temos, as equações da onda, de Navier-Stokes, da difusão do calor, etc. Para isso será acrescentado neste trabalho um capítulo somente para este tópico de EDP's, onde trará as definições, a solução geral e particular, alguns exemplos. Será apresentado também a ordem, o grau, a linearidade, a homogeneidade, a dimensão, a classificação e algumas aplicações das EDP's, visando dar fundamento teórico para um melhor entendimento do trabalho. No entanto, por se tratar de um fenômeno físico complexo, nem sempre é possível obter-se uma expressão matemática analítica que o represente, por esse motivo, na grande maioria das vezes é tratado matematicamente, de forma numérica.

Vários são os métodos numéricos discutidos na literatura, como por exemplo o método de elementos finitos, o método de volumes finitos, o método de diferenças finitas, todos tendo suas vantagens e desvantagens de com o problema em questão. Também terá um capítulo somente para os métodos numéricos, iniciando primeiro pelas expansões em série de Taylor de ordem  $N$ , que é um dos polinômios de grau no máximo  $N$  que aproxima localmente a função em volta de um ponto de modo que o erro tenda a zero mais rapidamente, com o propósito de obtermos as aproximações das derivadas presentes na equação de difusão do calor; em seguida, veremos, o método de Euler que é considerado o método mais simples para aproximação de solução de EDO's, que nos possibilita estimar o valor da solução em um ponto com uma determinada distância, ou seja, a diferenças progressivas que será usado neste trabalho, e por fim o método de diferenças finitas que permite a discretização e substituição das derivadas presentes na equação diferencial do calor pelas correspondentes aproximações que envolvem apenas valores numéricos da função. Para todos os casos, é necessária a simulação computacional usando softwares.

Em relação a simulação numérica dos resultados, são muitas as linguagens de programação disponíveis, como exemplos disso: a linguagem R, Python, C, C++, Fortran, Matlab, etc. Para este trabalho, por ser de fácil implementação computacional, foi escolhida a linguagem Matlab para a simulação computacional do fenômeno da difusão do calor.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: A princípio, no Capítulo 2, é dado o fundamento teórico da Equação Diferencial Parcial. Em seguida, no Capítulo 3, apresentamos um breve resumo da teoria do Método das Diferenças Finitas, apresentando o desenvolvimento das aproximações necessárias a serem aplicadas na discretização da equação do calor. Constituindo-se um dos capítulos principais do trabalho, o Capítulo 4 apresenta os resultados numéricos provenientes da simulação computacional do fenômeno de difusão do calor em um e duas dimensões. Finalmente, nas considerações finais, são deixadas sugestões para futuras pesquisas dentro deste assunto.

## **1.1. OBJETIVOS**

### **1.1.1. OBJETIVO GERAL**

Simular numericamente o fenômeno de difusão do calor em um meio bidimensional por equações diferenciais parciais.

### **1.1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Resolver a equação de difusão do calor numericamente usando o método de diferenças finitas;
- Desenvolver um código computacional utilizando o MatLab;
- Representar graficamente os resultados obtidos.

## 2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS: CONCEITOS BÁSICOS

### 2.1. INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Neste capítulo, será apresentado um resumo básico sobre Equações Diferenciais Parciais, dessa forma, dos vários livros e materiais existentes, foram escolhidos (SODRÉ, Ulysses, 2003 e MAGALHÃES, P.M.D) para apresentar as definições, classificações, métodos de soluções e aplicação. Em seguida para dar alguns exemplos de EDPs e classifica-las quanto à ordem, grau, classe e entre outros, foram usados como referências (FORTUNA, 2000 e IORIO Jr; IORIO, V. 2001).

### 2.2. CONCEITOS FUNDAMENTAIS DAS EDPS

#### 2.2.1. EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA

Uma equação diferencial ordinária (EDO) na variável dependente  $y$  e na variável independente  $x$ , é uma equação que pode ser posta na forma

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

onde  $F$  é uma função das variáveis indicadas e pelo menos uma derivada (ordinária) aparece nessa expressão.

#### 2.2.2. EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL

Uma equação diferencial parcial (EDP) na variável dependente  $u$  e nas variáveis independentes  $x$  e  $y$ , é uma equação que poder ser escrita na forma

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$$

onde  $F$  é uma função das variáveis indicadas e pelo menos uma derivada (parcial) aparece nessa expressão.

#### 2.2.3. EXEMPLOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

- Equação da onda:  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$
- Equação do calor:  $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy})$
- $u_x = x + y$

### 2.3. SOLUÇÃO DE UMA EDP

Uma função  $u = f(x, y)$  é solução de uma EDP

$$A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + G(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

no conjunto  $M \subset R^2$ , se:

- (1)  $f \in C^2(M) = f$  é 2 vezes continuamente diferenciável sobre o conjunto  $M \subset R^2$ ;

(2)  $f$  satisfaça à equação diferencial parcial dada.

### 2.3.1. SOLUÇÃO GERAL E SOLUÇÕES PARTICULARES DE UMA EDP

A solução geral  $u = f(x, y)$  de uma EDP no conjunto  $M \subset R^2$  é a solução que engloba todas as soluções validas sobre o conjunto  $M$ , enquanto que, uma solução particular é uma função específica que satisfaz só a EDP dada, com uma condição particular.

#### 2.3.1.1. EXEMPLOS

(1) Verifique que as funções abaixo  $\phi = x^2 - y^2$  são solução da equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

a)  $\phi = x^2 - y^2$

b)  $\phi = \ln(x^2 + y^2)$

Resposta:

a)  $\phi = x^2 - y^2$

Para verificar se a função do item a é solução da equação de Laplace, precisamos encontrar as derivadas tanto de  $x$  quanto de  $y$  e substituir na equação diferencial, chegando assim, no resultado da equação.

2ª derivada em relação à  $x$ :

$$\phi = x^2 \Rightarrow \phi' = 2x \Rightarrow \phi'' = 2$$

2ª derivada em relação à  $y$ :

$$\phi = -y^2 \Rightarrow \phi' = -2y \Rightarrow \phi'' = -2$$

Substituindo na equação de Laplace, temos:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow 2 - 2 = 0$$

$$0 = 0$$

Logo, verificamos que a função do item a é solução da equação de Laplace.

b)  $\phi = \ln(x^2 + y^2)$

Neste caso, por se tratar de uma função composta, precisamos utilizar a Regra da cadeia para calcular as derivadas em relação à  $x$  e em relação  $y$ , e finalmente substituir na equação diferencial parcial.

Fazendo a mudança de variável da função:

$$\phi = \ln \underbrace{(x^2 + y^2)}_u \Rightarrow \phi = \ln u$$

$$u = (x^2 + y^2)$$

Aplicando a regra da cadeia:

$$\phi = \ln u \Rightarrow \phi' = \frac{1}{u}$$

$$u_x = (x^2 + y^2) \Rightarrow u'_x = 2x$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{u} \cdot 2x \Rightarrow$$

Encontramos a primeira derivada em relação à  $x$ :

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2x}{(x^2 + y^2)}$$

Para derivar novamente, precisamos fazer uso da regra do quociente, então:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{2x}{(x^2 + y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{(2x)'(x^2 + y^2) - (2x)(x^2 + y^2)'}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$= \frac{2(x^2 + y^2) - (2x)(2x)}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{2(x^2 + y^2) - 4x^2}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{2x^2 + 2y^2 - 4x^2}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow$$

Encontramos a segunda derivada em relação à  $x$ :

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{-2x^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Agora vamos aplicar a regra da cadeia em relação à  $y$ :

$$\phi = \ln u \Rightarrow \phi' = \frac{1}{u}$$

$$u_y = (x^2 + y^2) \Rightarrow u'_y = 2y$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{u} \cdot 2y \Rightarrow$$

Encontramos a primeira derivada em relação à  $y$ :

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

Derivamos novamente, fazendo uso da regra do quociente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \frac{(2y)'(x^2 + y^2) - (2y)(x^2 + y^2)'}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ &= \frac{2(x^2 + y^2) - (2y)(2y)}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \frac{2x^2 + 2y^2 - 4y^2}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow \end{aligned}$$

Encontramos a segunda derivada em relação à  $y$ :

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{-2y^2 + 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Substituindo as derivadas encontradas na equação diferencial parcial da onda, temos:

$$\frac{-2x^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{-2y^2 + 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

Logo, verificamos que a função do item b é solução da equação de Laplace.

**(2)** Mostre que

$$\phi = \frac{F(x + ct) + F(x - ct)}{2}$$

é solução do problema:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

Solução:

$$\phi = \frac{F(x + ct) + F(x - ct)}{2} \Rightarrow \phi = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{F(x + ct)}_u + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{F(x - ct)}_v$$

$$u = (x + ct)$$

$$v = (x - ct)$$

Atualizando a função:

$$\phi = \frac{1}{2} \cdot F(u) + \frac{1}{2} \cdot F(v)$$

Aplicando a regra da cadeia e derivando em relação à  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial u}(x + ct) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial v}(x - ct) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial u}(x + ct) \cdot (1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial v}(x - ct) \cdot (1) \Rightarrow \end{aligned}$$

Encontramos a primeira derivada de  $x$ :

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial F}{\partial u}(x + ct) + \frac{\partial F}{\partial v}(x - ct) \right]$$

Derivando novamente:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right] \Rightarrow$$

Encontramos a segunda derivada de  $x$ :

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(x + ct) + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(x - ct) \right]$$

Agora aplicando a regra da cadeia e derivando em relação à  $t$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial u}(x + ct) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial v}(x - ct) \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial u}(x + ct) \cdot (c) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial v}(x - ct) \cdot (-c) \Rightarrow \end{aligned}$$

Encontramos a primeira derivada de  $t$ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} \cdot c \left[ \frac{\partial F}{\partial u}(x + ct) - \frac{\partial F}{\partial v}(x - ct) \right]$$

Derivando novamente:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \cdot c \left[ \frac{\partial}{\partial u} \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial v} \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \cdot c \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(x + ct) \cdot (c) - \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(x - ct) \cdot (-c) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \cdot c \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(x + ct) \cdot (c) + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(x - ct) \cdot (c) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{1}{2} c \cdot c \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} (x + ct) + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} (x - ct) \right] \Rightarrow$$

Encontramos a segunda derivada de  $t$ :

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \cdot c^2 \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} (x + ct) + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} (x - ct) \right]$$

Substituindo as derivadas na equação diferencial parcial da onda, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} c^2 \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} (x + ct) + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} (x - ct) \right] \\ &= \frac{1}{2} c^2 \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} (x + ct) + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} (x - ct) \right] \end{aligned}$$

Logo, mostramos que a expressão é solução da equação diferencial parcial da onda.

### 2.3.2. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DAS EDPS

De modo geral, o método mais usado consiste em transformar uma equação diferencial parcial em duas ou mais equações diferenciais ordinárias. Os métodos mais utilizados são:

- **Separação de variáveis:** esta técnica reduz uma EDP com  $n$  variáveis independentes à  $n$  EDO's.
- **Transformadas integrais:** esta técnica reduz uma EDP de  $n$  variáveis a uma EDP com  $(n - 1)$  variáveis.
- **Mudanças de coordenadas:** esta técnica transforma a EDP numa EDP mais simples ou em uma EDO, através de uma mudança das variáveis independentes.
- **Transformação da variável dependente:** esta técnica transforma a variável dependente em uma outra na qual a EDP é mais fácil de se resolver.
- **Métodos numéricos:** são métodos que reduzem uma EDP a um sistema de equações de diferenças que podem ser resolvidas de técnicas computacionais. Na grande maioria dos casos, esta é a única técnica. Além de discretização de uma EDP existem os casos que aproximam as soluções por superfícies polinomiais (spline approximations).
- **Métodos perturbativos:** esses métodos transformam uma EDP não-linear em uma sequência de EDP's lineares que aproximam a equação original.

- **Técnicas impulso-resposta:** esta técnica decompõe as condições iniciais e de fronteira do problema em impulsos simples e acha a resposta para cada impulso. A solução completa é obtida por adição das respostas parciais.
- **Equações integrais:** esta técnica transforma a EDP em uma equação integral. As equações integrais possuem suas próprias técnicas de resolução.
- **Métodos variacionais:** são métodos que reformulam o problema de obtenção da solução em um problema de minimização de certos funcionais, sendo a solução dada pela função minimizante.

### 2.3.3. ORDEM DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL

A ordem de uma equação diferencial parcial é determinada pela ordem da maior derivada que ocorre na equação.

#### 2.3.3.1. EXEMPLOS

- $\frac{\partial \phi}{\partial x} = x + y$ 
  - 1ª ordem
- $\frac{\partial \phi}{\partial x} + a \frac{\partial \phi}{\partial x} = b \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ 
  - 2ª ordem

### 2.3.4. GRAU DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL

O grau é o expoente da maior derivada quando a equação está escrita de uma forma parecida a uma função polinomial, em que as potências fazem o papel das derivadas da ordem respectiva.

#### 2.3.4.1. EXEMPLOS

- $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$ 
  - 1º grau
- $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0$ 
  - 2º grau

## 2.4. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS LINEARES

Uma equação diferencial parcial de 2ª ordem é dita linear quando todos os coeficientes  $A, B, C, D, E,$  e  $F$  da equação dependem das variáveis independentes  $x$  e  $y$ , sobre  $M \subset R^2$ , e se pode ser posta na forma:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0$$

Para todo  $(x, y) \in M$ :

$$A^2(x, y) + B^2(x, y) + C^2(x, y) \neq 0$$

### 2.4.1. EXEMPLOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS LINEARES E NÃO-LINEARES

#### (1) Equações Lineares

- $u_{xx} + u_{yy} - u = 0$
- $u_{tt} - (\alpha + \beta \int |u_x|^2 dx)u_{xx} = 0$

#### (2) Equações não-lineares

- $u u_{xx} + u_{yy} + u = 0$
- $u_{tt} - (u_{xx})^2 + e^u u = 0$

### 2.4.2. HOMOGENEIDADE DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL

Uma EDP é dita não homogênea, quando pode ser escrita da forma:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0$$

onde os coeficientes  $A, B, C, D, E, F$  e  $G$  dependem das variáveis  $x$  e  $y$ , da função em questão ou das derivadas de primeira ordem, e além disso o coeficiente  $G(x, y) \neq 0$  na EDP considerada mais geral. Se  $G(x, y) = 0$  consideramos que a EDP é homogênea.

#### 2.4.2.1. EXEMPLOS DE EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS

- $\frac{\partial \phi}{\partial x} + a \frac{\partial \phi}{\partial x} = b \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ 
  - Homogênea
- $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ 
  - Homogênea

#### 2.4.2.2. EXEMPLOS DE EQUAÇÕES NÃO-HOMOGÊNEAS

- $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = e^x$ 
  - Não-homogênea

- $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = f(x, y)$ 
  - Não-homogênea

## 2.5. CLASSIFICAÇÃO DAS EDPS LINEARES

### 2.5.1. DISCRIMINANTE DE UMA EDP LINEAR DO SEGUNDO GRAU

Considerando a EDP linear

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0$$

onde os coeficientes são as funções A, B, C, D, E, e F tal que

$$A^2(x, y) + B^2(x, y) + C^2(x, y) \neq 0$$

e  $G = G(x, y)$  é uma função real definida sobre  $M \subset \mathbb{R}^2$ . Associada a esta EDP, construímos a equação diferencial ordinária:

$$A(x, y)(dy)^2 - B(x, y)(dx)(dy) + C^2(x, y)(dx)^2 = 0$$

Observe que o coeficiente  $B = B(x, y)$  é negativo. O discriminante dessa EDP é dado por:

$$\Delta = \Delta(x, y) = B(x, y)^2 - 4A(x, y)C(x, y)$$

### 2.5.2. TIPOS DE EDPS LINEARES

A classificação de uma EDP é determinada pelo valor do discriminante da EDP. Isto, é:

- Hiperbólica se  $\Delta = B^2 - 4.A.C < 0$
- Parabólica se  $\Delta = B^2 - 4.A.C = 0$
- Elíptica se  $\Delta = B^2 - 4.A.C > 0$

### 2.5.3. EXEMPLOS CLASSIFICADOS

- $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = e^x$ 
  - 2ª ordem
  - 1º grau
  - Bidimensional
  - Não-homogênea
  - Hiperbólica

- Linear
- $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0$ 
  - 3ª ordem
  - 2º grau
  - Bidimensional
  - Homogênea
  - Parabólica
  - Linear
- $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ 
  - 2ª ordem
  - 1º grau
  - Unidimensional
  - Homogênea
  - Parabólica
  - Linear
- $x^3 \frac{\partial u}{\partial x} - u^3 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^5 + t^4$ 
  - 2ª ordem
  - 1º grau
  - Bidimensional
  - Não-homogênea
  - Parabólica
  - Não-linear

## 2.6. PROBLEMAS DE CONDIÇÕES INICIAIS OU DE CONTORNO

Um problema de condições iniciais ou de contorno para uma EDP de 2ª ordem da forma:

$$A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + G(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

é aquele pretende obter uma solução  $u = u(x, y)$  para a equação dada sobre o conjunto  $M \subset R^2$  de modo que a função  $u = u(x, y)$  satisfaça a algumas condições iniciais ou de contorno dadas por funções conhecidas.

### 2.6.1. EXEMPLO DE PVI COM CONDIÇÕES DE CONTORNO

Um típico problema com condições iniciais de contorno para uma EDP do calor é:

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} \\ u(x, 0) &= T_0, & u_t(x, 0) &= \sin(x) \\ u(0, t) &= T_1, & u(a, t) &= T_2. \end{aligned}$$

## 2.7. APLICAÇÕES DAS EDPS

- Equações elípticas servem para descrever fenômenos em regime permanente.
- Equações parabólicas servem para descrever fenômenos de difusão.
- Equações hiperbólicas servem para descrever fenômenos ondulatórios

### 2.7.1. APLICAÇÃO DO MÉTODO DE FOURIER À EQUAÇÃO DA ONDA

Seja  $u(x, t) = X(x) T(t)$ , onde  $X = X(x)$  e  $T = T(t)$  são funções 2 vezes continuamente diferenciáveis e não nulas, pois se fossem nulas não poderiam satisfazer às condições iniciais. Desse modo:

$$u_{xx} = X''(x)T(t) \text{ e } u_{tt} = X(x)T''(t)$$

Substituindo estas derivadas na equação diferencial parcial dada, poderemos escrever:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)}$$

Como cada membro da igualdade acima somente depende de respectiva variável do próprio termo, segue que existe uma constante  $\lambda \in R$  tal que:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda$$

O que garante que podemos separar estas relações em duas Equações Diferenciais Ordinárias:

$$\begin{aligned} X''(x) &= \lambda X(x) & 0 < x < \pi \\ T''(t) &= \lambda a^2 T(t) & t > 0 \end{aligned}$$

Usaremos agora as condições de contorno para obter os autovalores e autovetores (autofunções). Como  $u(0, t) = 0$  e  $u(\pi, t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ , então:

$$X(0) T(t) = 0 = X(\pi) T(t)$$

Como os produtos acima se anulam, ou  $X(0) = 0$  ou  $T(t) = 0$  para todo  $t > 0$  e como  $T = T(t)$  não pode ser identicamente nula, pois isto implicaria que  $u(x, t) = 0$ , então:

$$X(0) = 0 \text{ e } X(\pi) = 0$$

e caímos num PVI para uma Equação Diferencial Ordinária de segunda ordem:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \quad X(0) = X(\pi) = 0$$

Este tipo de Problema com valores iniciais em que a equação diferencial ordinária depende de um parâmetro  $\lambda \in R$ . Analisaremos os três casos possíveis:

- a) Se  $\lambda = 0$ , a Equação Diferencial Ordinária fica simplificada na forma  $X''(x) = 0$  e a sua solução geral é:

$$X(x) = Ax + B$$

Como  $X(0) = X(\pi) = 0$  então  $X(x) \equiv 0$  e esta solução não serve ao problema pois ela implica que  $u(x, t) = 0$ .

- b) Se  $\lambda > 0$ , para facilitar os nossos cálculos, tomaremos  $\lambda = \sigma^2$  onde  $\sigma > 0$  e a solução geral de  $X''(x) - \sigma^2 X(x) = 0$  poderá ser dada por:

$$X(x) = Ae^{\sigma x} + Be^{-\sigma x}$$

Como  $X(0) = X(\pi) = 0$  então  $X(x) \equiv 0$  e esta solução também não serve pois implica que  $u(x, t) = 0$ .

- c) Se  $\lambda < 0$ , tomaremos  $\lambda = -\sigma^2$  onde  $\sigma > 0$  e a solução geral de  $X''(x) + \sigma^2 X(x) = 0$  pode ser dada por:

$$X(x) = A \sin(\sigma x) + B \cos(\sigma x)$$

Esta relação implica que  $A = 0$  ou que  $\sin(\sigma x) = 0$ .

Se  $A = 0$ , a solução será  $X(x) \equiv 0$  e esta não servirá ao problema, logo devemos exigir que  $\sin(\sigma x) = 0$ , o que é verdadeiro para todo  $\sigma = k \in N$ .

Reunindo todas as informações deste caso, podemos concluir que, se  $k \in N$ , as funções

$$X_k(x) = \sin(kx)$$

São soluções (autofunções) da equação diferencial ordinária sujeita às condições iniciais.

Como os únicos valores possíveis para  $\lambda$  são aqueles para os quais  $\lambda = -k^2$  onde  $k \in N$ , também deveremos usar estes mesmos valores para a equação diferencial ordinária

$$T''(t) + k^2 a^2 T(t) = 0$$

As soluções obtidas para cada  $k = 1, 2, 3, \dots$ , serão:

$$T_k(t) = A_k \cos(kat) + B_k \sin(kat)$$

onde  $A_k$  e  $B_k$  são constantes arbitrárias.

Já obtivemos as autofunções para os problemas nas variáveis  $x$  e  $t$ , logo, cada autofunção para a EDP terá a forma:

$$u_k(x, t) = \sin(kx) [A_k \cos(kat) + B_k \sin(kat)]$$

onde  $k \in N$  e para todo  $t \geq 0$ , cada autofunção satisfaz às condições:

$$u_k(0, t) = u_k(\pi, t) = 0$$

As condições iniciais  $u(x, 0) = p(x)$  e  $u_t(x, 0) = q(x)$ , indicam que nenhuma das autofunções  $u_k = u_k(x, t)$  pode satisfazer a estas condições. Usaremos uma combinação linear com infinitos termos da forma  $u_k = u_k(x, t)$  para ser a solução, isto é:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t)$$

Ou seja

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx) [A_k \cos(kat) + B_k \sin(kat)]$$

onde  $A_k$  e  $B_k$  são coeficientes que serão determinados em função das funções  $p = p(x)$  e  $q = q(x)$ . Pelas condições iniciais, temos que:

$$p(x) = u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx) \quad (3)$$

e como  $p = p(x)$  possui um desenvolvimento em série de Fourier de senos, segue que a função  $p = p(x)$  será ímpar ou terá uma extensão ímpar. Multiplicando ambos os membros de (3) por  $\sin(mx)$ , assumindo que esta série seja uniformemente convergente e integrando ambos os membros desta expressão no intervalo  $[-\pi, \pi]$ , teremos para todo  $k \in N$ :

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(x) \sin(kx) dx$$

de forma análoga, podemos escrever:

$$u_t(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx) [-kaA_k \sin(kat) + kaB_k \cos(kat)]$$

e para  $t = 0$  teremos:

$$q(x) = u_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} kaB_k \sin(kx) \quad (4)$$

e como esta função  $q = q(x)$  possui um desenvolvimento em senos, então ela é ímpar ou possui uma extensão ímpar, logo multiplicando ambos os membros de (4) por  $\sin(mx)$ , assumindo que esta série seja uniformemente convergente e integrando no intervalo  $[-\pi, \pi]$ , teremos:

$$B_k = \frac{1}{ka\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q(x) \sin(kx) dx$$

Para todo  $k = 1, 2, 3, \dots$ , assim temos que:

$$u_k(x, t) = \sin(kx)[A_k \cos(kat) + B_k \sin(kat)]$$

então a solução formal para a equação diferencial parcial sujeita às condições dadas inicialmente será dada por:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)[A_k \cos(kat) + B_k \sin(kat)]$$

que também pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx) \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(x) \sin(kx) dx \right] \cos(kat) \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx) \left[ \frac{1}{kat} \int_{-\pi}^{\pi} q(x) \sin(kx) dx \right] \sin(kat) \end{aligned} \quad (5)$$

Há alguns detalhes não tão simples que ainda devemos mostrar:

- Que a série (5) apresentada acima, converge uniformemente para a função  $u = u(x, t)$ ;
- Que  $p = p(x)$  e  $q = q(x)$  são funções integráveis;
- Que  $p = p(x)$  e  $q = q(x)$  são funções duas vezes continuamente diferenciáveis na região sob análise.

**OBSERVAÇÃO:** Este mesmo procedimento pode ser feito para a equação de difusão do calor.

### 3. SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS: MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS.

#### 3.1. POLINÔMIO DE TAYLOR DE ORDEM $N$

Seja  $f$  derivável até a ordem  $n$  no intervalo  $I$  e seja  $x_0 \in I$ . O polinômio

$$f(x) = f(x_0) + (\Delta x) \frac{df}{dx} \Big|_{x_0} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_{x_0} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} \Big|_{x_0} + \dots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n} \Big|_{x_0} \quad 3.1$$

denomina-se polinômio de Taylor, de ordem  $n$ , de  $f$  em volta de  $x_0$ .

O polinômio de Taylor, de ordem  $n$ , de  $f$  em volta de  $x_0$  é o único polinômio de grau no máximo  $n$  que aproxima localmente  $f$  em volta de  $x_0$  de modo que o erro  $R_N$  tenda a zero mais rapidamente que  $(\Delta x)^n$ , quando  $x \rightarrow x_0$  (GUIDORIZZI).

Onde  $\Delta x = x - x_0$  e  $R_N$  é o resto, que definimos como:

$$R_N = \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n} \Big|_{x_0}, \quad x_0 \in I \quad 3.2$$

##### 3.1.1. EXEMPLO

a) Determine o polinômio de Taylor, de ordem 3, da  $f(x) = \ln x$ , em volta de  $x_0 = 1$ .

Solução:

$$f(x) = f(1) + (\Delta x) \frac{df}{d1} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f}{d1^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3 f}{d1^3}$$

$$f(x) = \ln x \quad \Rightarrow f(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow f'(1) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow f''(1) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \quad \Rightarrow f'''(1) = 2$$

Assim,

$$f(x) = (\Delta x) - (\Delta x)^2 \frac{1}{2!} + (\Delta x)^3 \frac{1}{3!}$$

### 3.2. O MÉTODO DE EULER

Euler em 1768, usando diferenças progressivas, desenvolveu uma aproximação que posteriormente descobriu-se tratar-se de um método numérico pertencente à classe dos métodos de passo múltiplo. Esse método é conhecido hoje como Método de Euler. É considerado o método mais simples para aproximação da solução de EDO's (CUMINATO E MENEGUETTE).

Considere o seguinte problema de valor inicial de primeira ordem:

$$y' = \frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad y(t_0) = y_0$$

A solução deste PVI passa obrigatoriamente pelo ponto  $(t_0, y_0)$ . O objetivo do método de Euler é estimar o valor da solução  $y(t)$  em um ponto com uma distância  $\Delta t$  do ponto inicial  $t_0$ . Este ponto passa a ser chamado de  $t_1 = t_0 + \Delta t$ , de modo que o método de Euler é determinar o valor da solução em  $t_1$ ,  $y_1 = y(t_1)$ . A partir deste valor, pode-se estimar o valor da função em um ponto  $t_2$  distante  $\Delta t$  do ponto  $t_1$  e continuar com este procedimento até se obter uma aproximação para a solução por quantos pontos forem necessários. Essas classes de métodos são chamados de métodos passo-a-passo. Para avaliar o termo  $y_1 = y(t_0 + \Delta t)$ , pode-se aplicar uma expansão em série de Taylor em torno do ponto  $t_0$ :

$$y(t_1) = y(t_0 + \Delta t) = y_0 + \Delta t y'(t_0) + \frac{\Delta t^2}{2!} y''(t_0) + \frac{\Delta t^3}{3!} y'''(t_0) + \dots \quad 3.3$$

Considerando que o espaçamento  $\Delta t$  seja muito pequeno, os termos  $\Delta t^2, \Delta t^3$ , etc. podem ser desprezados. Com isso:

$$y(t_0 + \Delta t) = y_1 \approx y_0 + \Delta t y'(t_0)$$

Considerando também que  $y' = f(t, y)$ , a relação anterior pode ser reescrita como:

$$y_1 = y_0 + \Delta t f(t_0, y_0)$$

De forma geral, a relação anterior pode ser utilizada para estimar a solução para qualquer valor  $y_{n+1}$  com base no valor para  $y_n$ :

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f(t_n, y_n) \quad 3.4$$

Como o valor no novo ponto  $y_{n+1}$  é calculado com base somente em valores no ponto anterior, esse método é dito explícito.

Utilizando a inclinação da reta tangente no próprio ponto  $n + 1$ . Dará origem ao método de Euler implícito, ou também conhecido como inverso ou regressivo.

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f(t_{n+1}, y_{n+1}) \quad 3.5$$

Como a variável  $y_{n+1}$  aparece nos dois lados da igualdade, significa que a variável  $y_{n+1}$  depende implicitamente dela mesma. Logo, temos o método de Euler implícito (Fontana, 2018).

### 3.3.1. EXEMPLO

a) Utilizando o método de Euler, obtenha a solução aproximada até  $t = 0.5$  para o seguinte PVI, utilizando  $\Delta t = 0.1$ :

$$\frac{dy}{dt} = -2t - y \quad y(0) = -1$$

Neste caso  $f(t, y) = -2t - y$ . No ponto inicial temos:

$$t_0 = 0 \quad y_0 = -1$$

Como o passo  $\Delta t$  é constante, os valores de  $t_n$  são automaticamente definidos,  $t_1 = t_0 + \Delta t = 0.1, t_2 = t_1 + \Delta t = 0.2, \dots$

Avaliando  $y_1 = y(t_1) = y(0.1)$ :

$$y_1 = y_0 + \Delta t f(t_0, y_0) = -1 + 0.1(-2 \times 0 - (-1)) = -0.9$$

Repetindo para os próximos passos:

$$y_2 = y_1 + \Delta t f(t_1, y_1) = -0.9 + 0.1(-2 \times 0.1 - (-0.9)) = -0.83$$

$$y_3 = y_2 + \Delta t f(t_2, y_2) = -0.83 + 0.1(-2 \times 0.2 - (-0.83)) = -0.787$$

$$y_4 = y_3 + \Delta t f(t_3, y_3) = -0.787 + 0.1(-2 \times 0.3 - (-0.787)) = -0.7683$$

$$y_5 = y_4 + \Delta t f(t_4, y_4) = -0.7683 + 0.1(-2 \times 0.4 - (-0.7683)) = -0.77147$$

Para comparação, a solução exata da equação diferencial é:

$$y(t) = -3e^{-t} - 2t + 2$$

sendo que para os pontos avaliados a solução exata é:

$$y_0 = -1 \quad y_1 = -0.9145 \quad y_2 = -0.85619 \quad y_3 = -0.8224$$

$$y_4 = -0.8109 \quad y_5 = -0.81959$$

### 3.3. ERRO ASSOCIADO AO MÉTODO DE EULER

A utilização de métodos numéricos sempre leva à obtenção de soluções aproximadas. Uma importante propriedade dos métodos numéricos é a convergência. Um

método é dito convergente quando a solução obtida tende à solução exata quando o espaçamento  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Na resolução de EDO's pelo método de Euler (ou por qualquer outro método), existem duas fontes de erros.

- Erros de truncamento: erros associados com o truncamento da expansão em série de Taylor no segundo termo. Como a determinação do ponto  $y_{n+1}$  depende do valor de  $y_n$ , o erro de truncamento pode aumentar rapidamente ao longo da resolução. Para reduzir os erros de truncamento, pode-se reduzir o passo de tempo  $\Delta t$ .

- Erros de arredondamento: erro associado à precisão dos valores numéricos utilizados (número de dígitos significativos: 6-9 para precisão única e 15-17 para precisão dupla). Quanto maior for o número de operações necessárias, maior será o erro de arredondamento.

Assim, uma maneira de reduzir este erro é aumentar o passo de tempo, de modo que menos passos precisam ser resolvidos para chegar no tempo desejado.

Dessa forma, conforme o passo de tempo aumenta, o erro de arredondamento diminui e o de truncamento aumenta. Por isso, existe um ponto onde o erro total é mínimo. Usualmente os erros de arredondamento são poucos significativos, por esse motivo, a tendência é que os passos pequenos gerem melhores resultados.

Como visto, anteriormente, pode-se obter o valor de uma função  $y(t)$  em um ponto  $t_{n+1}$  com base no valor de  $t_n$  através de uma expansão série de Taylor. A diferença entre o valor exato de  $y_{n+1}$  e o valor aproximado obtido com o uso do método de Euler corresponde ao erro local de truncamento (para um determinado valor de  $n$ ):

$$e_{n+1} = \frac{\Delta t^2}{2!} y''(t_n) + \frac{\Delta t^3}{3!} y'''(t_n) + \dots \quad 3.6$$

Nesta forma, o erro ainda representa uma série infinita. Para evitar esse problema pode-se utilizar a formula de Taylor com o resto de Lagrange:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t y'(t_n) + \frac{\Delta t^2}{2!} y''(c) \quad 3.7$$

onde  $c \in [t_n, t_{n+1}]$ . Este resultado é uma extensão do teorema do valor médio, que diz que dada uma função contínua  $f$  definida um intervalo fechado  $[a, b]$  e diferenciável em  $(a, b)$ , existe um ponto  $c$  em  $(a, b)$  tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Utilizando a relação anterior, o erro  $e_{n+1}$  pode ser avaliado como:

$$e_{n+1} = \frac{y''(c)}{2} \Delta t^2 \quad 3.8$$

Como  $y''(c)$  é uma constante, temos que:

$$e_{n+1} = O(\Delta t^2)$$

ou seja, o erro local é da ordem de  $\Delta t^2$ .

Como cada passo gera um erro local, quanto mais passos forem utilizados, maior será o acúmulo de erros. Por isso, quando o valor  $y_{n+1}$  estiver sendo determinado, o associado à determinação do valor de  $y_n$  também deve ser considerado. Para  $n$  passos, o erro global  $E_n$  pode ser avaliado como:

$$E_{n+1} = e_{n+1} \cdot n = O(h^2) \frac{n \cdot h}{h} = O(h)t_n \quad 3.9$$

onde  $h = \Delta t$ . Novamente, como  $t_n$  é uma escalar:

$$E_{n+1} = O(h) \quad 3.10$$

Assim, o erro global do método de Euler é da ordem do tamanho do passo utilizado. Esta relação mostra que o erro tende a zero conforme  $h \rightarrow 0$  e portanto o método é convergente. De forma geral, um dado método é convergente quando:

$$E_{n+1} = O(h) \quad p > 0$$

Neste caso, o método possui ordem  $p$ , portanto, o método de Euler é um método de primeira ordem. Métodos com ordem superior convergem mais rápido para a solução exata, sendo por isso mais indicados que os métodos de primeira ordem.

### 3.4. MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

A ideia geral do método de diferenças finitas é a discretização do domínio e a substituição das derivadas presentes na equação diferencial por aproximações envolvendo somente valores numéricos da função. Na prática substitui-se as derivadas pela razão incremental que converge para o valor da derivada quando o incremento tende a zero. Dizemos então que o problema foi discretizado. Quando o domínio tem mais de uma variável, a ideia acima é aplicada para cada uma delas separadamente (CUMINATO E MENEGUETTE).

#### 3.4.1. EXPANSÕES EM SÉRIE DE TAYLOR UNIDIMENSIONAL

Inicialmente, a ferramenta básica para o cálculo é a expansão em série de Taylor que nos permite obter as aproximações da primeira e segunda derivada da função  $f$ .

Supondo que a função  $f$  seja contínua no intervalo  $[a, b]$  de interesse e que possua derivadas até a ordem  $N$  contínuas nesse intervalo, o Teorema de Taylor nos permite escrever, para todo ponto  $x \in [a, b]$ ,

$$f(x) = f(x_0) + (\Delta x) \frac{df}{dx} \Big|_{x_0} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_{x_0} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} \Big|_{x_0} + \dots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n} \Big|_{x_0}$$

onde  $\Delta x = x - x_0$  e o resto é definido como:

$$R_N = \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n} \Big|_{x_0}, x_0 \in I$$

Considere a figura 1, que nos mostra alguns pontos de uma malha unidimensional.

Os pontos são espaçados uniformemente de  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ .

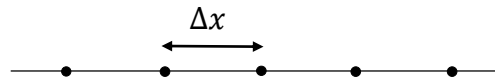


Figura 1. Malha de pontos uniformemente espaçados.

Queremos determinar a primeira derivada de uma função  $f$  no ponto  $x_i = i\Delta x$ , a qual será denotada por  $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i$ . Expandindo  $f(x_i + \Delta x)$  em série de Taylor em torno do ponto  $x_i$ , temos:

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_i + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad 3.11$$

em que "..." indica os termos restantes da série de Taylor até o resto  $R_N$ . Para garantir a existência das expansões em série de Taylor, ao longo deste texto  $N$  será considerado sempre maior que a maior ordem das derivadas que aparecem nessas expansões.

Isolando a primeira derivada e o espaçamento  $\Delta x$ , podemos escrever:

$$\begin{aligned} (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i &= f(x_i + \Delta x) - f(x_i) + \left[ -\frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_i + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_i - \dots \right] \\ \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i &= \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{(\Delta x)} + \left[ -\frac{(\Delta x)}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_i + \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_i - \dots \right] \end{aligned} \quad 3.12$$

Note que, para isolarmos  $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_i$ , todos os termos da série de Taylor foram divididos pelo espaçamentos  $\Delta x$ .

A expressão 3.12 indica que a primeira derivada é igual ao quociente

$$\frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} \quad 3.13$$

mais os termos da série de Taylor até o  $R_N$ :

$$ELT = \left[ -\frac{(\Delta x)}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_i - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\Big|_i - \dots \right] \quad 3.14$$

Ao conjunto desses termos é chamado de Erro Local Truncamento (ELT). Esse erro aparece devido à utilização de um número finito de termos na série de Taylor. Como não podemos tratar os infinitos termos dessa série na aproximação numérica para a derivada de  $f$ , a série foi truncada a partir da derivada de segunda ordem.

Será visto a seguir, que o ELT nos fornece uma medida da diferença entre o valor exato da derivada e sua aproximação numérica, indicando também como essa diferença varia com a redução do espaçamento  $\Delta x$ , isso é, com o refinamento da malha. Como as derivadas da série de Taylor até ordem  $N$  são contínuas no intervalo  $[a, b]$ , existe  $M > 0$  tal que:

$$\left| \frac{\partial^j f}{\partial x^j} \right| \leq M, \quad 1 \leq j \leq N \quad 3.15$$

considerando  $0 < \Delta x < 1$ , podemos supor que o termo dominante do ELT será o primeiro, ou seja, aquele com a menor potência de  $\Delta x$ . Assim, consideramos o primeiro termo do ELT como o que exercerá a maior influência sobre a solução numérica,

$$\begin{aligned} |ELT| &\leq M \left[ \frac{(\Delta x)}{2!} + \frac{(\Delta x)^2}{3!} + \dots \right] = M\Delta x \left[ \frac{1}{2} + \frac{(\Delta x)}{3!} + \dots \right] = \\ &= M\Delta x S(\Delta x) \leq MP\Delta x \end{aligned} \quad 3.16$$

em que  $P < 0$  é o maior valor em módulo da função  $S$  no intervalo aberto  $(0,1)$ . Finalmente, definindo  $K = MP$ , podemos escrever:

$$|ELT| \leq K\Delta x \quad 3.17$$

A expressão 3.17 para o limitante superior do ELT sugere que esse erro decresce linearmente com a redução do espaçamento  $\Delta x$ .

Portanto, para  $\Delta x$  suficientemente pequeno, o erro na aproximação numérica da derivada de  $f$  reduzido de forma linear proporcionalmente ao espaçamento utilizado. Assim, para reduzir o erro por quatro, devemos utilizar um espaçamento  $\frac{1}{4}$  do original, portanto, quatro vezes mais pontos na malha. Desta forma, os termos do ELT 3.14 serão representados por  $O(\Delta x)$  (“ordem  $\Delta x$ ”), pois  $\Delta x$  em 3.17 está elevado à primeira potência. Devemos notar que uma expressão do tipo  $O(\Delta x)$  só indica como o Erro Local de Truncamento varia com o refinamento da malha e não o valor do erro.

Podemos simplificar a notação se escrevemos  $f_i$  para  $f(x_i)$  ou, em geral,  $f_{i\pm k}$  para  $f(x_i \pm k\Delta x)$ . Com isso, expressão 3.12 se torna

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad 3.18$$

A expressão 3.18 é uma equação de diferenças finitas que representa uma aproximação de primeira ordem para satisfazer a primeira derivada de  $f$ , utilizando diferenças progressivas.

Uma segunda aproximação de diferenças finitas pode ser obtida através de expansão em série de Taylor de  $f(x_i - \Delta x)$  também em torno do ponto  $x_i$ :

$$f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - (\Delta x) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i + O(\Delta x)^3 \quad 3.19$$

Isolando a primeira derivada e o espaçamento  $\Delta x$ , obtemos:

$$(\Delta x) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = f_i - f_{i-1} + O(\Delta x)$$

Dividindo a expressão pelo espaçamento  $\Delta x$ , temos:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{(\Delta x)} + O(\Delta x) \quad 3.20$$

Que é uma outra aproximação de primeira ordem para a primeira derivada de  $f$ . O que diferencia a expressão 3.18 e a expressão 3.19, é que faz-se uso de um ponto adiante de  $x_i$ , ou seja,  $x_{i+1}$  e um ponto atrás de  $x_i$ , ou seja,  $x_{i-1}$ , respectivamente. Por esse motivo, e expressão 3.19 é considerada uma aproximação por diferenças atrasadas.

Agora podemos obter uma aproximação de  $O(\Delta x)^2$  para a primeira derivada de  $f$ , manipulando convenientemente as expansões em série de Taylor:

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + (\Delta x) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i + O(\Delta x)^3$$

$$f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - (\Delta x) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i + O(\Delta x)^3$$

Como queremos uma aproximação de segunda ordem, devemos combinar as expansões 3.11 e 3.19 fazendo com que elimine a segunda derivada de  $f$ . Essa derivada é eliminada ao calcularmos:

$$f(x_i + \Delta x) - f(x_i - \Delta x) = 2\Delta x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + O(\Delta x)^3 \quad 3.21$$

Isolando a primeira derivada e o espaçamento  $\Delta x$ , temos:

$$(2\Delta x) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = f_{i+1} - f_{i-1} + O(\Delta x)^2$$

Isolando somente a primeira derivada, obtemos:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{(2\Delta x)} + O(\Delta x)^2 \quad 3.22$$

Observe que a aproximação dada pela expressão 3.22 utiliza os pontos  $x_{i-1}$  e  $x_{i+1}$  para o cálculo da primeira derivada de  $f$  no ponto central. Por esse motivo, ela é denominada aproximação por diferenças centrais.

Em resumo, as três fórmulas para a primeira derivada de  $f$  deduzidas anteriormente, a partir da expansão em série de Taylor, são:

$$\text{Diferenças atrasadas} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

$$\text{Diferenças centrais} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2$$

$$\text{Diferenças progressivas} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

Para expressões das derivadas de ordem maiores que 1, podemos construir da mesma forma que foram obtidas as fórmulas para as primeiras derivadas, ou seja, através da manipulação da série de Taylor.

Vamos determinar uma aproximação de diferenças centrais de segunda ordem para a segunda derivada de  $f$ . Pois essa é a única aproximação que vai nos interessar. Apesar disto, como contribuição a mais para o trabalho, também iremos determinar as aproximações de diferenças progressivas e atrasadas de segunda ordem para a segunda derivada.

Para encontrarmos as aproximações de diferenças progressivas e atrasadas de segunda ordem, precisaremos manipular as expansões de  $f(x_i \pm \Delta x)$ ,  $f(x_i \pm 2\Delta x)$  e  $f(x_i \pm 3\Delta x)$ . Tomamos os sinais positivos para a aproximação progressiva e os negativos para a atrasada. Assim:

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \Delta x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i + \frac{(\Delta x)^3}{6} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i + O(\Delta x)^4 \quad 3.23$$

$$f(x_i + 2\Delta x) = f(x_i) + 2\Delta x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + 2(\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i + \frac{4(\Delta x)^3}{3} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i + O(\Delta x)^4 \quad 3.24$$

$$f(x_i + 3\Delta x) = f(x_i) + 3\Delta x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + \frac{9(\Delta x)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i + \frac{9(\Delta x)^3}{2} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i + O(\Delta x)^4 \quad 3.25$$

Multiplicando a expansão 3.23 por -2, temos:

$$-2f(x_i + \Delta x) = -2f(x_i) - 2\Delta x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i - (\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i - \frac{(\Delta x)^3}{3} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i + O(\Delta x)^4$$

$$f(x_i + 2\Delta x) = f(x_i) + 2\Delta x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + 2(\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i + \frac{4(\Delta x)^3}{3} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i + O(\Delta x)^4$$

Somando ambas as expansões, obtemos:

$$-2f(x_i + \Delta x) + f(x_i + 2\Delta x) = -f(x_i) + (\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i + (\Delta x)^3 \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i + O(\Delta x)^4 \quad 3.26$$

Agora iremos multiplicar a expansão 3.23 por -3:

$$-3f(x_i + \Delta x) = -3f(x_i) - 3\Delta x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i - \frac{3(\Delta x)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i - \frac{(\Delta x)^3}{2} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i + O(\Delta x)^4$$

$$f(x_i + 3\Delta x) = f(x_i) + 3\Delta x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + \frac{9(\Delta x)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i + \frac{9(\Delta x)^3}{2} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i + O(\Delta x)^4$$

Somando ambas as expansões, temos:

$$-3f(x_i + \Delta x) + f(x_i + 3\Delta x) = -2f(x_i) + 3(\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i + 4(\Delta x)^3 \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i + O(\Delta x)^4 \quad 3.27$$

Multiplicando a expansão 3.26 por menos -4:

$$8f(x_i + \Delta x) - 4f(x_i + 2\Delta x) = 4f(x_i) - 4(\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i - 4(\Delta x)^3 \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i + O(\Delta x)^4$$

$$-3f(x_i + \Delta x) + f(x_i + 3\Delta x) = -2f(x_i) + 3(\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i + 4(\Delta x)^3 \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i + O(\Delta x)^4$$

Somando as duas expansões:

$$5f(x_i + \Delta x) - 4f(x_i + 2\Delta x) + f(x_i + 3\Delta x) = 2f(x_i) - (\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i + O(\Delta x)^4 \quad 3.28$$

Isolando a segunda derivada, temos:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{2f_i - 5f_{i+1} + 4f_{i+2} - f_{i+3}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad 3.29$$

que é a aproximação de diferenças progressivas de segunda ordem da segunda derivada de  $f$ . De forma análoga, podemos encontrar a aproximação de diferenças atrasadas manipulando as expansões de  $f(x_i - \Delta x)$ ,  $f(x_i - 2\Delta x)$  e  $f(x_i - 3\Delta x)$ , então:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{2f_i - 5f_{i-1} + 4f_{i-2} - f_{i-3}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad 3.30$$

que é a aproximação de diferenças atrasadas de segunda ordem da segunda derivada de  $f$ .

Agora utilizando as expansões 3.11 e 3.19, vamos combiná-las, fazendo com que a primeira derivada de  $f$  seja eliminada, pois queremos a segunda derivada, as derivadas de ordem maior que 2 farão parte do ELT. Então:

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \Delta x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i + \frac{(\Delta x)^3}{6} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i + O(\Delta x)^4$$

$$f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - (\Delta x) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i - \frac{(\Delta x)^3}{6} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i + O(\Delta x)^4$$

somando ambas as expansões:

$$f(x_i + \Delta x) + f(x_i - \Delta x) = 2f(x_i) + 2 \left[ \frac{(\Delta x)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i \right] + O(\Delta x)^4$$

$$f(x_i + x\Delta) + f(x_i - \Delta x) = 2f(x_i) + (\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i + O(\Delta x)^4$$

Isolando a segunda derivada, temos:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad 3.31$$

que é a aproximação de diferenças centrais para a segunda derivada de  $f$ .

### 3.4.2. EXPANSÃO EM SÉRIE DE TAYLOR BIDIMENSIONAL

As expressões que mostramos no decorrer do tópico 3.5.1 são expansões utilizadas na equação do calor unidimensional, mas que também servem para funções com mais de uma variável, que iremos mostrar a partir de agora.

Queremos obter uma expressão envolvendo duas variáveis  $(x, y)$  variando em  $f$ , simultaneamente, onde o índice  $i$  representará a coordenada  $x$  e o índice  $j$  estará representando a coordenada  $y$ , então faremos uso da expansão em série de Taylor de funções de duas variáveis, dada por:

$$\begin{aligned}
& f(x_i + \Delta x, y_i + \Delta y) \\
&= f(x_i, y_i) + (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i,j} + (\Delta y) \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{i,j} + 2 \frac{(\Delta x)(\Delta y)}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{i,j} \\
&+ \frac{(\Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{i,j} + R_N
\end{aligned}$$

em que  $R_N$  é o resto.

Para obtermos a aproximação desejada, levamos em consideração o que foi feito anteriormente na sessão 3.5.1, pois segue o mesmo raciocínio, com apenas uma exceção, a qual faremos uso de duas variáveis, expandiremos a função nos pontos  $x_i, y_i$ , e obtemos as aproximações.

Expansão para o ponto  $x_i$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} - f_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad 3.32$$

Expansão para o ponto  $y_i$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} - f_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} + O(\Delta y)^2 \quad 3.33$$

que é as aproximações de diferenças centrais bidimensionais para segunda derivada de  $f$ .

### 3.4.3. MALHA DE UMA APROXIMAÇÃO BIDIMENSIONAL

No contexto de expressões de diferenças finitas, o estêncil ou molécula, de uma aproximação é indicada por uma figura que mostra a posição relativa dos pontos presentes em uma EDP. Isso nos permite uma visualização melhor da dependência entre eles, tanto nas coordenadas espaciais como na temporal, que veremos adiante na figura 2. Para uma EDP contendo apenas derivadas espaciais, discretizada em uma malha uniforme, por diferenças centrais de segunda ordem.

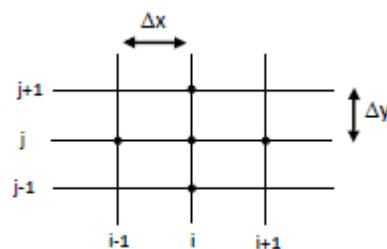


Figura 2. Malha de uma EDP bidimensional.

### 3.5. DISCRETIZAÇÃO UNIDIMENSIONAL DA EQUAÇÃO DO CALOR

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad 3.34$$

A partir dos valores iniciais das grandezas em  $t_0$ , problemas transientes exigem o cálculo da solução de EDP em intervalos sucessivos de tempo  $\Delta t$  até o instante final  $t_f$ :  $t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, t_0 + 3\Delta t, \dots, t_f - \Delta t, t_f$ .

Suponhamos que queremos resolver a equação transiente do calor, ilustrada no início deste tópico. Em uma barra delgada, discretizada utilizando  $IM + 1$  pontos. O coeficiente de difusividade térmica do material é  $\alpha$ . Para entendermos melhor a discretização, vamos ilustrar do estêncil da expressão que iremos chegar:

A equação 3.34 tem duas variáveis independentes  $x$  (variável espacial) e  $t$  (variável temporal), suas soluções formam, no plano  $x - t$ , um conjunto de pontos com coordenadas  $(i\Delta x, n\Delta t)$ , em que  $n_j$  é o último nível de tempo, isto é,  $n_j = \frac{t_f - t_0}{\Delta t}$ .

Inicialmente, vamos discretizar a equação 3.34 na coordenada espacial, no ponto  $x_i$ :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_i = \alpha \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_i$$

Suponhamos que a derivada espacial é discretizada por diferenças centrais de segunda ordem. A equação anterior é escrita como:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_i = \alpha \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad 3.35$$

Precisamos, agora, discretizar 3.35 na coordenada temporal. A discretização temporal visa a fornecer relações entre valores de  $T$  (temperatura) em instantes sucessivos de tempo, por exemplo, atual  $t_n$  e futuro  $t_{n+1}$ , da mesma forma que possamos

calcular  $T^{n+1}$  em função de  $T^n$ . Essas relações são determinadas ao discretizarmos a equação 3.35 em um dos níveis de tempo  $n$  ou  $n + 1$ . Dependendo da escolha, vamos obter discretizações explícitas ou discretizações implícitas no tempo.

A discretização da equação 3.35 no nível de tempo  $n$ , fornece:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_i^n = \alpha \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad 3.36$$

Para relacionarmos os valores de  $T_i^{n+1}$  com os de  $T_i^n$ , vamos aproximar a derivada temporal por diferenças progressivas de primeira ordem:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_i^n = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + O(\Delta x)^2 \quad 3.37$$

Substituindo 3.37 em 3.36, vamos obter:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta t)(\Delta x)^2] \quad 3.38$$

onde  $O[(\Delta t)(\Delta x)^2]$ , é o erro local de truncamento (ELT).

Veja que o lado direito da expressão só depende dos valores conhecidos de  $T$  no nível de tempo  $n$ . Logo, a expressão 3.38 representa o método de Euler explícito, encontrado com frequência nos cursos de cálculos numéricos, na solução de equações diferenciais ordinárias.

### 3.6. DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DO CALOR BIDIMENSIONAL

Agora iremos discretizar as aproximações que desenvolvemos na seção 3.5.2, que vem ter o mesmo raciocínio da discretização da equação do calor unidimensional, porém, com acréscimo de mais uma variável espacial, e a equação passa a ter duas dimensões:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad 3.39$$

Em uma malha, podemos discretizar a equação 3.39 pelo método de Euler explícito e diferenças centrais de segunda ordem, vamos iniciar com as aproximações de diferenças centrais de segunda ordem para as variáveis espaciais:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left( \frac{T_{i-1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i+1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j-1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n}{(\Delta y)^2} \right) + O[(\Delta t)(\Delta x)^2(\Delta y)^2]$$

Agora vamos aproximar por diferenças progressivas de primeira ordem para a variável temporal e chegar na expressão discretizada da equação do calor:

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \left( \frac{T_{i-1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i+1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j-1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n}{(\Delta y)^2} \right) + O[(\Delta t)(\Delta x)^2(\Delta y)^2] \quad 3.40$$

Manipulando a expressão 3.40 para deixá-la na forma para implementar no programa:

$$T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n = \alpha \Delta t \left( \frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right) \Rightarrow$$

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n + \alpha \Delta t \left( \frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right) \Rightarrow$$

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n + \frac{\alpha \Delta t T_{i+1,j}^n}{(\Delta x)^2} - \frac{2\alpha \Delta t T_{i,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{\alpha \Delta t T_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{\alpha \Delta t T_{i,j+1}^n}{(\Delta y)^2} - \frac{2\alpha \Delta t T_{i,j}^n}{(\Delta y)^2} + \frac{\alpha \Delta t T_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2}$$

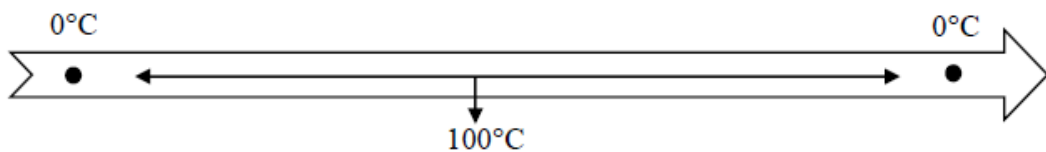
Chegamos na última expressão discretizada que nos interessava.

## 4. UM ESTUDO DE CASO: PROPAGAÇÃO DO CALOR EM 2D

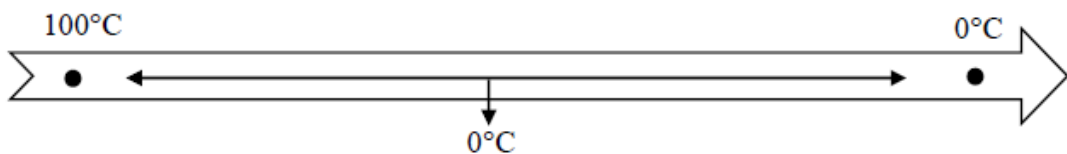
Este capítulo é destinado a apresentar os resultados obtidos da implementação da equação de difusão do calor no Matlab (um software de alta performance voltado para o cálculo numérico), no qual, faremos duas simulações computacionais, começando com a simulação da propagação do calor em uma dimensão, por conseguinte com a propagação do calor em duas dimensões, visto que serão simulações parecidas para ambos os casos.

### 4.1. MODELO DO ESTUDO DE CASO 1D

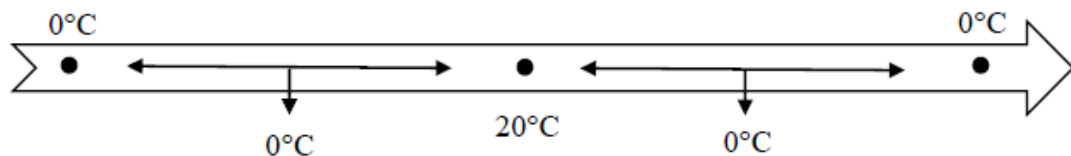
1º Caso:



2º Caso:



3º Caso:



### 4.2. SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL 1D

#### 4.2.1. CASO 1 (TEMPERATURA DE 100°C NOS PONTOS INTERNOS DA BARRA)

Nesta simulação computacional, foi usada uma barra homogênea (ou seja, coeficiente de difusividade térmica constante) de comprimento 50 centímetros e subdividida em 40 pontos. Nos pontos internos da chapa (condição inicial) temos uma temperatura de 100°C e nos pontos externos (condições de contornos) temos uma temperatura de 0°C. O tempo do processamento máximo foi de 500 segundos com 1500 passos no tempo (é uma grandeza adimensional, ou seja, é o número de pontos que vamos escolher num determinado tempo). Foram tomados para o coeficiente de difusividade os valores de 1.0, 0.5 e 1.5, respectivamente e calculadas as curvas de temperatura.

As curvas mostradas nas figuras representam isócronas (curvas com temperatura iguais em seus pontos) e foram selecionadas para quatro diferentes tempos computados pelo programa. As curvas de cores “azul”, “alaranjada”, “amarela” e “roxa” correspondem, respectivamente, aos valores de tempos iguais a 60s, 110s, 150s, 250s.

Como visto no início, a barra tem 50 centímetros e está subdividida em 40 pontos, alguém poderá perguntar porque 40 pontos? E não 10, 50 ou 100? É bem simples, o número de pontos está relacionado diretamente à continuidade das curvas, isto é, diminuindo-se o número de pontos as curvas ficam descontínuas, formadas por semi-retas, não teremos valores precisos, agora aumentando-se o número de pontos as curvas ficam mais contínuas, e por conseguinte teremos uma precisão melhor dos valores, e levando-se em consideração o valor de pontos tomados, implica-se diretamente no tempo que o computador gasta para executar o programa, daí a importância quando trabalhamos com simulações computacionais, que ao buscarmos soluções aproximadas, deveremos escolher um número de passos significativo para termos uma boa aproximação dos resultados. Para verificarmos o que foi dito acima, foi calculado as curvas de temperatura com a barra subdividida com apenas 10 pontos (Figura 3) e calculado as curvas de temperatura com a barra subdividida com 40 pontos (Figura 5), onde podemos perceber que na primeira figura as curvas estão descontínuas, meio retas, já na segunda figura notemos as curvas contínuas, aprimoradas.

Fixando um ponto na barra, de coordenada  $x=25\text{cm}$  e escolhida a curva de cor roxa, vemos que, para o valor do coeficiente de 1.0, a temperatura neste ponto é aproximadamente 47°C (Figura 4). Tomando-se agora o valor de 0.5 (barra menos

condutiva) a temperatura calculada é de aproximadamente 77°C (Figura 5), e finalmente, para o valor de 1.5 (barra mais condutiva), a temperatura é aproximadamente 29°C (Figura 6).

Nota-se nessa simulação computacional uma coerência com o fenômeno físico da difusão do calor em um meio unidimensional, pois, sendo o coeficiente de difusividade térmica da barra “k” um parâmetro físico responsável pela difusão da energia térmica (o calor) na barra, esta difusão será tanto mais rápida ou lenta quanto maior ou menor for o valor adotado para o k. A curva “de cor roxa” corresponde a um dado tempo de processamento, e para este tempo é escolhido um ponto no centro barra, vemos que a temperatura computada neste ponto foi de 77°C ao diminuir o valor de “k” para 0.5. Em outras palavras, a energia térmica demorou mais tempo para se difundir, comparada ao caso em que tomamos o valor de “k” de 1.0. Raciocínio análogo para o caso em que aumentamos o valor de “k” para 1.5, resultando em uma energia térmica mais rápida.

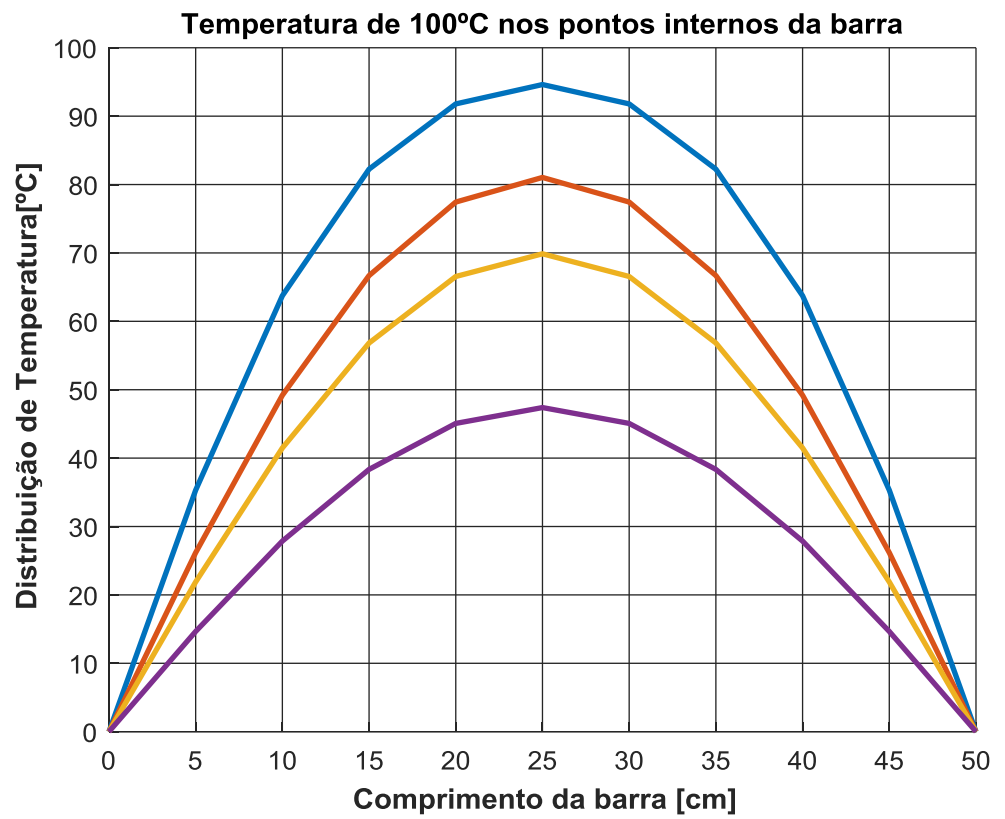


Figura 3 - Distribuição de temperatura nos pontos internos da barra subdividida com apenas 10 pontos. Coeficiente de difusividade térmica igual 1.0.

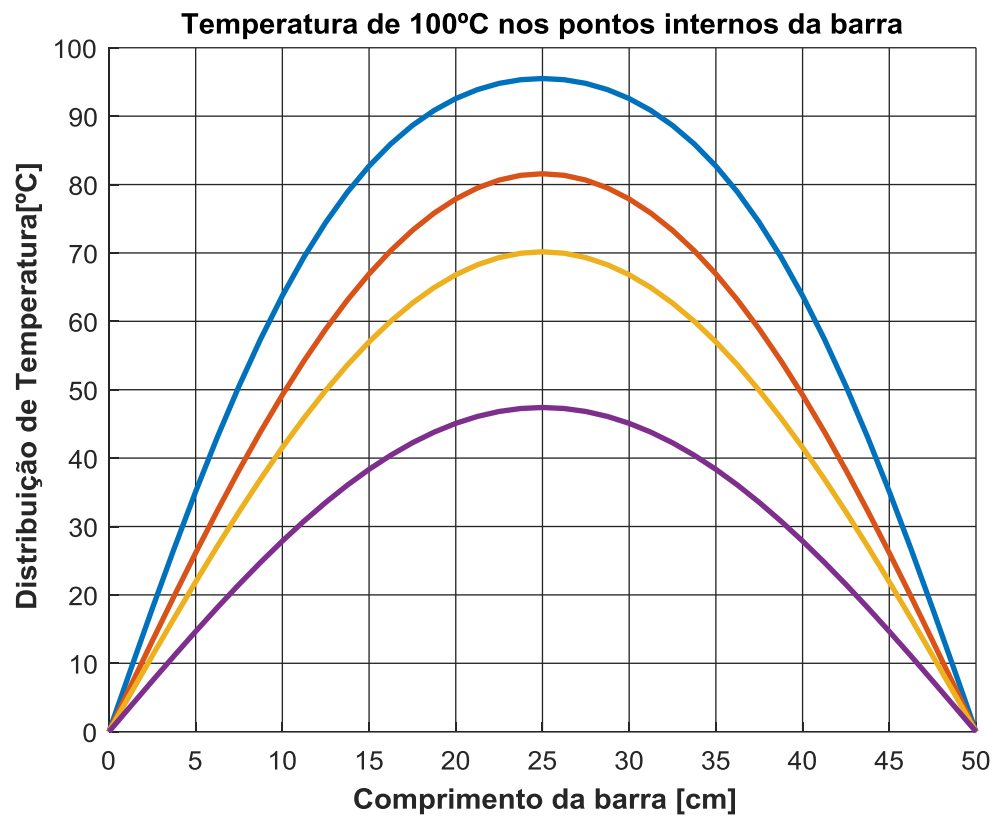


Figura 4 - Distribuição de temperatura nos pontos internos da barra subdividida com 40 pontos. Coeficiente de difusividade térmica igual 1.0.

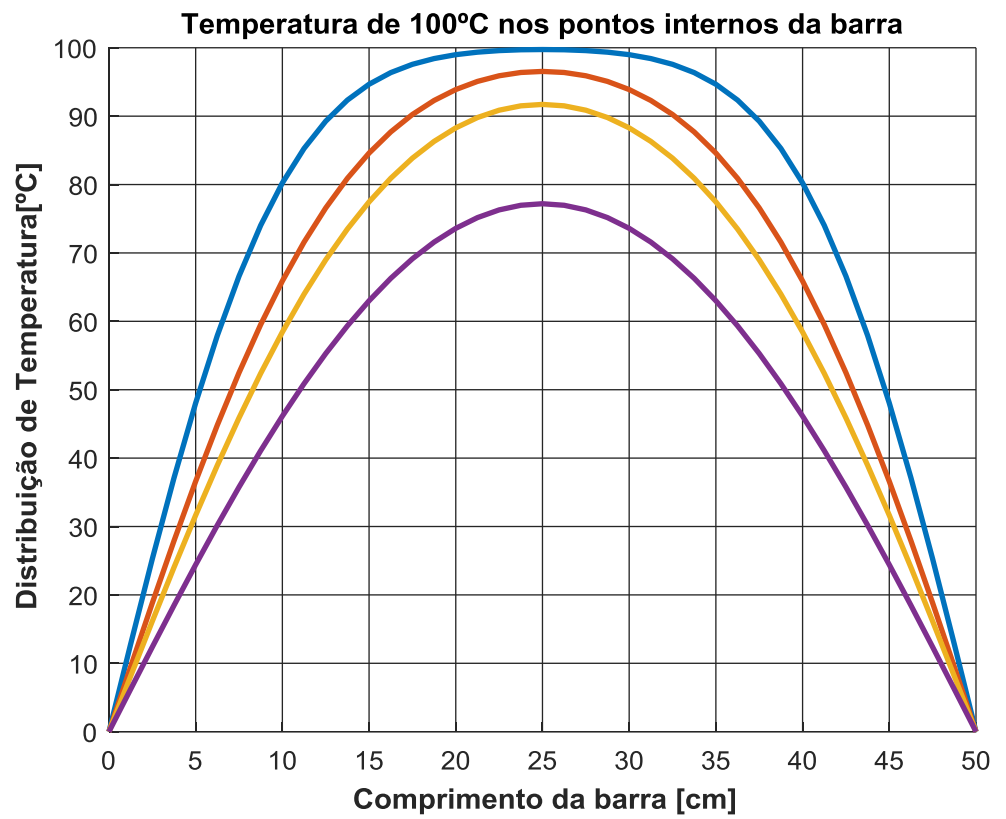


Figura 5 - Distribuição de temperatura nos pontos internos da barra subdividida com 40 pontos. Coeficiente de difusividade térmica igual 0.5,

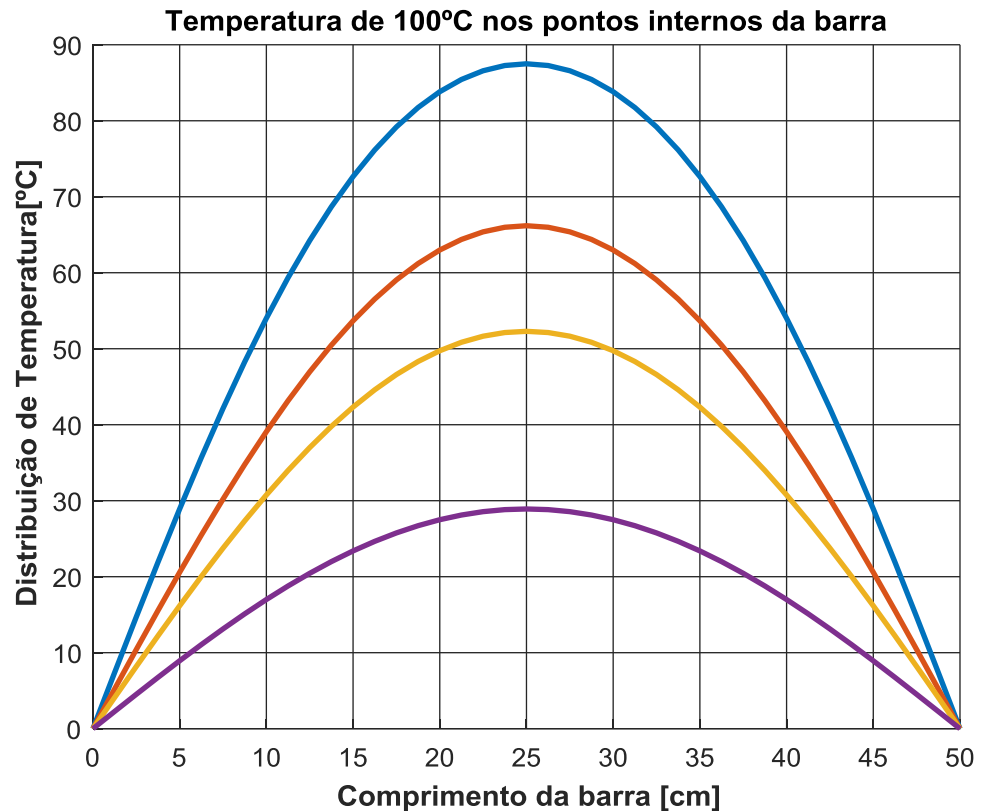


Figura 6 - Distribuição de temperatura nos pontos internos da barra subdividida com 40 pontos. Coeficiente de difusividade térmica igual 1.5.

#### 4.2.2. CASO 2 (TEMPERATURA DE 100°C NO LADO ESQUERDO DA BARRA)

Agora, iremos para a segunda simulação computacional que terá apenas algumas modificações em relação ao anterior, são elas: a temperatura nos pontos internos (condição inicial) e no lado direito (condições de contorno) da barra é de 0°C e no lado esquerdo (condições de contorno) da barra é de 100°C. O tempo de processamento é de 500s com passos no tempo igual a 1000. Onde foi determinado para o coeficiente de difusividade térmica o valor igual a 1.5 e finalmente foram calculadas as curvas de temperaturas.

Foi escolhido o mesmo ponto e curva da simulação computacional anterior, ou seja, com coordenada  $x=25\text{cm}$ , e curva de cor roxa, onde podemos perceber que para o valor do coeficiente de 1.5, a temperatura nesse ponto é aproximadamente 35°C, conforme figura abaixo:

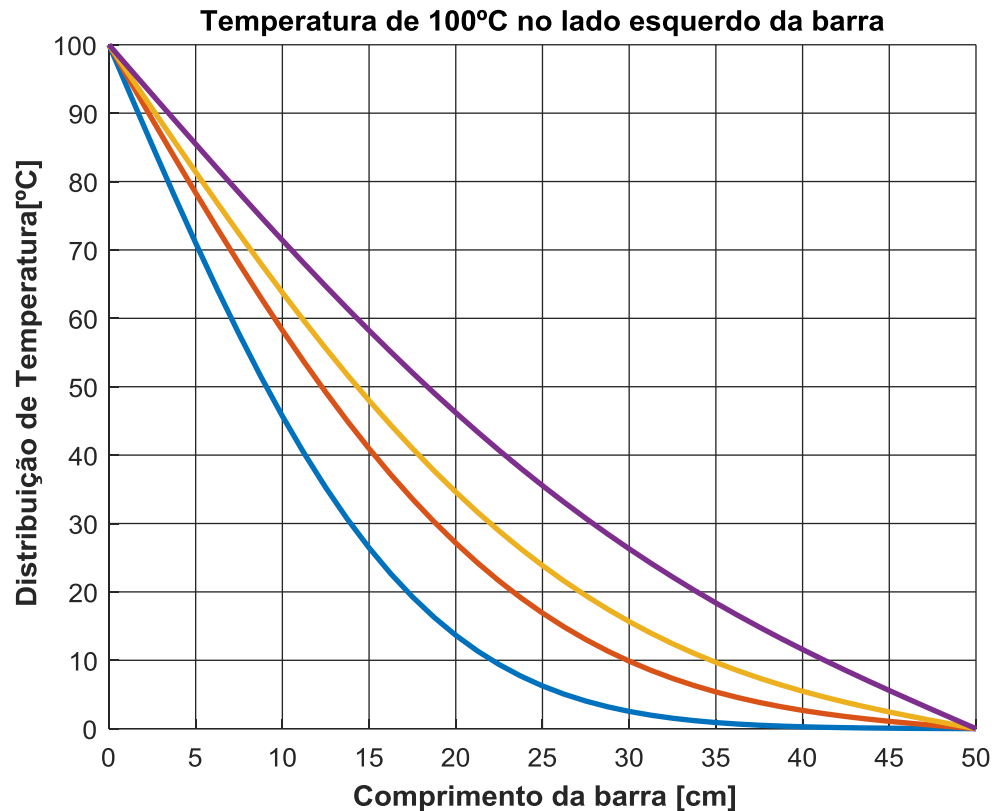


Figura 7 - Distribuição de temperatura no lado esquerdo da barra subdividida com 40 pontos. Coeficiente de difusividade térmica igual 1.5.

#### 4.2.3. CASO 3 (TEMPERATURA DE 20°C NO CENTRO DA BARRA)

Por fim, a simulação computacional que levamos em consideração as seguintes alterações: o comprimento da barra igual a 30 cm, com subdivisões iguais a 100 pontos. A temperatura no centro da barra igual a 20°C e nos pontos extremos igual a 0°C. O tempo de processamento foi de 200 segundos com passos no tempo igual a 1000. Foi determinado para o coeficiente de difusividade térmica o valor de 0.08 e calculadas as curvas de temperatura.

Onde foi escolhido o mesmo ponto e curva da simulação computacional anterior, com coordenada  $x=15\text{cm}$ , e a curva de cor roxa, onde podemos perceber que para o valor do coeficiente de difusividade térmica igual a 0.08, a temperatura nesse ponto é aproximadamente 0,5°C, conforme vemos na figura abaixo:

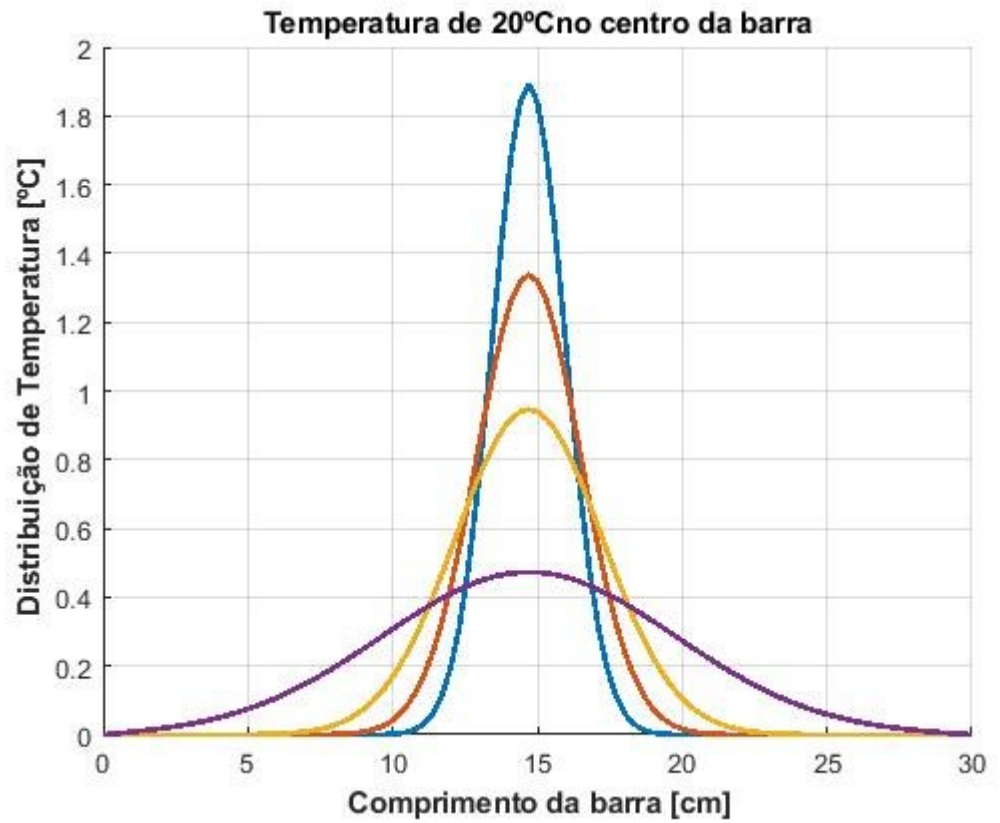
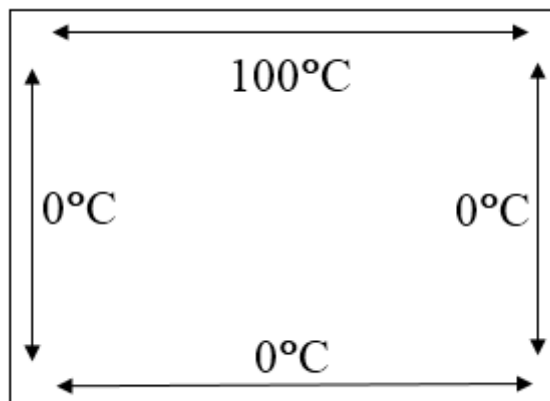


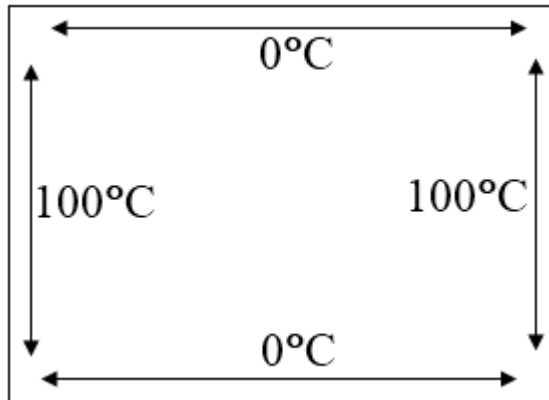
Figura 8 - Distribuição de temperatura no centro da barra subdividida com 100 pontos. Coeficiente de difusividade térmica igual 0.08.

### 4.3. MODELO DO ESTUDO DE CASO 2D

1º Caso:



2º Caso:



#### 4.4. SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL 2D

##### 4.4.1. CASO 1 (TEMPERATURA DE 100°C NO LADO SUPERIOR DA CHAPA)

Para simular a propagação do calor em um meio bidimensional foram escolhidas três simulações que serão em uma chapa plana, metálica e homogênea, ou seja, mantendo sempre o mesmo valor da difusividade térmica em toda a extensão da chapa. No qual o primeiro se dá da seguinte forma:

É usada uma chapa plana e metálica de comprimento e largura igual a 1 metro, subdivida em 31 pontos tanto na horizontal como na vertical. A temperatura no lado superior da chapa é igual a 100°C e no inferior é igual a 0°C, nos lados esquerdo e direito a temperatura também é igual a 0°C. O tempo de processamento foi de 100 segundos com discretização temporal igual a 1e-4. Onde foi determinado um coeficiente de difusividade térmica igual a 1.0.

Vale ressaltar que as figuras 10 e 12 são bidimensionais, apesar delas apresentarem três eixos, apenas dois deles são variáveis espaciais e o terceiro é a variável temporal.

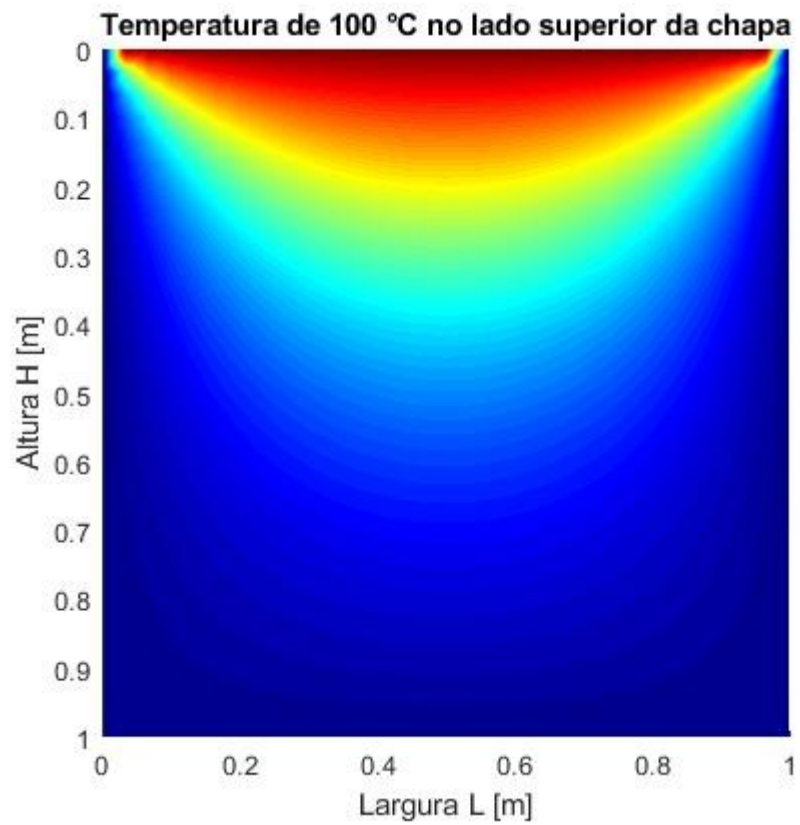


Figura 9 - Distribuição de temperatura no lado superior da chapa, subdividida com 31 pontos na horizontal e na vertical. Com coeficiente de difusividade térmica igual 1.0.

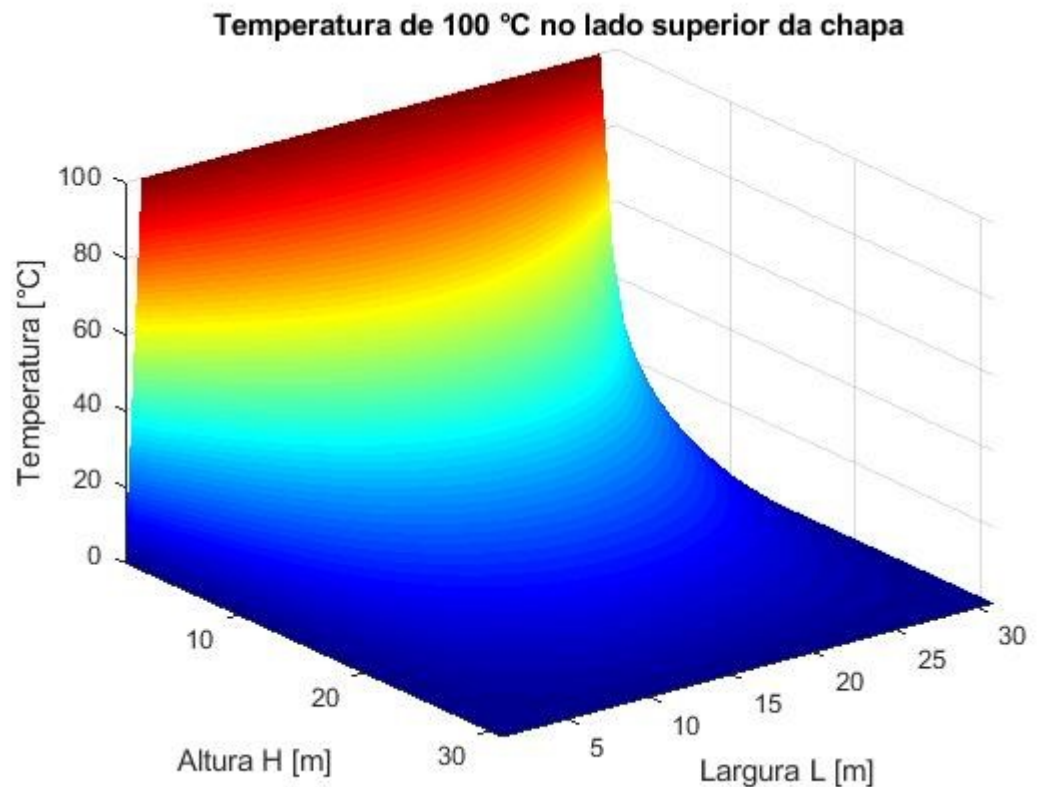


Figura 10 - Distribuição de temperatura no lado superior da chapa, subdividida com 31 pontos na horizontal e na vertical. Com coeficiente de difusividade térmica igual a 1.0.

#### 4.4.2. CASO 2 (TEMPERATURA DE 100°C NOS LADOS ESQUERDO E DIREITO DA CHAPA)

Iremos agora para a segunda simulação computacional, onde foi feita apenas uma alteração na configuração. É usada uma chapa plana e metálica de comprimento e largura igual a 1 metro, subdividida em 31 pontos tanto na horizontal como na vertical. A temperatura nos lados superior e inferior da chapa é igual a 0°C, nos lados esquerdo e direito a temperatura é igual a 100°C. O tempo de processamento foi de 100 segundos com discretização temporal igual a 1e-4. Onde foi determinado um coeficiente de difusividade térmica igual a 1.0.

Temperatura de 100 °C nos lados esquerdo e direito da chapa

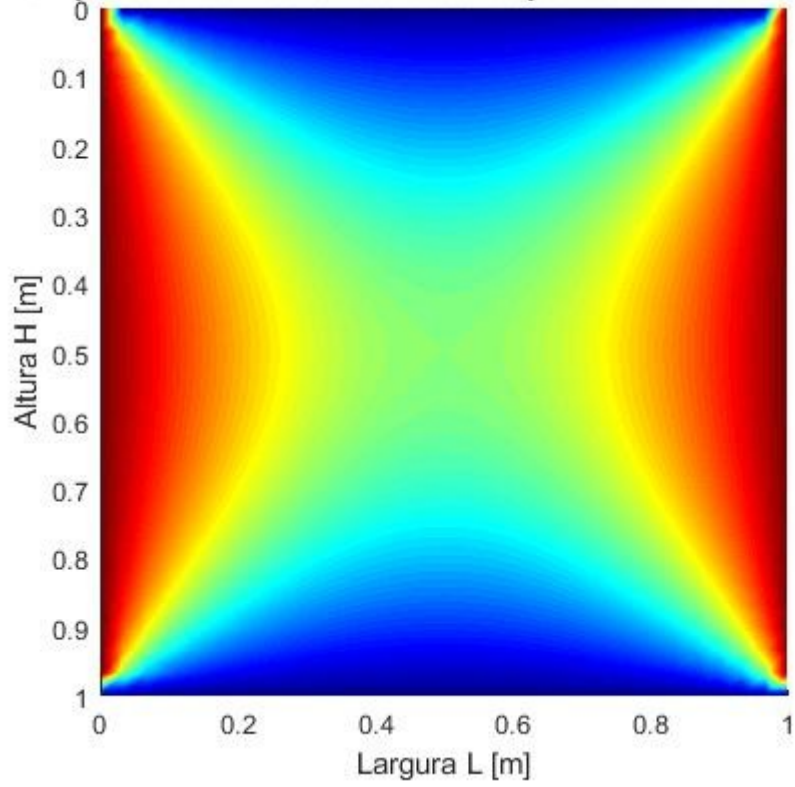


Figura 11 - Distribuição de temperatura nos lados esquerdo e direito da chapa subdividida com 31 pontos na horizontal e na vertical. Com coeficiente de difusividade térmica igual a 1.0.

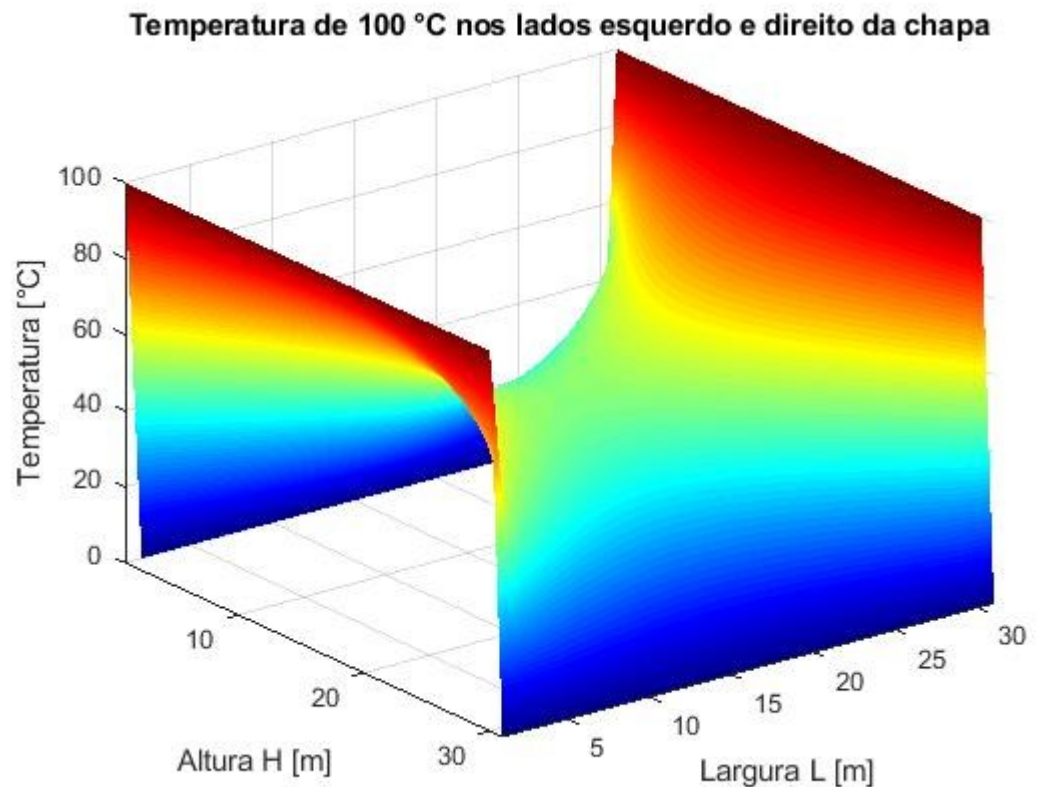


Figura 12 - Distribuição de temperatura nos lados esquerdo e direito da chapa, subdividida com 31 pontos na horizontal e na vertical. Com coeficiente de difusividade térmica igual a 1.0.

#### 4.4.3. CASO 3 (VARIANDO A PROPRIEDADE FÍSICA “K” DA CHAPA)

Finalmente iremos para a última simulação computacional, que consiste em variar a propriedade da chapa. Temos que, a temperatura no lado superior da chapa é igual a 100°C e no inferior igual a 0°C, nos lados esquerdo e direito a temperatura também é igual a 0°C. Com tempo máximo igual a 100 segundos e discretização igual a 1e-4. E o coeficiente de difusividade térmica na (Figura 13) é igual a 0.001.

Foi escolhido um ponto aproximadamente no centro da chapa, de coordenadas  $x=16$  e  $y=16$ , e plotada as curvas de temperaturas, onde selecionamos a curva de cor azul marinho, e verificamos uma temperatura de aproximadamente 19°C (Figura 13). Variando o coeficiente de difusividade térmica, que agora passa a ser 0.020, e escolhido o mesmo ponto  $x=16$  e  $y=16$ . E plotada as curvas de temperatura na qual também foi escolhida a curva de cor azul marinho, e

observamos que a temperatura no ponto escolhido é aproximadamente de 25°C (Figura 14). Conforme veremos a seguir:

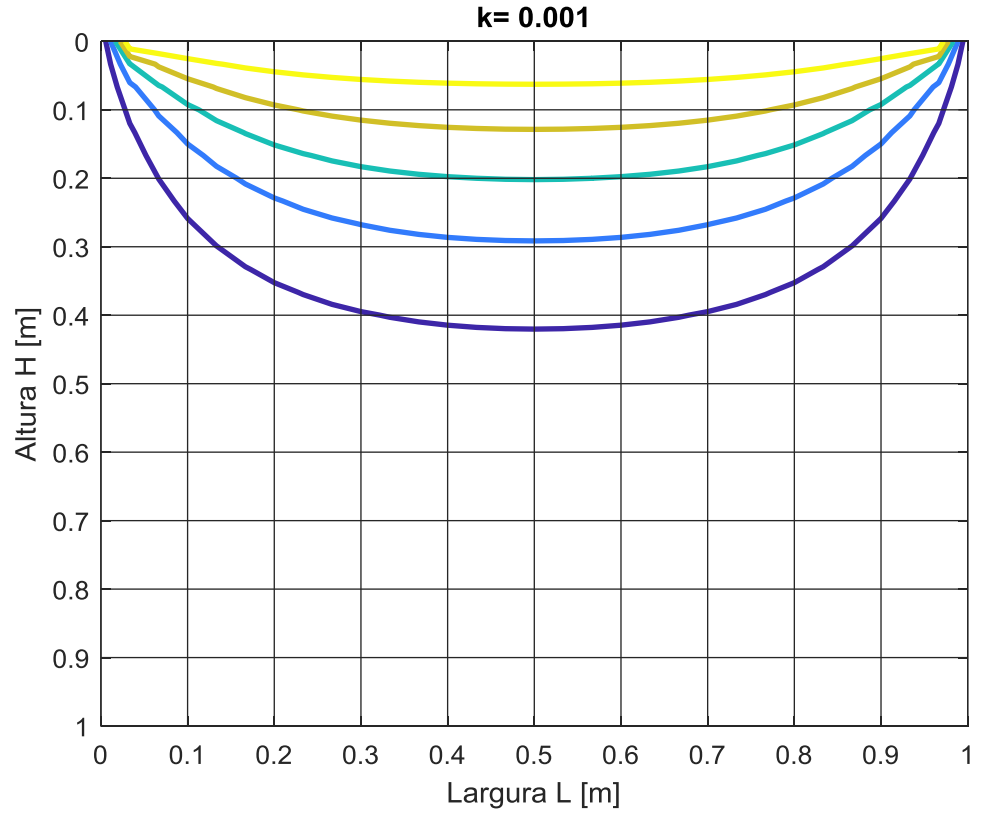


Figura 13 - Distribuição de temperatura no lado superior da chapa, subdividida com 31 pontos. Com coeficiente de difusividade térmica igual a 0.001.

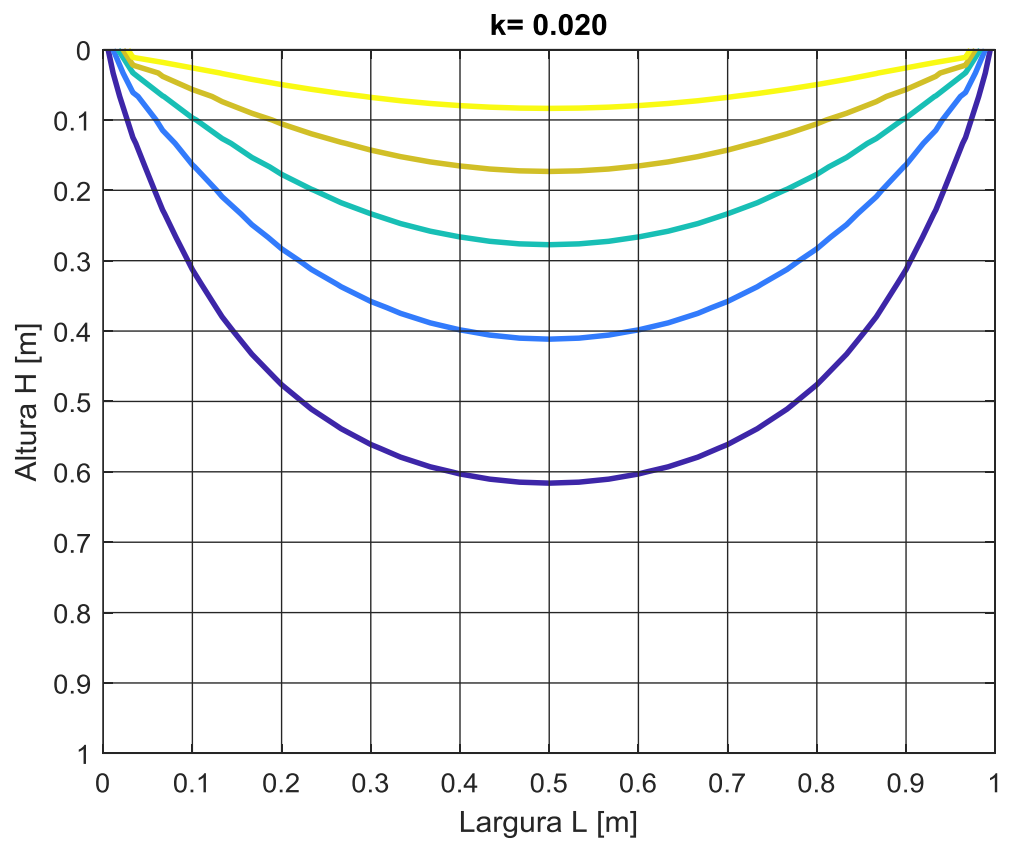


Figura 14 - Distribuição de temperatura nos lados esquerdo e direito da chapa subdividida com 31 pontos. Com coeficiente térmico igual a 0.001.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi apresentada a simulação de um fenômeno físico, no qual escolheu-se para a simulação a equação de difusão do calor em um meio bidimensional.

No capítulo 2, foi feito um breve estudo de equações diferenciais parciais que modelam a maioria dos fenômenos físicos, onde explicou-se os conceitos de EDPs e EDOs, a solução geral e particular, exemplificando-as. Também mostrou a ordem, o grau, a linearidade, homogeneidade, a dimensão, classificação, algumas aplicações.

No capítulo 3, trabalhou-se a solução numérica de equações diferenciais parciais através do método de diferenças finitas, que consistiu em discretizar as aproximações que foram substituídas na equação em questão, equação de difusão do calor. Para conseguirmos as aproximações, primeiro precisamos do Polinômio de Taylor de ordem  $N$ . Por conseguinte, foi utilizado o método de Euler, que é considerado o método mais simples para aproximação da solução de EDOs. O objetivo deste método é estimar o valor da solução em um ponto com uma determinada distância do ponto inicial.

Por fim o capítulo 4, que apresentou o estudo de caso, que primeiramente simulou-se a propagação do calor em uma dimensão e em seguida simulou-se a propagação do calor em duas dimensões por meio do software Matlab, em que se fez três casos distintos, variando a posição da temperatura, e o coeficiente de difusividade térmica (apenas no primeiro caso), onde escolheu-se um ponto e a curva de cor roxa para verificarmos a temperatura. Já a simulação do calor em duas dimensões, também foi feito três casos, em que os dois primeiros, variou a posição da temperatura, mas o coeficiente de difusividade permaneceu o mesmo. No terceiro e último caso o que o diferenciou dos dois primeiros foi coeficiente de difusividade, que assumiu um outro valor. Mas analisando ambas as simulações, tanto em uma dimensão quanto em duas dimensões, percebemos uma coerência com o fenômeno físico.

O desenvolvimento desse trabalho viabilizou o estudo de assuntos que não são vistos na graduação. Surgiram dificuldades por se tratar de algo novo, mas logo era sanada pelas pesquisas e leituras, o que o tornou ainda mais desafiador à medida em que avançava, pois foram dias e mais dias de estudos sobre a teoria. E finalmente quando acabei a parte teórica, veio a parte prática, a implementação computacional através do software Matlab, programação foi algo extremamente novo, nesse momento foram novos desafios e dificuldades, mas com persistência e força de vontade foram se esclarecendo no decorrer das pesquisas na área.

Este trabalho deixa como contribuição um breve e detalhado estudo sobre equações diferenciais parciais e o método de diferença finitas, aprofundado na equação de difusão do calor. E tendo um conhecimento básico de programação, para que futuramente alguém que se interesse por esse assunto possa fazer uma extensão deste trabalho para o caso tridimensional, o que deixará a simulação ainda mais realística ou possa fazer uma comparação deste resultado numérico com resultado analítico através da série de Fourier.

## REFERÊNCIAS

CUMINATO, J. A.; MENEGUETTE JÚNIOR, M. **Discretização de equações diferenciais parciais**: Técnicas de diferenças finitas. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

FORTUNA, A. O. **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Flúidos**: Conceitos Básicos e Aplicações. São Paulo: Edusp, 2000.

FONTANA, É. Métodos Numéricos em Engenharia Química. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química-PPGEQ, Universidade Federal do Paraná. 2018.  
Disponível: [http://fontana.paginas.ufsc.br/files/2018/03/parteI\\_metNum.pdf](http://fontana.paginas.ufsc.br/files/2018/03/parteI_metNum.pdf)

GUIDORIZZI, H, L. **Um curso de cálculo**, Vol.1, 5ª ed. São Paulo: LTC, 2001.

IORIO Jr, R. J.; IORIO, V. M. Fourier Analysis and Partial Differential Equations. Series: Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Publisher: Cambridge University Press, 2001. ISBN: 052162116X,9780521621168.

LIMA, E, L. **Curso de Análise**, Vol.1, 7ª ed. Rio de Janeiro: CNPq.

MAGALHÃES, Paulo M. D. Introdução As Equações Diferenciais Parciais.  
Disponível em: <http://professor.ufop.br/sites/default/files/freud/files/edp-cap1.pdf>

SODRÉ, Ulysses. Equações Diferenciais Parciais. Publicado em: 06 de maio de 2003.  
Arquivo: edp.tex.  
Disponível em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pdfs/edp.pdf>

## ANEXO 1

### 1. PROGRAMA MATLAB 1D

```
%UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
% Programa calor2d.m
% Descrição: Este programa resolve a equação da difusão do calor
% em uma chapa plana e metálica.
% Autora: Débora Duarte Costa

clear caall          % Limpa todas as variáveis
clc                  % limpa a tela
format long         % para muitas casas decimais no cálculo

% Dados para dimensão espacial em X
L = 1;              % comprimento da chapa
NL = 31;           % número de pontos na horizontal
dX = L/(NL-1);     % discretização espacial
x = [0:dX:L];      % intervalo espacial

% Dados para dimensão espacial em Y
H = 1;              % comprimento da largura
NH = 31;           % número de pontos na vertical
dY = H/(NH-1);     % discretização espacial
y = [0:dY:H];      % intervalo espacial

% Dados para dimensão temporal
T = 100;           % tempo máximo (em segundos)
dT = 1e-4;         % discretização temporal
NT = T/dT + 1;     % número de passos no tempo
t = [0:dT:T];      % intervalo temporal

% Parâmetros e constantes
K = 1;              % difusividade térmica
sigma1 = dT/(dX)^2;
sigma2 = dT/(dY)^2;

% Inicializando matriz de temperatura "T"
T = zeros(NH,NL);

% Condição inicial
T(1,:) = 100.0;    % temperatura no lado superior da chapa

% Condição de contorno
T(:,1) = 0.0;      % temperatura no lado esquerdo da chapa
T(:,NL) = 0.0;     % temperatura no lado direito da chapa
T(NH,:) = 0.0;     % temperatura no lado inferior da chapa

% Cálculo da matriz T
for n = 1:NT          % loop temporal

    for j = 2: NH-1    % loop espacial em X
        for i = 2: NL-1 % loop espacial em Y

            T(j,i) = (1-2*K*(sigma1+sigma2))*T(j,i) + ...
                    K*sigma1*( T(j+1,i)+ T(j-1,i)) + ...
                    K*sigma2*( T(j,i+1)+ T(j,i-1));
```

```

        end
    end

end

title('Temperatura de 100 °C no lado superior da chapa')
figure(1)
surface(x,y,T)
%contourf(x,y,T.*(T<1e4),11);
%colorbar
shading interp
colormap(jet)
axis tight;axis equal
xlabel('Largura L [m]')
ylabel('Altura H [m]')
axis ij

figure(2)
%contourf(x,y,T.*(T<1e4),11);
contourf(x,y,T,11);
%colorbar
shading interp
axis tight;axis equal
xlabel('Largura L [m]')
ylabel('Altura H [m]')
axis ij

figure(3)
surf(T)
shading interp
colormap(jet)
%colorbar
axis tight
xlabel('Largura L [m]')
ylabel('Altura H [m]')
zlabel('Temperatura [°C]')
%grid on;
axis ij
title('Temperatura de 100 °C no lado superior da chapa')

```

OBS: Como nem tudo na vida são flores, deixei de propósito uma pequena alteração que deixa as curvas descontínuas, então põe a cabeça para pensar e corrija a alteração, boa sorte!

## 2. PROGRAMA MATLAB 2D

```
%UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
% Programa calor2d.m
% Descrição: Este programa resolve a equação da difusão do calor
% em uma chapa plana e metálica.
% Autora: Débora Duarte Costa

clear caall          % Limpa todas as variáveis
clc                 % limpa a tela
format long        % para muitas casas decimais no cálculo

% Dados para dimensão espacial em X
L = 1;              % comprimento da chapa
NL = 31;           % número de pontos na horizontal
dX = L/(NL-1);     % discretização espacial
x = [0:dX:L];      % intervalo espacial

% Dados para dimensão espacial em Y
H = 1;              % comprimento da largura
NH = 31;           % número de pontos na vertical
dY = H/(NH-1);     % discretização espacial
y = [0:dY:H];      % intervalo espacial

% Dados para dimensão temporal
T = 100;           % tempo máximo (em segundos)
dT = 1e-4;         % discretização temporal
NT = T/dT + 1;     % número de passos no tempo
t = [0:dT:T];      % intervalo temporal

% Parâmetros e constantes
K = 1;             % difusividade térmica
sigma1 = dT/(dX)^2;
sigma2 = dT/(dY)^2;

% Inicializando matriz de temperatura "T"
T = zeros(NH,NL);

% Condição inicial
T(1,:) = 100.0;    % temperatura no lado superior da chapa

% Condição de contorno
T(:,1) = 0.0;      % temperatura no lado esquerdo da chapa
T(:,NL) = 0.0;     % temperatura no lado direito da chapa
T(NH,:) = 0.0;     % temperatura no lado inferior da chapa

% Cálculo da matriz T
for n = 1: NT      % loop temporal

    for j = 2: NH-1 % loop espacial em X
        for i = 2: NL-1 % loop espacial em Y

            T(j,i) = (1-2*K*(sigma1+sigma2))*T(j,i) + ...
                K*sigma1*( T(j+1,i)+ T(j-1,i)) + ...
                K*sigma2*( T(j,i+1)+ T(j,i-1));
```

```

        end
    end

end

title('Temperatura de 100 °C no lado superior da chapa')
figure(1)
surface(x,y,T)
%contourf(x,y,T.*(T<1e4),11);
%colorbar
shading interp
colormap(jet)
axis tight;axis equal
xlabel('Largura L [m]')
ylabel('Altura H [m]')
axis ij

figure(2)
%contourf(x,y,T.*(T<1e4),11);
contourf(x,y,T,11);
%colorbar
shading interp
axis tight;axis equal
xlabel('Largura L [m]')
ylabel('Altura H [m]')
axis ij

figure(3)
surf(T)
shading interp
colormap(jet)
%colorbar
axis tight
xlabel('Largura L [m]')
ylabel('Altura H [m]')
zlabel('Temperatura [°C]')
%grid on;
axis ij
title('Temperatura de 100 °C no lado superior da chapa')

```